

# Apostila sobre PID e Métodos de Sintonia

Prof. Dr. Eduardo Aoun Tannuri  
Departamento de Engenharia Mecatrônica e Sistemas Mecânicos  
Escola Politécnica da USP

# 1 Modos de Controle P, I e D

## 1.1 Introdução

Os três modos básicos de controle em malha fechada que são largamente empregados na prática são o proporcional (P), o integral (I) e o derivativo (D). A figura 3.1 mostra um diagrama de blocos de um controlador genérico. O *set point* é representado por uma linha tracejada já que ele é normalmente especificado por um dial ou por um contato deslizante no painel do controlador. Além deste *set point* local, alguns controladores têm uma opção de *set point* remoto que permite a recepção de um sinal remoto ou de um dispositivo externo como, por exemplo, outro controlador ou um computador digital. Os sinais de entrada e de saída do controlador são sinais contínuos comumente do tipo elétrico, pneumático ou hidráulico.

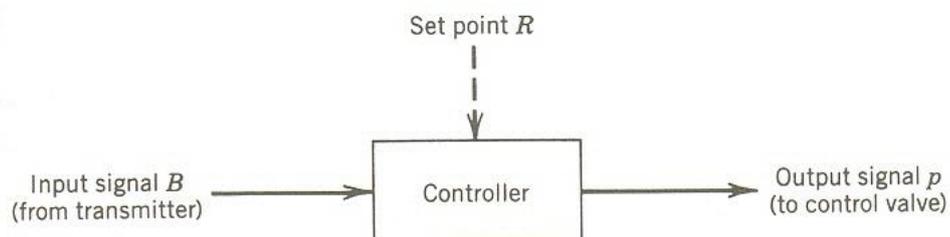


Figura 1.1 Controle PID

## 1.2 Controle Proporcional

No controle em malha fechada, o objetivo é levar para zero o sinal de erro  $e(t)$

$$e(t) = r(t) - c(t),$$

sendo  $r(t)$  o set point e  $c(t)$  o valor medido da variável controlada.

Embora a equação indique que o *set point* possa ser variante no tempo, na maior parte dos problemas de controle ele é mantido constante por longos períodos de tempo.

A concepção mais elementar de um controlador e talvez a mais utilizada corresponde ao controle proporcional. Neste caso, a saída do controlador é proporcional ao sinal de erro, isto é

$$u(t) = K_p e(t),$$

onde  $K_p$  é o **ganho** do controlador, normalmente adimensional. O ganho define o quanto a variável de controle deve variar em correspondência a uma variação unitária do sinal de erro.

Os conceitos básicos por trás do controle proporcional são os seguintes:

- o ganho do controlador pode ser ajustado de forma a tornar a saída do controlador tão sensível quanto desejado aos desvios entre o *setpoint* e a variável controlada;
- o sinal de  $K_p$  pode ser escolhido de forma a fazer com que a saída do controlador aumente (ou diminua) à medida que o desvio aumenta.

O ganho  $K_p$  do controlador também é ajustável e seu valor é usualmente escolhido depois de o controlador ter sido instalado e colocado em operação. Para controladores de propósito geral,  $K_p$  é adimensional – esta situação ocorre quando  $u$  e  $e$  têm as mesmas unidades. Por exemplo, essas unidades poderiam estar associadas a instrumentos eletrônicos ou pneumáticos e as variáveis medidas em ampères, volts, psi, etc. e poderiam ser expressas como números entre 0 e 100%. Esta última representação, aliás, é conveniente para *displays* gráficos e programas de computador.

Para valores positivos do ganho  $K_p$ , o controlador reduz sua ação de controle quando há um aumento da variável controlada. É o caso, por exemplo, do controle de temperatura de um forno. Com a elevação da temperatura, o controle deve reduzir o acionamento da resistência elétrica de aquecimento. Esta ação é chamada de reversa. Em outras aplicações o controlador deve atuar de forma oposta, ou seja, aumentar a sua saída quando houver um aumento da variável controlada. Isto é obtido com um valor negativo do ganho  $K_p$ . É o caso do controle de resfriamento, e a ação do controlador passa a ser denominada ação direta.

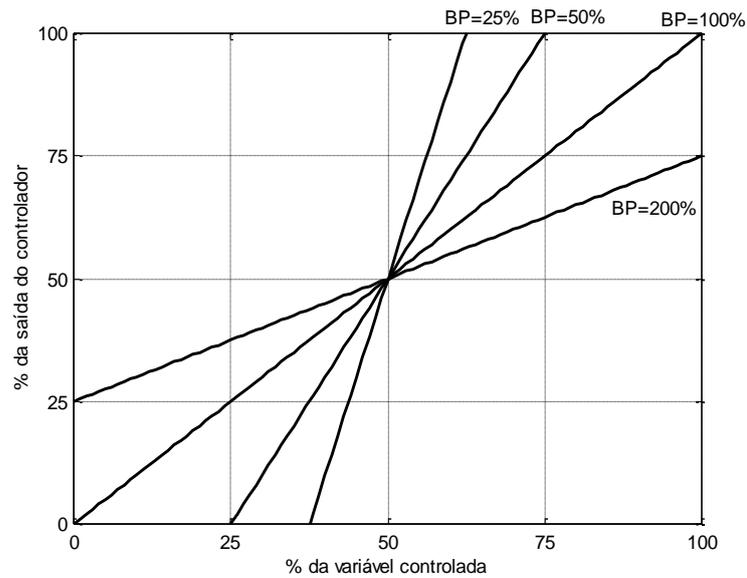
Em alguns casos, a ação proporcional é acrescida de um termo constante, chamado de *bias* ou *offset*. Assim, sendo este termo denominado por  $\bar{u}$ , a saída do controlador será dada por:

$$u(t) = \bar{u} + K_p e(t)$$

Alguns controladores, em especial os modelos mais antigos, trabalham com um parâmetro chamado **banda proporcional** (BP) em lugar do ganho. No caso em que  $K_p$  é adimensional, a BP é definida como

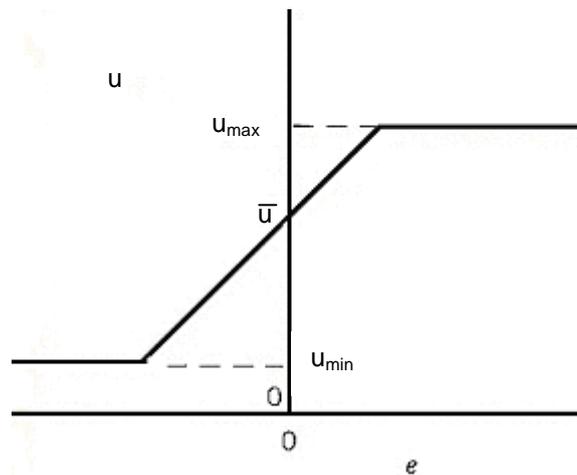
$$BP = \frac{100\%}{K_p}.$$

Note que um pequeno valor da BP corresponde a um valor elevado do ganho  $K_p$ , enquanto que um grande valor de BP corresponde a um valor diminuto de  $K_p$ . A figura a seguir ilustra o efeito da BP para um exemplo de uma válvula. Uma outra maneira de se definir a banda proporcional é considerá-la como o erro (em porcentagem do range da variável de controle) necessário para levar a saída de controle do menor para o maior valor. Por exemplo, considera-se um sistema realimentado de controle de temperatura, no qual a variável controlada varia de 100°C a 300°C, e o *set point* é 200°C. Assim, uma BP de 50% significa que quando a variável de controle varia de 50% do seu *range*, a saída do controlador varia de 100% de seu *range*. A figura a seguir ilustra a ação de controle para diversos valores de BP, considerando um *offset* de 50%.



**Figura 1.2 Banda proporcional**

O controlador proporcional conforme apresentado não inclui limites físicos para a variável de saída do controlador. Uma representação mais realista é mostrada na figura abaixo. Dizemos que o controlador satura quando sua saída atinge um determinado limite físico, seja  $u_{\max}$  ou  $u_{\min}$ .

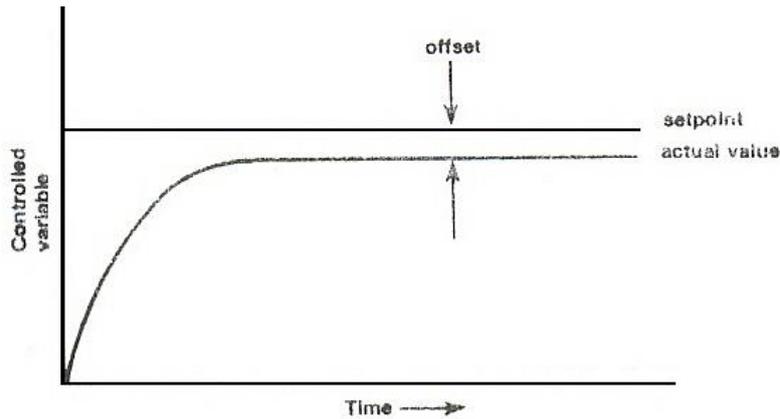


**Figura 1.3 Saturação**

A função de transferência do controlador proporcional pode ser escrita de imediato como

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_P.$$

Uma desvantagem do controlador proporcional é sua incapacidade de eliminar erros estacionários que surgem após uma mudança de *set point* ou uma perturbação constante na saída, conforme ilustra a figura a seguir.

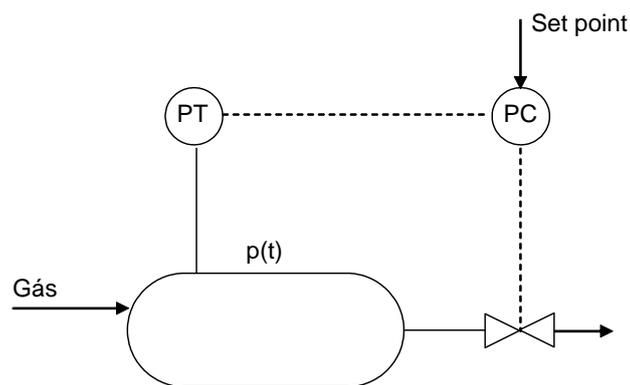


**Figura 1.4 Offset com controle proporcional**

Uma forma de eliminar este problema é usando um controlador contendo um termo integral – este modo produz um *reset* automático, conforme discutido adiante. No entanto, em diversas aplicações de controle em que *offsets* podem ser tolerados, o controle proporcional é atraente por causa de sua simplicidade. Por exemplo, em alguns problemas de controle de nível, a manutenção do nível de líquido exatamente no valor do *set point* não é necessária, uma vez que basta que o líquido não extravase ou que o tanque se esvazie por completo.

### Exemplo 1) Controle de pressão

Um sistema de controle de pressão é mostrado na figura abaixo. O transmissor de pressão (PT) possui range de 0 a 100psig. O controlador PC é puramente proporcional, possuindo um offset de 50%. O set point é ajustado em 10psig. Obtenha a ação correta do controlador (direta ou reversa), sabendo-se que a válvula é linear e normalmente fechada. Além disso, calcule a banda proporcional do controlador, para que quando a pressão no tanque atingir 30psig, a válvula seja totalmente aberta.



**Figura 1.5 Controle de pressão em um vaso**

A ação de controle deve ser determinada por: caso haja um aumento da pressão no vaso, o controlador deve agir de forma a aumentar a abertura da válvula, para que aumente o fluxo de saída e, por conseqüência, resulte uma diminuição da pressão no vaso. Além disso, a válvula é normalmente fechada, portanto, para que se aumente sua abertura, deve-se aumentar o comando sobre a mesma. Portanto, a relação entre a pressão e o comando na válvula é direto, requerendo assim uma ação de **controle direta**.

Pelo que foi enunciado, a lei de controle é do tipo:

$$u(t) = \bar{u} + K_p e(t) = 50\% + K_p e(t)$$

Em regime, a pressão no tanque é 10psig (10% do range do transmissor) e o erro é nulo. Portanto:

$$u(\text{regime}) = 50\% + K_p \cdot 0 = 50\%$$

A abertura da válvula será, portanto, de 50%, pois a mesma apresenta um comportamento linear em relação ao comando. Para pressão de 30psig (30% do range), devemos ter uma abertura da válvula de 100%, logo, a banda proporcional será:

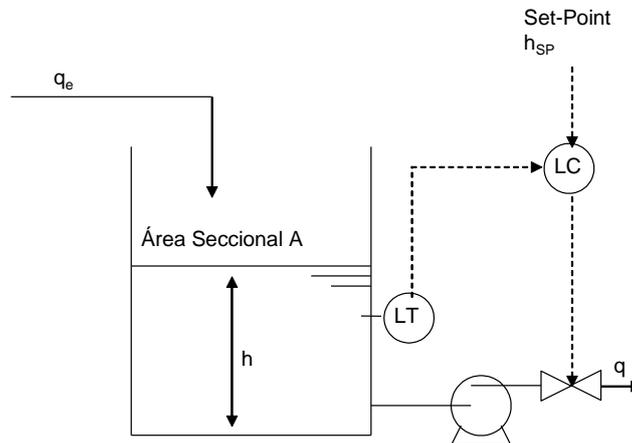
$$u = 100\% = 50\% + K_p \cdot (10\% - 30\%)$$

$$K_p = -2,5 \Rightarrow BP = \frac{100\%}{-2,5} = -40\%$$

Isto significa que quando há uma variação de 40% na pressão (equivalente a 40psig), há uma variação de 100% na abertura da válvula. O sinal negativo indica a ação direta da válvula.

### Exemplo 2) Controle de nível

O sistema de controle de nível apresentado na figura a seguir é composto por um tanque com área seccional  $A = 7\text{m}^2$ , em cuja saída é ligada uma bomba e uma válvula controlada. Considera-se que a vazão de saída  $q$  independe do nível  $h$ , e é comandada diretamente pelo sinal de controle proveniente do controlador de nível (LC). O sinal de realimentação é dado pelo medidor de nível (LT). A vazão de entrada  $q_e$  não é controlada.



