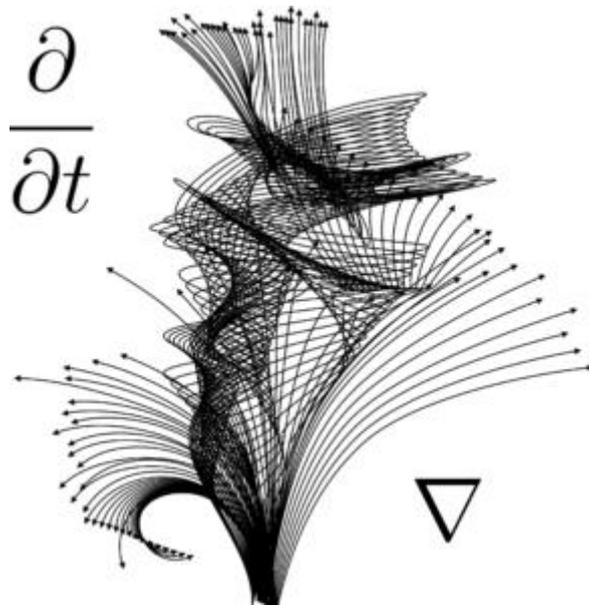


# **Equações diferenciais e a diferença para economistas Com MATLAB**



*Ricardo Luis Chaves Feijó*

# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>4</b>
<i>Solução completa da equação de primeira ordem e primeiro grau com coeficiente e termo constantes</i>	<b>5</b>
<b>Aplicação da teoria da equação de primeira ordem e primeiro grau com coeficiente e termo constantes</b>	<b>7</b>
<i>Modelo com a dinâmica do preço de mercado</i>	<b>7</b>
<b>Solução do Matlab para modelo com a dinâmica do preço de mercado</b>	<b>11</b>
<b>Aplicação da teoria da equação de primeira ordem e primeiro grau com coeficiente e termo variáveis</b>	<b>13</b>
<i>Solução completa da equação de primeira ordem e primeiro grau com coeficiente e termo variáveis</i>	<b>14</b>
<i>Equações diferenciais exatas</i>	<b>15</b>
<b>Análise gráfica das soluções dos problemas propostos usando-se o Simulink</b>	<b>16</b>
<b>Equações diferenciais não-lineares de primeira ordem e primeiro grau</b>	<b>32</b>
<i>Solução para equações exatas</i>	<b>32</b>
<i>Problema com variáveis separadas</i>	<b>32</b>
<i>Problema com variáveis separadas trocadas</i>	<b>34</b>
<b>Análise gráfica das soluções dos problemas propostos usando-se o Simulink</b>	<b>34</b>
<b>Equação de Bernoulli</b>	<b>36</b>
<b>Análise das soluções dos exercícios 6 e 7 usando o Simulink</b>	<b>39</b>
<b>Equação de Ricatti</b>	<b>42</b>
<b>Teoremas de existência de solução</b>	<b>45</b>
<b>Abordagem gráfico-qualitativa</b>	<b>46</b>
<i>Aplicação: modelo de crescimento de Solow</i>	<b>48</b>
<b>Equações diferenciais de ordem elevada</b>	<b>51</b>
<b>Equação diferencial de 2ª ordem com coeficientes e termo constantes</b>	<b>51</b>
<i>A função complementar</i>	<b>52</b>

<i>Estabilidade dinâmica de equilíbrio para os casos 1 e 2</i>	57
<b>Números complexo e funções circulares</b>	<b>55</b>
<i>Funções circulares</i>	56
<i>Relações de Euler</i>	61
<i>Representações alternativas de números complexos e teorema de Moivre</i>	62
<b>Análise do caso da raiz complexa</b>	<b>63</b>
<i>A trajetória temporal</i>	66
<i>Estabilidade dinâmica do equilíbrio</i>	68
<b>Modelo de mercado com expectativas de preço</b>	<b>68</b>
<i>Um modelo simplificado</i>	69
<b>Interação entre inflação e desemprego</b>	<b>72</b>
<i>A relação de Phillips com expectativas incorporadas</i>	73
<i>A trajetória temporal de <math>\pi</math>, a expectativa de inflação</i>	74
<b>Equações diferenciais com termo variável</b>	<b>76</b>
<i>Método de coeficientes indeterminados</i>	76
<b>Equações diferenciais lineares de ordem mais alta</b>	<b>82</b>
<b>Equações diferenciais de 2ª ordem com coeficiente e termo variáveis</b>	<b>85</b>
<b>Convergência e teorema de Routh</b>	<b>88</b>
<b>Equações a diferenças de 1ª ordem</b>	<b>91</b>
<i>Tempo discreto, diferenças e equações a diferenças</i>	91
<i>Método de solução</i>	91
<i>A estabilidade dinâmica de equilíbrio</i>	93
<i>Convergência ao equilíbrio</i>	94
<b>O modelo da teia de aranha</b>	<b>95</b>
<i>As teias de aranha</i>	96
<b>Um modelo de mercado com estoque</b>	<b>97</b>
<i>Interpretação gráfica</i>	99
<b>Equação a diferenças não-linear</b>	<b>100</b>
<i>Diagrama de fase</i>	100
<b>Mercado com um teto de preço</b>	<b>102</b>

<b>Equações a diferenças de ordens mais altas</b>	<b>103</b>
<b>Equações a diferenças de 2ª ordem com coeficientes constantes e termo constante</b>	<b>104</b>
<i>Função complementar</i>	<b>105</b>
<b>A convergência da trajetória temporal</b>	<b>121</b>
<b>Modelo de Samuelson para a interação multiplicador-acelerador</b>	<b>121</b>
<i>Convergência versus divergência</i>	<b>123</b>
<b>Inflação e desemprego em tempo discreto</b>	<b>126</b>
<i>Análise da trajetória da taxa de desemprego</i>	<b>128</b>
<i>Relação de Phillips de longo-prazo</i>	<b>129</b>
<b>Equação a diferenças de termo variável</b>	<b>130</b>
<b>Equação a diferenças lineares de ordens mais altas</b>	<b>132</b>
<b>Convergência e o teorema de Schur</b>	<b>133</b>
<b>Equações diferenciais e equações a diferenças simultâneas</b>	<b>135</b>
<i>A gênese de sistemas dinâmicos</i>	<b>135</b>
<i>A transformação de uma equação dinâmica de ordem alta</i>	<b>135</b>
<b>Resolvendo-se equações dinâmicas simultâneas</b>	<b>136</b>
<i>Notação matricial</i>	<b>137</b>
<b>Equações diferenciais simultâneas</b>	<b>139</b>
<b>Modelos dinâmicos de insumo-produto</b>	<b>140</b>
<i>Defasagem de tempo na produção</i>	<b>140</b>
<i>Excesso de demanda e ajuste de produção</i>	<b>141</b>
<i>Caso para tempo contínuo</i>	<b>142</b>
<b>Formação de capital</b>	<b>143</b>
<b>Modelo de Inflação-desemprego</b>	<b>144</b>
<i>Trajетórias de solução</i>	<b>145</b>
<b>Modelo inflação-desemprego em equações a diferenças simultâneas</b>	<b>147</b>
<i>Trajетórias de solução</i>	<b>147</b>
<b>Diagramas de fase de duas variáveis</b>	<b>148</b>
<i>Linhas de fluxo</i>	<b>150</b>
<b>Tipos de equilíbrio</b>	<b>151</b>

## Introdução

Equações do tipo diferencial são amplamente desenvolvidas e estudadas no campo das ciências exatas, em física, em engenharia etc. Mas também nas ciências sociais aplicadas, em especial na economia, encontram amplo emprego. Equações desse tipo são as que, além de variáveis dependentes e independentes, contém em seus termos as derivadas daquelas variáveis em relação a estas.

Seja  $x$  a variável independente. A expressão da derivada da variável dependente  $y$  em relação a ela,  $\frac{dy}{dx}$ , aparece então em pelo menos um dos termos que compõe esse tipo de equação. Como se trata de derivadas, estamos supondo que a relação entre  $x$  e  $y$  comporta uma bem comportada função de classe  $C1$ , isto é, que possua derivada contínua. A função  $y(x)$ , portanto, é suave ou *diferenciável* no domínio relevante do problema em questão<sup>1</sup>.

Em alguns contextos, entretanto, estamos interessados não na variação infinitesimal de  $y$ , mas na sua mudança entre duas datas vizinhas. Neste caso, interessa a variação discreta  $\Delta(y) = y_{t+1} - y_t$ . Ou seja, em como a variável  $y$  se altera entre dois instantes discretos  $t$  e  $t + 1$ . Neste âmbito, interessa relacionar essa variação discreta com as próprias variáveis  $x$  e  $y$  por meio de uma equação denominada de *equação a diferenças*. Equações que envolvam, em pelo um dos termos, a expressão  $\Delta(y)$ , ou termos com a variável dependente em diferentes pontos do tempo ( $y_{t+1}, y_t, \dots$ ), também são deste tipo.

Na primeira parte do livro, iremos examinar as equações diferenciais. Na segunda parte dele, aprofundaremos no estudo da família das equações a diferenças. Começamos, pois, pelo caso contínuo para funções bem-comportadas de classe  $Cn$ . O caso mais simples é o de equações diferenciais de primeira ordem. Dentre elas, a mais simples é a equação como termos e coeficientes constantes. O foco aqui é apresentar sumariamente a teoria, que pode ser vista com mais profundidade em livros-textos como Chiang e Wainwright, e Simon e Blume,<sup>2</sup> e partir logo para uma aplicação. A ênfase do livro é ensinar o uso de uma excelente ferramenta computacional na solução desses problemas práticos, o programa *Matlab*.

Veremos o funcionamento deste *software* em nível fundamental. Por enquanto, podemos adiantar que o Matlab oferece um ambiente na tela do computador que facilita a análise de processos e o desenho do padrão de soluções associado. O usuário deve operar uma linguagem de programação simples que expressa de um modo bem direto o simbolismo algébrico e as matrizes. O leitor deve se remeter a manuais introdutórios que explicam os dispositivos essenciais do programa. Uma dica, é consultar o manual da editora Cambridge, intitulado *A Guide to MATLAB for beginner and experienced users*.<sup>3</sup> Espera-se o leitor tenha o programa Matlab em seu computador pessoal. Se não tiver a

---

<sup>1</sup> Uma equação diferencial é dita *ordinária* quando existe apenas uma variável independente. Caso contrário, ela é dita uma equação diferencial a derivadas parciais.

<sup>2</sup> A. Chiang e K. Wainwright. Matemática para economistas. 4ª ed. Rio de Janeiro: Campus, 2006. C. P. Simon e L. Blume. Matemática para Economistas. Porto Alegre: Bookman, 2006.

<sup>3</sup> Brian R. Hunt, Ronald L. Lipsman, Jonathan M. Rosemberg. A Guide to MATLAB for Beginners and Experienced Users. Cambridge University Press. Third Edition. <[http://assets.cambridge.org/97811076/62223/frontmatter/9781107662223\\_frontmatter.pdf](http://assets.cambridge.org/97811076/62223/frontmatter/9781107662223_frontmatter.pdf)>

licença do produto, ele pode instalar a versão *demo*, que lhe dará, por um tempo, pleno uso da ferramenta.<sup>4</sup>

Iremos explicar o básico do MATLAB na medida em que estivermos resolvendo os exercícios. Melhor então começarmos pela parte teórica de equações diferenciais elementares. As mais simples delas são as equações diferenciais de primeira ordem com termo e coeficiente constante. A equação (1) representa esse tipo de equação:

$$\frac{dy}{dt} + ay = b \quad (1)$$

Na qual  $y$  é a varível dependente de  $t$ , que funciona como uma variável independente (antes chamada de  $x$ ).  $a$  e  $b$  são constantes. A primeira é o coeficiente e a segunda representa o termo constante. A equação é dita de primeira ordem porque envolve apenas a derivada primeira  $\frac{dy}{dt}$ , isto é, não apresenta as derivadas genéricas  $\frac{d^n y}{dt^n}$  para  $n > 1$ ,  $n$  inteiro. De fato, a  $n$  mais alta define a *ordem* da equação. A equação também é do tipo *linear* porque os termos com  $y^n$  e com  $\left(\frac{dy}{dt}\right)^n$  não apresentam  $n > 1$ , além de não existirem termos cruzados do tipo  $y \cdot \frac{dy}{dt}$ . O valor máximo de  $n$  inteiro define o *grau* da equação. Portanto, (1) trata-se de uma equação diferencial de 1ª ordem e 1º grau.

