

# PMR 3302 - Sistemas Dinâmicos para Mecatrônica I

Tarcisio Coelho

1 de Março de 2020

# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Modelagem
- 3 Sist. de 2a. ordem
- 4 Sist. 1a. ordem
- 5 Espaço de estados
- 6 Linearização do modelo

# Introdução

- Aplicações
- Conceito de Sistema e seus elementos
- Variáveis de estado, entradas e saídas
- Variáveis de fluxo e esforço

# Aplicações



Figura : Setor aeroespacial

# Aplicações

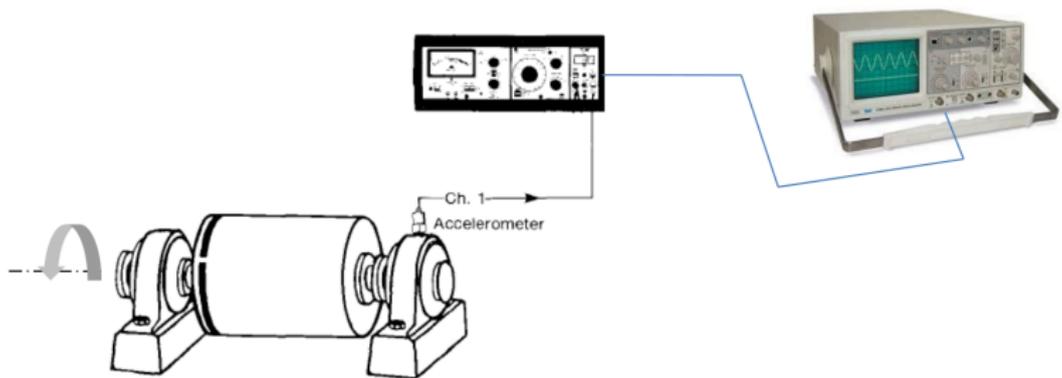


Figura : Instrumentação

# Aplicações



Figura : Automação

# Conceito de Sistema e seus elementos



Figura : Bicicleta e ciclista

# Conceito de Sistema e seus elementos

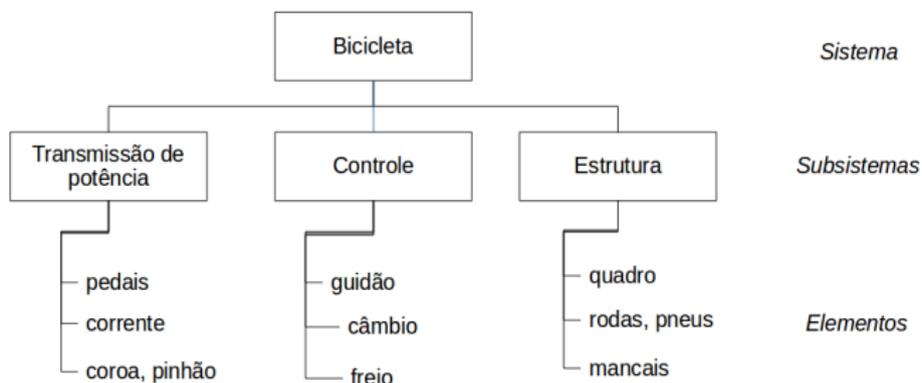


Figura : Bicicleta: sistema, subsistemas e elementos

# Variáveis de estado, entradas e saídas

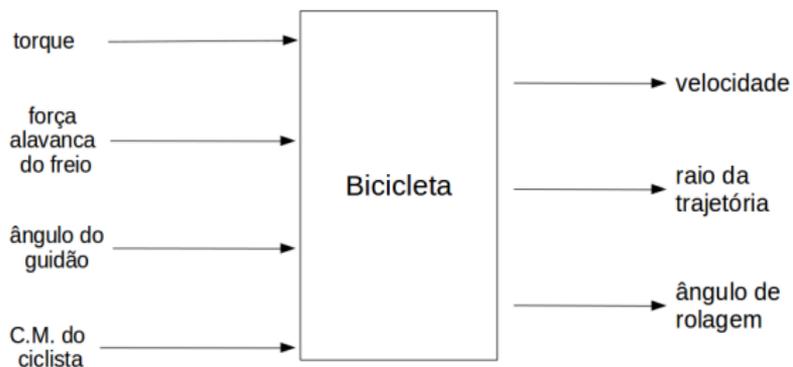


Figura : Bicicleta: variáveis de estado

# Variáveis de fluxo e de esforço

Variáveis de fluxo	Variáveis de esforço
velocidade intensidade de corrente vazão	força tensão elétrica pressão

# Modelagem

- Elementos, variáveis e equações constitutivas
- Elementos estáticos e dinâmicos
- Comportamento linear e não-linear
- Interpolação e extrapolação
- Interpolação linear (M.M.Q.)
- Equações Diferenciais de ordem  $n$  (0,1,2,...)
- Parâmetros concentrados e distribuídos
- Modelagem de sistemas mecânicos
- Exemplos