**Figura 1.6 Controle de nível em tanque**

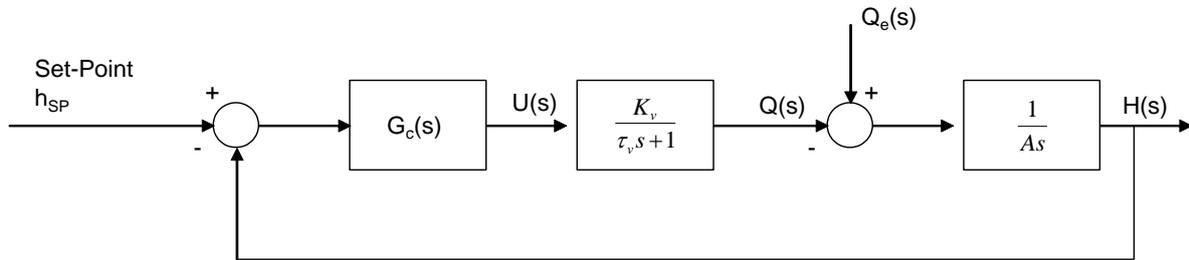
A equação dinâmica que governa o sistema é simples, dada por:

$$A \cdot \dot{h} = q_e(t) - q(t) \Rightarrow H(s) = \frac{1}{As} [Q_e(s) - Q(s)]$$

Modelando a válvula de controle como um sistema de primeira ordem, obtém-se:

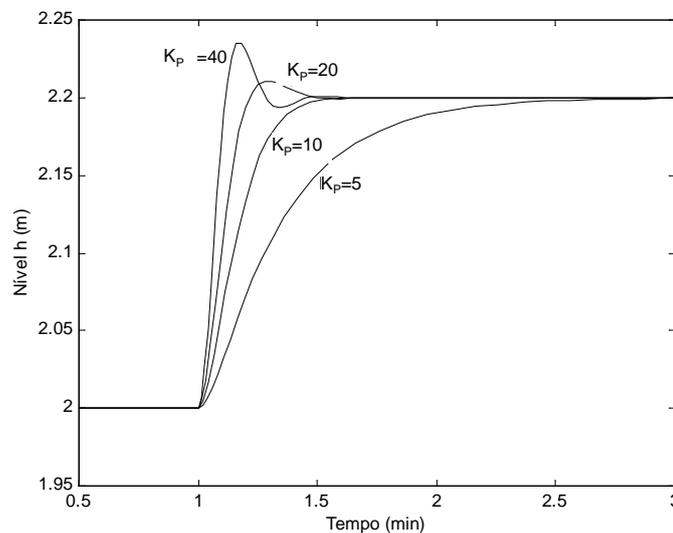
$$Q(s) = \frac{K_v}{\tau_v s + 1} U(s)$$

onde  $K_v$  é o ganho da válvula,  $\tau_v$  sua constante de tempo e  $U(s)$  a saída do controlador. (0~100%). Desconsiderando-se a dinâmica do transmissor de nível, o diagrama de blocos do sistema controlado é dado por:



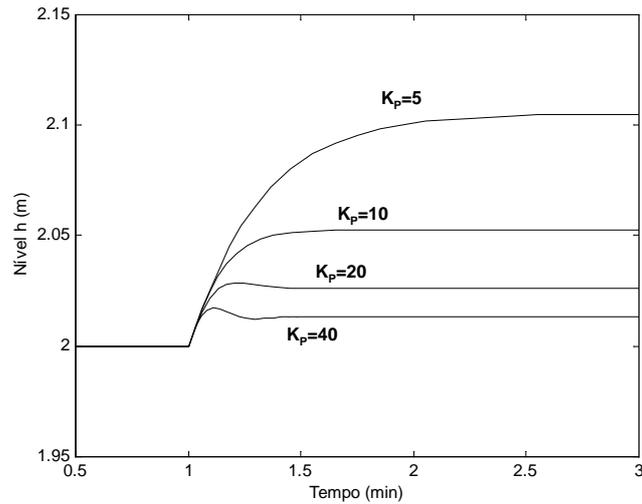
**Figura 1.7 Diagrama de blocos do controle de nível**

Considera-se um controlador proporcional com ação direta, ou seja,  $G_c(s) = -K_p$ . Além disso, assume-se que a válvula possui uma constante de tempo  $\tau_v = 3s$  (0,05min), e um ganho  $K_v = 3,8m^3/min$ , ou seja, quando a saída de controle for 1 (100%), a vazão de saída será  $3,8m^3/min$ . A figura abaixo mostra o resultado da simulação sem vazão de entrada ( $q_e = 0$ ), sendo o set-point variando de 2m para 2,2m, em  $t=1$ min. Pode-se ver que o controle proporcional, no caso de variação de set-point, garante erro em regime nulo, com um tempo de resposta em malha fechada tanto menor quanto maior o ganho  $K_p$ . Observa-se também o comportamento oscilatório do sistema para ganhos mais elevados.



**Figura 1.8 Variação no set-point**

Entretanto, o controlador proporcional não garante erro nulo em regime no caso de variação da vazão de entrada  $q_e$ . De fato, considerando-se que em  $t=1$ min passe a existir uma vazão de entrada constante de  $2m^3/min$ , a simulação abaixo mostra que há erro em regime (o set-point vale 2m). Este erro é tanto menor quanto maior o ganho de controle.



**Figura 1.9 Variação na vazão de entrada  $q_e$**

Entretanto, o ganho de controle não pode ser elevado indefinidamente, pois, embora isto reduza o erro em regime, pode provocar, em alguns sistemas, oscilações indesejadas ou mesmo instabilidade.

Uma breve análise teoria da função de transferência em malha fechada permite que se alcancem as mesmas conclusões acima. Pode-se mostrar, por meio de álgebra de diagramas de blocos, que:

$$H(s) = \frac{K_P K_V / A}{\tau s^2 + s + K_P K_V / A} H_{SP}(s) + \frac{1/A \cdot (\tau s + 1)}{\tau s^2 + s + K_P K_V / A} Q_e(s)$$

Assim, anulando a vazão de entrada e considerando o *set point* como um degrau de amplitude B  $H_{SP} = B/s$ , obtém-se, em regime permanente:

$$h(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_P K_V / A}{\tau s^2 + s + K_P K_V / A} \cdot \frac{B}{s} \cdot s = B$$

ou seja, a altura tende a B, sendo portanto, nulo o erro em regime no caso de variação de *set point*. Já no caso de variação em degrau da vazão de entrada (amplitude  $\Delta Q_e$ ), obtém-se:

$$h(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1/A \cdot (\tau s + 1)}{\tau s^2 + s + K_P K_V / A} \cdot \frac{\Delta Q_e}{s} \cdot s = \frac{\Delta Q_e}{K_P K_V}$$

ou seja, o erro no nível será, de fato, tanto menor quanto maior o ganho de controle  $K_P$ . As raízes da equação característica das funções de transferência em malha fechada fornecem informações a respeito da estabilidade e da resposta transitória. Fazendo-se, assim:

$$\tau s^2 + s + K_P K_V / A = 0, \quad s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \tau K_P K_V / A}}{2\tau}$$

A resposta será oscilatória caso as raízes sejam complexas, ou seja:

$$1 - 4 \tau K_P K_V / A < 0 \Rightarrow K_P > \frac{A}{4 \tau K_V}$$

Para o presente exemplo, a oscilação começa a ocorrer para  $K_P > 9,2$ . Este fato é confirmado pelas simulações, já que para tais ganhos há um sobressinal na resposta transitória. Este sobressinal não é visível na escala em que foram apresentados os gráficos anteriores para  $K_P = 10$ .

### 1.3 Controle Integral

Para motivar a ação de controle integral, considere-se o exemplo de um chuveiro elétrico para o qual se deseja controlar a temperatura da água independentemente da vazão. Admita-se que a variável de controle seja a potência térmica fornecida à água. Se, num certo momento, a temperatura da água atingiu o valor desejado, então a potência térmica fornecida ao resistor deve ser mantida inalterada (um controlador proporcional não funcionaria aqui porque a potência térmica, sendo proporcional ao erro, resultaria nula). A idéia básica então é definir um controlador tal que sua saída permaneça constante quando o sinal de erro é nulo. Uma maneira de conseguir esta característica é definindo a saída do controlador como sendo proporcional à integral do sinal de erro ao longo do tempo, isto é,

$$u(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau,$$

onde  $T_I$  é chamado de **tempo integral** ou **tempo de reset** e tem dimensão de tempo. Nos controladores comerciais, o parâmetro  $T_I$  é ajustável. A ação de controle integral também é conhecida por controle de *reset*.

A ação de controle integral é muito usada porque ela apresenta uma importante característica prática: a eliminação do erro estacionário. Para entender como isto ocorre, considere a equação acima. Se o sistema está em regime estacionário, então tanto o sinal de erro  $e$  como o sinal de controle  $u$  são constantes. Mas, o termo integral mostra que  $u$  variará com o tempo a menos que  $e(t) = 0$ . Portanto, quando a ação integral é usada,  $u$  atingirá um valor constante que fará com que o erro estacionário seja nulo.

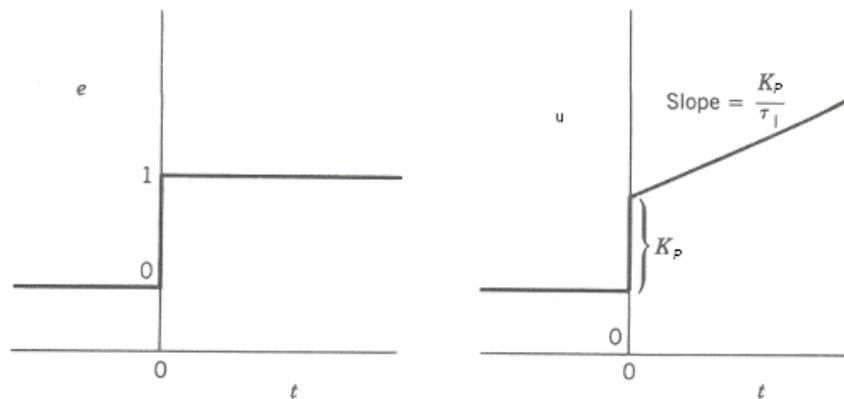
Mesmo que em geral a eliminação do erro estacionário seja um objetivo de controle importante, o controle integral raramente é utilizado sozinho uma vez que, para que a variável de controle atinja um valor significativo, é preciso que o erro persista por um certo tempo. Por outro lado, o controle proporcional atua simultaneamente com a ocorrência de um erro, ou seja, o controlador proporcional toma uma ação corretiva tão logo um erro seja detectado. Por esta razão, o controle integral é normalmente utilizado em conjunto com o controle proporcional, constituindo esta combinação o **controlador proporcional-integral (PI)**:

$$u(t) = K_P \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \right],$$

ou, equivalentemente, em termos de sua função e transferência,

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_P \left[ 1 + \frac{1}{T_I s} \right]$$

A resposta de um controlador PI a um degrau unitário em  $e(t)$  é mostrada na figura abaixo.



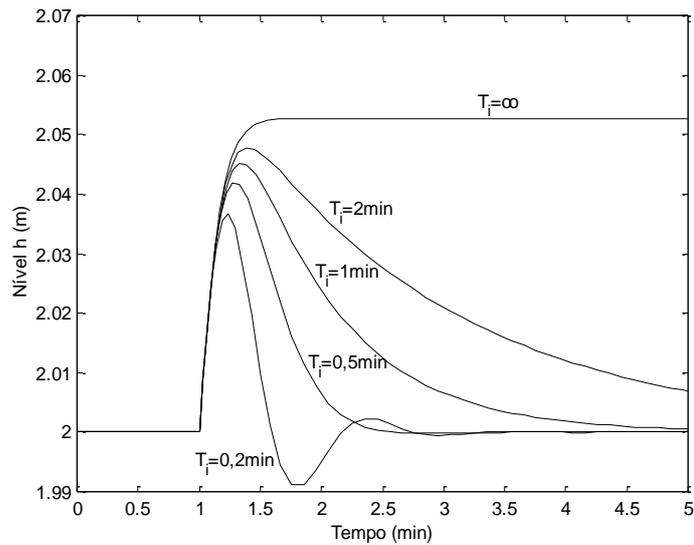
**Figura 1.10 Ação de controle integral**

No instante 0, a saída do controlador muda instantaneamente devido à ação proporcional. A ação integral produz o crescimento em forma de rampa em  $u(t)$  para  $t > 0$ . Note que, quando  $t = T_i$ , a contribuição do termo integral tem o mesmo valor do termo proporcional. Dessa maneira, a ação proporcional “repetiu” por uma vez a ação proporcional. Por essa razão, muitos controladores comerciais são calibrados em termos de  $1/T_i$  e adotam a unidade repetições por minuto em vez de  $T_i$ , dados em minutos ou minutos para repetir. Assim, por exemplo, se  $T_i = 0.2$  min, isto corresponde a  $1/T_i = 5$  repetições por minuto.

Uma desvantagem do uso da ação integral é que ela tende a produzir respostas oscilatórias e, portanto, reduzir a estabilidade do sistema. Uma pequena oscilação normalmente é tolerada, uma vez que isto está em geral associado com uma rápida resposta. Os efeitos indesejáveis da ação integral podem ser reduzidos por meio da sintonia apropriada do controlador ou incluindo a ação derivativa, que tende a compensar os efeitos desestabilizantes.

Sintonizar um controlador PI é naturalmente mais difícil do que sintonizar um controlador P, pois no primeiro caso há dois parâmetros a ajustar, enquanto que no último há apenas um. Como regra geral, quanto maior o número de parâmetros a ajustar, tanto mais difícil é a sintonia do controlador.

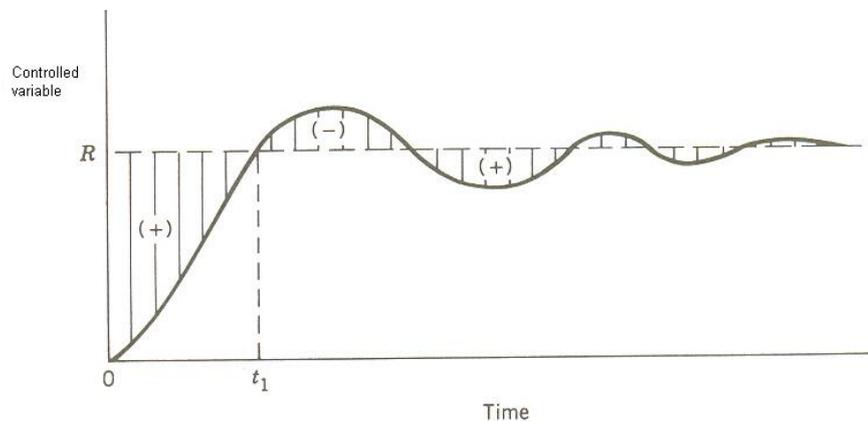
A figura a seguir mostra o exemplo de controle de nível discutido na seção anterior. Considera-se o caso de que em  $t=1$  min passe a existir uma vazão de entrada constante de  $2\text{ m}^3/\text{min}$ , que resultava um erro em regime para controle proporcional. Incluiu-se, então, um termo integral, com ganho  $T_i$  variando de 2 min a 0,2 min. Pode-se ver que, de fato, a ação integral elimina o erro em regime. Além disso, quanto menor a constante  $T_i$ , mais rápida é esta correção. Entretanto, pode-se constatar também que ações integrais muito intensas ( $T_i$  baixo) podem levar a oscilações.



