


Análise de incerteza e propagação de erros

Prof. Dr. Gustavo Roque da Silva Assi
Prof. Dr. Pedro Cardozo de Mello

Definições

- ▶ **Valor de uma grandeza:** expressão quantitativa de uma grandeza específica por uma unidade de medida.
- ▶ **Medição:** conjunto de operações para se determinar o valor de uma grandeza.
- ▶ **Grandeza de influência:** é aquela que afeta o resultado da medição.
 - P.ex.: a temperatura do micrômetro afetará a medição do comprimento de um parafuso.

Definições

- ▶ **Exatidão:** aproximação entre o valor de uma medição e o valor verdadeiro (desconhecido).
 - ▶ **Repetitividade:** aproximação dos resultados de medições sucessivas efetuadas nas mesmas condições.
 - ▶ **Reprodutibilidade:** aproximação dos resultados de medições efetuadas em condições diferentes.
- 


Definições

- ▶ **Incerteza da medição:** parâmetro associado ao resultado de uma medição que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos à grandeza medida.
 - Pode ser um desvio padrão, a metade de um intervalo de confiança, etc.
- ▶ **Erro da medição:** diferença entre o resultado de uma medição e o valor verdadeiro da grandeza medida (desconhecido).

NÃO CONFUNDA OS TERMOS ERRO E INCERTEZA

ERRO é a diferença entre um valor medido e o valor verdadeiro de uma grandeza. **INCERTEZA** é a quantificação da dúvida sobre o resultado da medição.

Com expressar a incerteza

- ▶ O resultado de uma medição só está completo quando acompanhado da informação sobre sua incerteza.
 - ▶ A expressão da incerteza é necessária para decidirmos se o resultado é adequado para seu propósito e consistente com outros resultados similares.
 - ▶ Não importa quão exato um instrumento de medição possa ser considerado, as medições estarão sempre sujeitas a uma certa quantidade de incerteza.
- 

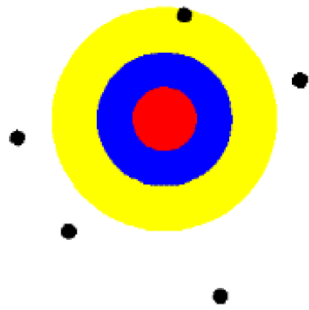
Incerteza

- ▶ Genericamente uma grandeza física medida é apenas uma estimativa do valor real. Assim, o resultado da medição deve sempre estar acompanhado do valor declarado da incerteza.
- ▶ A incerteza pode ser obtida por parcelas agrupadas em duas categorias de solução:
 - Tipo A – Avaliada por método estatístico;
 - Tipo B – Avaliada por outros meios;

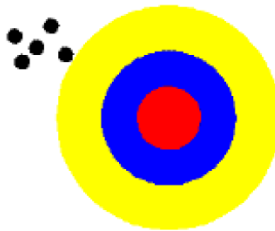
$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Resultado da medição = Valor medido \pm Incerteza da medição

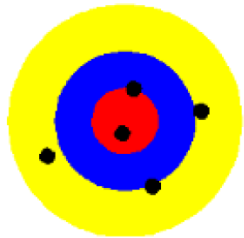
Exatidão x Precisão



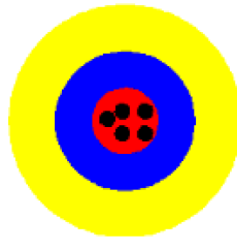
Caso 1 – Reduzida precisão.
Reduzida exactidão.