# Elementos, variáveis e equações constitutivas

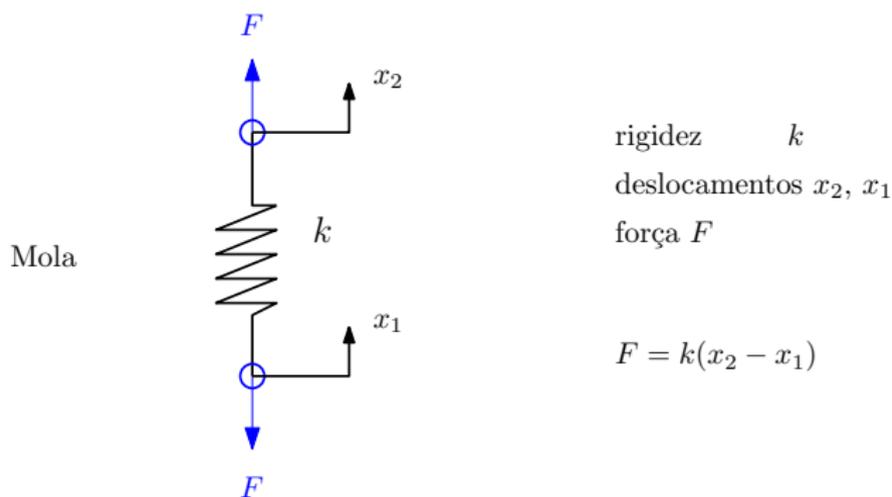


Figura : Elemento mecânico: mola

# Elementos, variáveis e equações constitutivas

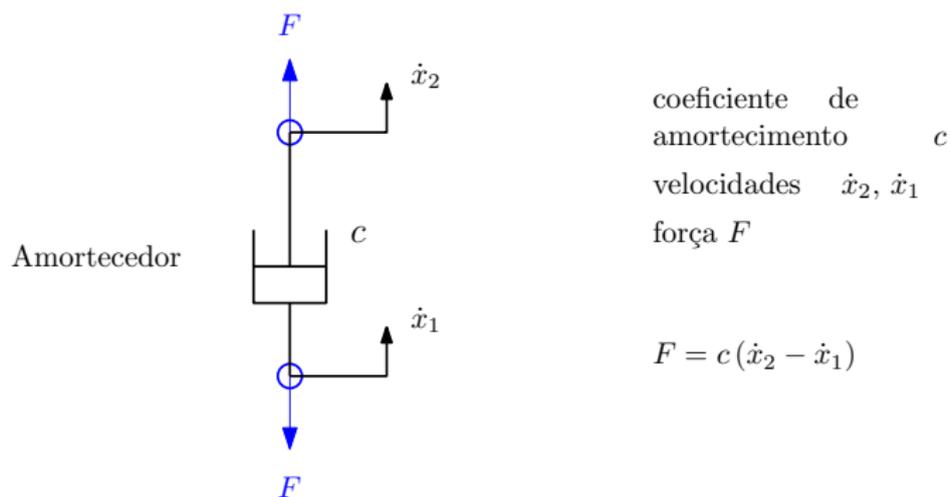


Figura : Elemento mecânico: amortecedor

# Elementos, variáveis e equações constitutivas

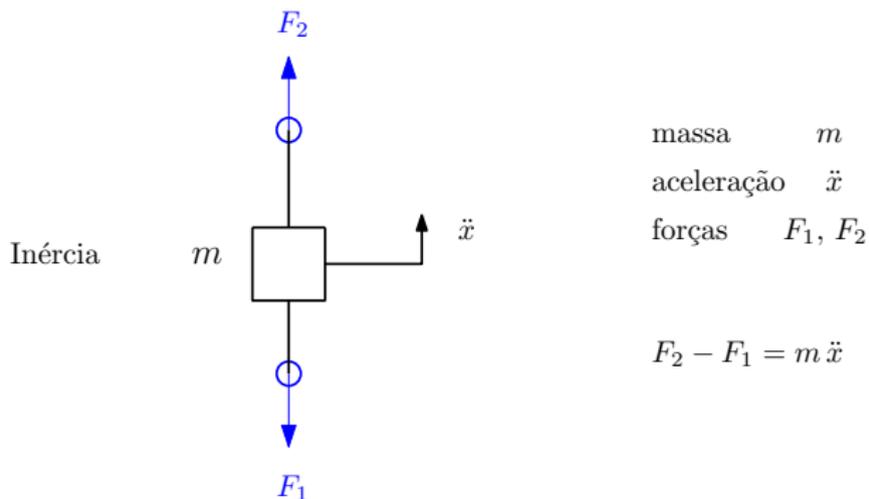


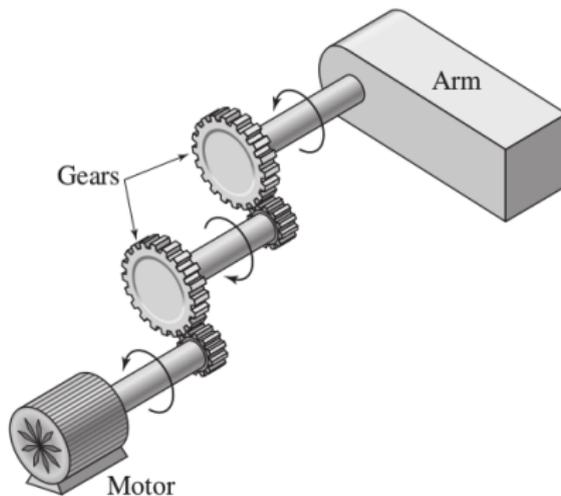
Figura : Elemento mecânico: inércia

# Elementos estáticos e dinâmicos

Elementos estáticos	Elementos dinâmicos
mola	inércia



**Figure 1.1.8** Mechanical drive for a robot arm joint.



**Figura :** Sistema eletromecânico [1]

# Equação constitutiva e sua linearidade

Figure 1.3.1 Measurement of beam deflection.

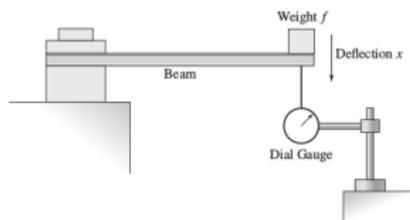


Figure 1.3.2 Plot of beam deflection versus applied force.