**Figura 1.11 Controle de nível com ação integral**

## 1.4 Reset Windup

Um outro problema com a ação integral é um fenômeno conhecido como *reset windup*. Conforme já mencionado, a ação integral faz com que a saída do controlador mude enquanto  $e(t) \neq 0$ . Em vista disso, quando um erro persistente ocorre, o termo integral pode se tornar bastante grande e a saída do controlador pode saturar na prática. A continuação da operação de integração após o controlador ter saturado é conhecida como *reset windup* ou *integral windup*. A figura a seguir mostra uma resposta típica de um controlador PI a um degrau no *set point*. Note que as áreas hachuradas sob a curva dão contribuições positivas ou negativas ao termo integral, respectivamente, quando a variável controlada está abaixo ou acima do *set point*. O sobressinal elevado ocorre porque o termo integral continua a crescer até que o sinal do erro mude em  $t = t_1$ , quando então o termo integral começa a diminuir. Somente após o termo integral se tornar suficientemente pequeno é que a saída do controlador se afasta do limite de saturação.



**Figura 1.12 Reset windup**

Assim, o fenômeno de *reset windup* ocorre quando um controlador PI (ou PID) encontra um erro persistente como, por exemplo, durante a partida de um processo de batelada (*batch process*) ou

após uma mudança grande do *set point*. Ele pode ocorrer também como consequência de uma grande perturbação persistente da saída que esteja acima da capacidade de controle do sistema. Nesta situação, uma limitação física (como, por exemplo, uma válvula de controle totalmente aberta ou fechada) impede o controlador de reduzir o sinal de erro para zero. Obviamente é indesejável deixar o termo integral continuar crescendo após a saturação da saída do controlador uma vez que este já está fazendo o máximo que pode para reduzir o erro. Felizmente, os controladores comerciais dispõem de uma função *antireset windup* que reduz o *reset windup* interrompendo temporariamente a integração do erro sempre que a saída do controlador satura. A integração é reiniciada apenas quando a saída do controlador não está mais saturada.

## 1.5 Controle Derivativo

A ação de controle derivativa tem um caráter antecipatório, sendo sua função reagir antecipadamente ao comportamento futuro do sinal de erro com base na sua taxa de variação. Por exemplo, suponha que a temperatura de um reator suba de 10 graus Celsius em um período de 3 min. Obviamente este incremento é mais rápido do que os mesmos 10 graus Celsius em 30 min e poderia indicar uma situação potencialmente fora de controle para uma reação exotérmica. Se o reator estiver sob controle manual de um operador experiente, este anteciparia as consequências e tomaria as ações corretivas apropriadas para reduzir a temperatura. Este tipo de resposta não seria obtível dos controladores vistos até este ponto. Note que um controlador proporcional reage apenas a um desvio na temperatura, não sendo capaz de distinguir o intervalo de tempo em que o desvio se produz. O termo integral também não ajudaria aqui porque ele geraria uma ação corretiva com base no intervalo de tempo passado em que o erro tivesse ocorrido.

O caráter antecipatório introduzido pelo operador experiente pode ser incorporado nos controladores automáticos fazendo a saída do controlador proporcional à taxa de variação da variável controlada. Ou seja, a ação derivativa ideal pode ser expressa por

$$u(t) = T_D \frac{de(t)}{dt},$$

em que  $T_D$  é chamado de **tempo derivativo** e tem dimensão de tempo. Dessa maneira, o avanço produzido pelo termo derivativo pode compensar o atraso introduzido por praticamente todas as malhas de controle.

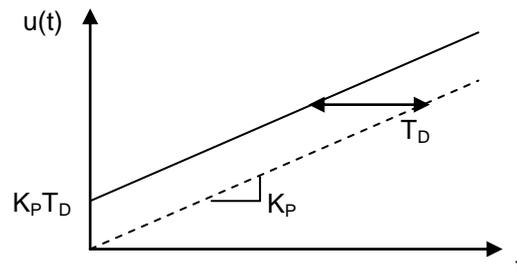
A ação derivativa nunca é utilizada sozinha. Se o fosse e se o erro fosse constante, o valor do controle seria nulo. Então, ele sempre é usado em conjunto com um controlador proporcional ou proporcional-integral. Em combinação com um controlador proporcional, resulta

$$u(t) = K_P \left[ e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$

Neste caso, o controlador PD tem a função de transferência

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_P [1 + T_D s].$$

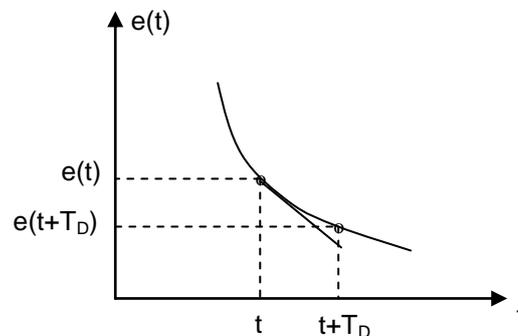
A figura a seguir mostra a resposta de um controlador PD a uma entrada rampa unitária.



**Figura 1.13 Ação derivativa para rampa unitária**

Como se pode observar, a rampa de saída resulta adiantada de  $T_D$  unidades de tempo em relação à rampa correspondente ao controlador proporcional, o que ilustra a natureza antecipatória introduzida pela presença do termo derivativo.

Uma outra maneira de observar essa característica é notando que a figura a seguir



**Figura 1.14 Ação derivativa**

permite calcular no instante  $t$  uma aproximação para o valor do erro no instante futuro  $t+T_D$

$$e(t + T_D) \cong e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt}$$

se  $T_D$  for suficientemente pequeno.

Portanto, para o controlador PD,

$$u(t) = K_P \left[ e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt} \right] \cong K_P e(t + T_D),$$

o que mostra que o controlador PD calcula uma ação de controle no instante  $t$  que é aproximadamente a mesma que um controlador P calcularia se utilizasse o valor previsto aproximado do erro no instante  $t+T_D$ . O valor do tempo derivativo  $T_D$  representa, portanto, o avanço introduzido pela ação derivativa. Isso mostra de uma outra maneira que o termo derivativo dota o controlador de uma capacidade de se antecipar à ocorrência do erro futuro.

Ao incorporar um caráter antecipatório à ação de controle, o modo derivativo tende a estabilizar o sistema. O controle derivativo também tende a diminuir o erro estacionário porque é possível trabalhar com valores mais elevados do ganho. Além disso, normalmente melhora a resposta dinâmica do sistema, diminuindo o tempo de acomodação. No entanto, se a medida da saída é afetada por ruído, isto é, se ela contém componentes flutuantes de alta frequência, então a derivada

da variável medida amplifica consideravelmente o ruído, a menos que a medida seja previamente filtrada.

A ação derivativa pode ser combinada com as ações proporcional e integral para formar o tradicional controlador PID:

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right],$$

o qual pode ser descrito equivalentemente pela seguinte função de transferência

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} + T_D s \right].$$

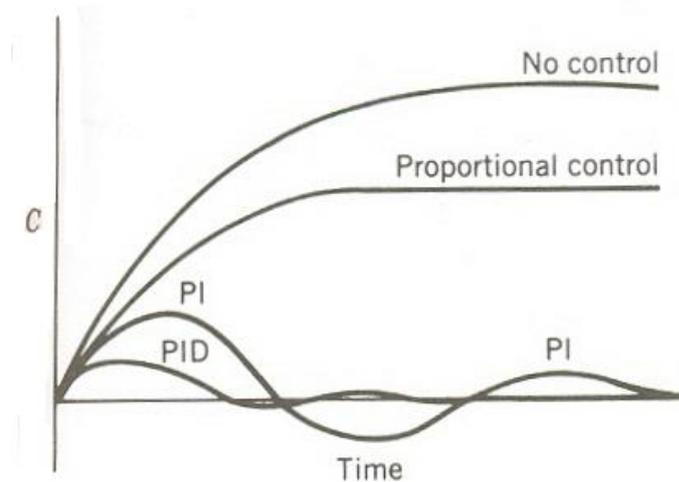
Um inconveniente com esta estrutura fica evidente se consideramos uma variação brusca no valor do *set point*  $e$ , portanto, em  $e$ . Neste caso, o termo derivativo tende a se tornar muito grande, provocando uma “sobrecarga” no controlador. Para evitar este comportamento indesejável, pode-se tomar a derivada da variável controlada  $c$  em vez de a derivada do erro  $e$ , isto é,

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau - T_D \frac{dc(t)}{dt} \right]$$

Este método de eliminar o problema se tornou padrão na maioria dos controladores comerciais.

## 1.6 Respostas Típicas

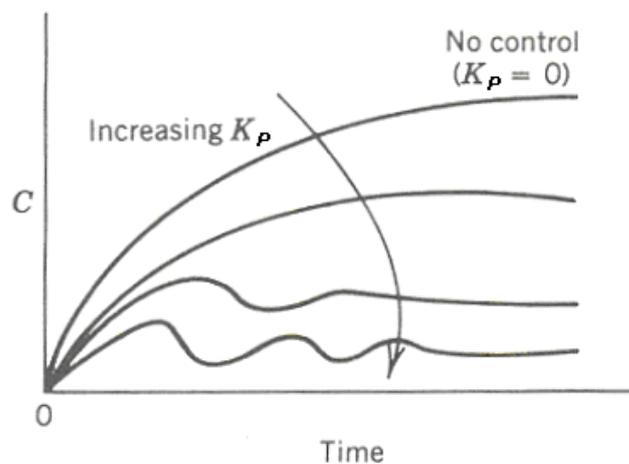
As respostas mostradas na figura a seguir ilustram o comportamento típico de um sistema controlado após a introdução de uma perturbação externa em degrau. A variável controlada  $c$  é mostrada como um desvio em relação ao seu valor estacionário antes da ação da perturbação. Se o sistema opera em malha aberta, o sistema exemplificado reage lentamente até que a saída atinja um novo valor estacionário. O controlador proporcional torna a resposta mais rápida e reduz o erro estacionário. A adição de um termo integral elimina o erro estacionário, mas tende a fazer com que a resposta fique mais oscilatória. A inclusão de um termo derivativo reduz tanto a intensidade das oscilações como o tempo de resposta. É oportuno mencionar que o uso de controladores P, PI ou PID nem sempre produz respostas oscilatórias do sistema – isto depende não apenas dos valores particulares adotados para os parâmetros  $K_C$ ,  $T_i$  e  $T_D$ , como também da dinâmica do sistema a controlar.



**Figura 1.15 Respostas típicas de um controlador com termos PID**

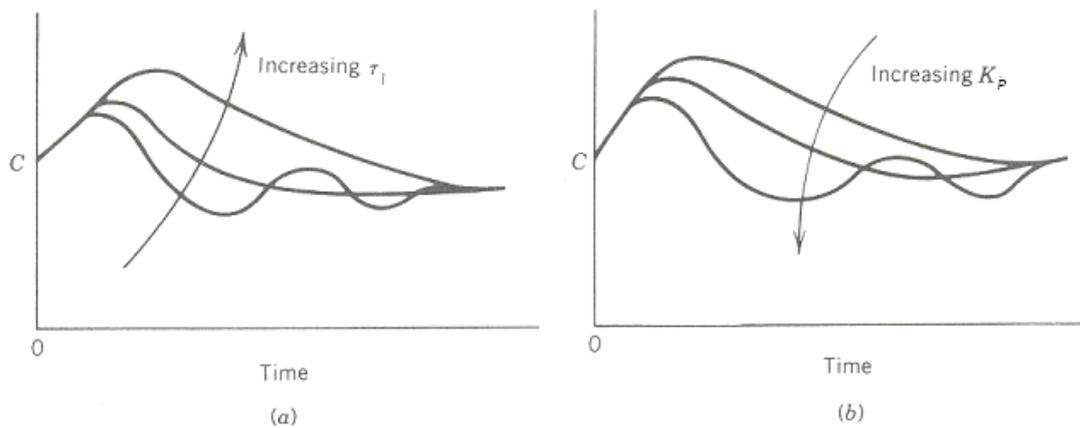
Os efeitos qualitativos de mudar os valores individuais dos parâmetros do controlador são mostrados nas três figuras a seguir.

Em geral, o aumento do ganho  $K_p$  do controlador tende a produzir uma resposta mais rápida, mas valores elevados do ganho podem provocar oscilações excessivas na resposta ou mesmo causar a instabilidade do sistema. Assim, “valores intermediários” de  $K_p$  em geral produzem o “melhor” controle. Estas considerações se aplicam também aos controladores PI e PID.



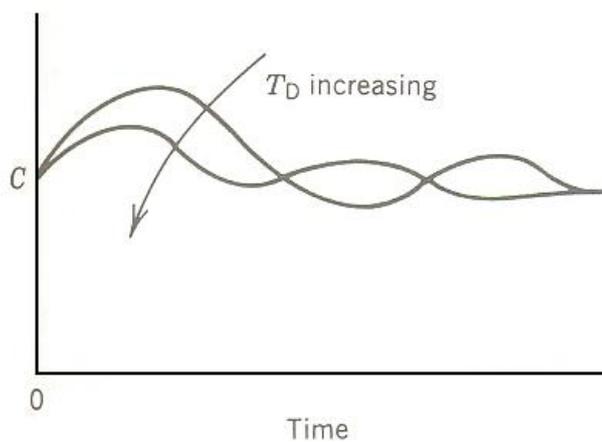
**Figura 1.16 Aumento do ganho proporcional**

O aumento do tempo integral  $T_i$  normalmente faz com que os controladores PI e PID se tornem mais conservadores, conforme mostra a figura abaixo. Teoricamente, o erro estacionário é eliminado para todos os valores de  $T_i > 0$ , mas para valores muito altos deste parâmetro, a variável controlada retorna ao *set point* muito lentamente após uma mudança brusca no *set point* ou a ocorrência de uma perturbação externa.