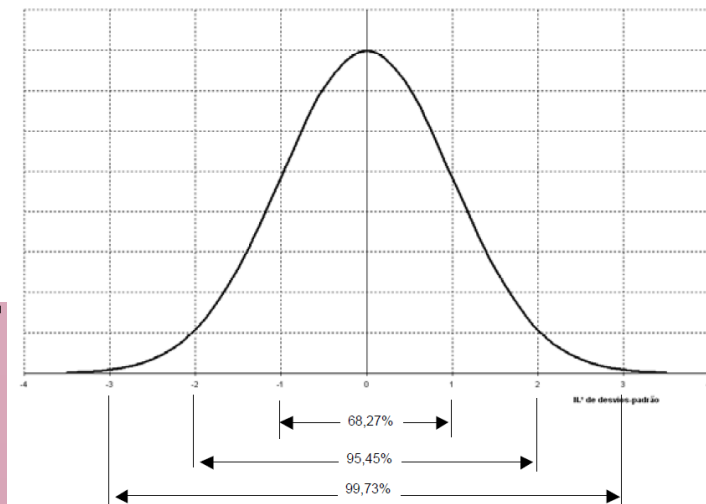
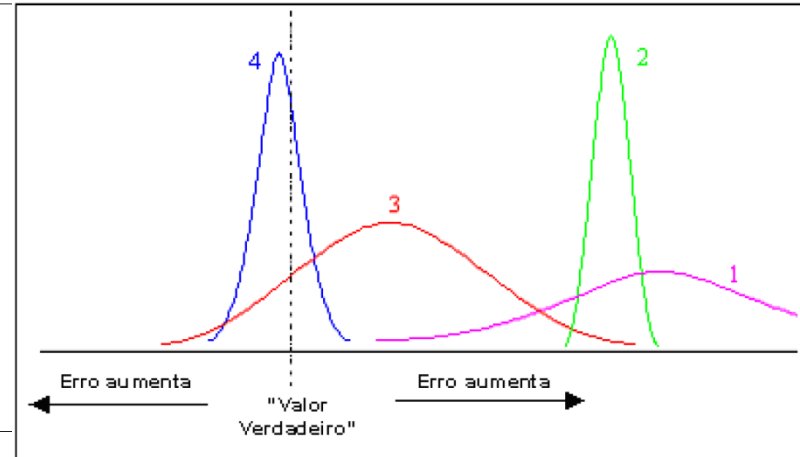
Caso 2 – Elevada precisão.
Reduzida exactidão.



Caso 3 – Reduzida precisão.
Alguma exactidão.



Caso 4 – Elevada precisão.
Elevada exactidão.



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Exatidão é um termo qualitativo que expressa o “grau de concordância entre um valor medido e um valor verdadeiro de um mensurando”, enquanto precisão, o “grau de concordância entre indicações ou valores medidos, obtidos por medições repetidas” representa a dispersão dos resultados das medições. Sempre haverá uma incerteza na medição, mesmo quando as medições são precisas e exatas.

Com expressar a incerteza

Para expressar a incerteza, devemos avaliar quanto possível são os erros associados com esta medição.

- ▶ P.ex.: Podemos dizer que uma barra de aço tem comprimento de 200mm, mais ou menos 1 mm, num nível de confiança de 95%.
- ▶ Escrevemos assim:
(200±1)mm com nível de confiança de 95%
- ▶ Isto significa que temos 95% de certeza que o comprimento da barra varia entre 199 e 201mm.

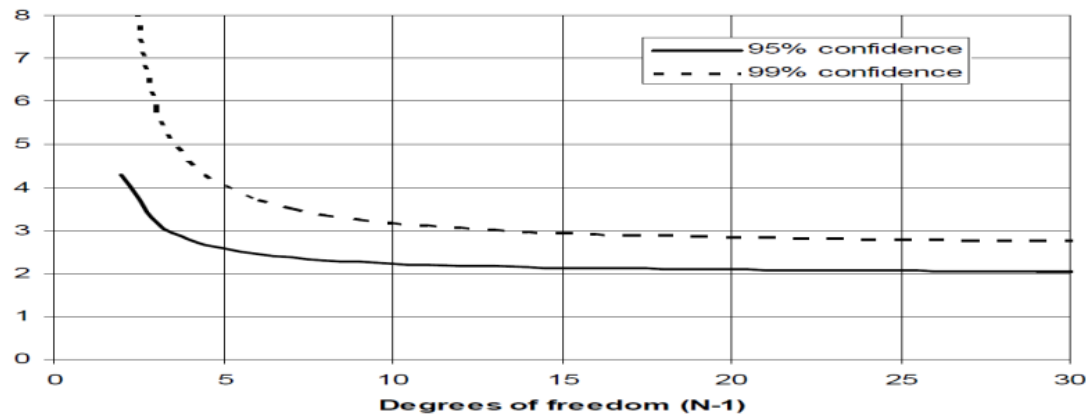
No exemplo da barra de aço

- ▶ (200 ± 1) mm com nível de confiança de 95%
 - Valor medido: 200mm
 - Incerteza: ± 1 mm (ou 0,5%)
 - Confiança: 95%
 - Uma medida realizada que obteve valor 200,5mm
 - Está dentro da faixa de incerteza
 - Tem erro de 0,5mm para mais

- ▶ **Mas como obter estes valores?**

Incerteza Tipo A

- ▶ Ela pode ser avaliada através de métodos estatísticos para tratamento de dados.
- ▶ Tipos básicos:
 - Obtenção do desvio padrão da média de observações independentes – Gaussiana.