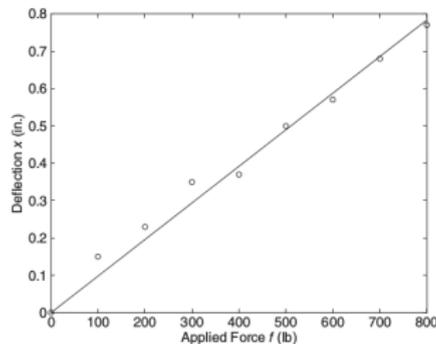


Figura : Experimento para determinação da rigidez de uma mola [1]

# Interpolação Linear: método dos mínimos quadrados [2]

$$N + Q x_1 = y_1$$

$$N + Q x_2 = y_2$$

$$\vdots$$

$$N + Q x_m = y_m$$

$$A_{m \times 2} \mathbf{w}_{2 \times 1} = \mathbf{y}_{m \times 1} \quad m > 2$$

# Interpolação Linear: método dos mínimos quadrados [2]

$$(A^T A) \hat{\mathbf{w}} = A^T \mathbf{y} \quad \hat{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} N \\ Q \end{bmatrix}$$

$$(A^T A) = \begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{bmatrix} \quad A^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{bmatrix}$$

# Equação diferencial ordinária de ordem n

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = u(t)$$

# Parâmetros concentrados e distribuídos

- Inércia
- Flexibilidade

## Parâmetros concentrados e distribuídos

- Sistemas contínuos: equação da linha elástica

$$M(x) = -EI(x) \frac{d^2y}{dx^2}$$

- Sistemas contínuos: vibração transversal

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

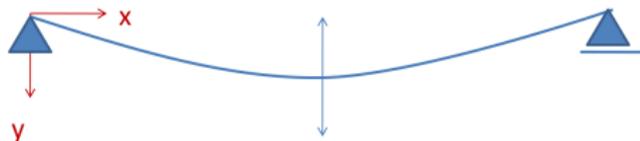


Figura : Viga bi-apoiada: eixos x e y

# Parâmetros concentrados e distribuídos [3]



$$\frac{P}{\delta_{max}} = K = \frac{3EI}{l^3}$$

$$\omega_n = (1,875)^2 \sqrt{\frac{EIg}{wl^4}} = \sqrt{\frac{3EI}{l^3} \cdot \frac{1}{0,23m}} = \sqrt{\frac{K}{0,23m}}$$

Figura : Viga engastada: deflexão máxima e 1a. frequência natural

## Parâmetros concentrados e distribuídos

- Viga engastada: equações de momento e linha elástica

$$M(x) = P(x - \ell) \quad y(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

- condições de contorno

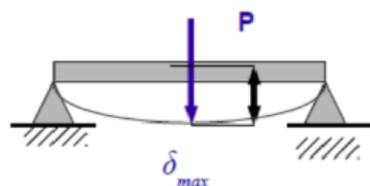
$$y(x=0) = 0 \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0 \quad \frac{d^2y}{dx^2}(0) = \frac{P\ell}{EI} \quad \frac{d^2y}{dx^2}(\ell) = 0$$

- coeficientes do polinômio

$$a_3 = 0 \quad a_2 = 0 \quad a_1 = \frac{P\ell}{2EI} \quad a_0 = -\frac{P}{6EI}$$

$$y(x) = \frac{P}{EI} \left( -\frac{1}{6}x^3 + \frac{\ell}{2}x^2 \right) \quad y(\ell) = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

# Parâmetros concentrados e distribuídos [3]



$$\frac{P}{\delta_{max}} = K = \frac{48 EI}{l^3}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{l^3} \cdot \frac{\pi^4}{m}} = \sqrt{\frac{48 EI}{l^3} \cdot \frac{1}{0,5 m}} = \sqrt{\frac{K}{0,5 m}}$$

Figura : Viga bi-apoiada: deflexão máxima e 1a. frequência natural

## Parâmetros concentrados e distribuídos

- Viga bi-apoiada: equações de momento e linha elástica

$$M(x) = \frac{P}{2}x \quad y(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

- condições de contorno

$$y(x=0) = 0 \quad \frac{dy}{dx}\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \quad \frac{d^2y}{dx^2}(0) = 0 \quad \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{Pl}{4EI}$$

- coeficientes do polinômio

$$a_0 = -\frac{P}{12EI} \quad a_1 = 0 \quad a_2 = \frac{P\ell^2}{16EI} \quad a_3 = 0$$

$$y(x) = \frac{P}{4EI} \left( -\frac{1}{3}x^3 + \frac{\ell^2}{4}x \right) \quad y(\ell/2) = \frac{P\ell^3}{48EI}$$

# Parâmetros concentrados e distribuídos

**Figure 19-1**

Model of a connecting rod using ANSYS finite-element software. (a) Meshed model; (b) stress contours. *Courtesy of S. Boedo (see footnote 1).*



Figura : Modelo por MEF: (a) malha; (b) tensões [4]