**Figura 1.17 Aumento do tempo integral e do ganho proporcional**

É um pouco mais difícil generalizar a respeito do efeito do tempo derivativo  $T_D$ . Para valores pequenos de  $T_D$ , seu aumento tende a melhorar a resposta reduzindo o desvio máximo, o tempo de resposta e a intensidade das oscilações, conforme mostrado na figura abaixo. Por outro lado, se  $T_D$  é muito grande, o ruído de medida da variável controlada tende a ser amplificado e a resposta pode se tornar oscilatória. Então, um valor “intermediário” de  $T_D$  é desejável.



**Figura 1.18 Aumento do tempo derivativo**

## 2 Sintonia de Controladores

### 2.1 Introdução

Uma vez que um sistema de controle esteja instalado, os ajustes dos parâmetros do controlador devem ser realizados até que o desempenho do sistema seja considerado satisfatório. Esta atividade é chamada de **sintonia do controlador** ou **sintonia no campo**. Como na prática a sintonia é muitas vezes realizada por tentativa e erro, essa tarefa pode ser aborrecida e demorada. Por isso, é desejável dispor-se de boas estimativas preliminares dos parâmetros do controlador. Uma boa estimativa inicial pode ser sugerida por experiência prévia com sistemas de controle semelhantes.

Nos casos em que se dispõe de um modelo matemático para o sistema ou mesmo de sua resposta em frequência, métodos de projeto baseados na teoria de controle podem ser utilizados. Mas, mesmo nestes casos, o ajuste no campo pode ser necessário para se garantir a sintonia fina do controlador, principalmente se o modelo disponível do sistema é incompleto ou não muito preciso.

### 2.2 Sintonia por Tentativa e Erro

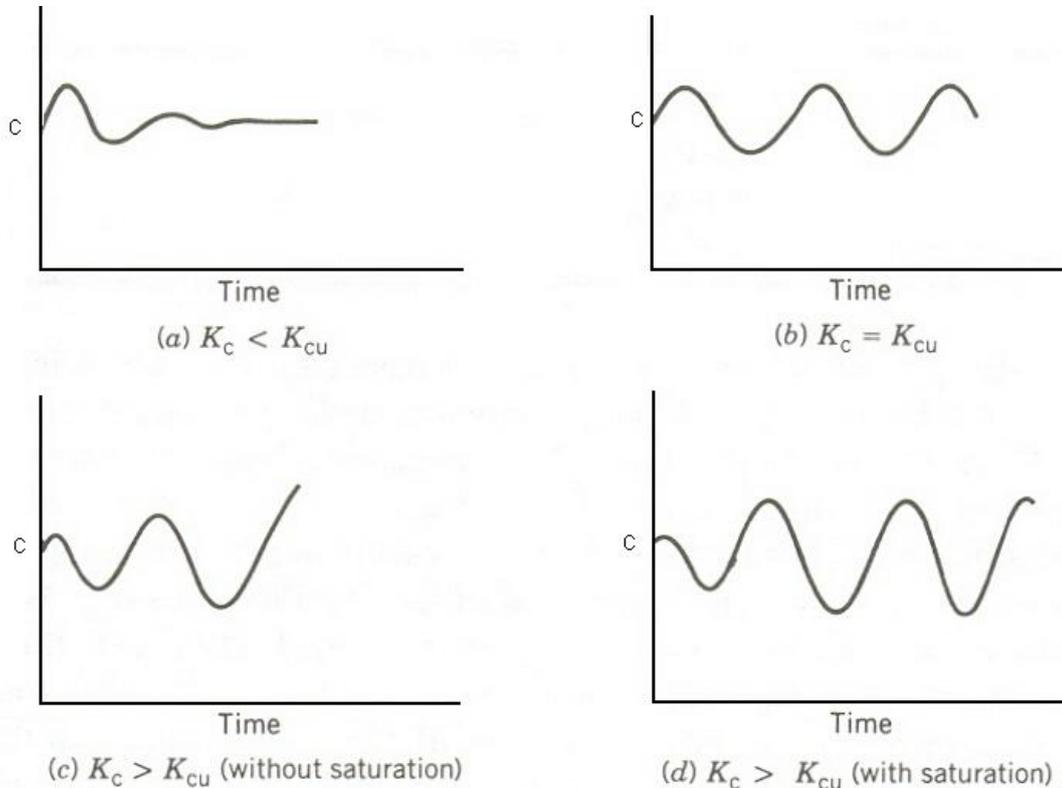
A sintonia dos controladores no campo é freqüentemente realizada por meio de um processo de tentativa e erro sugerido pelo fabricante do controlador. Um procedimento típico de sintonia de controladores PID, realizado em malha fechada, é o seguinte:

1. Elimine os termos integral e derivativo escolhendo  $T_I$  com seu valor máximo e  $T_D$  com seu valor mínimo.
2. Atribua a  $K_P$  um valor baixo e coloque o controlador no modo automático.
3. Aumente o ganho  $K_P$  em pequenos passos até que ocorra uma oscilação mantida após uma pequena mudança no *set point* ou na perturbação. O termo oscilação mantida deve ser entendido como uma oscilação que se mantém com amplitude constante.
4. Reduza então  $K_P$  pela metade.
5. Diminua  $T_I$  em pequenos passos até observar novamente a ocorrência de uma oscilação continuada. Fixe então  $T_I$  em 3 vezes este valor.
6. Aumente  $T_D$  também em pequenos passos até que ocorra novamente uma oscilação mantida. Faça então  $T_D$  igual a 1/3 deste valor.

O valor de  $K_P$  que se obtém no passo 3 é chamado de **ganho supremo** (*ultimate gain*), sendo denotado por  $K_{PU}$ .

Ao realizar o procedimento acima é importante que a saída do controlador não sature. Se houver saturação, será possível ocorrer uma oscilação mantida ainda que  $K_P > K_{PU}$ .

A figura abaixo mostra resultados típicos de aplicação do procedimento acima a um sistema.



**Figura 2.1 Sintonia por tentativa e erro**

Se  $K_P < K_{PU}$ , a resposta de malha fechada  $c(t)$  normalmente é super amortecida ou levemente oscilatória. O aumento de  $K_P$  até atingir o valor  $K_{PU}$  leva a uma oscilação mantida, conforme mostra o gráfico (b).

Se  $K_P > K_{PU}$ , o sistema em malha fechada é instável e teoricamente deverá apresentar uma resposta de amplitude ilimitada se a saturação do controlador for ignorada (veja o gráfico (c)). Entretanto, na prática, a saturação do controlador normalmente impede que a amplitude da resposta cresça indefinidamente, produzindo-se então uma oscilação mantida, conforme mostra o gráfico (d).

É óbvio que a oscilação mantida do gráfico (d) pode levar a um valor superestimado de  $K_{PU}$ . Por exemplo, suponhamos que a resposta do gráfico (d) ocorra quando o ganho do controlador tem o valor  $K_{P1}$  quando, na realidade,  $K_{PU} < K_{P1}$ . Esta superestimativa de  $K_{PU}$  pode ter como consequência um desempenho de baixa qualidade, uma vez que o ganho do controlador do passo 4 será demasiado elevado.

Quando se dispõe de um modelo do sistema, o valor de  $K_{PU}$  pode ser calculado teoricamente.

O processo de sintonia baseado na tentativa e erro apresenta alguns inconvenientes:

1. Se é necessário um número grande de tentativas para determinar  $K_{PU}$ ,  $T_I$  e  $T_D$  ou se o processo tem dinâmica lenta, esse é um processo um tanto demorado. O custo pode ser elevado por causa da baixa produtividade do processo ou da má qualidade da produção.
2. Pode-se objetar que esse procedimento é arriscado porque o sistema é levado até seu limite de estabilidade. Assim, por exemplo, se durante o procedimento de sintonia houver a ação de uma perturbação externa ou uma mudança qualquer no processo, pode ocorrer a instabilidade do sistema e esta provocar uma situação perigosa.
3. Alguns processos simples não apresentam um ganho supremo. Este é o caso, por exemplo, de sistemas modelados por funções de transferência de primeira ou segunda ordem.

### 2.3 Sintonia pelo Método da Oscilação Mantida

Os métodos de sintonia do tipo tentativa-e-erro baseados em oscilações mantidas podem ser considerados como variações do famoso método de Ziegler-Nichols. Este método clássico, realizado com o sistema em malha fechada, é provavelmente o mais conhecido dentre todos os métodos de sintonia de controladores PID, sendo muitas vezes chamado de **método do ganho supremo** (*ultimate gain method*).

Conforme descrição da seção anterior, o primeiro passo consiste na determinação experimental do ganho supremo  $K_{PU}$ . O período da oscilação mantida resultante é chamado de **período supremo** (*ultimate period*) e será denotado aqui por  $P_U$ . Os ganhos do controlador PID são então calculados a partir de  $K_{PU}$  e  $P_U$  usando as relações de Ziegler-Nichols que constam na tabela abaixo. As regras de sintonia do método de Ziegler-Nichols foram obtidas empiricamente com o propósito de garantirem uma taxa de decaimento de  $\frac{1}{4}$ .

**Tabela 4.1 Método de Ziegler e Nichols**

Controlador	$K_P$	$T_I$	$T_D$
<b>P</b>	$0.50K_{PU}$	-----	-----
<b>PI</b>	$0.45K_{PU}$	$P_U / 1.2$	-----
<b>PID</b>	$0.60K_{PU}$	$P_U / 2.0$	$P_U / 8.0$

Este método tem sido amplamente utilizado na indústria e serve como uma base para a comparação de esquemas de controle diferentes. Entretanto, o método deve ser usado com algum cuidado, pois os resultados nem sempre são satisfatórios.

Note que o método de Ziegler-Nichols acima determina para o ganho proporcional um valor que é metade do ganho limite de estabilidade o que significa que a margem de segurança

nesse caso é razoável. Quando o termo integral é adicionado, o ganho proporcional é reduzido de  $0.50K_{PU}$  para  $0.45K_{PU}$ , o que denota o caráter desestabilizante da ação integral. Por outro lado, quando o termo derivativo é incluído em seguida, o ganho proporcional é aumentado para  $0.60K_{PU}$ , o que indica a natureza estabilizante da ação derivativa.

Dependendo da aplicação, a oscilação resultante desses ajustes de ganhos pode ser insatisfatória para mudanças de *set point*. Neste caso, recomenda-se utilizar o método de Ziegler-Nichols modificado, com os ajustes indicados na tabela abaixo.

**Tabela 4.2 Método de Ziegler e Nichols modificado**

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
<b>Ziegler-Nichols original</b>	$0.60K_{PU}$	$P_U/2$	$P_U/8$
<b>Com sobressinal</b>	$0.33K_{PU}$	$P_U/2$	$P_U/3$
<b>Sem sobressinal</b>	$0.20K_{PU}$	$P_U/2$	$P_U/3$

Embora sejam largamente empregados, os métodos de Ziegler-Nichols têm algumas das mesmas desvantagens do método por tentativa e erro da seção anterior. Contudo, o método de Ziegler-Nichols é de aplicação mais rápida, uma vez que requer apenas um experimento com o sistema.

É oportuno mencionar que os ganhos indicados nas duas tabelas anteriores devem ser considerados apenas como uma primeira aproximação para o processo de ajuste. Normalmente eles devem ser seguidos de um processo experimental de sintonia fina por tentativa e erro.

Para exemplificar, consideremos o sistema dado por

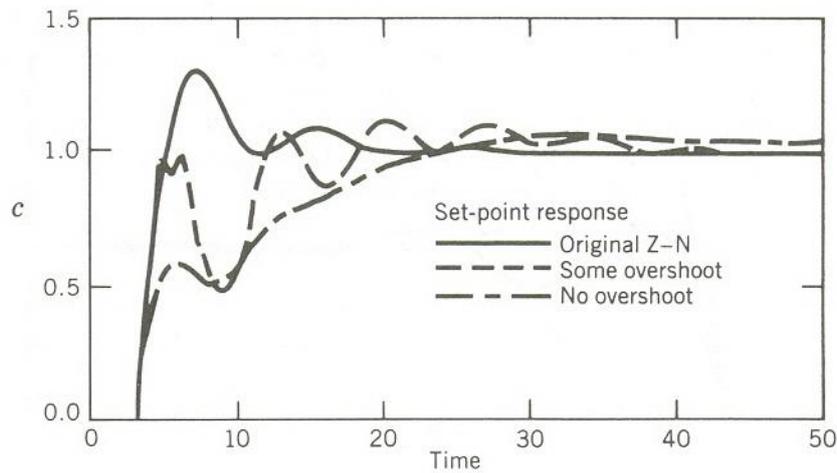
$$G(s) = \frac{4e^{-3.5s}}{7s + 1}.$$

Por tentativa e erro, obtêm-se  $K_{PU} = 0.95$  e  $P_U = 12$ . A aplicação dos métodos de Ziegler-Nichols original e modificados produz os resultados da tabela abaixo.

**Tabela 4.3 Aplicação do Método de Ziegler e Nichols**

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
<b>Ziegler-Nichols original</b>	0.57	6.0	1.5
<b>Com sobressinal</b>	0.31	6.0	4.0
<b>Sem sobressinal</b>	0.19	6.0	4.0

As respostas a degraus de referência nos *set points* são mostradas na figura abaixo.

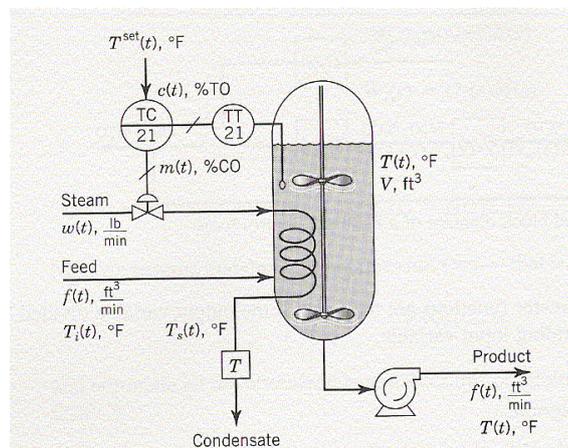


**Figura 2.2 Resposta a variação em set point**

Verifica-se um sobressinal menor para os métodos modificados, mas mesmo no caso “Sem sobressinal” não ocorre a eliminação completa do sobressinal. É até surpreendente que o caso “Com sobressinal” produza uma resposta mais oscilatória que a versão original do método, a despeito do valor menor do ganho  $K_P$  - esta anomalia deve-se ao valor mais elevado do parâmetro  $T_D$ .