A equação do tipo (1) também é chamada de *equação diferencial linear*. Equações de 1º grau são equações lineares, mas nem sempre se emprega essa denominação a equações de 1ª ordem. Para entendermos melhor tal terminologia, adiantamos o caso mais geral de equações de 1ª ordem e 1º grau com coeficiente e termos variáveis,  $u(t)$  e  $\omega(t)$ , respectivamente. A equação (2) representa esse tipo de equação.

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = \omega(t) \quad (2)$$

Se  $u(t)$  e  $\omega(t)$  não forem funções apenas de  $t$ , a equação (2) continua tida como linear, mesmo que essas funções não sejam lineares em  $t$ . Estudaremos esse tipo de equação mais adiante. No entanto, se as funções coeficiente  $u$  e termo  $\omega$  forem funções também de  $y$  e se  $y$  aparecer em  $u(y, t)$  ou  $\omega(y, t)$  elevado a uma potência maior que 1, a equação diferencia deixa de ser linear.<sup>5</sup> Por hora, vejamos a solução e o emprego das equações mais simples do tipo (1). Mais simples ainda é quando imaginamos o caso de termo nulo, ou seja, a equação (1) torna-se uma *equação homogênea* com  $b = 0$ .  $a$  é uma constante (necessariamente não nula apenas quando se pensa na homogênea associada à equação completa (1)).

---

<sup>4</sup> O programa pode ser baixado em < <https://la.mathworks.com/campaigns/products/trials.html> >.

<sup>5</sup> Para equações diferenciais que envolvam derivadas de ordem mais alta, do tipo  $F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}\right) = 0$ , elas são chamadas de lineares se  $F$  depende linearmente das variáveis  $y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}$  (mesmo que não dependa linearmente da variável independente  $t$ ).

*Solução completa da equação de primeira ordem e primeiro grau com coeficiente e termo constantes.*

Vejam os então como solucionar a homogênea associada do tipo  $\frac{dy}{dt} + ay = 0$ . Obviamente que  $\frac{dy}{dt} = -ay$ , ou seja, que procuramos uma classe de funções bem-comportadas cuja derivada seja ela mesma a menos de uma constante multiplicativa. Sabemos que funções exponenciais apresentam essa propriedade. A derivada de  $e^t$  afigura-se o mesmo  $e^t$ , e ser for uma função como  $e^{-at}$  a derivada em relação a  $t$  daria  $-ae^{-at}$ . Se chamarmos  $e^{-at}$  de  $y$ , então  $\frac{dy}{dt} = -ae^{-at} = -ay$ . A solução  $y = e^{-at}$ , no entanto, não é suficientemente geral, pois dessa forma simples o valor de  $a$  seria determinado por uma condição inicial (CI) bem particular. Pois, para  $t = 0$  a solução seria  $y(0) = e^{-a \cdot 0} = 1$ . Suponha agora, de modo mais geral, que  $y(0) = A$ . Então melhor seria postular como solução geral da homogênea  $y(t) = A \cdot e^{-a \cdot t} = y(0) \cdot e^{-a \cdot t}$ .

A solução do tipo  $y(t) = A \cdot e^{-a \cdot t}$  é tida como solução geral não especificada, e a solução  $y(t) = y(0) \cdot e^{-a \cdot t}$  é denominada de *solução definida*, que explicita nela a condição inicial  $y(0)$ .<sup>6</sup> Esta última necessariamente satisfaz as CI's, pois nela  $A = y(0)$ . Note ainda que  $\frac{dy}{dt} = A \cdot (-ae^{-at}) = -a \cdot A \cdot e^{-at} = -ay$ , ou seja,  $y(t) = A \cdot e^{-a \cdot t}$  também satisfaz a equação homogênea em questão.

Vejam os agora o caso mais geral, não homogêneo, da equação (1). Demonstra-se que a solução geral dela, que estamos procurando, pode ser obtida pela soma de dois termos: a solução da homogênea associada conforme vimos, chamada de *função complementar* e representada por  $y_c$ , e a solução particular da equação original  $y_p$ , uma solução particular qualquer. Já sabemos então que  $y_c(t) = y(0) \cdot e^{-a \cdot t}$  e agora tentaremos encontrar a solução particular mais simples da equação original.

O caso mais simples é quando fazemos  $y(t) = k$ , uma constante qualquer. Assim sendo,  $\frac{dy}{dt} = 0$ , o que implica, em (1),  $ay = b$ ,  $y = \frac{b}{a}$ . Obviamente para  $a \neq 0$ , mas note que  $a$  pode ser nulo quando se pensa na equação original (na homogênea associada, a hipótese de  $a$  nulo daria  $\frac{dy}{dt} = 0$ , o que restringiria a função  $y$  como uma reta horizontal!). Mas note que estamos supondo  $y$  constante apenas como uma solução particular da equação, e não que a única solução cabível na equação completa seja essa. Então  $a$  pode ser nulo e devemos examinar também esse caso.

Antes disso, vejamos a solução geral de (1) para o caso simples em que  $a \neq 0$ , ou seja, cuja solução particular é  $y_p = \frac{b}{a}$ . A solução geral ficaria então  $y(t) = y_c + y_p = A \cdot e^{-a \cdot t} + \frac{b}{a}$ . Aplicando-se então a CI: para  $t = 0$ ,  $y = y(0)$ ,  $y(0) = A + \frac{b}{a}$ , ou  $A = y(0) - \frac{b}{a}$ . Substituindo-se esse valor de  $A$  na equação da solução geral chega-se à equação (3):

---

<sup>6</sup> Dada uma equação diferencial de ordem  $n$ ,  $F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}\right) = 0$ , diremos ter um problema a valores iniciais se forem dados os valores de  $y(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \dots, \frac{d^n y}{dt^n}(t_0)$ , para um  $t_0$  arbitrário, porém, fixado.

$$y(t) = \left[ y(0) - \frac{b}{a} \right] e^{-a.t} + \frac{b}{a} \quad (a \neq 0) \quad (3)$$

Por outro lado, se  $a = 0$  podemos resolver a equação (1) por integração. Note que, nesse caso, ficamos com  $\frac{dy}{dt} = b$ , isto é,  $dy = b.dt$ . Integrando-se os dois membros,  $\int dy = \int b.dt$ . Ou seja,  $y(t) = bt + c$ . Vamos examinar essa solução: note que a constante  $c$  deve ser interpretada como a única solução geral possível da homogênea associada, pois, nesse caso,  $\frac{dy}{dt} = 0$  e  $y_c(t) = A$ , onde  $A$  é uma constante, e estamos interpretando que  $A = c$ . Então, temos de mostrar que o termo restante  $bt$  representa uma possível solução particular da equação completa. De fato, suponha a solução “não constante” do tipo  $y_p(t) = k.t$ , com  $a = 0$ . Assim sendo,  $\frac{dy_p}{dt} = k = b$ . Portanto,  $y_p(t) = b.t$ , o que demonstra heurísticamente que a solução completa é a soma da *função complementar*  $y_c(t)$  com certa solução particular da equação completa  $y_p(t)$ . Ou seja,  $y(t) = y_p(t) + y_c(t) = b.t + A$ . Note que  $y(0) = b.0 + A = A$ . Em suma, a solução completa e definida é  $y(t) = b.t + y(0)$ .

Veja que as soluções obtidas podem ser verificadas facilmente. Se  $y(0)$  é dado pela equação (3), demonstra-se facilmente que  $\frac{dy}{dt}$  é expresso pela equação (4):

$$\frac{dy}{dt} = -a \left[ y(0) - \frac{b}{a} \right] e^{-a.t} \quad (a \neq 0) \quad (4)$$

Substituindo-se (3) e (4) na equação diferencial (1), demonstra-se que o primeiro membro realmente se iguala a  $b$ :  $-a \left[ y(0) - \frac{b}{a} \right] e^{-a.t} + a \left\{ \left[ y(0) - \frac{b}{a} \right] e^{-a.t} + \frac{b}{a} \right\} = b$ . Além disso, observa-se que a CI é satisfeita, porquanto:  $y(0) = \left[ y(0) - \frac{b}{a} \right] + \frac{b}{a} = y(0)$ .

### **Aplicação da teoria da equação de primeira ordem e primeiro grau com coeficiente e termo constantes.**

#### *Modelo com a dinâmica do preço de mercado*

Imagine duas equações, de demanda e oferta microeconômicas para o caso linear, nas quais os coeficientes e os termos são constantes:

$$\begin{aligned} Q_d &= \alpha - \beta.P & (\alpha, \beta > 0) \\ Q_s &= -\gamma + \delta.P & (\gamma, \delta > 0) \end{aligned} \quad (5)$$

Igualando-se ambas as equações, no ponto em que  $Q_d = Q_s$ , demonstra-se facilmente que  $P^* = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$  representa o equilíbrio estático. Se o preço inicial for este, o equilíbrio inicial permanece ao longo do tempo, de modo que o sistema não se afasta nunca do equilíbrio estático. Nesse caso, o equilíbrio dinâmico corresponde ao equilíbrio

estático inicial. O preço não se desloca com o tempo. Mas se  $P(0) \neq P^*$  pode-se fazer uma análise dinâmica do processo. As demandas e ofertas ( $Q_d(t), Q_s(t)$ ) variam com o tempo, e o preço  $P(t)$  conhece uma trajetória temporal que deve ser descrita por algum processo.

Um modelo simples e bem conhecido de trajetória temporal de  $P(t)$  foi proposto pelo economista John Hicks. Ele segue o velho preceito dos comerciantes de que os preços crescem com excesso de demanda e decrescem com excesso de oferta. Representa-se matematicamente esse processo simples por meio da equação diferencial (6).

$$\frac{dP}{dt} = j(Q_d(t) - Q_s(t)) \quad (6)$$

Nesta equação,  $j$  é o coeficiente constante de ajuste.  $(Q_d(t) - Q_s(t))$  representa o excesso de demanda em cada instante  $t$ . Portanto, tal excesso faz os preços crescerem ( $\frac{dP}{dt} > 0$ ). Temos assim um padrão de variação de  $P(t)$  que é bem descrito por uma equação diferencial de 1ª ordem.

Se  $Q_d(t) - Q_s(t) = 0$ , não há mudança de preço,  $\frac{dP}{dt} = 0$ . Note que esse preço representa um equilíbrio dinâmico. Um princípio da análise econômica proposto por Paul Samuelson (*princípio de correspondência*) argumenta que tal preço de equilíbrio dinâmico deve corresponder ao equilíbrio estático  $P^*$ . No entanto, vamos diferenciá-los e chamar o equilíbrio dinâmico de  $\bar{P}$ .