# Parâmetros concentrados e distribuídos

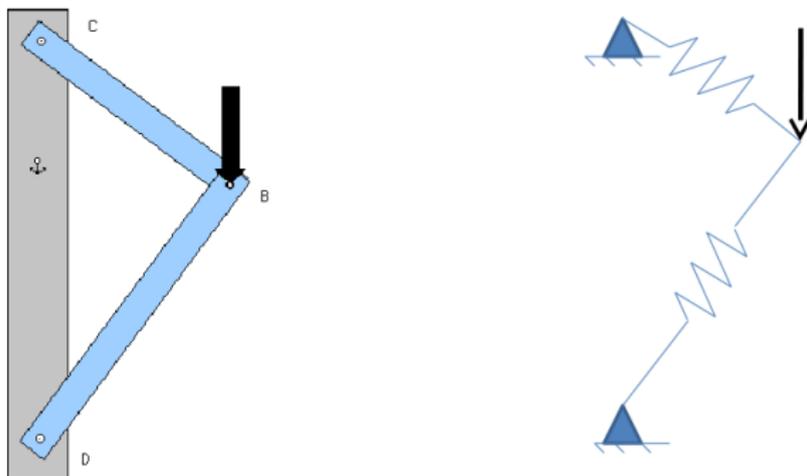


Figura : Sistemas multicorpos: molas de tração/compressão

# Parâmetros concentrados e distribuídos

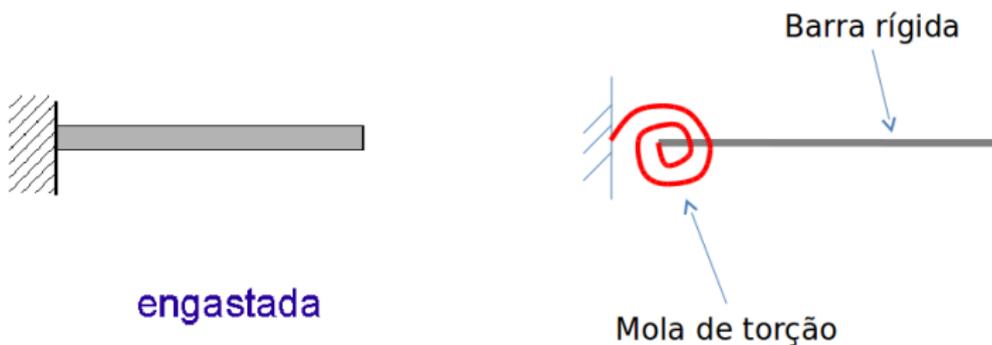


Figura : Sistemas multicorpos: mola de torção

# Parâmetros concentrados e distribuídos

Table 1.2. Examples of physical models and their corresponding equations of motion

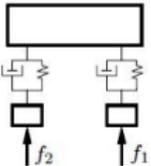
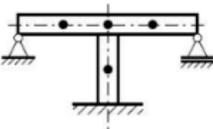
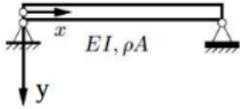
Multibody system (MBS)	Finite element system (FES)	Continuous system (COS)
		
$M\ddot{y}(t) + D\dot{y}(t) + Ky(t) = f(t)$	$M\ddot{y}(t) + Ky(t) = 0$	$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

Figura : Comparação entre modelos físicos, [5]

## Parâmetros concentrados e distribuídos [6]

- Sistemas multicorpos: análise da flexibilidade

$$\mathbf{F} = [\mathbf{K}]\Delta\mathbf{x} \quad [\mathbf{K}] = [\mathbf{J}]^T[\chi][\mathbf{J}]$$

$$[\chi] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

$$\Delta l = [\mathbf{J}] \Delta\mathbf{x}$$

# Parâmetros concentrados e distribuídos

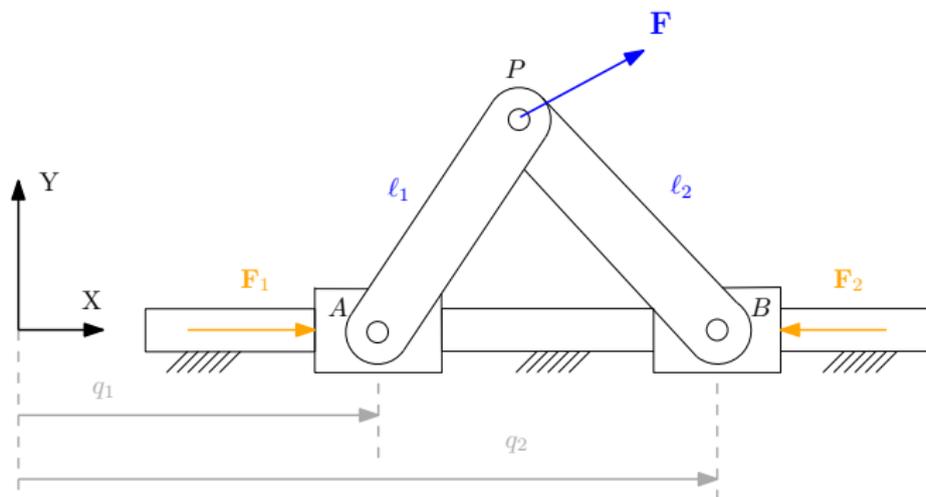


Figura : Exemplo: mecanismo PRRP

# Modelagem de sistemas mecânicos

- Newton-Euler

$$\sum \mathbf{F}_k = m_k \mathbf{a}_{G_k} \quad k = 1, \dots, N$$

$$\sum \mathbf{M}_k^{G_k} = [I_k] \dot{\boldsymbol{\omega}}_k + \boldsymbol{\omega}_k \times [I_k] \boldsymbol{\omega}_k$$

- Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^N (T_k - V_k)$$

# Modelagem de sistemas mecânicos

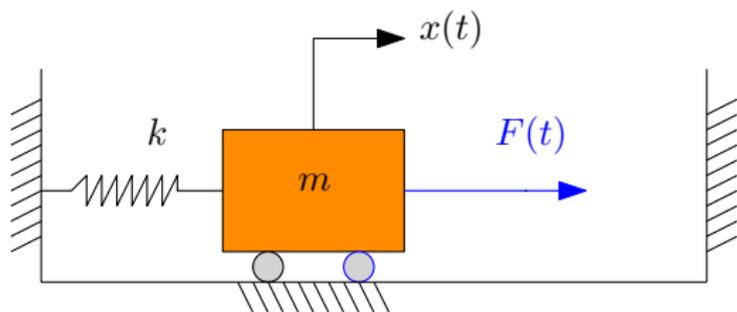


Figura : Sistema mecânico de 1 gdl

# Modelagem de sistemas mecânicos

- Newton-Euler

$$m\ddot{x} = F - kx$$

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

- Lagrange

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad V = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial(T - V)}{\partial x} = \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x}$$