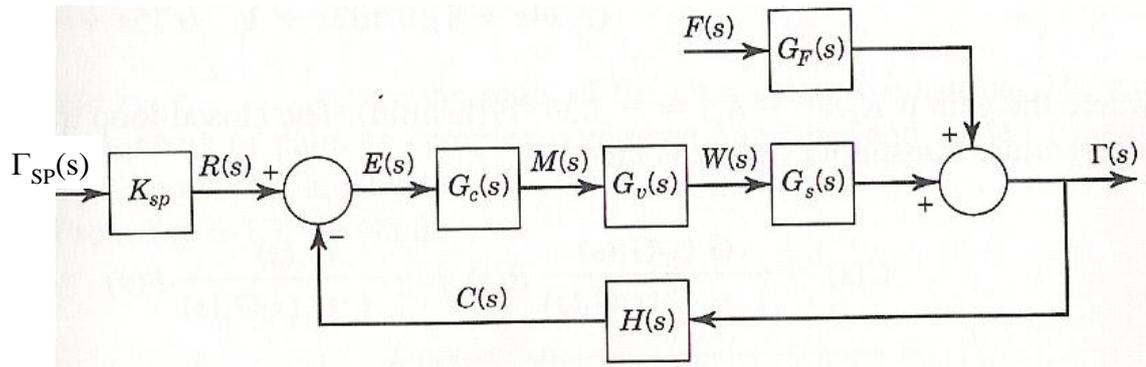
Em resumo, pode-se dizer que o ajuste pelo método de Ziegler-Nichols original tende a produzir respostas oscilatórias. O método de Ziegler-Nichols modificado tende a ser mais conservador, mas não elimina necessariamente o sobressinal.

Exemplo: Controle de temperatura de um tanque. O tanque agitado, esquematizado na figura abaixo, é usado para realizar a pré-mistura de componentes. O controle de temperatura é importante, pois altas temperaturas podem causar a decomposição do produto, bem como baixas temperaturas podem resultar uma mistura incompleta. O tanque é aquecido por vapor d’água circulando pelo trocador de calor, e o controle é feito por meio de um PID manipulando a abertura da válvula de vapor.



**Figura 2.3 Controle de temperatura em tanque**

O sistema é modelado, utilizando-se as equações de transferência de calor e modelos simplificados para a dinâmica da válvula e do transmissor. O diagrama de blocos é apresentado na figura abaixo:



**Figura 2.4 Diagrama de blocos do tanque controlado**

Onde

$\Gamma_{SP}(s)$ : set point de temperatura

$K_{SP}$ : ganho do set-point (unitário)

$G_C(s)$ : Controlador PID

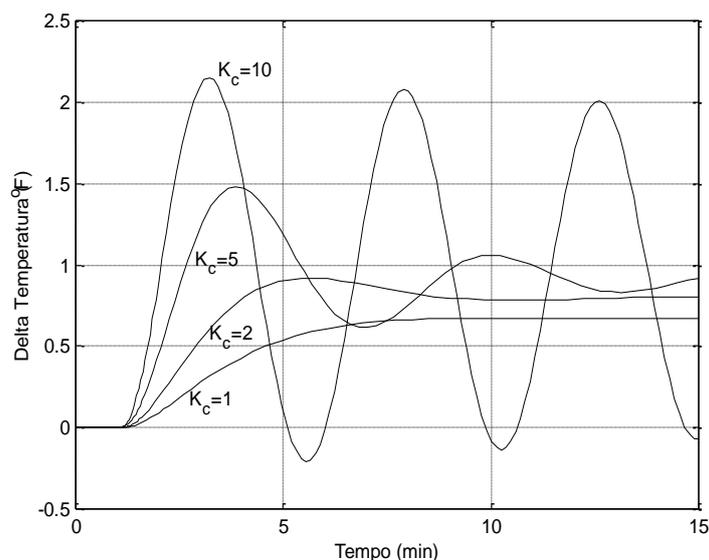
$G_V(s)$ : Função de transferência que modela a dinâmica da válvula de controle, sendo a entrada o sinal de controle  $M(s)$  (em %) e a saída a vazão de vapor pela mesma ( $W(s)$  – lb/min). Assume-se uma dinâmica de primeira ordem:  $G_V(s) = \frac{1,652}{0,2s + 1}$ , com o tempo dado em minutos.

$G_S(s)$ : Função de transferência que relaciona a vazão de vapor  $W(s)$  à temperatura  $\Gamma(s)$ , sendo dada por  $G_S(s) = \frac{0,73}{2,58s^2 + 5,45s + 0,62}$ .

$G_F(s)$ : Função de transferência que relaciona a vazão da mistura  $F(s)$  à temperatura  $\Gamma(s)$ , sendo dada por  $G_F(s) = \frac{-1,08s - 2,06}{2,58s^2 + 5,45s + 0,62}$ .

$H(s)$ : Função de transferência que modela a dinâmica dado transmissor / sensor de temperatura, sendo a entrada a temperatura da mistura  $\Gamma(s)$  ( $^{\circ}F$ ) e a saída em %. Assume-se uma dinâmica de primeira ordem:  $H(s) = \frac{1}{0,75s + 1}$ , com o tempo dado em minutos.

O sistema foi implementado no simulador Matlab/Simulink, a fim de se obter os valores do ganho supremo ( $K_{PU}$ ) e período supremo ( $T_U$ ). A resposta do sistema em malha fechada, para controle proporcional com ganho  $K_P$  variando de 1 a 10, é apresentada na figura abaixo. Pode-se ver que para ganho próximo a 10, o sistema assume uma oscilação mantida. Precisamente, após a realização de diversas simulações, chega-se a  $K_{PU} = 10.4$  e  $T_U = 4.6$ min.



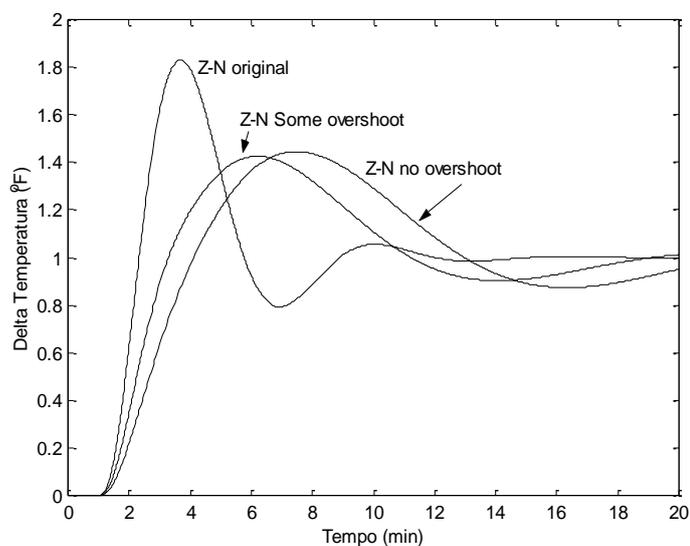
**Figura 2.5 Aumento do ganho proporcional**

Aplicou-se o Método de Ziegler e Nichols ao sistema, conforme os ganhos dados na tabela abaixo:

**Tabela 4.4 Aplicação do método de Ziegler e Nichols**

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
<b>Ziegler-Nichols original</b>	6,24	2,3min	0,58min
<b>Com sobressinal</b>	3,43	2,3min	1,53min
<b>Sem sobressinal</b>	2,08	2,3min	1,53min

Conforme é mostrado na figura a seguir, o método original resulta um sobressinal muito elevado (80%). A aplicação do método modificado (com sobressinal) resulta uma redução do sobressinal para 40% aproximadamente. O método modificado sem overshoot não resulta uma redução no sobressinal. Este fato deve-se ao caráter empírico do método de Ziegler e Nichols, que não garante o desempenho adequado para todos os tipos de processos.



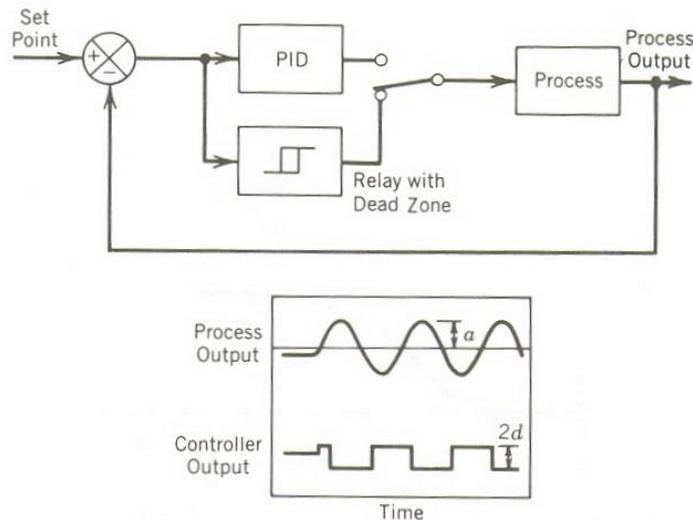
**Figura 2.6 Resposta em malha fechada**

## 2.4 Sintonia por Autotuning

Há um método de sintonia automática devido a Aström e Hägglund que pode ser aplicado como alternativa ao método de Ziegler-Nichols. Esse método tem as seguintes características:

1. O sistema é forçado por um relé que faz com que ele oscile com pequena amplitude. A amplitude da oscilação pode ser limitada ajustando-se a amplitude das variações da entrada.
2. Normalmente um único experimento em malha fechada é suficiente para se encontrar o modelo dinâmico, sendo que o experimento não exige conhecimento a priori a respeito do modelo do sistema.
3. Como o experimento é realizado com o sistema em malha fechada, ele também pode ser aplicado a sistemas instáveis em malha aberta.

O processo de sintonia automática usa um relé com uma zona morta para gerar as oscilações do sistema, conforme ilustrado pela figura abaixo.



**Figura 2.7 Auto-sintonia**

O valor de  $P_U$  é obtido simplesmente medindo-se o período da oscilação.

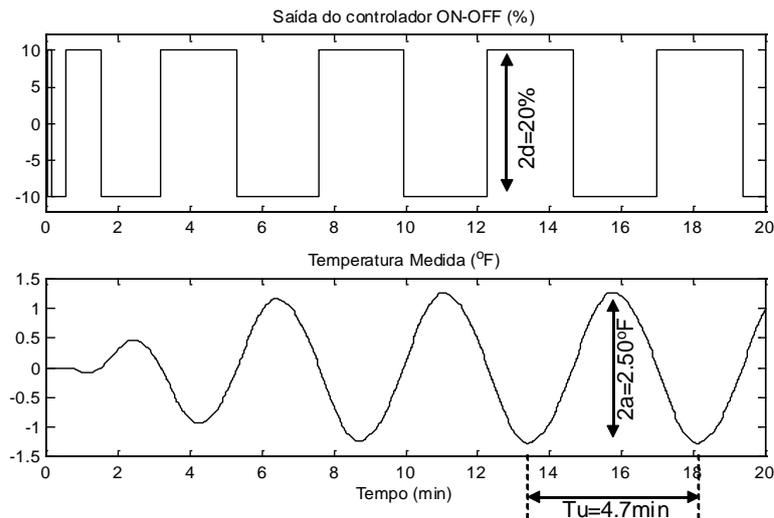
O ganho supremo é dado por

$$K_{PU} = \frac{4d}{\pi a},$$

onde  $d$  é a amplitude do relé ajustada pelo operador e  $a$  é amplitude medida da oscilação do sistema.

Os valores dos ganhos do controlador são obtidos utilizando-se a mesma tabela do método de Ziegler-Nichols original.

Aplicou-se o método da sintonia automática para o problema do tanque aquecido, considerado na seção anterior. Para tanto, substituiu-se o controlador PID por um controlador ON-OFF, com zona morta pequena. A saída do controle, bem como a medida de temperatura, são apresentadas na figura abaixo:



**Figura 2.8 Aplicação do método de auto-sintonia ao tanque aquecido**

Como visto, o período supremo obtido foi de 4,7min, muito próximo ao obtido por meio de simulações, na seção anterior (o valor obtido havia sido 4,6min). Além disso, o ganho supremo  $K_{PU}$  será (lembre-se que o range de temperatura é de 100°F):

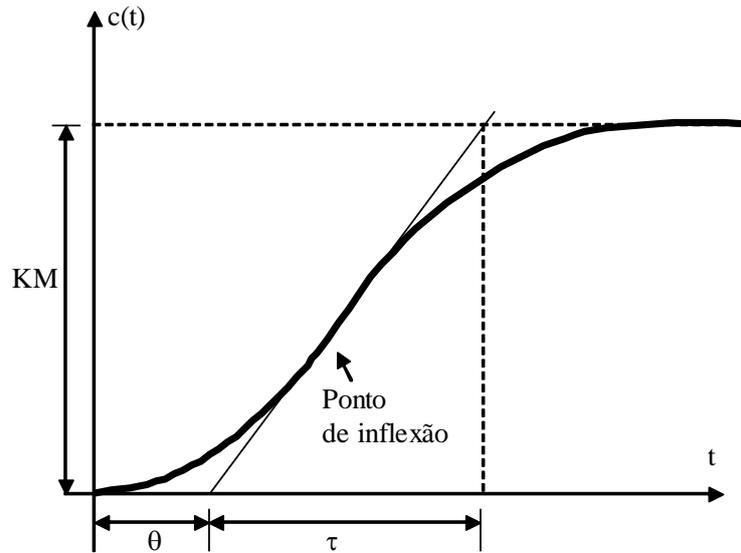
$$K_{PU} = \frac{4.10\%}{\pi(2.50\%/2)} = 10,2$$

muito próximo ao valor obtido na seção anterior (10,4).

## 2.5 Sintonia pelo Método da Curva de Reação do Sistema

Este método também foi proposto por Ziegler e Nichols para a sintonia *on-line* de controladores. Ele se baseia num único teste experimental que deve ser realizado com o sistema em malha aberta (controlador no modo manual).