Substituindo-se (5) em (6), temos  $\frac{dP}{dt} = j(\alpha - \beta \cdot P + \gamma - \delta \cdot P) = j(\alpha + \gamma) - j(\beta + \delta)P$ , de onde segue a equação diferencial (7):

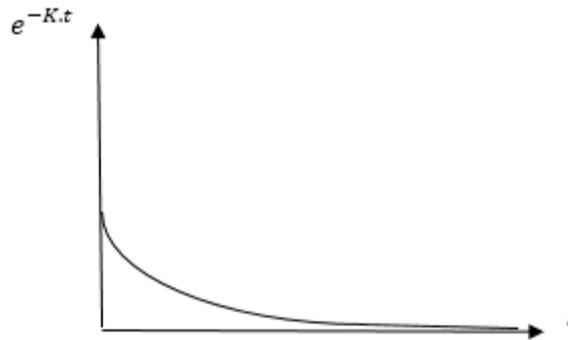
$$\frac{dP}{dt} + j(\beta + \delta)P = j(\alpha + \gamma) \quad (7)$$

Note que essa equação tem mesmo formato que a equação (1), para  $a = j(\beta + \delta)$  e  $b = j(\alpha + \gamma)$ . Observando-se a solução para o caso  $a \neq 0$  em (3), pode-se escrever a solução do problema dinâmico em tela como sendo a equação  $P(t) = \left[ P(0) - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \right] e^{-j(\beta + \delta)t} + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$ . Chamando-se  $j(\beta + \delta)$  de  $K$ , e tendo-se em conta que  $P^* = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$ , pode-se escrever a solução como na equação (8):

$$P(t) = [P(0) - P^*] e^{-K \cdot t} + P^*, \quad K = j(\beta + \delta) \quad (8)$$

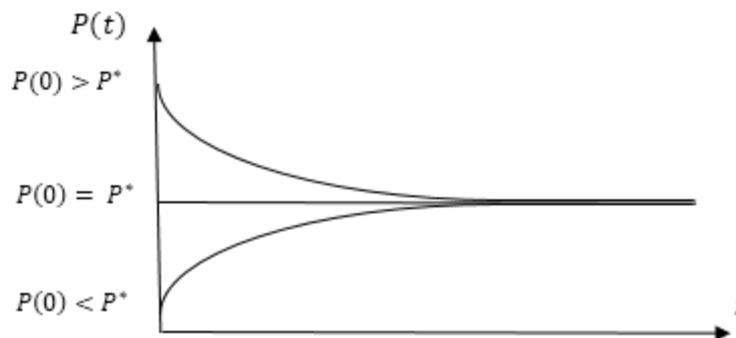
Posto isto, vejamos agora a trajetória de  $P(t)$  sob três hipóteses e façamos o estudo da estabilidade dinâmica de equilíbrio. Note que a função exponencial do tipo  $e^{-K \cdot t}$  apresenta trajetória não explosiva e convergente sempre que  $K > 0$ . Para este caso, a trajetória de  $e^{-K \cdot t}$  com  $t$  é descrita graficamente pela curva abaixo – gráfico (1):

Gráfico 1



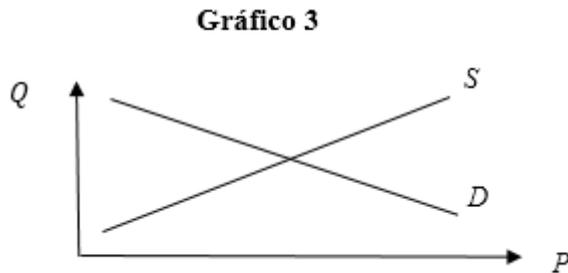
Neste caso, quando  $t$  tendo a infinito ( $t \rightarrow \infty$ ) o coeficiente  $e^{-K.t}$  anula-se. Ou seja, o termo  $[P(0) - P^*]e^{-K.t}$  tende a zero e, sendo assim, a trajetória de  $P(t)$  converge à constante  $P^*$ , o equilíbrio estático inicial. Assim o equilíbrio dinâmico  $\bar{P}$  é estável e converge ao equilíbrio estático  $P^*$ . Por onde ele converge dependerá do valor inicial  $P(0)$ . Obviamente que se  $P(0) > P^*$ , o termo  $[P(0) - P^*]$  é sempre positivo e a convergência a  $P^*$  ocorrerá “por cima”. Se  $P(0) < P^*$ , o termo  $[P(0) - P^*]$  é agora sempre negativo e a convergência a  $P^*$  ocorrerá “por baixo”. Se  $P(0) = P^*$ , o ponto de partida permanece imóvel e a trajetória temporal é sempre o equilíbrio em  $P^*$ , portanto, com aproximação instantânea ao equilíbrio intertemporal. Essas diferentes possibilidades são representadas no gráfico (2):

Gráfico 2



Nota-se que, na equação diferencial (8),  $P^* = \frac{b}{a}$  é a solução particular  $y_p(t)$ , o nível de equilíbrio intertemporal, que nesse caso é estacionário em  $P^*$ . A função complementar é, neste caso,  $[P(0) - P^*]e^{-K.t}$  e representa o desvio em relação ao equilíbrio. Temos aqui um *equilíbrio estacionário* que se opõe a um *equilíbrio móvel*, caso em que a solução particular não é constante. Tal solução está intimamente relacionada à hipótese  $a \neq 0$ . Temos, portanto, hipóteses convenientes que nos garantem uma estabilidade dinâmica. Vejamos que restrições impusermos aos parâmetros das equações que definem o problema.

Primeiramente, a convergência depende de  $K > 0$ , ou seja, de  $j(\beta + \delta) > 0$ . De fato, a hipótese de  $j > 0$ , ou seja, de coeficiente de ajuste positivo é plausível pela lei da oferta e demanda. Excesso de demanda empurra os preços para cima, e vice-versa. Isso é bem intuitivo. Mas para  $K$  positivo, ainda temos que ter  $\beta + \delta > 0$ , ou seja,  $\delta > -\beta$ : a inclinação da oferta é maior que a inclinação da demanda (representa por  $-\beta$  pelo fato de essa demanda ser negativamente inclinada). Isso é sempre satisfeito no caso normal representado no gráfico (3):



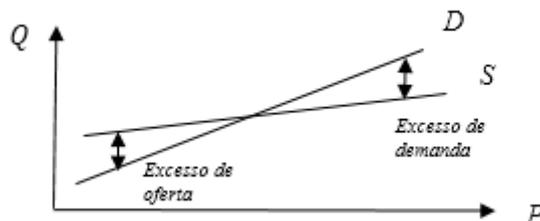
Mas também pode ser satisfeito quando se admite um  $\beta$  negativo, isto é, uma demanda positivamente inclinada como nos bens inferiores com *efeito renda* maior que *efeito substituição*, os tais *bens de Giffen*. A condição ainda será satisfeita se a inclinação da oferta  $\delta$  for maior que a inclinação positiva da demanda  $-\beta$  (como agora  $\beta$  é negativo,  $-\beta$  é positivo), ou seja, o módulo de  $\delta$  é maior que o módulo de  $\beta$ :  $|\delta| > |\beta|$ .

O gráfico 4 ilustra o caso de bem de Giffen em que ainda existe equilíbrio estável. Já o gráfico 5 ilustra um caso de equilíbrio instável para esse bem.

**Gráfico 4: equilíbrio dinamicamente estável**



**Gráfico 5: equilíbrio dinamicamente instável**

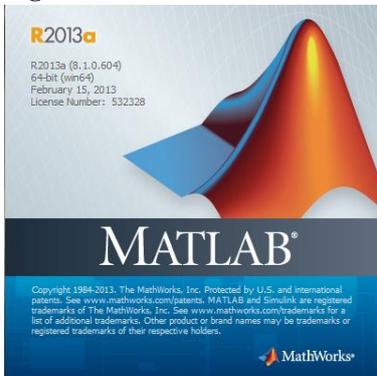


## Solução do MATLAB para modelo com a dinâmica do preço de mercado

Antes de partir para uma solução pelo Matlab, vejamos um exemplo do modelo visto com valores específico para a letras gregas:  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 1, 2, 2)$ . Note que  $|\delta| > |\beta|$  (neste caso, o equilíbrio é estável mesmo com bem de Giffen). Admite-se também que  $j = 0,5$ . Sendo assim,  $K = j(\beta + \delta) = 0,5(3) = 1,5$ . E  $P^* = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} = \frac{3}{3} = 1$ . É dado ainda que  $P(0) = 2$ . A equação para o processo dinâmico (8) fica então  $P(t) = [2 - 1]e^{-1,5t} + 1$ . Vejamos uma solução em Matlab. Não precisamos saber resolver a equação diferencial básica do problema, o programa a resolve. Só precisamos montar no campo de edição do programa a equação (7), que no caso fica então  $\frac{dP}{dt} + 1,5P = j(\alpha + \gamma) = 0,5(3) = 1,5$ .

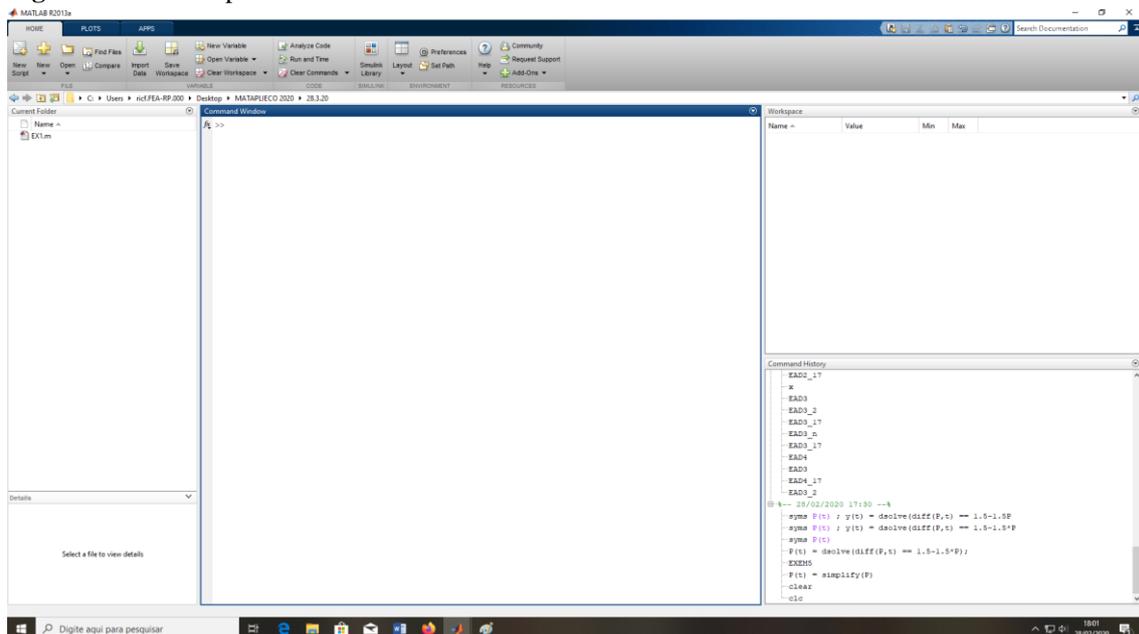
Vamos usar o Matlab. Clique no ícone do programa e aparecerá a figura abaixo:

**Figura 1:** entrada no MATLAB.



Conforme mostra a figura, estamos usando a versão R2013a do Matlab. Vemos o ambiente padrão do programa na tela do computador na Figura 2.

**Figura 2:** ambiente padrão do MATLAB.



Temos então quatro janelas: opera-se na janela de comando (*Command Window*), e ainda, nessa configuração padrão, o programa oferece a janela das pastas disponíveis (*Current Folder*), que foram carregadas pelo usuário clicando no ícone, acima dela, de abertura de pastas (Figura 3).