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

## Sistemas de 2a. ordem

- Sistema mecânico 1gdL: massa-mola-amortecedor (degrau de força-peso)
- Sistema mecânico 1gdL: massa-mola-amortecedor (função impulso)
- Sistema mecânico 2gdL: 2 massas, modos de vibração
- Sistema mecânico 2gdL: Suspensão veicular, 1/4 de carro (degrau da pista)

# Sistemas de 2a. ordem

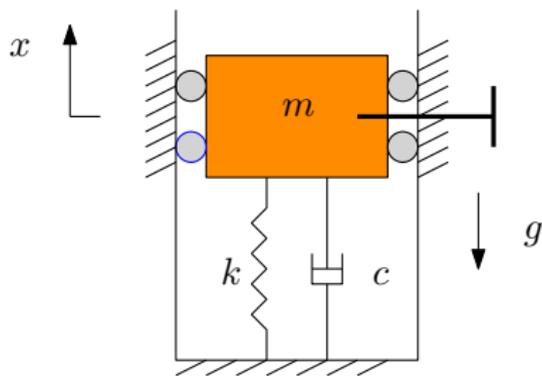


Figura : Sistema mecânico de 1 gdl

# Sistemas de 2a. ordem

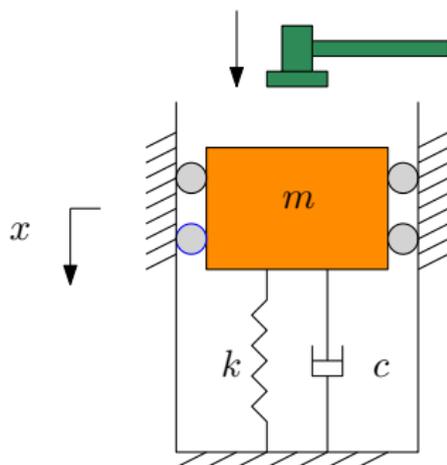


Figura : Função Impulso (entrada), sistema no plano horizontal

# Sistemas de 2a. ordem

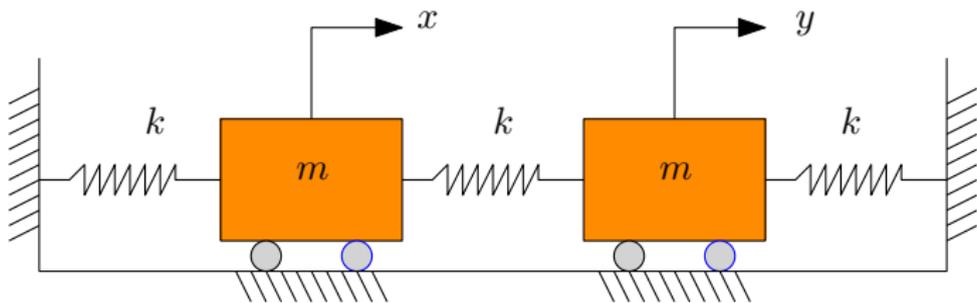


Figura : Sistema de 2 gdL

## Sistemas de 2a. ordem, 2 gdL

- condições iniciais:  $x(0) = -\delta = -y(0)$  e  $\dot{x}(0) = \dot{y} = 0$
- $z(t) = y(t) - x(t)$
- 
- Solução:  $z(t) = A \text{sen}(\omega_n t + \phi)$
- $A = 2\delta$ ,  $\phi = \pi/2$ ,  $\omega_n = \sqrt{3k/m}$
- 
- $y(t) = z(t)/2$ ,  $x(t) = -z(t)/2$

## Sistemas de 2a. ordem, 2 gdL

- condições iniciais:  $x(0) = \delta = y(0)$  e  $\dot{x}(0) = \dot{y} = 0$
- $z(t) = y(t) - x(t)$
- 
- Solução:  $z(t) = 0$ ,  $x(t) = y(t) = A \sin(\omega_n t + \phi)$
- $A = \delta$ ,  $\phi = \pi/2$ ,  $\omega_n = \sqrt{k/m}$