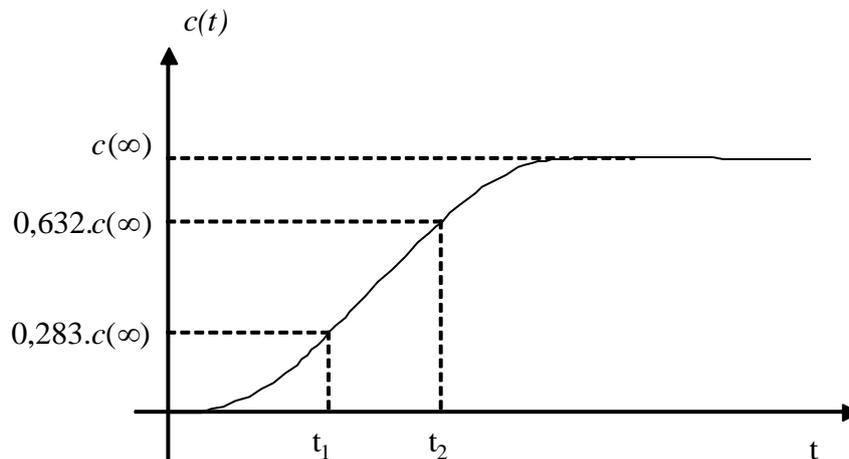
Produz-se um sinal do tipo degrau com amplitude  $M$  na saída do controlador e a resposta  $c(t)$  do sistema é registrada. O gráfico desta resposta a degrau é chamada de **curva de reação** do sistema. O método se aplica apenas no caso em que a resposta a degrau da planta em malha aberta tem o aspecto indicado na figura abaixo, típica de um sistema de primeira ordem com atraso.



**Figura 2.9 Curva de reação**

$\theta$  e  $\tau$  são chamados na literatura, respectivamente, de tempo de retardo e constante de tempo. O ganho do sistema é calculado, simplesmente, por  $K = c(\infty)/M$ , onde M é a amplitude do sinal degrau de entrada.

Muitas vezes, a determinação da tangente da curva de reação, e por conseqüência dos tempos  $\theta$  e  $\tau$ , possui grande incerteza. Nestes casos, podem-se utilizar métodos de aproximação entre a resposta de um sistema de primeira ordem com atraso e a curva de reação do sistema. Um destes métodos se baseia na definição dos tempos  $t_1$  e  $t_2$ , nos quais a curva de reação atinge  $0,283.c(\infty)$  e  $0,632.c(\infty)$  respectivamente.



**Figura 2.10 Método para identificação dos parâmetros da curva de reação**

Pode-se mostrar que uma boa aproximação para T e L é dada por:

$$\tau = \frac{3}{2}(t_2 - t_1) \text{ e } \theta = t_2 - \tau$$

Os valores dos parâmetros do compensador devem ser escolhidos conforme indicado na tabela a seguir, segundo Ziegler e Nichols.

**Tabela 4.5 Método de Ziegler e Nichols para Curva de Reação**

Controlador	$K_P$	$T_I$	$T_D$
<b>P</b>	$\frac{1}{K} \frac{\tau}{\theta}$	$\infty$	0
<b>PI</b>	$0,9 \frac{1}{K} \frac{\tau}{\theta}$	$\theta/0.3$	0
<b>PID</b>	$1,2 \frac{1}{K} \frac{\tau}{\theta}$	$2\theta$	$0.5\theta$

Essas relações para a sintonia do controlador foram obtidas empiricamente com o objetivo de conseguir uma taxa de decaimento da ordem de  $\frac{1}{4}$ .

De forma semelhante, também com embasamento empírico, Cohen e Coon desenvolveram fórmulas para os ganhos de controle, também com objetivo de obter decaimento  $\frac{1}{4}$  em malha fechada:

**Tabela 4.6 Método de Cohen e Coon para Curva de Reação**

Controlador	$K_P$	$T_I$	$T_D$
<b>P</b>	$\frac{1}{K} \frac{\tau}{\theta} [1 + \theta/3\tau]$	$\infty$	0
<b>PI</b>	$\frac{1}{K} \frac{\tau}{\theta} [0,9 + \theta/12\tau]$	$\frac{\theta[30 + 3(\theta/\tau)]}{9 + 20(\theta/\tau)}$	0
<b>PID</b>	$\frac{1}{K} \frac{\tau}{\theta} \left[ \frac{16\tau + 3\theta}{12\tau} \right]$	$\frac{\theta[32 + 6(\theta/\tau)]}{13 + 8(\theta/\tau)}$	$\frac{4\theta}{11 + 2(\theta/\tau)}$

O método da curva de reação do processo apresenta as seguintes vantagens:

1. É preciso realizar apenas um único experimento, não sendo necessário um processo de tentativa e erro.
2. Os parâmetros do controlador são calculados de maneira simples.

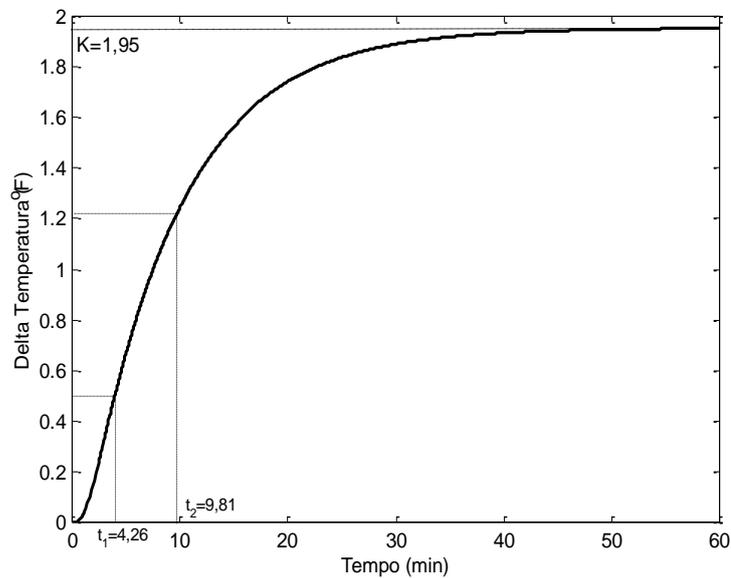
Contudo esse método apresenta algumas desvantagens:

1. O experimento deve ser realizado em malha aberta. Portanto, se uma mudança significativa nas condições de operação ocorre durante o teste, nenhuma ação corretiva é executada e os resultados podem ser bastante distorcidos.
2. A obtenção precisa dos parâmetros  $\theta$  e  $\tau$  pode ser difícil se a medida da resposta do sistema se apresenta afetada de ruído ou se um simples registrador de papel é utilizado.
3. Este método tende a ser sensível aos erros de calibração do controlador, em oposição ao método de Ziegler-Nichols da oscilação mantida, que é menos

sensível a erros de calibração em  $K_P$ , uma vez que neste caso o ganho é ajustado durante o experimento.

4. A resposta do sistema tende a ser oscilatória, dado que o método foi desenvolvido para produzir uma taxa de decaimento de  $\frac{1}{4}$ .
5. O método não se aplica a sistema que tenham uma resposta oscilatória em malha aberta uma vez que esta não tem a forma padrão apresentada na figura anterior.
6. O método apresenta bons resultados apenas quando a relação  $\theta/\tau$  estiver entre 0,1 e 0,5.

Vamos aplicar o método da curva de reação ao exemplo do tanque aquecido, considerado nas seções anteriores. Aplicando-se um degrau unitário na entrada do sistema, apresenta-se abaixo a curva da temperatura medida:



**Figura 2.11 Curva de reação para o tanque aquecido**

Pode-se calcular, portanto:

$$\tau = \frac{3}{2}(t_2 - t_1) = 8,33\text{min} \quad , \quad \theta = t_2 - T = 1,48\text{min}, \text{ com } K=1,95.$$

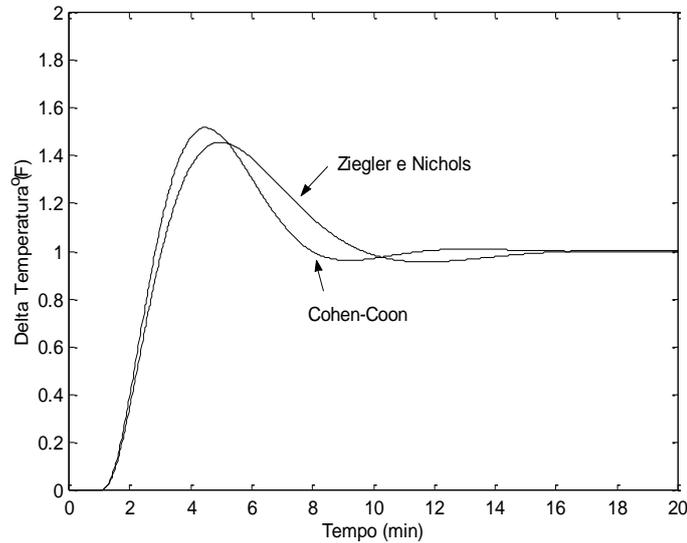
Assim, projetaram-se controladores pelo método de Ziegler e Nichols e Cohen-Coon. Os ganhos são dados na tabela abaixo:

**Tabela 4.7 Métodos da curva de reação para o tanque aquecido**

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
--	-------	-------	-------

<b>Ziegler-Nichols</b>	3,46	2,96min	0,74min
<b>Cohen-Coon</b>	3,97	3,39min	0,52min

As respostas em malha fechada, para ambos os controladores, são apresentadas na figura abaixo. Pode-se ver que o desempenho de ambos é semelhante, sendo o método de Ziegler e Nichols ligeiramente mais lento apresentando, porém, um menor sobressinal.



**Figura 2.12 Resposta em malha fechada**

## 2.6 Sintonia Baseada em Minimização da Integral do Erro

Utilizando-se o modelo de primeira ordem com atraso, obtido por meio da curva de reação do sistema (ou por meio de modelagem ou ajuste numérico), podem-se estimar ganhos para o controlador PID de forma a minimizar critérios baseados no erro de controle, diferentemente do método visto na seção 8.5 cujo objetivo é garantir a taxa de decaimento em  $\frac{1}{4}$ .

Os critérios mais usuais:

### Integral do valor absoluto do erro (IAE)

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

### Integral ponderada pelo tempo do valor absoluto do erro (ITAE)

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

Pode-se ver que o critério de minimização baseado na integral ITAE penaliza mais fortemente erros que persistem por longo tempo, após a aplicação do distúrbio ou mudança de set-point.

Os ganhos de controle para minimizar os critérios acima, considerando-se o erro devido a distúrbio ou mudança de set point, são dados por:

**Tabela 4.8 Métodos de minimização de integral IAE e ITAE**

Tipo	Ação	IAE		ITAE	
		A	B	A	B
Distúrbio	P	1,435	-0,921	1,357	-0,947
	I	0,878	0,749	0,842	0,738
	D	0,482	1,137	0,381	0,995
Set point	P	1,086	-0,869	0,965	-0,855
	I	0,740	-0,130	0,796	-0,147
	D	0,348	0,914	0,308	0,929

Sendo:

$$\text{Ganho Proporcional } K_c = \frac{A}{K} \left( \frac{\theta}{\tau} \right)^B$$

$$\text{Tempo Integral } T_i = \frac{\tau}{A} \left( \frac{\theta}{\tau} \right)^B \text{ (para distúrbio) e } T_i = \frac{\tau}{A + B(\theta/\tau)} \text{ (para set point)}$$

$$\text{Tempo Derivativo } T_D = A\tau \left( \frac{\theta}{\tau} \right)^B$$

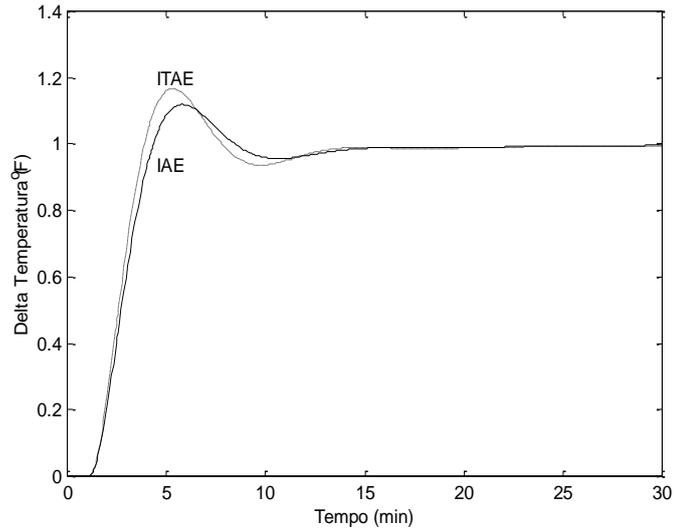
Deve-se notar que assume-se que a dinâmica do sistema a variações de set-point é idêntica à resposta devida ao distúrbio, o que nem sempre é verdadeiro. Quando isto não ocorrer, as formulações relativas ao distúrbio deixam de ser válidas.

Aplicaram-se os critérios de IAE e ITAE ao problema do tanque aquecido, considerado nas seções anteriores. Os ganhos obtidos foram:

**Tabela 4.9 Aplicação do método de IAE e ITAE para o tanque aquecido**

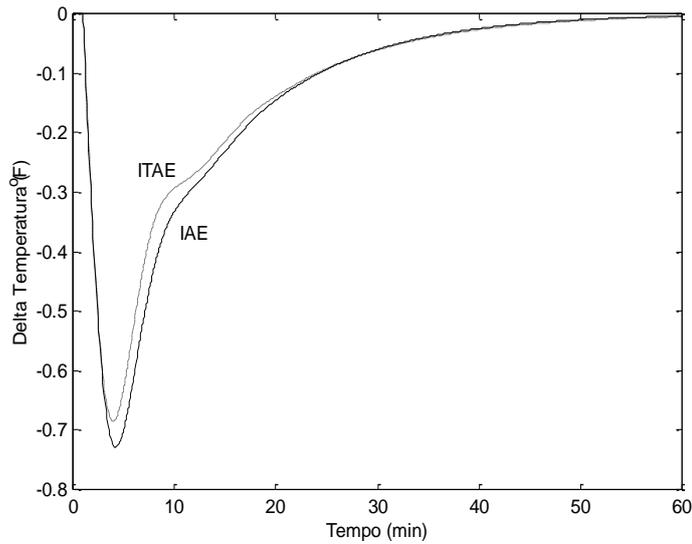
	$K_p$	$T_i$	$T_D$
<b>IAE set point</b>	2,49	11,6min	0,07min
<b>ITAE set point</b>	2,16	10,81min	0,06min
<b>IAE distúrbio</b>	3,61	2,60min	0,07min
<b>ITAE distúrbio</b>	3,56	2,77min	0,07min

A figura abaixo contém a resposta a variação de set point (unitária), com os controladores projetados para este efeito. Nota-se que os dois controladores apresentam bom desempenho, sendo o ITAE ligeiramente mais rápido, com maior sobressinal entretanto.