**Figura 3:** ícone de abertura de pasta,



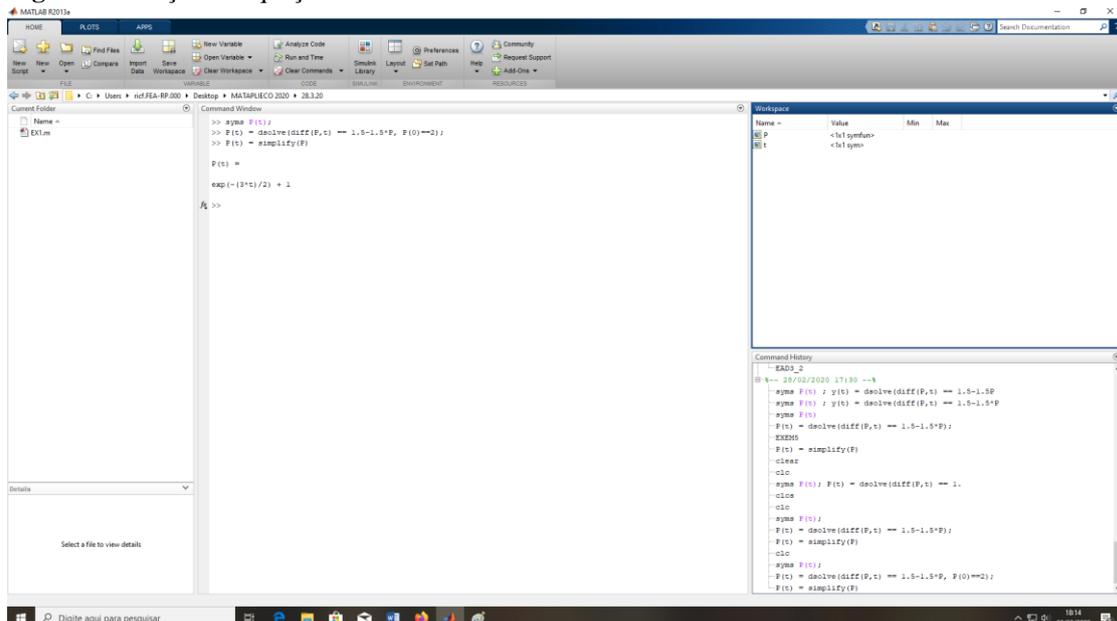
Outra janela, a de “espaço de trabalho” (*Workspace*), mostrará as variáveis criadas pelo usuário, e finalmente uma janela mostra o histórico de comandos feitos pelo usuário (*Command History*).

Primeiramente vamos criar a variável  $P$  usando o comando “syms P(t)”. Depois vamos pedir para que programa resolva a equação diferencial  $\frac{dP}{dt} + 1,5P = 1,5$ , isolando no primeiro membro apenas a derivada:  $\frac{dP}{dt} = 1,5 - 1,5P$ . No lugar de  $\frac{dP}{dt}$ , escreve-se na janela de comando “diff(P,t)”. E se monta a equação usando a dupla igualdade (==) que significa uma *imposição*: “diff(P,t) == 1.5-1.5\*P”. Finalmente indica-se ao programa para que  $P(t)$  seja obtido pela solução da equação diferencial (“dsolve”), com a condição inicial  $P(0) = 2$ . A sequência de programação fica assim:

```
syms P(t);
P(t) = dsolve(diff(P,t) == 1.5-1.5*P, P(0)==2);
```

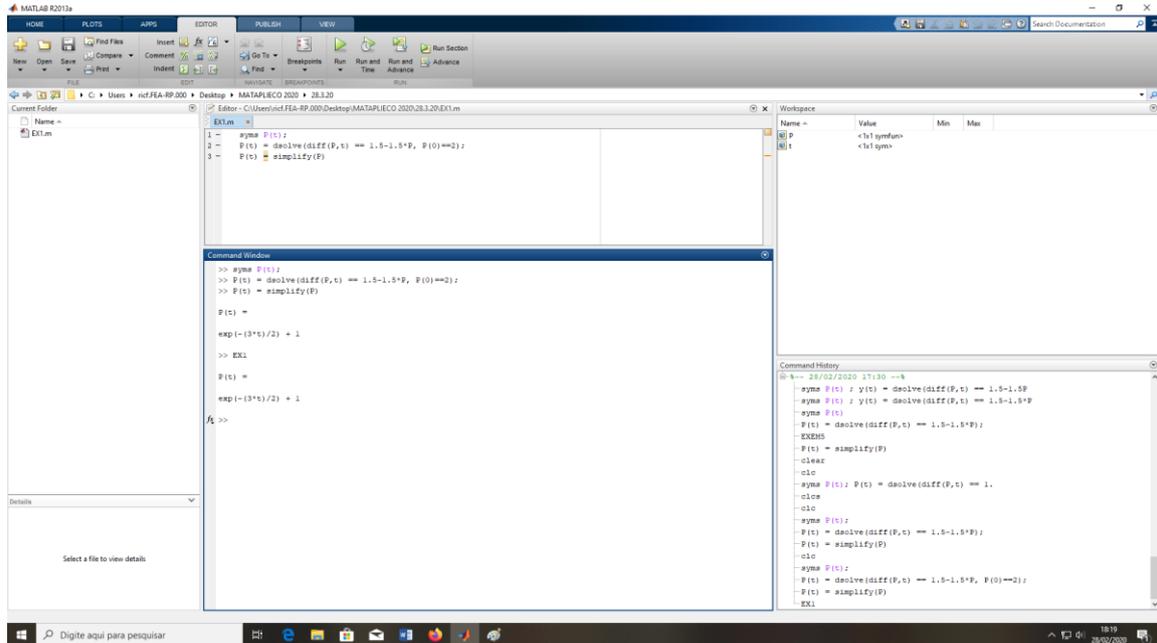
Em seguida peça ao programa para exibir a solução mais simples de  $P(t)$  pelo comando “P(t) = simplify(P)”. Note a programação desta sequência na janela de comando e a solução oferecida pelo programa. Tal solução é expressa como sendo “P(t) = exp(-(3\*t)/2) + 1” que é idêntica à solução obtida teoricamente  $P(t) = e^{-1,5.t} + 1$ .

**Figura 4:** solução da equação diferencial na *Janela de Comando*.



Em seguida, podemos salvar essa sequência de programa como uma *procedure* num arquivo do Matlab (chamado de arquivo *m*). Para tanto, crie um ambiente de programas prontos clicando em *New Script*. Aparecerá a janela *Editor*. Copie e cole o que fora escrito na janela de comando. Salve o arquivo *m* com um nome. No caso, chamamos de EX1. Escreva EX1 na janela de comando que o problema, com sua sequência específica de comando será novamente resolvido – Figura 5.

**Figura 5:** solução via arquivo *m*.



### Aplicação da teoria da equação de primeira ordem e primeiro grau com coeficiente e termo variáveis.

Neste caso, o processo é representado pela equação (2), na qual  $u(t)$  e  $\omega(t)$ , respectivamente o coeficiente e o termo, são variáveis com  $t$ . No *caso homogêneo*,  $\omega(t) = 0$ , e portanto, tem-se  $\frac{dy}{dt} + u(t)y = 0$ ,  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = -u(t)$ ,  $\frac{1}{y} dy = -u(t)dt$ . Integrando-se ambos os membros,  $\int \frac{1}{y} dy = \int -u(t)dt$ . A integral que aparece à esquerda, no 1º membro da equação, tem solução bem conhecida:  $\int \frac{1}{y} dy = \ln y + c$ . Note que essa solução requer o logaritmo *neperiano* e que  $y$  deve ser positivo para ser domínio dessa função ( $y > 0$ ). O 2º membro à direita da equação não pode ser resolvido antes que se conheça explicitamente  $u(t)$ . Por enquanto, podemos apenas tirar o sinal negativa do integrando:  $\int -u(t)dt = - \int u(t)dt$ . Portanto, igualando-se as duas soluções chega-se a  $\ln y = -c - \int u(t)dt$ . Usando-se ambos os membros como expoentes da mesma base com o número neperiano, temos:  $e^{\ln y} = e^{-c} e^{- \int u(t)dt}$ . Chamando-se a constante  $e^{-c}$  de  $A$ ,  $A \equiv e^{-c}$ , chegamos à solução da homogênea associada expressa na equação (9):

$$y(t) = Ae^{-\int u(t)dt} \quad (9)$$

Note que essa solução converge para a solução encontrada no caso com coeficiente constante  $a$ . Pois,  $\int a dt = a.t + c$ . Assim sendo,  $Ae^{-\int u(t)dt} = Ae^{-at-c} = Ae^{-at}e^{-c} = Ae^{-c}e^{-at} = A_2 e^{-at}$ . Solução já vista, na qual introduzimos nova constante  $A_2 = Ae^{-c}$ .

*Solução completa da equação de primeira ordem e primeiro grau com coeficiente e termo variáveis.*

Neste caso  $\omega(t) \neq 0$  e a solução completa é novamente a soma do termo da solução geral da homogênea associada com um termo para a solução particular da equação completa. A solução da homogênea foi vista em (9) e agora acrescentamos outro termo associado à solução particular, de modo que a solução completa é dada pela equação (10).

$$y(t) = e^{-\int u(t)dt} \left( A + \int \omega . e^{\int u(t)dt} dt \right) \quad (10)$$

O termo  $A$  representa uma constante associada à condição inicial que vimos incorporada na solução da homogênea. A demonstração desta equação será vista mais adiante, porque antes devemos desenvolver o estudo das chamadas *equações diferenciais exatas* e apresentar a técnica conhecida como *fator integrante*. Note que a fórmula geral em (10) converge para a fórmula com  $u$  e  $\omega$  constantes em  $a$  e  $b$  respectivamente. Pois, vimos que, nesse caso,  $Ae^{-\int u(t)dt} = A_2 e^{-at}$ . Para o segundo termo da equação (10), veja que  $e^{-\int u(t)dt} \left( \int \omega . e^{\int u(t)dt} dt \right) = e^{-at} \left( \int b . e^{at} dt \right) = \frac{be^{-at}e^{at}}{a} = \frac{b}{a}$ , como em (3). Provisoriamente aceitemos a equação (10) sem demonstração e vamos partir logo para a aplicação dela na solução de dois problemas apresentados a título de exercício.

### *Exercício 1*

*Resolva a equação diferencial  $\frac{dy}{dt} + 2ty = t$ .*

Neste caso, o coeficiente variável é expresso pela função  $u(t) = 2t$  e o termo variável é  $\omega(t) = t$ . A solução teórica será obtida no emprego da equação (10). Para tanto, começa-se determinando a integral  $\int u(t)dt = \int 2tdt = t^2 + k$ , na qual  $k$  afigura-se constante arbitrária. Obtido essa integral, substituimos sua expressão no valor de  $\int u(t)dt$  na equação (9) de modo que  $y(t) = e^{-(t^2+k)} \left( A + \int t . e^{(t^2+k)} dt \right) = e^{-t^2} e^{-k} \left( A + e^k \int t . e^{t^2} dt \right) = A e^{-k} e^{-t^2} + e^{-t^2} \left( \frac{1}{2} e^{t^2} + c \right) = \left( A e^{-k} + c \right) e^{-t^2} + \frac{1}{2}$ . Portanto, chamando a expressão de constantes  $A e^{-k} + c$  de  $B$ ,  $B = A e^{-k} + c$ ,  $y(t) = B e^{-t^2} + \frac{1}{2}$ . Note que podemos testar essa solução substituindo-a na equação diferencial do exercício:  $\frac{dy}{dt} + 2ty = -2t B e^{-t^2} + 2t B e^{-t^2} + t = t$ . Ou seja, a solução proposta é atendida na equação do problema.

Vejamos agora a solução por Matlab. Antes de escrever a equação diferencial do exercício na janela de comando do programa, devemos isolar no 1º membro apenas o termo da derivada, de modo que  $\frac{dy}{dt} = t - 2ty$  deverá aparecer como argumento na função *dsolve*. Portanto, escreve-se na janela apropriada do programa:

```
syms y(t);
y(t) = dsolve(diff(y,t) == t - 2*t*y)
```

E ao executar tais comandos o programa mostrará a mesma solução. Tal sequência de programação foi salva no arquivo *m* denominado EXEM1.m.

### Exercício 2

Resolva a equação diferencial  $\frac{dy}{dt} + 4ty = 4t$ .

Outro exemplo de equação diferencial de 1ª ordem e 1º grau com termo e coeficiente variáveis. No caso,  $u(t) = 4t$  e  $\omega(t) = 4t$ . Neste caso,  $\int u(t)dt = 2t^2$ . E a equação (9) da solução completa fica então  $y(t) = e^{-2t^2}(A + \int 4te^{2t^2} dt) = e^{-2t^2}(A + e^{2t^2}) = Ae^{-2t^2} + 1$ . As constantes foram omitidas na solução das integrais.