## Sistema de 2a. ordem, 2gdL

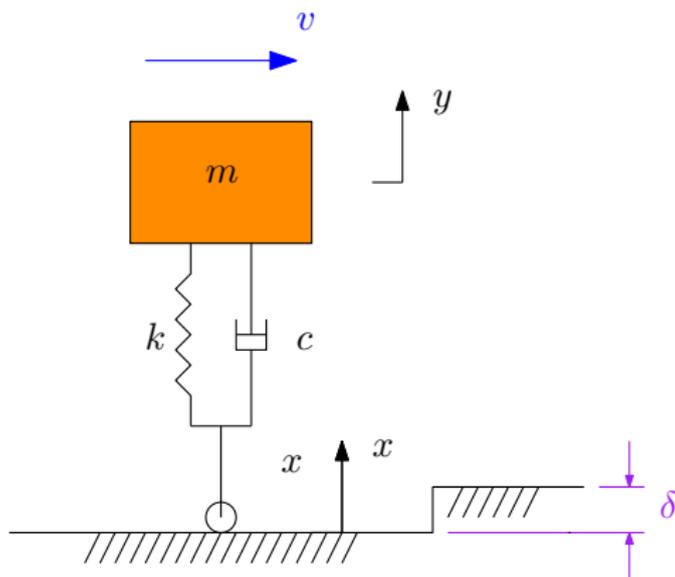


Figura : Sistema mecânico: suspensão veicular, 1/4 de carro

# Modelo: *Pêndulo invertido*

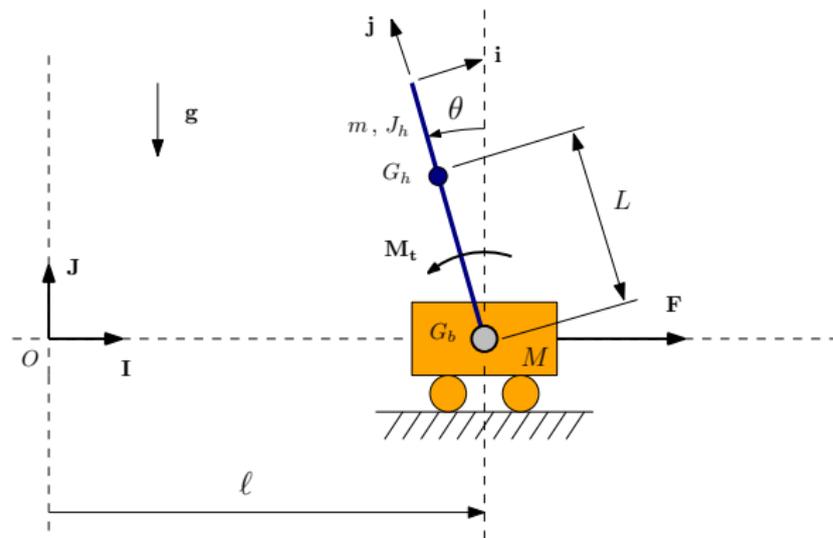


Figura : Pêndulo invertido

Modelo: *Pêndulo invertido*

$$T = T_{bloco} + T_{haste} = \frac{1}{2} M v_b^2 + \frac{1}{2} m v_h^2 + \frac{1}{2} J_h \omega_h^2$$

$$\mathbf{v}_b = \dot{\ell} \mathbf{l} \quad \mathbf{v}_h = \dot{\ell} \mathbf{l} - L \dot{\theta} \mathbf{i} \quad \boldsymbol{\omega}_h = \dot{\theta} \mathbf{k}$$

$$v_b^2 = \dot{\ell}^2 \quad v_h^2 = \dot{\ell}^2 + L^2 \dot{\theta}^2 - (2L \cos \theta) \dot{\ell} \dot{\theta} \quad \omega_h^2 = \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{\dot{\ell}^2}{2} (M + m) + \frac{\dot{\theta}^2}{2} (mL^2 + J_h) + \dot{\ell} \dot{\theta} (-mL \cos \theta)$$

## Modelo: *Pêndulo invertido*

$$V = mgL \cos \theta$$

$$Q_1 = \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial \ell} = F$$

$$Q_2 = \mathbf{M}_t^T \frac{\partial \theta \mathbf{k}}{\partial \theta} = M_t$$

Modelo: *Pêndulo invertido*

$$\frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{\ell}} = \dot{\ell}(M + m) - \dot{\theta} \cos \theta (mL) \qquad \frac{\partial(T - V)}{\partial \ell} = 0$$

$$\frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta} (mL^2 + J_h) - \dot{\ell} mL \cos \theta$$

$$\frac{\partial(T - V)}{\partial \theta} = mL \sin \theta (\dot{\ell} \dot{\theta} + g)$$

## Modelo: *Pêndulo invertido*

- 1a. equação

$$(M + m) \ddot{\ell} - (mL \cos \theta) \ddot{\theta} + mL \sin \theta \dot{\theta}^2 = F$$

- 2a. equação

$$(-mL \cos \theta) \ddot{\ell} + (mL^2 + J_h) \ddot{\theta} - mgL \sin \theta = M_t$$

## Modelo: *Pêndulo invertido*

$$\begin{bmatrix} M + m & -mL \cos \theta \\ -mL \cos \theta & mL^2 + J_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\ell} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - mL \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ M_t + mL \sin \theta g \end{bmatrix}$$

# Sistemas de 1a. ordem

- Circuito RC, Medidor de temperatura
- Obtenção das equações diferenciais
- Parâmetro constante de tempo

# Sistemas de 1a. ordem

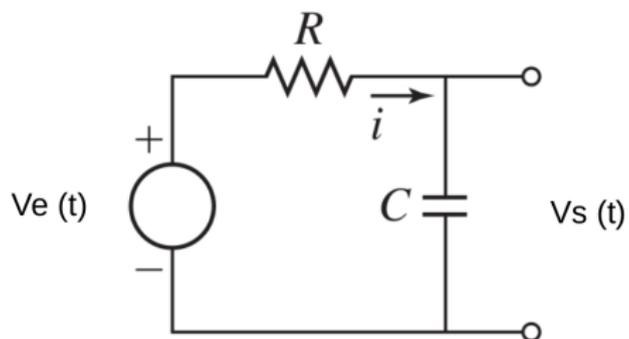


Figura : Circuito RC [1]

# Sistemas de 1a. ordem

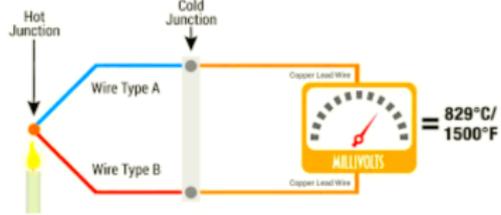


Figura : Termopar: transdutor de temperatura

# Sistemas de 1a. ordem: resposta à função degrau

$$V_s(t) = V (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\tau = RC$$

$$V_e(t) = V = \textit{constante}$$

$$V_s(0) = 0$$

$$T(t) = T_0 + (T_f - T_0) (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\tau = \frac{mc}{hA}$$

$$T_f = \textit{constante}$$

$$T_0 = T(0)$$

# Sistemas de 1a. ordem: resposta à função degrau

Figure 2.5.2 The step response  $x(t) = x_{ss}(1 - e^{-t/\tau})$ .