**Figura 2.13 Resposta em malha fechada para variação de set point**

A figura abaixo contém a resposta a distúrbio (unitário), com os controladores projetados para variação de set point. Nota-se que os controladores apresentam resposta muito lenta, já que não foram projetados para tal efeito.



**Figura 2.14 Resposta em malha fechada para distúrbio**

Refazendo o cálculo dos parâmetros, para o critério de distúrbio, a resposta a um distúrbio unitário é apresentada abaixo. Pode-se ver que há uma melhora em relação ao controlador anterior (projetado para set point), porém a resposta é muito oscilatória, tanto para o critério ITAE ou IAE. O que causa este efeito é o fato de a dinâmica relativa ao distúrbio ( $G_F$ ) ser diferente da relativa ao set-point ( $G_S$ ), como detalhado na seção 4.3.

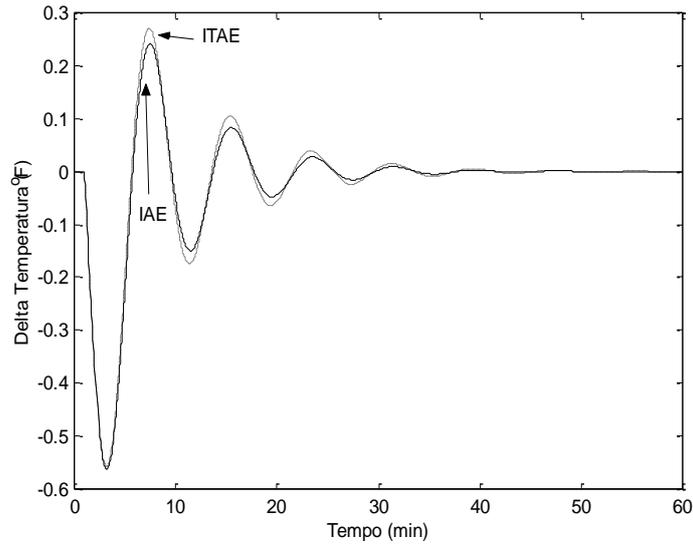


Figura 2.15 Resposta em malha fechada para distúrbio

## 2.7 Sintonia pelo método do IMC

Ver detalhes em Campos e Teixeira (2006).

Modelo do Processo	$K_p$	$T_i$	$T_d$
$\frac{K}{\tau s + 1}$	$\frac{\tau}{K \times \lambda}$	$\tau$	—
$\frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$	$\frac{(\tau_1 + \tau_2)}{K \times \lambda}$	$(\tau_1 + \tau_2)$	$\frac{\tau_1 \times \tau_2}{(\tau_1 + \tau_2)}$
$\frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$	$\frac{2\xi\tau}{K \times \lambda}$	$2\xi\tau$	$\frac{\tau}{2\xi}$
$\frac{K}{s}$	$\frac{1}{K \times \lambda}$	—	—
$\frac{K}{s(\tau s + 1)}$	$\frac{1}{K \times \lambda}$	—	$\tau$

Tabela 3.12 Sintonia do PID segundo [Rivera et al., 1986] para processos com tempo morto.

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$	Sugestão para o Desempenho
PID	$\frac{2\tau + \theta}{K \times (2\lambda + \theta)}$	$\tau + \left(\frac{\theta}{2}\right)$	$\frac{\tau \times \theta}{(2\tau + \theta)}$	$\frac{\lambda}{\theta} > 0.8$
PI	$\frac{(2\tau + \theta)}{K \times 2\lambda}$	$\tau + \left(\frac{\theta}{2}\right)$	—	$\frac{\lambda}{\theta} > 1.7$

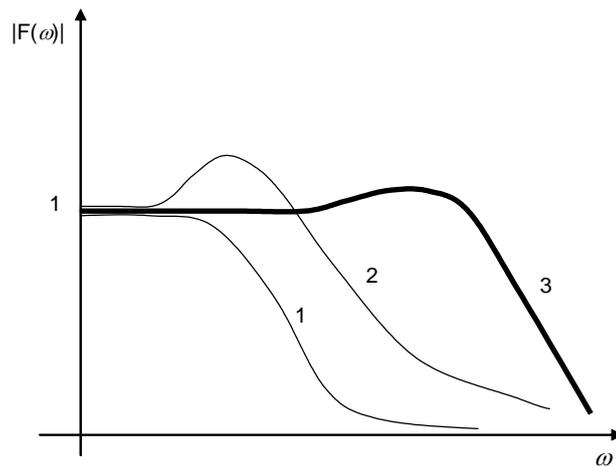
OBS:  $\lambda$  é estimativa da constante de tempo em Malha Fechada.

## 2.8 Sintonia pelo Método de Ótimo em Amplitude e Ótimo Simétrico

Os métodos descritos na presente seção são bastante utilizados em malhas de controle de sistemas elétricos, como por exemplo em drivers de servo-motores.

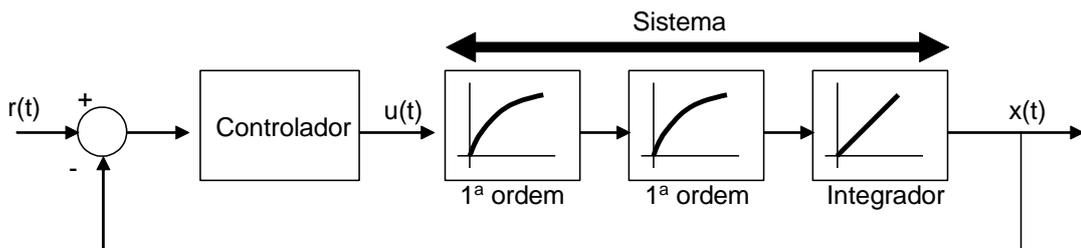
Sabe-se que a dinâmica de um sistema em malha fechada é considerada “boa” se a variável controlada atingir rapidamente o valor prescrito pela variável de comando (*set point*). Isto significa que a função de resposta em frequência em malha fechada deve ser próxima de 1 numa faixa de frequência tão larga quanto possível, com início na frequência nula. Como consequência, a variável controlada ainda não consegue seguir a referência no instante exato da aplicação de uma mudança em degrau, nem nos instantes imediatamente posteriores. Entretanto, logo depois, sob a ação de frequências menores, o módulo da resposta em frequência se aproxima consideravelmente de 1, e o erro entre a referência e a variável controlada se aproxima de 1.

Os métodos descritos na presente seção baseiam-se na idéia exposta acima, ou seja, aproximar o módulo da resposta em frequência em malha fechada do valor unitário, na maior faixa de frequência possível. A figura a seguir mostra uma função (3) que apresenta comportamento otimizado, segundo os conceitos expostos.



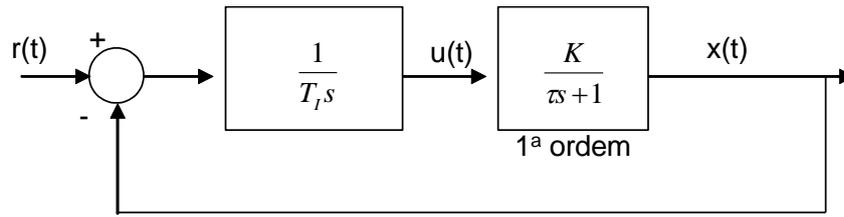
**Figura 2.16** Módulo das funções de transferência em malha fechada. Caso (3) otimizado.

O desenvolvimento matemático do processo de otimização é baseado na descrição do sistema a ser controlado como uma associação em série de elementos simples, como ganhos, sistemas de primeira ordem e integradores, tal como o exemplo de malha mostrado na figura a seguir.



**Figura 2.17** Malha de controle a ser otimizada

**Exemplo 1)** Para uma planta modelada como um sistema de primeira ordem, será projetado um controlador integral pelo método da ótima amplitude.



A função de transferência da planta  $G(s)$  e do controlador  $G_c(s)$  são dadas por:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad ; \quad G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{T_i s}$$

Assim, a função de transferência em malha fechada é dada por:

$$G_{MF}(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{GG_c}{1 + GG_c} = \frac{K}{\tau T_i s^2 + T_i s + K}$$

cujo módulo é dado por:

$$|G_{MF}(j\omega)| = \sqrt{\frac{K^2}{\omega^4 \tau^2 T_i^2 + \omega^2 (T_i^2 - 2\tau T_i K) + K^2}}$$

Assim, para que o módulo tenda a 1 nas baixas frequências, a expressão entre parênteses deve tornar-se 0, ou seja:

$$T_i^2 - 2\tau T_i K = 0 \Rightarrow T_i = 2\tau K$$

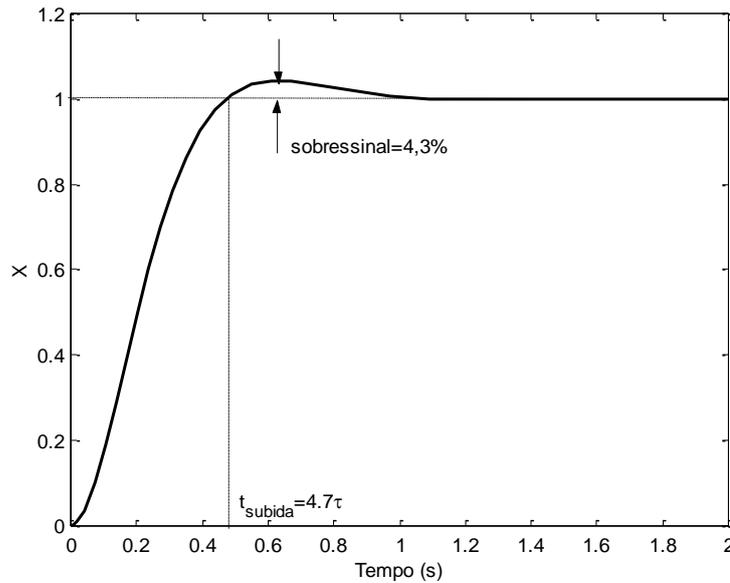
que é o valor do ganho integral de controle otimizado segundo o método da ótima amplitude.

De fato, para este valor de  $T_i$ , a função de transferência em malha fechada resulta:

$$G_{MF}(s) = \frac{1}{2\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1} = \frac{1/2\tau^2}{s^2 + s/\tau + 1/2\tau^2}$$

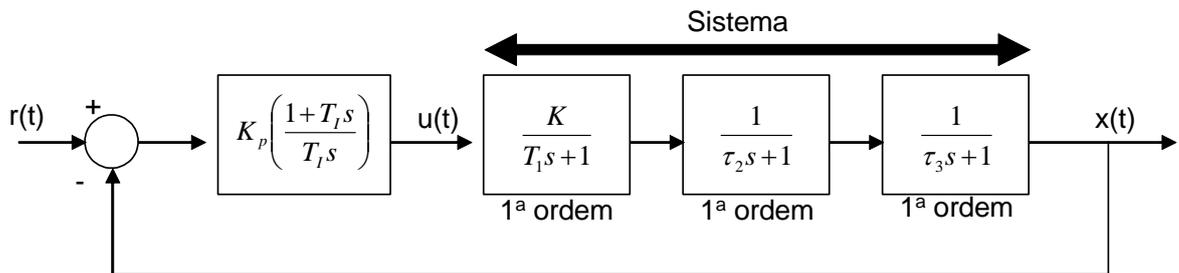
que equivale a um sistema de 2ª ordem, com frequência natural  $\omega_N = 1/\tau\sqrt{2}$  e amortecimento  $\zeta = 1/\sqrt{2} = 0,707$ .

Seja um sistema com  $K=1$  e  $\tau=0,1s$ , o ganho integral resultante pelo método acima é  $T_i = 0,2$ . A simulação do sistema em malha fechada é apresentada na figura a seguir. Pode-se mostrar que o sobressinal, para o fator de amortecimento resultante ( $\zeta = 0,707$ ) é de 4,7%. O tempo de subida é de  $4,7\tau$  e o tempo de estabilização 2% é de  $8,4\tau$ .



**Figura 2.18 Simulação do sistema com controle I, otimizado pelo método da ótima amplitude**

**Exemplo 2)** Considera-se agora um sistema com diversas constantes de tempo pequenas ( $\tau_2, \tau_3, \dots$ ) associadas a uma constante de tempo grande ( $T_1$ ). Neste caso, será necessário um controlador PI, como será mostrado adiante.