A solução do exercício por Matlab parte da mesma ideia de escrever a equação isolando-se a derivada no 1º membro:  $\frac{dy}{dt} = 4t - 4ty$ . Tomando-se esse cuidado, escreve-se na janela de comando do programa a sequência de programação:

```
syms y(t) ;
y(t) = dsolve(diff(y,t) == 4*t - 4*t*y)
```

E o programa fornece a mesma solução já obtida teoricamente. A sequência de comandos foi salva no arquivo EXEM2.m

### Equações diferenciais exatas.

Sabemos do cálculo diferencial, que dada a função bem comportada  $F(y, t)$ , pode-se exprimir a sua diferencial total numa fórmula que envolve derivadas parciais  $dF(y, t) = \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial t} dt$ . No ponto em que essa diferencial se anula,  $dF(y, t) = 0$ , a expressão à direita, no 2º membro, caracteriza uma *equação diferencial exata* (exata porque anula exatamente a expressão da diferencial).

Por exemplo, imagine certa função  $F: F(y, t) = y^2t + k$ , com  $k$  constante. Tomando-se a diferencial de  $F$ ,  $dF(y, t) = 2ytdy + y^2dt$ . Igualando-se  $dF$  a zero,  $2ytdy + y^2dt = 0$ , ou  $\frac{dy}{dt} + \frac{y^2}{2yt} = 0$ . Portanto, esta última equação é uma equação diferencial exata (EDE).

Em geral, se  $Mdy + Ndt = 0$  for exata,  $M$  e  $N$  são coeficientes quaisquer, então existe (no sentido de *se e somente se*) uma função  $F(y, t)$  tal que  $M = \frac{\partial F}{\partial y}$  e  $N = \frac{\partial F}{\partial t}$ . Note que, tomando-se a derivada parcial de  $M$ ,  $\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t} = \frac{\partial N}{\partial y}$ . Em que  $\frac{\partial F}{\partial t \partial y} = \frac{\partial F}{\partial y \partial t}$  pelo *teorema de Young*. A igualdade  $\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y}$  serve de teste para a “exatidão” de uma equação diferencial.

Por exemplo, vamos testar se  $2ytdy + y^2dt = 0$  é uma equação exata (EDE). Note que, nesse caso,  $M = 2yt$  e  $N = y^2$ . Assim sendo,  $\frac{\partial M}{\partial t} = 2y$  e  $\frac{\partial N}{\partial y} = 2y$ , portanto é EDE. Note que a equação diferencial exata pode não ser linear, como no caso do exemplo ( $y^2$

aparece na equação), contudo, é sempre de 1ª ordem e de 1º grau em  $\frac{dy}{dt}$ . Se é EDE, existe uma  $F(y, t)$  em que  $dF(y, t) = 0$ , ou seja  $F(y, t) = c$ , uma constante em certa vizinhança.

Vejamos esse mesmo exemplo a fim de extrair um método de solução. No caso, como é exata,  $Mdy + Ndt = 0$  e  $M = \frac{\partial F}{\partial y}$ . Portanto, quando se pensa apenas  $y$  como variável,  $F$  pode ser determinado por integração:  $F(y, t) = \int Mdy + \psi(t)$ , no qual  $\psi(t)$  funciona como uma constante de integração já que a derivada parcial “congela” a variável  $t$ . A integral  $\int Mdy$  trata  $t$  como constante. Sabemos, por ser EDE, que  $N = \frac{\partial F}{\partial t}$ , e então podemos usar essa expressão para determinar  $\psi(t)$ .

No exemplo em questão,  $M = 2yt$  e  $N = y^2$ . A solução será alcançada em um método que envolve 4 etapas:

Etapa 1:

$F(y, t) = \int 2ytdy + \psi(t) = y^2t + \psi(t)$ , a constante de integração está embutida em  $\psi(t)$ .

Etapa 2:

$\frac{\partial F}{\partial t} = y^2 + \psi'(t)$ ,  $N = y^2 = \frac{\partial F}{\partial t}$ , portanto,  $y^2 = y^2 + \psi'(t)$ . Ou seja,  $\psi'(t) = 0$ .

Etapa 3:

$\psi(t) = \int \psi'(t)dt = \int 0dt = k$ .

Etapa 4:

$F(y, t) = y^2t + k = c$ ,  $y^2t = c - k = \mathbf{c}$ , em que  $\mathbf{c}$  é um nova constante,  $\mathbf{c} = c - k$ . Portanto,  $y(t) = \mathbf{c} \cdot t^{-\frac{1}{2}}$ .

Iremos agora confrontar essa solução com a oferecida pelo Matlab. A equação diferencial exata do exemplo pode ser escrita em termos de derivada como  $\frac{dy}{dt} + \frac{y^2}{2yt} = 0$ . Isolando-se a derivada no 1º membro, temos  $\frac{dy}{dt} = -\frac{y^2}{2yt} = -\frac{y}{2t}$ . Na janela de comando do Matlab, escreve-se então:

```
syms y(t)
y(t) = dsolve(diff(y,t) == -(y^2)/(2*y*t)).
```

Executando-se esses comandos, o programa fornece a mesma solução obtida no método teórico. Tal sequência de programação foi salva no arquivo *m* denominado EXEM3.m. À luz deste método, iremos resolver um novo exercício:

### Exercício 3

Resolva a equação diferencial expressa em diferenciais:  $(t + 2y)dy + (y + 3t^2)dt = 0$ .

Neste caso,  $M = t + 2y$  e  $N = y + 3t^2$ . Façamos o teste de exatidão:  $\frac{\partial M}{\partial t} = 1$  e  $\frac{\partial N}{\partial y} = 1$ , portanto é EDE. Chegaremos à solução percorrendo as 4 etapas (E1 a E4).

$$E1: F(y, t) = \int (t + 2y)dy + \psi(t) = y \cdot t + y^2 + \psi(t).$$

$$E2: \frac{\partial F}{\partial t} = y + \psi'(t), N = y + 3t^2 = y + \psi'(t). \text{ Ou seja, } \psi'(t) = 3t^2.$$

$$E3: \psi(t) = \int 3t^2 dt = t^3. \text{ A constante de integração foi omitida!}$$

$$E4: F(y, t) = y \cdot t + y^2 + t^3 = c, y \cdot t + y^2 + t^3 = c.$$

Ou seja, temos a equação do 2º grau,  $y^2 + t \cdot y + (t^3 - c) = 0$ .

$$\text{A solução, portanto, é } y = \frac{-t \mp \sqrt{t^2 - 4(t^3 - c)}}{2}.$$

Agora, iremos obter essa solução teórica usando o programa Matlab. Para tanto, escreve-se a equação diferencial na forma apropriada:  $\frac{dy}{dt} = -\frac{y+3t^2}{t+2y}$ . Com base nela, digita-se na janela de comando essas linhas de programa:

```
syms y(t)
y(t) = dsolve(diff(y,t) == -(y + 3*t^2)/(t + 2*y)) ;
y(t) = simplify(y)
```

Como a solução teórica envolve raiz quadrada e potências elevadas, usamos o comando “P(t) = simplify(P)” a fim de que o programa exiba a solução mais simples de  $y(t)$  pelo comando “y(t) = simplify(y)”. O Matlab fornece prontamente a mesma solução obtida pelo caminho teórico visto. Essa sequência de programação foi salva e consta agora no arquivo EXEM4.m.

Antes de deduzir a solução de equações diferenciais de 1ª ordem e 1º grau com coeficiente e termo variáveis, já vista em (10), precisamos aprender uma técnica chamada de *fator integrante*. Tal técnica permite transformar uma equação diferencial inexata em uma EDE. Trata-se de identificar um fator multiplicativo que torna a equação exata. Vejamos um exemplo:  $2tdy + ydt = 0$  não é exata, pois  $\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial(2t)}{\partial t} = 2$  e  $\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial(y)}{\partial y} = 1$ . Não obstante, se multiplicarmos a equação por  $y$ , ou seja, para  $2ytdy + y^2dt = 0$ , como vimos a equação é (ou torna-se) agora exata. O fator multiplicativo  $y$  é chamado de *fator integrante* ( e o método também o é).

Agora já temos condições de demonstrar que a equação (10), de fato, representa a solução completa da equação diferencial de 1ª ordem e 1º grau com coeficiente e termo variáveis. A equação (2) será escrita em termos de diferenciais como sendo  $dy + (uy - \omega)dt = 0$ . O fator integrante  $I$ ,  $I = e^{\int udt}$ , torna a equação exata, pois, na equação  $I dy + I(uy - \omega)dt = 0$ , temos  $M = I$  e  $N = I(uy - \omega)$ . Então  $\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial I(t)}{\partial t}$ , como  $I = e^{\int udt}$ ,  $\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \frac{\partial e^{\int udt}}{\partial t} = e^{\int udt} \cdot \frac{\partial \int udt}{\partial t} = I \cdot u$ . Por outro lado,  $\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial I(uy - \omega)}{\partial y} = I \cdot u$ , o que evidencia ser a equação exata.

Portanto,  $e^{\int udt} dy + e^{\int udt} (uy - \omega)dt = 0$  é equação exata. Assim sendo, vamos aplicar o método das 4 etapas para obter a solução explícita  $y(t)$ .

$$E1: F(y, t) = \int e^{\int udt} dy + \psi(t) = y \cdot e^{\int udt} + y^2 + \psi(t).$$

E2:  $\frac{\partial F}{\partial t} = yue^{\int u dt} + \psi'(t) = N$ ,  $N = e^{\int u dt}(uy - \omega) = yue^{\int u dt} + \psi'(t)$ . Ou seja,  $\psi'(t) = -\omega e^{\int u dt}$ .

E3:  $\psi(t) = -\int \omega e^{\int u dt} dt$ .

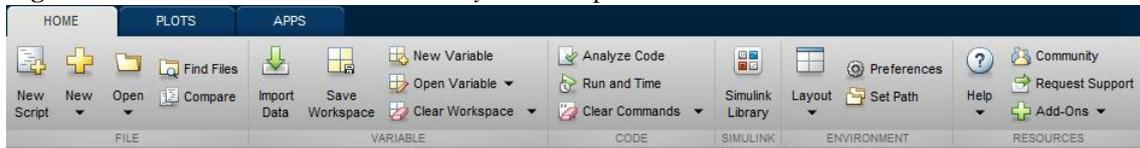
E4:  $F(y, t) = y \cdot e^{\int u dt} - \int \omega e^{\int u dt} dt = c$ ,  $y(t) = e^{-\int u(t) dt} (A + \int \omega \cdot e^{\int u(t) dt} dt)$ . Que é a equação (10) que finalmente pudemos demonstrar.

## Análise gráfica das soluções dos problemas propostos usando o Simulink

Os cinco exercícios resolvidos como uso do programa Matlab (quatro incluindo-se o exemplo) com a digitação de sequências de programação na janela de comando, podem ser examinados graficamente pelo programa. Para tanto, apresentamos inicialmente uma ferramenta para modelagem contida no Matlab, mas que deve ser vista como um *software* independente acoplado naquele programa, o *Simulink*, desenvolvido pela mesma companhia que oferece o Matlab, a MathWorks.<sup>7</sup> Trata-se de um dispositivo para modelagem, simulação e análise de sistemas dinâmicos. Ele oferece, como interface primária, uma ferramenta de diagramação gráfica por blocos customizáveis.

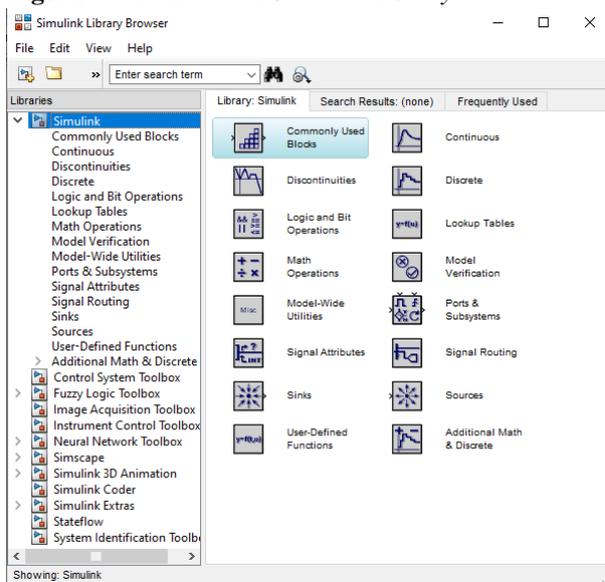
Na pasta de comandos principais do Matlab, chamada *Home*, aparece várias possibilidades de ativação em diferentes ícones. A fim de acionar o Simulink, localize o “*browser*” *Simulink Library* nesta pasta – indicado na Figura 6.