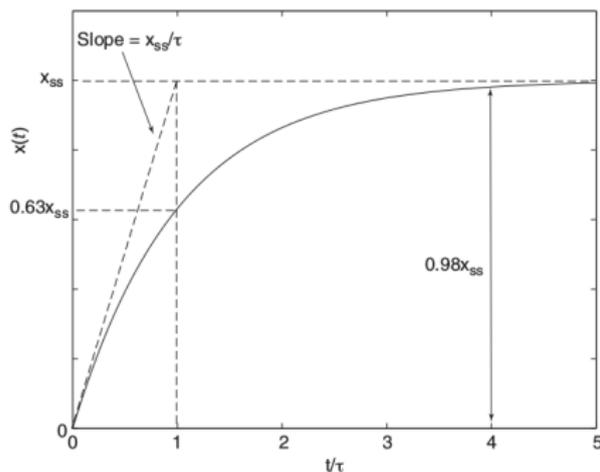


Figura : Sistemas de 1a. ordem: resposta à função degrau [1]

# Representação na forma de Espaço de Estados

- Exemplos e solução
- Autovalores e autovetores

# Representação na forma de Espaço de Estados [7]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

# Representação na forma de Espaço de Estados [7]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-T)} B\mathbf{u}(T) dT$$

## Representação na forma de Espaço de Estados [2]

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$e^{At} = I + (At) + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \dots$$

$$A = S \Lambda S^{-1}$$

# Representação na forma de Espaço de Estados [2]

- Autovalores

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- Autovetores

$$S = [ \mathbf{s}_1 \quad \mathbf{s}_2 \quad \dots \quad \mathbf{s}_n ]$$

## Representação na forma de Espaço de Estados [2]

$$e^{At} = I + (A)t + \frac{1}{2!}(A^2)t^2 + \frac{1}{3!}(A^3)t^3 + \dots$$

$$A^2 = S \Lambda S^{-1} S \Lambda S^{-1} = S \Lambda^2 S^{-1}$$

$$A^3 = S \Lambda^3 S^{-1}$$

## Representação na forma de Espaço de Estados [2]

$$e^{At} = I + (S \Lambda S^{-1}) t + \frac{1}{2!} (S \Lambda^2 S^{-1}) t^2 + \frac{1}{3!} (S \Lambda^3 S^{-1}) t^3 + \dots$$

$$S^{-1} e^{At} S = S^{-1} I S + (\Lambda) t + \frac{1}{2!} (\Lambda^2) t^2 + \frac{1}{3!} (\Lambda^3) t^3 + \dots$$

$$S^{-1} e^{At} S = I + (\Lambda) t + \frac{1}{2!} (\Lambda^2) t^2 + \frac{1}{3!} (\Lambda^3) t^3 + \dots = e^{\Lambda t}$$

$$e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$$

## Representação na forma de Espaço de Estados [2]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{x}_h(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) = S e^{\Lambda t} S^{-1}\mathbf{x}(0) = S e^{\Lambda t} \mathbf{c}$$

$$\mathbf{x}_h(t) = \mathbf{s}_1 e^{\lambda_1 t} c_1 + \mathbf{s}_2 e^{\lambda_2 t} c_2 + \dots + \mathbf{s}_n e^{\lambda_n t} c_n$$

# Linearização do modelo

- Modelo dinâmico Não-Linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

- Aproximação Linear de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  em  $(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_e)$$

# Linearização

- Ponto (estado) de Equilíbrio:  $\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) = \mathbf{0}$$

- Modelo dinâmico Linearizado

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_e)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) + \mathbf{B} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_e)$$

## Modelo: *Presas-Predador*

- Modelo

$$\dot{x} = f(x, y) = x - xy$$

$$\dot{y} = g(x, y) = xy - y$$

- sendo  $x$  número de presas (coelhos) e  $y$  número de predadores (raposas)

# Modelo: *Presas-Predador*

- Ponto de equilíbrio

$$\dot{x} = f(x_e, y_e) = 0$$

$$\dot{y} = g(x_e, y_e) = 0$$

- Equações

$$x_e - x_e y_e = 0$$

$$x_e y_e - y_e = 0$$

## Modelo: *Presa-Predador*

- Equações

$$x_e(1 - y_e) = 0$$

$$(x_e - 1)y_e = 0$$

- 2 pontos de equilíbrio

$$(x_e, y_e) = (0, 0)$$

e

$$(x_e, y_e) = (1, 1)$$

## Modelo: *Presa-Predador*

- Aproximação de  $f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_e, y_e) = 1 - y_e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_e, y_e) = -x_e$$

- Aproximação de  $g(x, y)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_e, y_e) = y_e \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_e, y_e) = x_e - 1$$

## Modelo: *Presa-Predador*

- Ponto de equilíbrio  $(x_e, y_e) = (0, 0)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_e, y_e) &= 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_e, y_e) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_e, y_e) &= 0 & \frac{\partial g}{\partial y}(x_e, y_e) &= -1\end{aligned}$$

- Ponto de equilíbrio  $(x_e, y_e) = (1, 1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_e, y_e) &= 0 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_e, y_e) &= -1 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_e, y_e) &= 1 & \frac{\partial g}{\partial y}(x_e, y_e) &= 0\end{aligned}$$

## Modelo: *Presa-Predador*

- Linearização em  $(x_e, y_e) = (0, 0)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{bmatrix}$$

- Linearização em  $(x_e, y_e) = (1, 1)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{bmatrix}$$

