Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos
Universidade de São Paulo

Cálculo I – Lista 8: Equações diferenciais

Prof. Responsável: Andrés Vercik

1. Mostre que $y = 2 + e^{-x^3}$ é uma solução da equação diferencial $y' + 3x^2 y = 6x^2$.

2. Verifique que $y = (2 + \ln x)/x$ é uma solução para o problema de valor inicial $x^2 y' + xy = 1 \qquad y(1) = 2$

3. Determine se a equação diferencial é linear.

   a) $y' + e^x y = x^2 y^2$

   b) $y + senx = x^3 y'$

   c) $xy' + \ln x - x^2 y + 0$

   d) $yy' = senx$

4. Resolva a equação diferencial.

   a) $y' + 2y = 2e^x$

   b) $y' = x + 5y$

   c) $y' - xy = x$

   d) $xy' + 2y = e^{x^2}$

   e) $y' \cos x = ysenx + sen2x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

   f) $1 + xy = xy'$

   g) $\frac{dy}{dx} + 2xy = x^2$

   h) $\frac{dy}{dx} = xsen2x + ytgx, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

   i) $(1+t)\frac{du}{dt} + u = 1 + t,\ t > 0$

   j) $xy' + xy + y = e^{-x}$

5. Resolva o problema de valor inicial.

   a) $y' + y = x + e^x,\ \ y(0) = 0$

   b) $t\frac{dy}{dt} + 2y = t^3,\ \ t > 0,\ \ y(1) = 0$

   c) $\frac{dv}{dt} - 2tv = 3t^2 e^{t^2},\ \ v(0) = 5$

   d) $(1 + x^2)y' + 2xy = 3\sqrt{x},\ \ y(0) = 2$

   e) $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = \cos x,\ \ y(\pi) = 0$

   f) $x\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x+1} = x,\ \ y(1) = 0,\ \ x > 0$

6. Resolva a equação diferencial.

a) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 1$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x}}{4y^3}$

c) $yy' = x$

d) $y' = xy$

e) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{te^t}{y\sqrt{1+y^2}}$

f) $y' = \dfrac{xy}{2\ln y}$

g) $\dfrac{du}{dt} = 2 + 2u + t + tu$

h) $\dfrac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$

7. Encontre a solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial dada.

a) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 1, \quad y(1) = 0$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+x}{xy}, \quad x > 0, \quad y(1) = -4$

c) $xe^{-t}\dfrac{dx}{dt} = t, \quad x(0) = 1$

d) $x + 2y\sqrt{x^2+1}\dfrac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) = 1$

e) $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2t + \sec^2 t}{2u}, \quad u(0) = -5$

f) $\dfrac{dy}{dt} = te^y, \quad y(1) = 0$

8. Encontre uma equação da curva que satisfaz $dy/dx = 4x^3 y$ e cujo intercepto y é 7.

9. Encontre uma equação da curva que passa pelo ponto (1,1) e cuja inclinação em (x,y) é y^2/x^3.

10. Uma população de protozoários se desenvolve com uma taxa de crescimento relativo constante de 0,7944 por membro por dia. No dia zero a população consiste em dois membros. Calcule o tamanho da população depois de seis dias.

11. Um habitante comum do intestino humano é a bactéria *Escherichia coli*. Uma célula dessa bactéria em um meio nutriente de divide em duas células a cada 20 minutos. A população inicial da cultura é de 60 células.
   a) Encontre a taxa de crescimento relativo.
   b) Encontre uma expressão para o número de células depois de t horas.
   c) Calcule o número de células depois de 8 horas.
   d) Calcule a taxa de crescimento depois de 8 horas.
   e) Quando a população alcançará 20.000 células?

12. Uma cultura de bactérias começa com 500 bactérias e cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho. Depois de 3 horas existem 8000 bactérias.
   a) Encontre uma expressão para o número de bactérias depois de t horas.
   b) Calcule o número de bactérias depois de 4 horas.
   c) Calcule a taxa de crescimento depois de 4 horas.
   d) Quando a população alcançará 30.000?

13. Uma cultura de bactérias cresce com uma taxa de crescimento relativo constante. A contagem era 400 depois de 2 horas e 25.600 depois de 6 horas.
   a) Qual era a população inicial da cultura?
   b) Encontre uma expressão para a população depois de t horas.
   c) Em que período de tempo a população duplica?
   d) Quando a população alcançará 100.000?

14. A tabela fornece estimativas da população mundial, em milhões, por dois séculos.

Ano	População	Ano	População
1750	728	1900	1608
1800	906	1950	2517
1850	1171		

   a) Use o modelo exponencial e os números da população em 1750 e 1800 para prever a população mundial em 1900 e 1950. Compare com os dados reais.
   b) Use o modelo exponencial e os dados populacionais para 1850 e 1900 para prever a população mundial em 1950. Compare com a população real.

15. Use o modelo exponencial e os dados populacionais para 1900 e 1950 para prever a população mundial em 1992. Compare com a população real de 5,4 bilhões em 1992 e tente explicar a discrepância.

16. (a) Para quais valores não nulos de k a função $y = \operatorname{sen} kt$ satisfaz a equação diferencial $y'' + 9y = 0$.
(b) Para aqueles valores de k, verifique que todos os membros da família de funções $y = A \operatorname{sen} kt + B \cos kt$ é também uma solução.

17. Para quais valores de r a função $y = e^{rt}$ satisfaz a equação diferencial $y'' + y' - 6y = 0$.