Figura 6: Acionamento do *Simulink Library* no correspondente browser.



A Figura 7 mostra a aba inicial de abertura do Simulink.

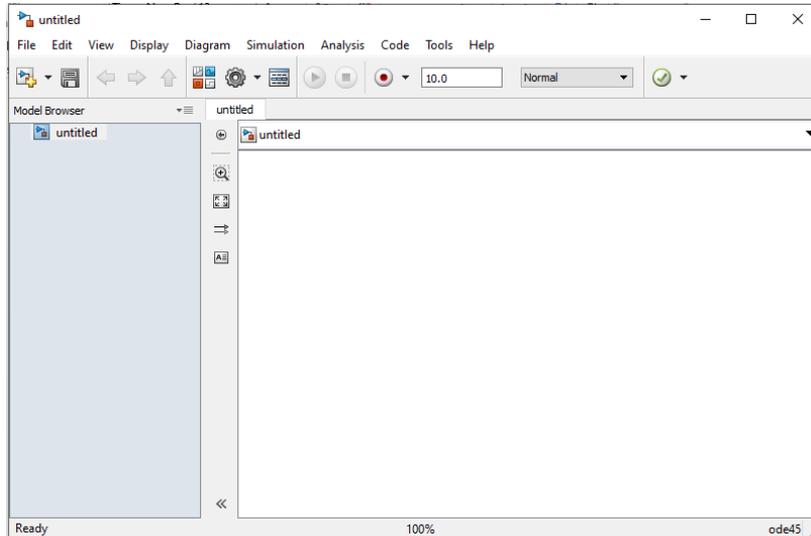
Figura 7: aba inicial do *Simulink Library*.



<sup>7</sup> O Simulink apresenta alta integração com o resto do ambiente Matlab.

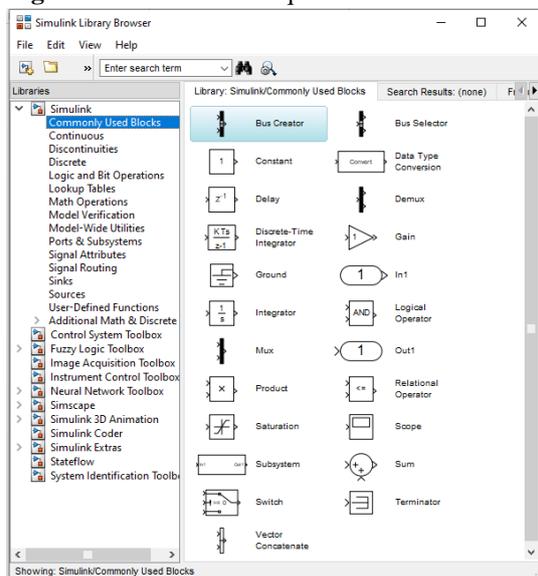
A aba do Simulink também pode ser acionada digitando-se “Simulink” na janela de comandos. Estando-se nesta aba, o próximo passo é desenvolver um modelo de simulação na solução do problema ou exercício em questão. Para tanto, clica-se em *File*, depois em *New* e em *Model*. Aparecerá a aba de edição da Figura 8.

**Figura 8:** aba de edição do *Simulink*.



Essa será salva com o nome de um arquivo Simulink após o desenvolvimento do modelo em foco. Iremos agora desenvolver um primeiro modelo para nosso primeiro exercício feito anteriormente relativo ao modelo dinâmico de mercado. Naquele caso, no exemplo específico com parâmetros definidos chegamos à equação diferencial  $\frac{dP}{dt} = 1,5 - 1,5P$ . A trajetória da solução do problema pode ser qualquer uma das representadas no gráfico 2. Iremos obter essas trajetórias no Simulink. Para tanto, aprenderemos a usar as “caixinhas” (blocos) e construir um diagrama que reflete o problema em questão. Na Figura 7, vê-se várias “caixinhas” na pasta *Library*. Tais blocos estão agrupadas por tipo. A Figura 9 mostra os mais utilizados, comando “*Commonly Used Blocks*”. Há comandos para operações matemáticas, atributos de sinal, tipos de fontes etc., cada qual com um conjunto de caixinhas associado.

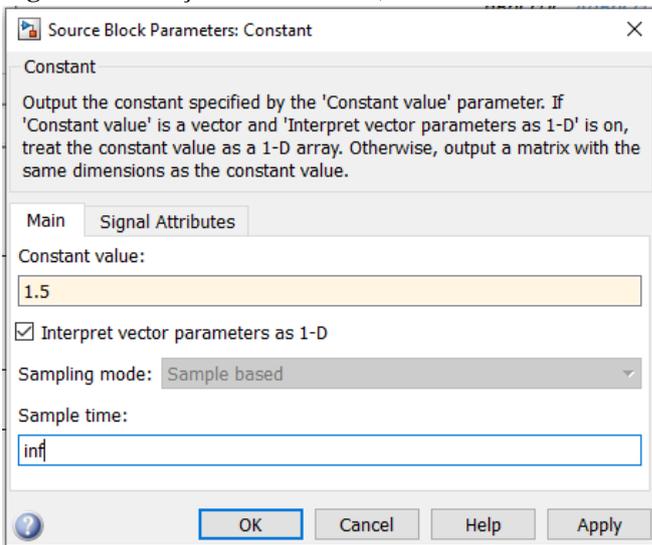
**Figura 9:** caixas mais frequentemente usadas no Simulink.



Como temos uma derivada na equação diferencial em questão, começamos importando para a janela de edição a caixinha “Integrator”. Tal bloco tem como porta de entrada a derivada da função ( $y' = \frac{dy}{dt}$ ) e, como saída, a própria função  $y$ , ou seja ela retorna a primitiva da derivada, como faz as integrais (daí o nome “Integrator”). No nosso problema,  $\frac{dP}{dt} = 1,5 - 1,5P$ , precisamos fazer com que a entrada corresponda ao 2º membro da equação diferencial. Precisamos de uma constante (= 1,5) que se adiciona a outro termo (=  $-1,5P$ ). A constante é fornecida pelo bloco “Constant”, e o outro termo advém multiplicando-se a saída do “Integrator”, ou seja  $P$ , já que a entrada é  $\frac{dP}{dt}$ , pelo fator  $-1,5$ . Então importa-se para a janela de edição o bloco “Gain”, que permite multiplicar-se a variável de entrada por certo fator.

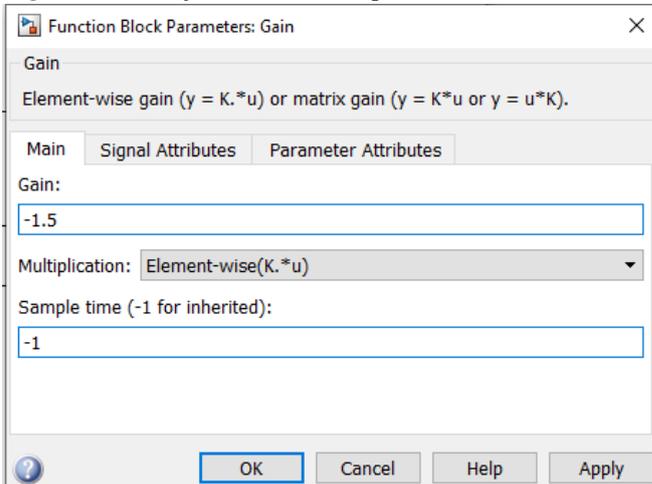
Precisamos agora especificar os parâmetros nas “caixinhas” *Constant* e *Gain*. Para tanto, clica-se no bloco *Constant* e aparecerá um menu interativo onde se preenche no campo apropriado o valor da constante (= 1,5) (Figura 10).

**Figura 10.** Inserção da constante 1,5 no bloco *Constant*.



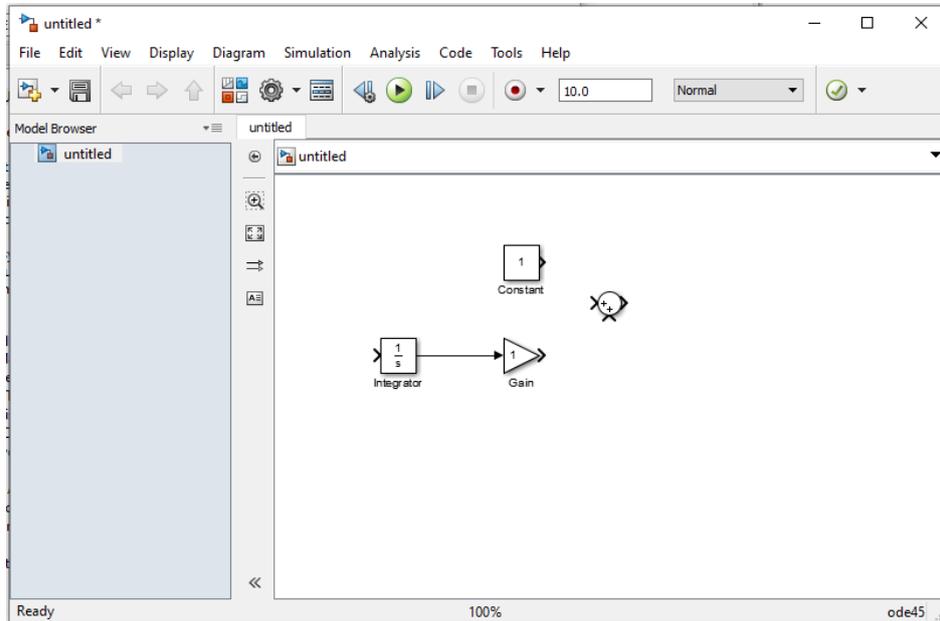
O mesmo procedimento no bloco *Gain*: clica-se na caixinha correspondente e se insere o fator multiplicativo (=  $-1,5$ ) (Figura 11).

**Figura 11.** Inserção do fator multiplicativo -1,5 no bloco *Gain*.



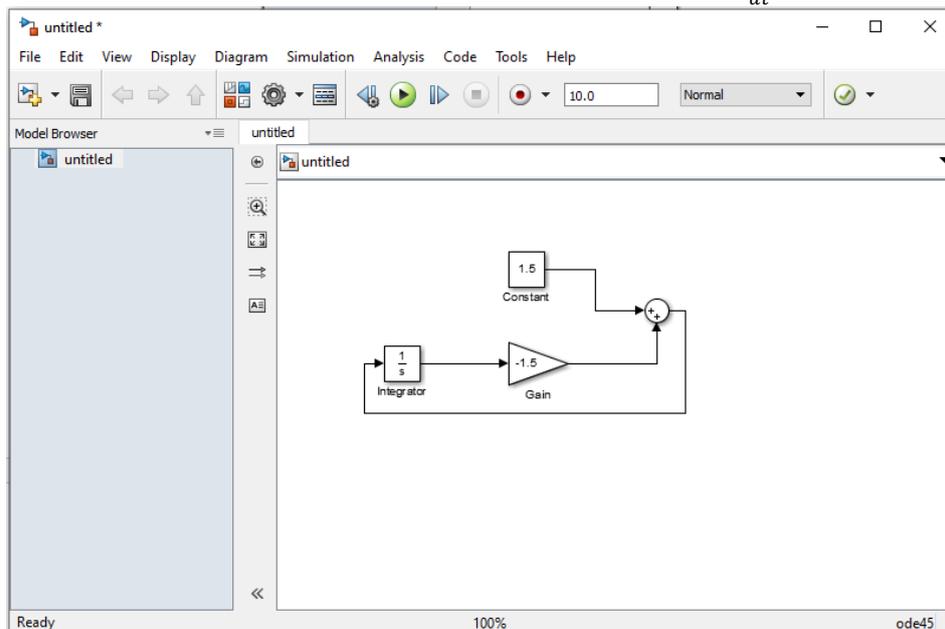
Precisamos ainda somar os dois termos que aparecem no 2º membro da equação e que estão representados, no diagrama, pelos blocos *Constant* e *Gain*. Para tanto, iremos conectá-los usando um bloco de adição, o “*Sun*”, a caixinha circular. A Figura 12 mostra os quatro blocos importados na janela de edição.