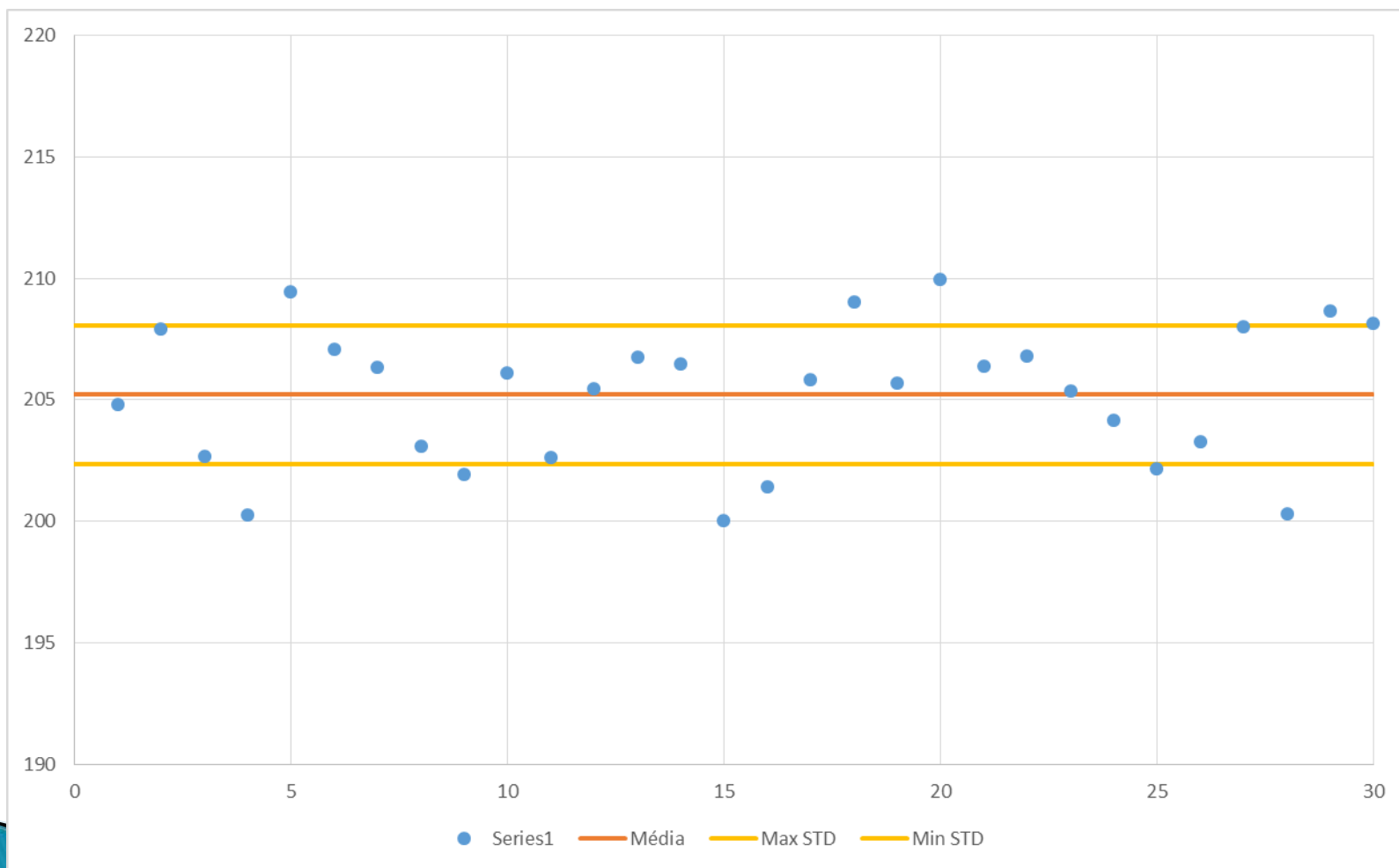
- Curvas analíticas ajustadas por mínimos quadrados usando dados experimentais para obtenção de seus desvios – padrão: Bias x Offset

Incerteza Tipo B

- ▶ Normalmente faz uso de dados fornecidos ou pré processados anteriormente:
 - Medições Anteriores
 - Calibrações e certificados padronizados
 - Respostas e comportamento dos instrumentos
 - Especificações de fabricantes
 - Dados de terceiros
 - Procedimento de operação / execução
 - Resolução mínima: $L(m)$ ou $t(s)$