# Modelo: Pêndulo

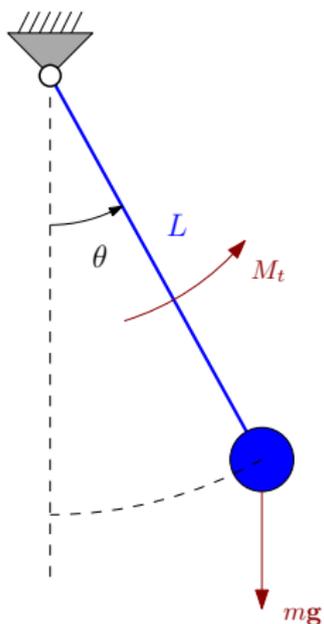


Figura : Pêndulo

# Modelo: *Pêndulo*

$$mL^2\ddot{\theta} + mgL \sin \theta = -c\dot{\theta} + M_t$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta - \frac{c}{mL^2} \dot{\theta} + \frac{1}{mL^2} M_t$$

## Modelo: *Pêndulo*

- Representação na forma de espaço de estados

$$\theta = x_1, \quad \dot{\theta} = \dot{x}_1 = x_2, \quad \ddot{\theta} = \dot{x}_2, \quad M_t = u$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin x_1 - \frac{c}{mL^2} x_2 + \frac{1}{mL^2} u$$

## Modelo: *Pêndulo*

- Equações

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u) = -\frac{g}{L} \sin x_1 - \frac{c}{mL^2} x_2 + \frac{1}{mL^2} u$$

- Pontos de equilíbrio

$$\dot{x}_1 = f_1(x_{1e}, x_{2e}, u_e) = x_{2e} = 0$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_{1e}, x_{2e}, u_e) = -\frac{g}{L} \sin x_{1e} - \frac{c}{mL^2} x_{2e} + \frac{1}{mL^2} u_e = 0$$

## Modelo: *Pêndulo*

- Ponto de equilíbrio  $(x_{1e}, x_{2e}, u_e) = (0, 0, 0)$
- Ponto de equilíbrio  $(x_{1e}, x_{2e}, u_e) = (\pi, 0, 0)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_e \begin{bmatrix} x_1 - x_{1e} \\ x_2 - x_{2e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_e (u - u_e)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{L} \cos x_1 & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix}_e \begin{bmatrix} x_1 - x_{1e} \\ x_2 - x_{2e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix}_e (u - u_e)$$

## Modelo: *Pêndulo*

- Linearização em  $(x_{1e}, x_{2e}, u_e) = (0, 0, 0)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix}}_B u$$

- Linearização em  $(x_{1e}, x_{2e}, u_e) = (\pi, 0, 0)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 - \pi \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix}}_B u$$

Modelo: *Pendulo invertido*

$$\ddot{\ell} = \frac{1}{\alpha_M + \text{sen}^2\theta} \left( \frac{F}{m} - L \text{sen}\theta \dot{\theta}^2 + g \text{sen}\theta \cos\theta \right)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\alpha_M L + L \text{sen}^2\theta} \left( \frac{F \cos\theta}{m} - L \text{sen}\theta \cos\theta \dot{\theta}^2 + (1 + \alpha_M)g \text{sen}\theta \right)$$

sendo  $\alpha_M = \frac{M}{m}$ ,  $J_h = 0$ ,  $M_t = 0$

## Modelo: *Pendulo invertido*

- Representação na forma de espaço de estados

$$l = x_1, \quad \dot{l} = x_2, \quad \theta = x_3, \quad \dot{\theta} = x_4 \quad F = u$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\alpha_M + \text{sen}^2 x_3} \left( \frac{F}{m} - L \text{sen} x_3 x_4^2 + g \text{sen} x_3 \text{cos} x_3 \right)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{\alpha_M L + L \text{sen}^2 x_3} \left( \frac{F \text{cos} x_3}{m} - L \text{sen} x_3 \text{cos} x_3 x_4^2 + (1 + \alpha_M) g \text{sen} x_3 \right)$$

## Modelo: *Pendulo invertido*

$$\dot{x}_1 = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{\alpha_M + \text{sen}^2 x_3} \left( \frac{F}{m} - L \text{sen} x_3 x_4^2 + g \text{sen} x_3 \cos x_3 \right)$$

$$\dot{x}_3 = f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_4$$

$$\dot{x}_4 = f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{\alpha_M L + L \text{sen}^2 x_3} \left( \frac{F \cos x_3}{m} - L \text{sen} x_3 \cos x_3 x_4^2 + (1 + \alpha_M) g \text{sen} x_3 \right)$$

## Modelo: *Pêndulo invertido*

- Linearização em  $(x_{1e}, x_{2e}, x_{3e}, x_{4e}, u_e) = (0, 0, 0, 0, 0)$

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) + B(\mathbf{u} - \mathbf{u}_e)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g}{\alpha_M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g(1+\alpha_M)}{\alpha_M L} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha_M m} & 0 & \frac{1}{\alpha_M m L} \end{bmatrix}^T$$

## Referências Bibliográficas

-  [1] Palm III, W.J. *System Dynamics*. McGraw Hill, 2014
-  [2] Strang, G. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley - Cambridge Press, 2009
-  [3] Juvinall, R. C. *Fundamentals of machine component Design*. Wiley, 1983
-  [4] Budynas, R. G.; Nisbeth J. K. *Shigley's Mechanical Engineering Design*. McGraw Hill, 2015

## Referências Bibliográficas

-  [5] Popp, K.; Schiehlen, W. *Ground Vehicle Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010
-  [6] Tsai, L.-W. *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. Wiley, New York, 1999
-  [7] Åström, K. J.; Murray, R. M. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press, New Jersey, 2009