**Figura 12:** 3 blocos ou caixinhas na janela de edição do Simulink – *Integrator*, *Constante*, *Gain* e *Sun*



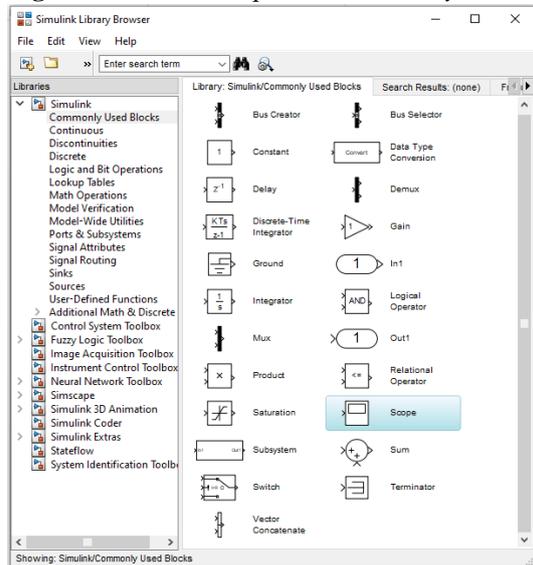
Note que os valores são sempre registrados com o ponto decimal (1.5 e não 1,5). Agora temos de interligar os blocos. O Simulink permite fazê-lo facilmente conduzindo o cursor nas entradas e saídas dos blocos. Veja na Figura 13, note a entrada na caixa *Integrator*, pois a soma de termos no 2º membro deve igualar-se à derivada, que é a própria entrada deste bloco. Note ainda que os correspondentes valores informados constam no desenho das caixinhas em questão.

**Figura 13:** diagrama com os blocos interligados por setas. Equação  $\frac{dP}{dt} = 1,5 - 1,5P$



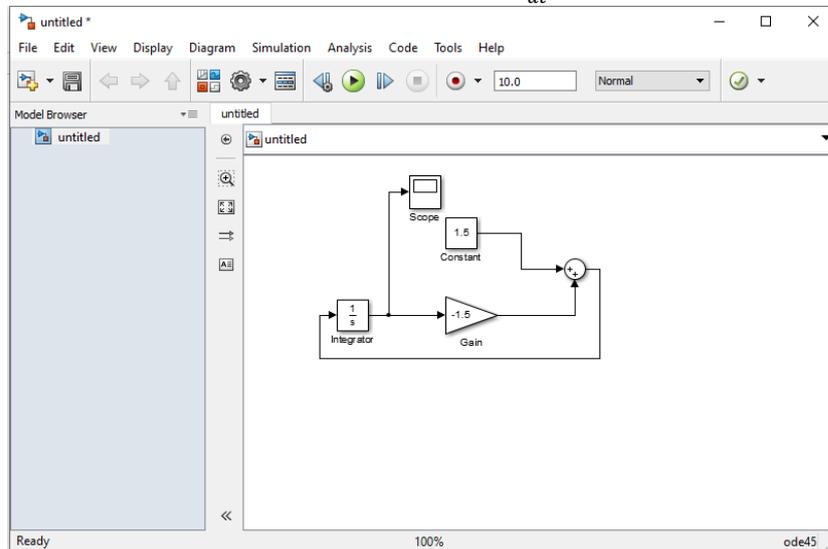
Finalmente, como nosso propósito é obter-se o gráfico do padrão observado na equação diferencial  $\frac{dP}{dt} = 1,5 - 1,5P$ , iremos adicionar uma caixinha que oferece o desenho da trajetória de  $P$ . A caixinha escolhida é o “Scope” (Figura 14).

**Figura 14:** bloco “Scope” na *Commonly Used Blocks*.



Note que a variável  $P$  viceja na saída do bloco *Integrator*, portanto, é nesse ponto do fluxo que inserimos o bloco *Scope* (para o gráfico da trajetória de  $P$ , se inseríssemos o *Scope* na entrada teríamos a trajetória de  $\frac{dP}{dt}$ ). Veja a Figura 15 com o diagrama completo para o exercício em questão.

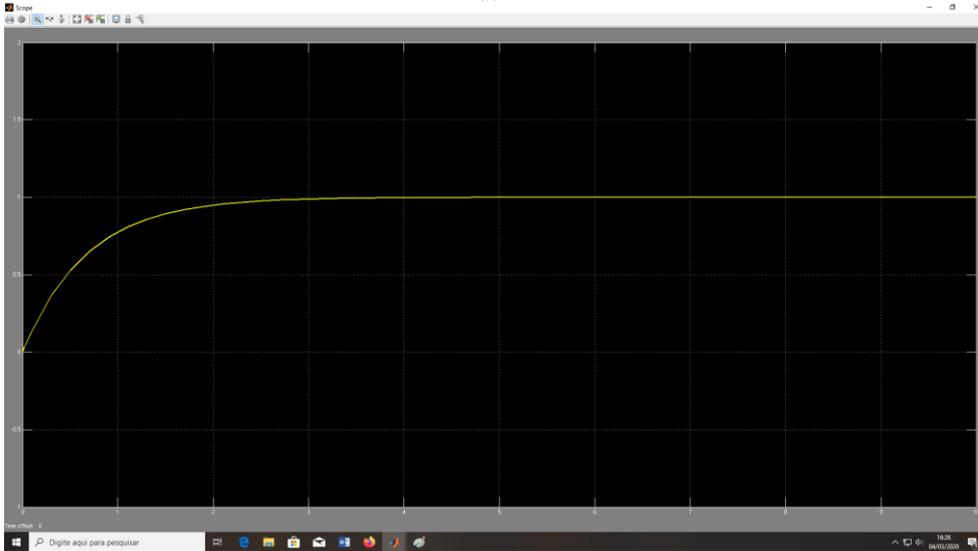
**Figura 15:** diagrama completo para o exercício  $\frac{dP}{dt} = 1,5 - 1,5P$  com o bloco “Scope”.



Agora, ordenamos que o programa resolva a equação  $\frac{dP}{dt} = 1,5 - 1,5P$ . Basta clicar no botão verde de *player* na linha de ícones de comando acima da janela de edição, o botão “run”. O programa emite um sinal sonoro de que a solução foi obtida. Não informamos onde a solução estaria armazenada e nem que ele apresenta a solução explícita na forma de uma equação em  $P$  ( $P(t)$  como na janela de comando do Matlab, onde programamos com o “dsolve”). No uso do Simulink, estamos interessados no

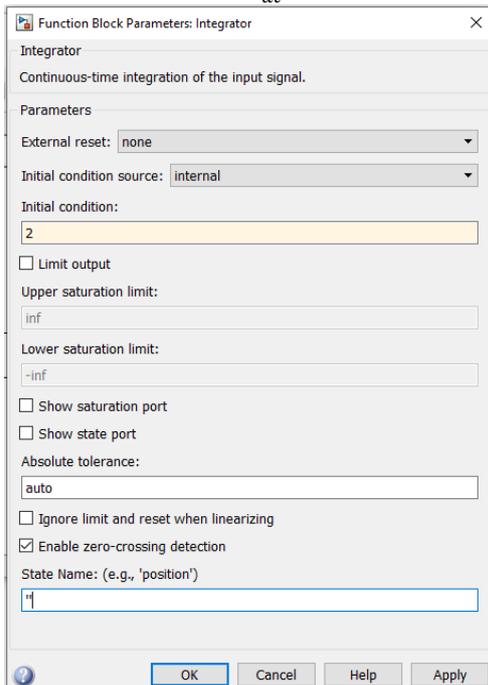
gráfico da trajetória temporal de  $P$ . Uma vez rodado o diagrama em questão, basta clicar no bloco *Scope* que aparecerá o gráfico. Calibrando-se os parâmetros do editor de gráfico (“*Axes properties*” de -1 a 2) definimos a escala vertical e chegamos ao gráfico da Figura 16.

**Figura 16:** trajetória de  $P(t)$  na solução de  $\frac{dP}{dt} = 1,5 - 1,5P$  com a condição  $P(0) = 0$ .



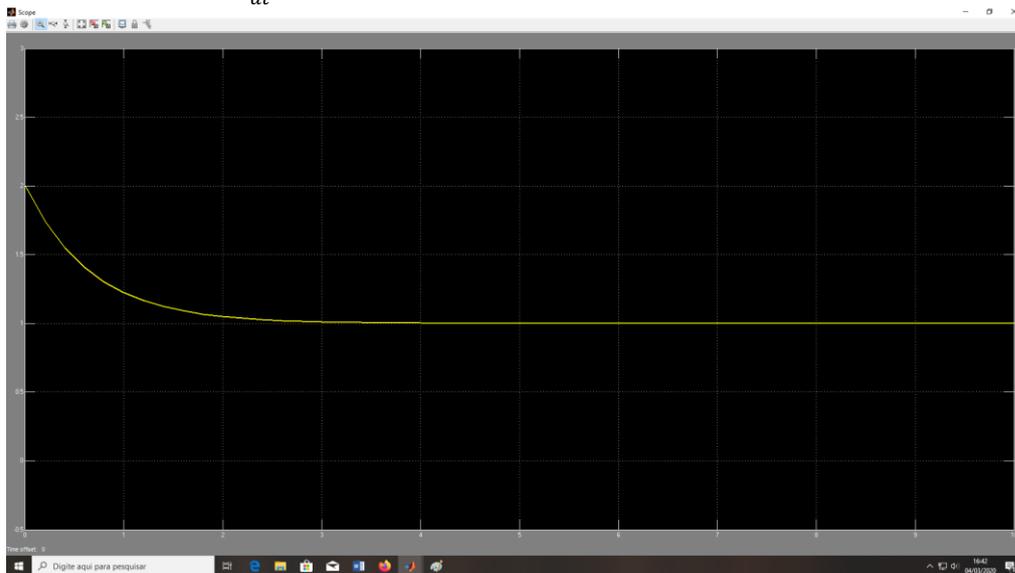
Note a trajetória que alcança o equilíbrio estacionário “por baixo”, porque como não informamos a condição inicial o sistema imagina, como *default*, que  $P(0) = 0$ . Contudo, lembremos que no exercício em questão  $P(0) = 2$ . Devemos, portanto, informar o Simulink dessa condição. Para tanto, basta clicar no bloco *Integrator* e na janela de parâmetros, então aberta, informar adequadamente a condição inicial requerida (Figura 17).

**Figura 17:** o problema  $\frac{dP}{dt} = 1,5 - 1,5P$  com a condição inicial informada  $P(0) = 2$ .



Roda-se novamente o mesmo modelo, afora com a CI informada (botão *run*). Clicando-se no bloco *Scope* tem-se a curva que representa o gráfico da solução teoricamente já conhecida  $P(t) = e^{-1,5t} + 1$ . A Figura 18 mostra-o para “*Axes properties*” de -0,5 a 3. Então note que se, pela análise teórica, obtivemos uma solução explícita para a trajetória de  $P$  dada então por  $P(t) = e^{-1,5t} + 1$ , claramente o equilíbrio dinâmico  $\bar{P}$  ocorre em  $\bar{P} = 1$ . Vimos que a trajetória de  $P(t)$ , por onde ele converge, dependerá do valor inicial  $P(0)$ . Na simulação em que  $P(0) = 0$ ,  $P(0) < \bar{P}$ , o termo  $[P(0) - 1]$  é negativo e a convergência ocorre “por baixo”, conforme a Figura 16. No caso em que  $P(0) = 2 > \bar{P}$ , o termo  $[P(0) - 1]$  é positivo e a convergência a  $\bar{P}$  ocorre “por cima”, como ilustrado na Figura 18 abaixo.