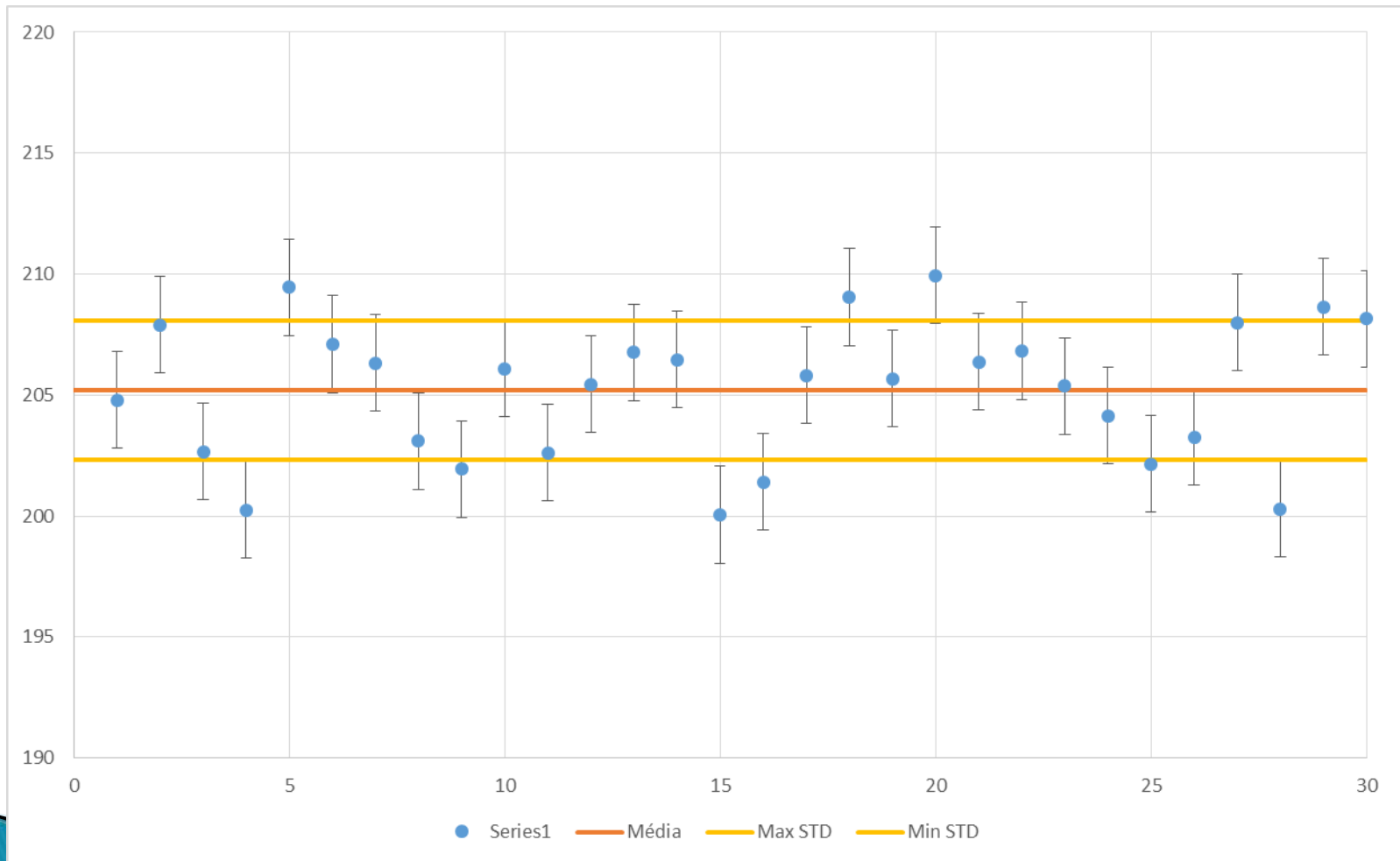
Tipo A

Valor = $MED \pm DESV$
Valor = $(205,2 \pm 2,9)$ mm



Tipo A e B


Valor = $MED \pm DESV$
Valor = $(205,2 \pm 2,9)$ mm



Incertezas do Tipo B

- ▶ Dependem...
 - Sensor
 - Instrumento
 - Técnica
 - Método
 - Usuário
 - Condições ambientais

Termos importantes

- ▶ **Fundo de escala:** “ordem de grandeza do medidor”
 - ▶ **Resolução:** “menor valor que pode ser medido”
 - ▶ **Exatidão (acurácia):** “mede próximo do valor verdadeiro”
 - ▶ **Precisão:** “mede sempre a mesma coisa”
 - ▶ **Calibração:** “confiança de que se mede dentro da faixa de incerteza”
- 

Incertezas do Tipo B

Normalmente, a incerteza associada à uma medição será...