Inicialmente, será utilizado o fato de que, caso o tempo integral  $T_i$  seja muito superior às constantes de tempo  $\tau_2, \tau_3, \dots$  (e de fato será, como veremos adiante), a associação destas diversas funções de primeira ordem com constantes de tempo pequenas é equivalente a um sistema de primeira ordem com constante de tempo  $\tau = \tau_2 + \tau_3 + \dots$ . Assim, a função de transferência em malha aberta é dada por:

$$G_{MA}(s) = K_P \left( \frac{1 + T_i s}{T_i s} \right) \cdot \frac{K}{T_i s + 1} \cdot \frac{1}{\tau s + 1}$$

Para compensar a constante de tempo  $T_1$ , ajusta-se o ganho integral  $T_i$  de forma a cancelar o pólo em  $-1/T_1$ , ou seja, impõe-se:

$$\boxed{T_i = T_1}$$

Esta expressão comprova a hipótese inicial que  $T_i$  seria muito maior que as constantes de tempo  $\tau_2, \tau_3, \dots$ . Após a compensação, a função em malha aberta fica dada por:

$$G_{MA}(s) = \frac{K_P K}{T_i s (\tau s + 1)}$$

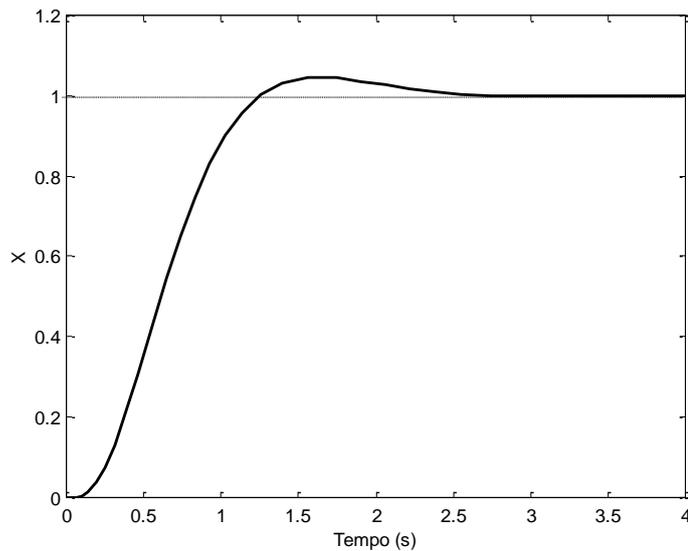
A função em malha fechada, fica, portanto:

$$G_{MF}(s) = \frac{K_p K}{K_p K + T_1 s + T_1 \tau s^2}$$

Novamente, calcula-se o módulo desta função e repete-se o procedimento utilizado no exemplo 1, que resulta a seguinte expressão para garantir módulo unitário na maior faixa de frequências:

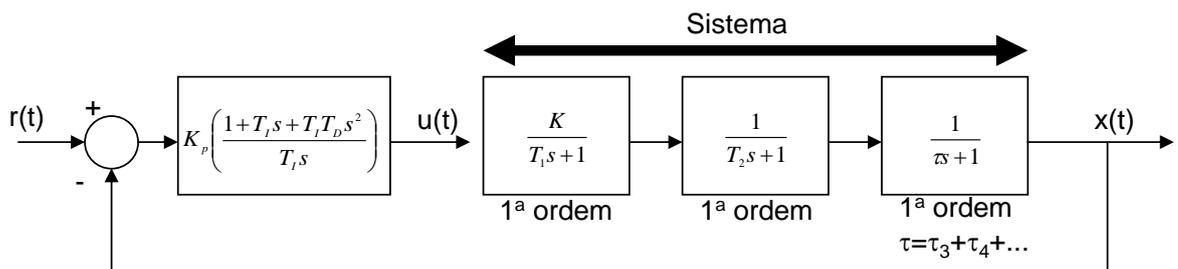
$$T_1^2 - 2\tau T_1 K K_p = 0 \Rightarrow K_p = \frac{T_1}{2\tau K}$$

Assim, obtêm-se os dois ganhos de controle necessários ( $K_p$  e  $T_i$ ). Considerando-se um sistema com ganho  $K=2$  e constantes de tempo  $T_1=2s$ ,  $t_2=0.1s$ ,  $t_3=0.05s$  e  $t_4=0.15s$ . Os ganhos do controlador PI serão, portanto,  $T_i=2$  e  $K_p=1,67$ . Pode-se mostrar que neste caso, assim como no exemplo 1, o sistema em malha fechada apresentará aproximadamente  $\omega_N = 1/\tau\sqrt{2}$  e amortecimento  $\zeta = 1/\sqrt{2} = 0,707$ . De fato, a simulação apresentada abaixo confirma estes cálculos:



**Figura 2.19 Simulação do sistema com controle PI, otimizado pelo método da ótima amplitude**

**Exemplo 3)** Considera-se agora um sistema com diversas constantes de tempo pequenas ( $\tau_3, \tau_4, \dots$ ) associadas a duas constantes de tempo grande ( $T_1$  e  $T_2$ ). Neste caso, será necessário um controlador PID, como será mostrado adiante.



Assim, novamente com o intuito de cancelar os pólos em  $-1/T_1$  e  $-1/T_2$ , faz-se:

$$1 + T_1s + T_1T_Ds^2 = (T_1s + 1)(T_2s + 1)$$

que fornece:

$$\boxed{T_i = T_1 + T_2} \quad ; \quad \boxed{T_D = T_1T_2/(T_1 + T_2)}$$

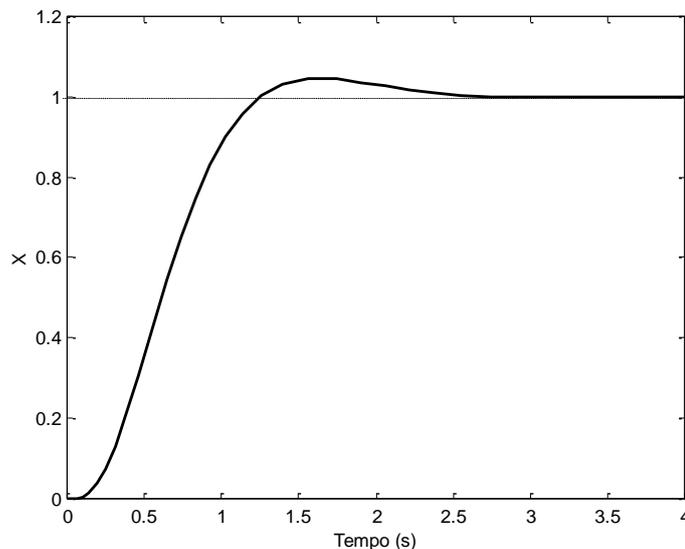
Assim, a função de transferência em malha aberta com os ganhos integral e derivativo calculados segundo as expressões acima resulta:

$$G_{MA}(s) = \frac{K_pK}{(T_1 + T_2)s(\tau s + 1)}$$

Seguindo o mesmo procedimento dos exemplos anteriores, obtém-se:

$$\boxed{K_p = \frac{T_1 + T_2}{2\tau K}}$$

Considerando-se um sistema com ganho  $K=2$  e constantes de tempo  $T_1=2s$ ,  $T_2=4s$ ,  $t_3=0.1s$ ,  $t_3=0.05s$  e  $t_4=0.15s$ . Os ganhos do controlador PID serão, portanto,  $T_i=6$ ,  $T_D=1,33$  e  $K_p=5$ . Pode-se mostrar que neste caso, assim como nos exemplos anteriores, o sistema em malha fechada apresentará aproximadamente  $\omega_N = 1/\tau\sqrt{2}$  e amortecimento  $\zeta = 1/\sqrt{2} = 0,707$ . De fato, a simulação apresentada abaixo confirma estes cálculos:



**Figura 2.20 Simulação do sistema com controle PID, otimizado pelo método da ótima amplitude**

### Conclusões:

- 1) Observe-se que um controlador PI é adequado para funções com duas constantes de tempo.
- 2) Controladores PID podem ser aplicados em sistemas com três constantes de tempo na função do processo da regulação em cascata.

- 3) Em resumo, o critério para otimização em amplitude consiste em eliminar as constantes de tempo mais elevadas deixando a menor ( $\tau$ )

**Exemplo:**  $G(s) = \frac{k_p}{(1+s\tau)(1+sT_1)(1+sT_2)}$

$$G_c(s) = \frac{(1+sT_1)(1+sT_2)}{2k_p \cdot \sigma \cdot s}$$

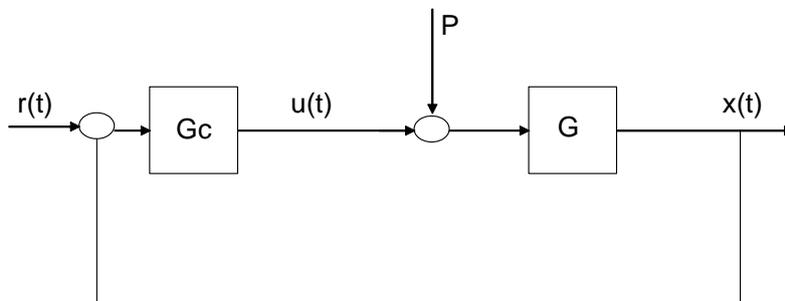
Logo:  $G_{MA}(s) = \frac{1}{2\sigma s(1+s\sigma)} = \frac{1}{2s^2\sigma^2 + 2\sigma s}$

Resultando a malha fechada:

$$\frac{G}{1+G} = \frac{1}{1+2\sigma s+2\sigma^2 s^2}$$

## Otimização em Simetria

Objetivo: Minimizar a presença da perturbação na variável de saída, da forma que o desvio provocado pela perturbação não comprometa o comportamento do sistema. Normalmente empregada para a malha externa do controle em cascata.



Conforme detalhado na apostila do Módulo I, mostra-se que o controlador projeto pelo método da otimização em simetria resulta:

1) Planta:  $G(s) = \frac{k_p}{sT_o(1+\sigma s)}$

Controlador PI:  $G_c(s) = \frac{(1+4\sigma s)}{4\sigma \cdot \frac{2k_p \cdot \sigma}{T_o} \cdot s}$

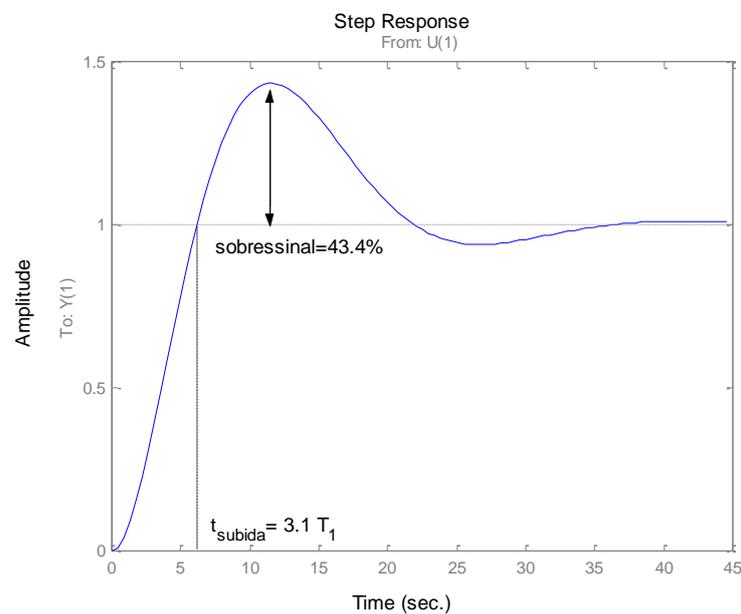
Resultando:  $G G_c(s) = \frac{(1+4\sigma s)}{8\sigma^2 \cdot s^2(1+\sigma s)}$

$$2) \text{ Planta: } G(s) = \frac{k_p}{sT_o(1+\sigma s)(1+T_2s)}$$

$$\text{Controlador PID: } G_c(s) = \frac{(1+4\sigma s)(1+T_2s)}{4\sigma \cdot \frac{2k_p \cdot \sigma}{T_o} \cdot s}$$

$$\text{Resultando: } GG_c(s) = \frac{(1+4\sigma s)}{8\sigma^2 \cdot s^2(1+\sigma s)}$$

Deve-se destacar que Quando utilizada a Otimização em Simetria, o sobressinal para entrada do grau é 43%, conforme ilustrado na resposta a degrau abaixo:

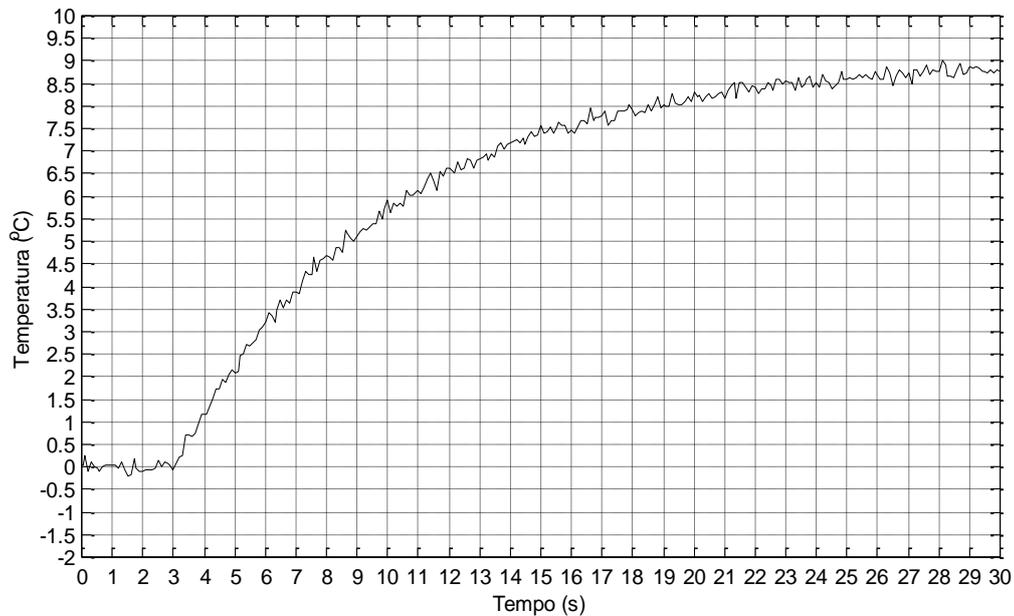


**Figura 2.21 Simulação do sistema com controle PI, otimizado pelo método do ótimo simétrico**

Para abaixar este sobressinal, coloca-se um pré filtro cancelando-se o numerador da função de transferência em malha fechada otimizada. O sobressinal cai para 8%.

## Exercícios

- 1) A curva abaixo representa a resposta a um degrau de amplitude 7%, aplicado diretamente na entrada de um processo térmico. O range do transmissor de temperatura é de 0-1000°C. Lembre-se que para o controlador, as entradas e saídas são dadas em %.



- a) Calcule os parâmetros  $\theta, \tau$  de um modelo de primeira ordem com atraso equivalente.
- b) Projete o controlador para o processo, usando os seguintes métodos:
1. Ziegler e Nichols P, PI, PID
  2. Método de Cohen-Coon PID
  3. Critério ITAE para variação de set-point PID
- 2) Um sistema possui função de transferência  $G(s) = 1/(s^2 + 2s + 26)$ . Mostre que nenhum dos métodos estudados de ajuste de PID aplicam-se a este sistema. Em seguida, calcule a função de transferência em malha fechada deste sistema realimentado por um PID, e obtenha os ganhos  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  para que o sistema em malha fechada apresente frequência natural de 2rad/s e amortecimento de 0,7.

### **3 Referências Bibliográficas**

CAMPOS, M.C.M.M., TEIXEIRA, H.C.G., Controles Típicos de Equipamento e Processos Industriais, Editora Edgard Blucher, 1ª Edição, 2006.

MURRIL, P.W Fundamentals of Process Control Theory, Instrument Society of América, 2ª. ed., 1991.

OGATA, K. Engenharia de Controle Moderno, Prentice-Hall do Brasil, 2ª. ed., 1990.

SEBORG, D.E.; EDGAR, T.F.; MELLICHAMP, D.A. Process Dynamics and Control: Wiley Series in Chemical Engineering, John Wiley & Sons, 1989.

SMITH, C.A.; CORRIPIO, A.B. Principles and practice of automatic process control, John Wiley & Sons, 2ª Edição, 1998.