- ▶ Metade da resolução analógica
 - Régua graduada em mm: incerteza de 0,5mm
- ▶ Último dígito de um marcador digital
 - Termômetro digital que mede 23,8°C: incerteza de 0,1°C

Relembrando estatística

- ▶ Média da medição

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

- ▶ Desvio padrão de uma amostra

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

- ▶ Desvio padrão da média da medição

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N - 1)}} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Expressando incertezas do Tipo A

- ▶ Média \pm Desvio padrão da média

$$x \pm \sigma_x$$

- P.ex.:

$$m = 9.2 \pm 0.3 \text{ g}$$

- Usando notação científica corretamente

$$m = (9.3 \pm 0.3) \times 10^{-3} \text{ kg}$$

- Errado!

$$m = 9.3 \times 10^{-3} \pm 0.3 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

$$m = 9.3 \times 10^{-3} \text{ kg} \pm 3.0 \times 10^{-4} \text{ kg}$$

Expressando incertezas do Tipo A

- ▶ Média mais incerteza relativa (porcentual)

$$\epsilon_x \equiv \frac{\sigma_x}{x}$$

- P.ex.: Diríamos que a massa é 9.2g com incerteza de 3%

Expressando incertezas do Tipo A

- ▶ Calcular a incerteza expandida com $k=2$ para abranger 95.45% do intervalo de confiança da curva gaussiana ou usar a tabela “t de Student” com o grau de liberdade (NGL) dado pela equação de Welch–Satterthwaite.
 - Resposta: $x \pm (k * \sigma_x)$

Algarismos significativos

- Não existe “incerteza exata”
- A incerteza não deve ter mais que 2 algarismos significativos (geralmente apenas 1)
 - *Regra: Se o primeiro dígito for 1, então use dois dígitos para sigma*
 $\sigma_x = 0.14g$ ou $\sigma_x = 0.3g$, mas não $\sigma_x = 0.34g$
- O resultado deve ter a mesma resolução da incerteza
 $9.5 \pm 0.3g$ ou $9.52 \pm 0.14g$, mas não $9.52 \pm 0.3g$

Algarismos significativos

- Se a incerteza for muito grande, perderá algarismos significativos no valor

$$m = (9 \pm 2)g$$

- Se a incerteza for muito pequena, assuma que seja igual a “1” no último dígito

$$m = (9.52 \pm 0.01)g$$

Propagação de incertezas

- ▶ Resultado é função das variáveis independentes

$$f(x, y, z, \dots)$$

- ▶ Cujas incertezas são

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \dots$$

- ▶ A incerteza do resultado dependerá das incertezas das variáveis, cada uma medida de uma maneira.
- ▶ Baseado em expansão em série de Taylor...

$$\sigma_f^2 = \sigma_x^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \sigma_z^2 \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \dots$$

Procedimento de Medição

► Casos típicos de incertezas:

	X_i independentes
$f = x_1 + x_2$	$\sigma_f = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$
$f = x_1 - x_2$	
$f = x_1 \cdot x_2$	$\frac{\sigma_f}{ f } = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{x_2}\right)^2}$
$f = x_1 / x_2$	
$f = x^p$	$\frac{\sigma_f}{ f } = p \cdot \frac{\sigma_x}{ x }$
$f = k \cdot x$	$\sigma_f = k \cdot \sigma_x$

Procedimento de Medição

► Casos típicos:

	Variância	Desvio-padrão
<i>Caso geral:</i> $Y = F(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n)$	$s_y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} \right)^2 \times s_{x_i}^2$	$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} \right)^2 \times s_{x_i}^2}$
<i>Soma de n termos:</i> $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$	$s_y^2 = \sum_{i=1}^n s_{x_i}^2$	$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n s_{x_i}^2}$
<i>Soma ou Diferença:</i> $Y = X_1 + X_2$ ou $Y = X_1 - X_2$	$s_y^2 = s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2$	$s_y = \sqrt{s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2}$
<i>Produto ou quociente:</i> $Y = X_1 \times X_2$ ou $Y = \frac{X_1}{X_2}$	$\frac{s_y^2}{y^2} = \frac{s_{x_1}^2}{x_1^2} + \frac{s_{x_2}^2}{x_2^2}$	$\frac{s_y}{y} = \sqrt{\left(\frac{s_{x_1}}{x_1} \right)^2 + \left(\frac{s_{x_2}}{x_2} \right)^2}$

Procedimento de Medição

- ▶ Casos típicos, adição e subtração:

$$y = m \cdot (p - q + r)$$

Considerar

$$m=1 \text{ (exacto)}$$

$$p=5,02; u(p)=0,13$$

$$q=6,45; u(q)=0,05$$

$$r=9,04; u(r)=0,22$$

$$y = 1 \cdot (5,02 - 6,45 + 9,04) = 7,61$$

$$u(y) = \sqrt{(0,13)^2 + (0,05)^2 + (0,22)^2} = 0,26$$

Procedimento de Medição

- ▶ Casos típicos, produto:

$$y = \frac{o \cdot p}{q \cdot r}$$

Considerar

$$o=2,46; u(o)=0,02$$

$$p=4,32; u(p)=0,13$$

$$q=6,38; u(q)=0,11$$

$$r=2,99; u(r)=0,07$$

$$y = \frac{(2,46) \cdot (4,32)}{(6,38) \cdot (2,99)} = 0,56$$

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{0,02}{2,46}\right)^2 + \left(\frac{0,13}{4,32}\right)^2 + \left(\frac{0,11}{6,38}\right)^2 + \left(\frac{0,07}{2,99}\right)^2} = 0,043 \text{ (rel.)}$$

$$u(y) = 0,56 \times 0,043 = 0,024$$

Propagação de incertezas

- Exemplo da força hidrodinâmica (arrasto ou sustentação)

$$F = C \frac{1}{2} \rho U^2 D^2$$

- Incerteza da força dependerá das outras

$$(\sigma_F)^2 = (\sigma_C)^2 \left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)^2 + (\sigma_\rho)^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)^2 + (\sigma_U)^2 \left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)^2 + (\sigma_D)^2 \left(\frac{\partial F}{\partial D}\right)^2$$

Procedimento de Medição

▶ Caso de aplicação:

Example: Calculation of precision limit for a towing test

The towing test with a ship model is repeated 15 times for one speed.

The standard deviation of the measured resistance for the 15 tests is $S_x=0.185$ N.

This gives a precision limit $P_x = S_x \cdot t_{15} = 0.185 \cdot 2.145 = 0.396$ N

The average resistance of the 15 tests is 41.65 N. The uncertainty of the resistance measurement (of a single test) is then: $\frac{0.396}{41.65} = 0.0095 = 0.95\%$

The standard deviation of the mean of the 15 tests is $\frac{0.185}{\sqrt{15}} = 0.0478$.

This gives a precision limit for the mean $P_{\bar{x}} = S_{\bar{x}} \cdot t_{15} = 0.0478 \cdot 2.145 = 0.102$, which gives an uncertainty of $\frac{0.102}{41.65} = 0.002 = 0.2\%$.

Thus, it is seen that a number of repeated tests is required to calculate the precision error of a single test, and that the uncertainty of the mean of several tests is significantly smaller than the uncertainty of a single test.

Procedimento de Medição

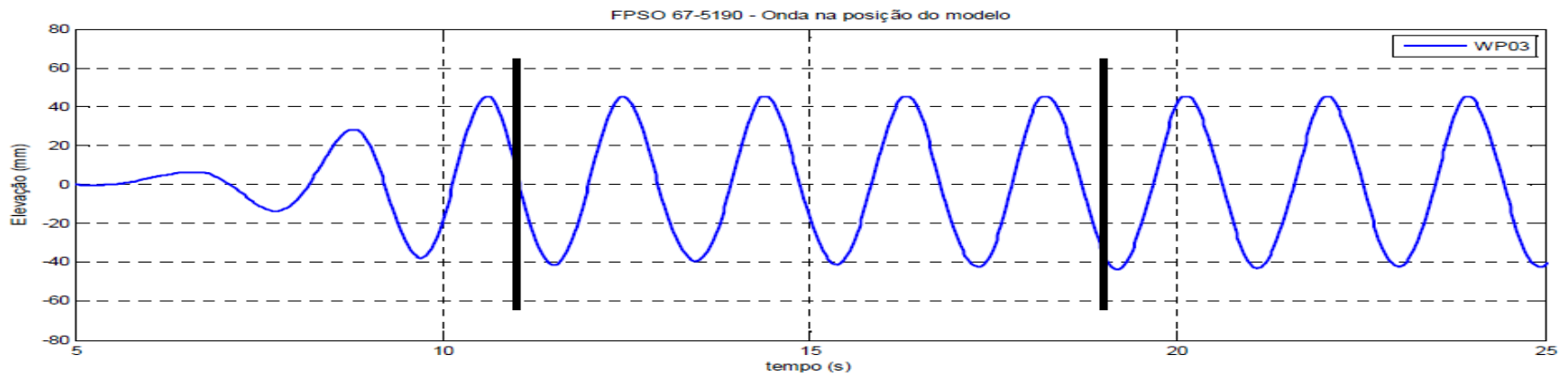
- ▶ Caso de aplicação – RAO de um FPSO:



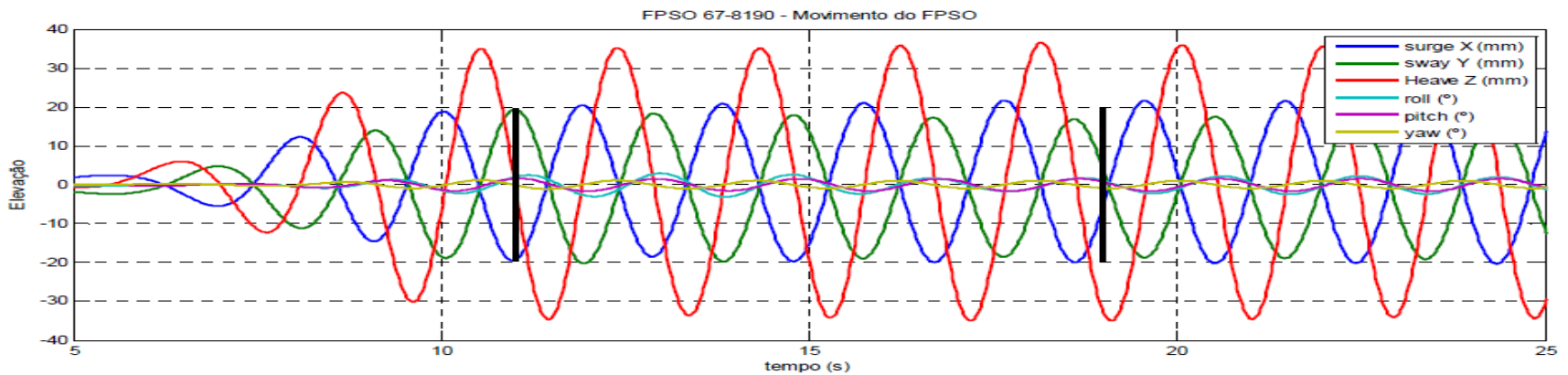
(c). Modelode FPSO em teste.

Procedimento de Medição

▶ Caso de aplicação - RAO de um FPSO:



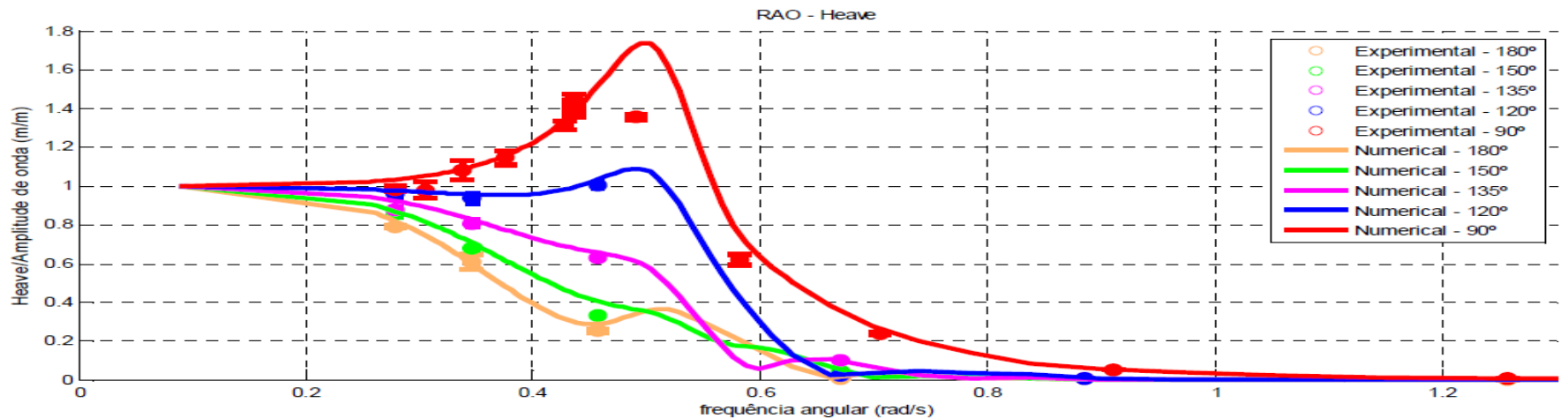
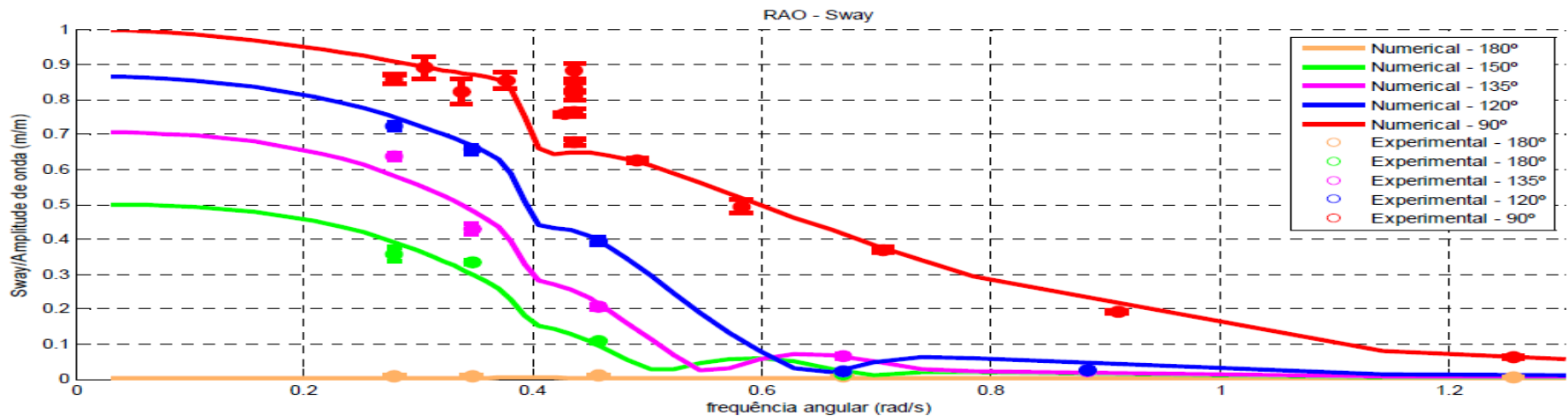
(a). Elevação de onda.



(b). Movimentos do FPSO.

Procedimento de Medição

▶ Caso de aplicação - RAO de um FPSO:



Exercício

(Individual, entregar no início da próxima aula)


- ▶ Para determinar a densidade de um paralelepípedo de dimensões L , W e H , um pesquisador mede seu volume e massa.
- ▶ Na medição da massa, o pesquisador obteve uma incerteza de 2%.
- ▶ O paquímetro utilizado para medir L , W e H tem incerteza de 4%.
- ▶ Qual é a incerteza (em percentual) para a densidade do paralelepípedo?

Exercício

(Individual, entregar no início da próxima aula)

- ▶ O pesquisador realiza o mesmo experimento para determinar a densidade de um outro corpo, desta vez uma esfera de diâmetro D .
- ▶ Ele usa os mesmos instrumentos e procedimentos anteriores e obtém massa e comprimentos com as mesmas incertezas.
- ▶ Qual é a incerteza (em percentual) para a densidade da esfera?
- ▶ Explique por que a incerteza da densidade é diferente para a medição dos dois objetos.
 - Explique a razão, não mostre apenas que as fórmulas são diferentes.

Referências

- ▶ Barros Neto, Scarminio, Bruns; Como fazer experimentos: pesquisa e desenvolvimento na ciência e na indústria; Editora da Unicamp, 2001;
 - ▶ Cabral, Paulo, Erros e Incertezas nas medições, IEP / Instituto Superior de Engenharia do Porto, 2004.
 - ▶ Steen, Sverre, Lecture Notes TMR7 Experimental Methods in Marine Hydrodynamics, Faculty of Engineering Science and Technology NTNU, 2014.
- 

Análise de incerteza e propagação de erros

- ▶ Obrigado pela atenção.
- 