**Figura 18:** gráfico de  $\frac{dP}{dt} = 1,5 - 1,5P$  com  $P(0) = 2$ .



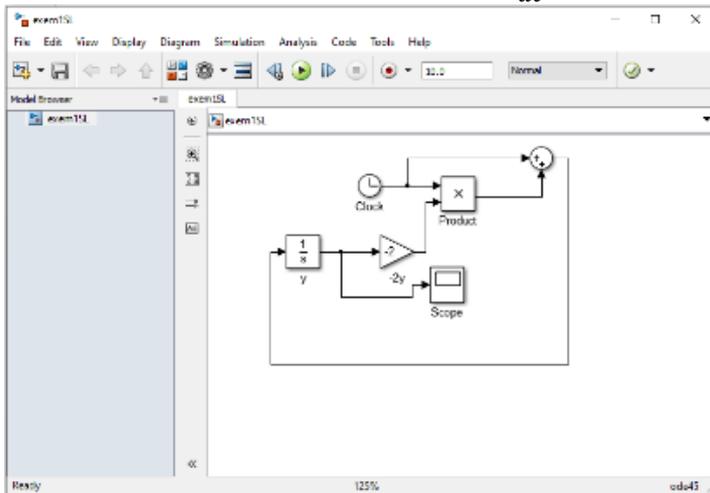
O modelo é salvo no arquivo EX1sim.

Vejamos agora o uso do Simulink na obtenção dos gráficos das soluções dos Exercícios 1 e 2 resolvidos anteriormente. No primeiro deles, a equação diferencial  $\frac{dy}{dt} + 2ty = t$  resultou na trajetória  $y(t) = Be^{-t^2} + \frac{1}{2}$ , onde o valor  $B$  depende da CI. Suponha que  $B = 1$ , ou seja que  $y(0) = 1,5$  e vamos então construir o modelo correspondente no Simulink informando no *Integrator* essa condição inicial. O fluxo do exercício é representado na Figura 19, já informada a CI e salvo no arquivo exem1SL.

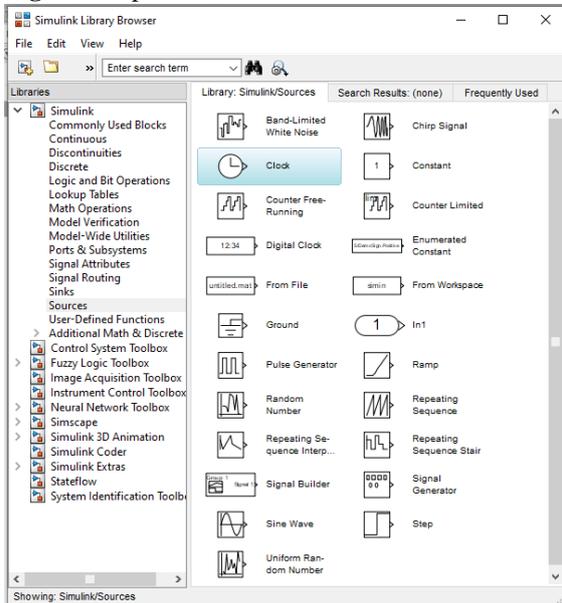
Como novidade, recorreremos ao bloco “*Clock*” da pasta *Source* na biblioteca de blocos do Simulink (Figura 20). Isto porque no 2º membro da equação  $\frac{dy}{dt} = t - 2ty$  precisamos incorporar a variável  $t$  que é alimentada por esse bloco.

Nota-se ainda o uso do bloco “*Product*” para multiplicar  $-2y$  por  $t$ , que aparece na biblioteca “*Math operations*” da *Library Browser* (Figura 21). O bloco de soma (circular) permiti obter o 2º membro da equação diferencial  $\frac{dy}{dt} = t - 2ty$ .

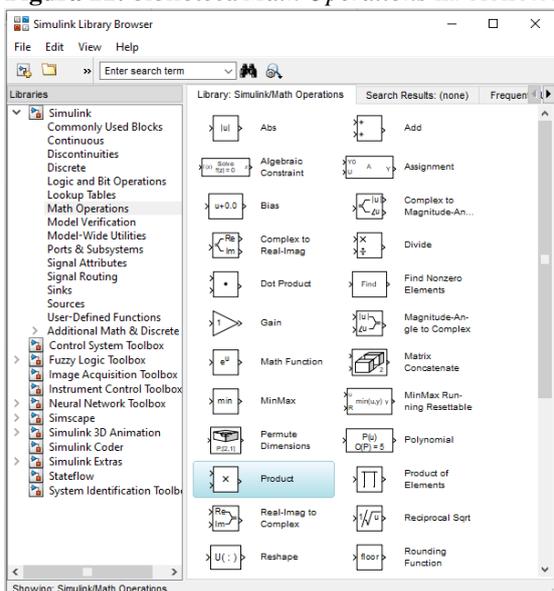
**Figura 19:** diagrama completo para o exercício  $\frac{dy}{dt} + 2ty = t$  com os novos blocos “Clock” e “Product”.



**Figura 20:** pasta *Source* na biblioteca de blocos com destaque para a caixinha “Clock”.

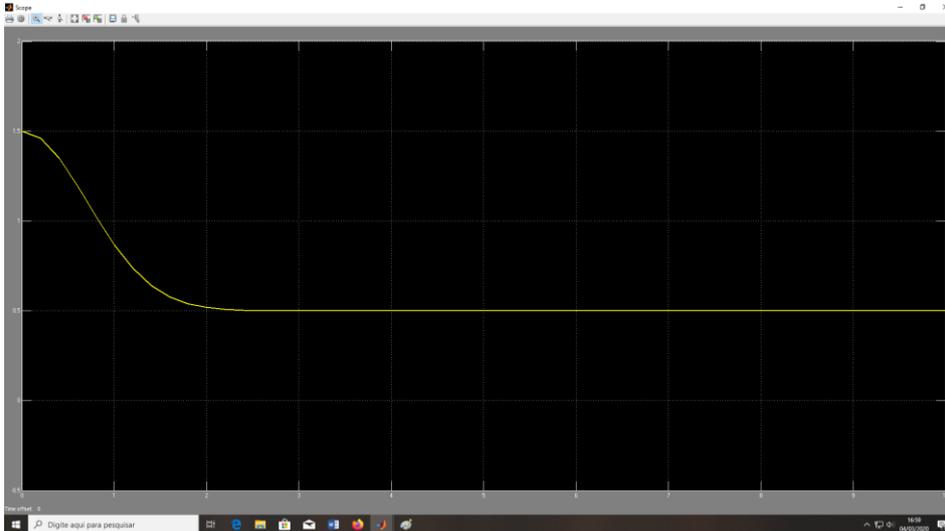


**Figura 21:** biblioteca *Math Operations* na biblioteca de blocos com destaque para a caixinha “Product”.



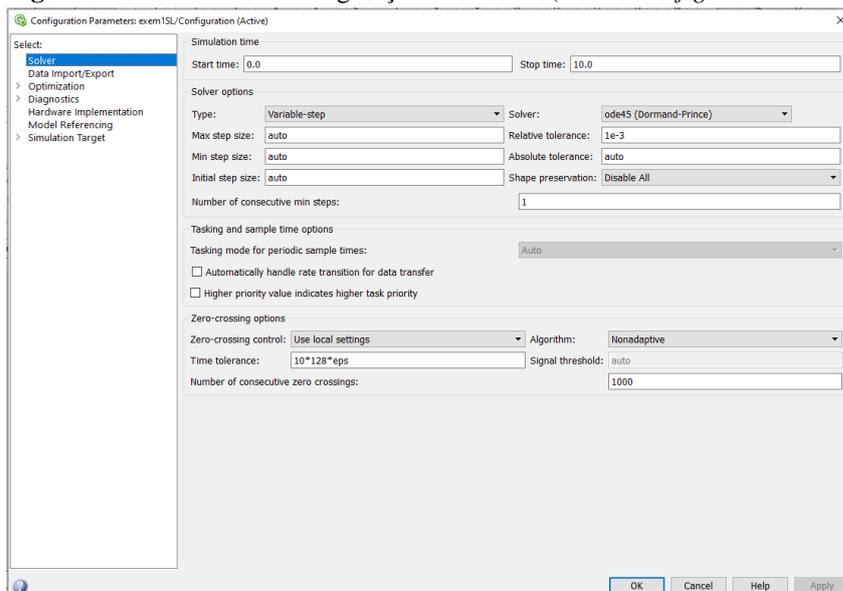
O gráfico da Figura 22, para “*Axes properties*” de -0,5 a 2, permite ver a trajetória, já conhecida,  $y(t) = e^{-t^2} + \frac{1}{2}$ . Note que o gráfico obtido corresponde exatamente à solução teórica vista anteriormente para o exercício.

**Figura 22:** trajetória de  $y(t)$  na solução de  $\frac{dy}{dt} + 2ty = t$  com a condição inicial  $y(0) = 1,5$ .



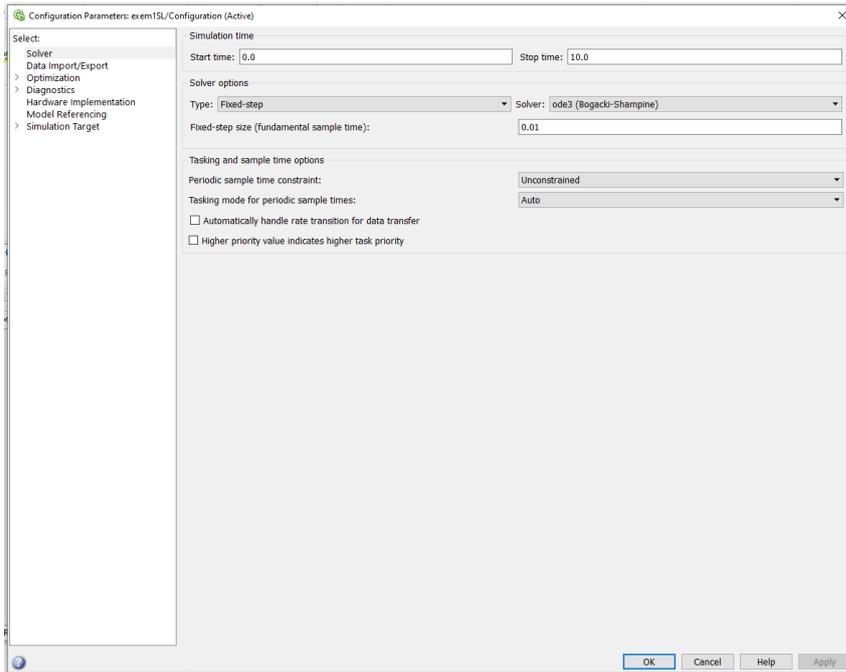
Note que a curva obtida não parece muito bem desenhada, no sentido de que ela não é totalmente suave como seria o gráfico de uma função diferenciável. Apresenta algo semelhante a picos ou cotovelos em alguns trechos. Isso se deve à técnica em que o programa Simulink gera o gráfico em questão. Um modo de melhorar a qualidade do gráfico é entrar no ícone “*Model Configuration Parameters*” (MCP) (a roda dentada na barra de ícones) e mudar a opção do *Solver* de “*Variable-step*” (Figura 23) para “*Fixed-step*” (Figura 24) e, neste caso, fixar o tempo fundamental do passo (*Fixed-step size*) em 0,01 ou talvez num valor ainda menor (se possível).<sup>8</sup>

**Figura 23:** Parâmetro de configuração do modelo (*Model Configuration Parameters*) para *Variable-step*.



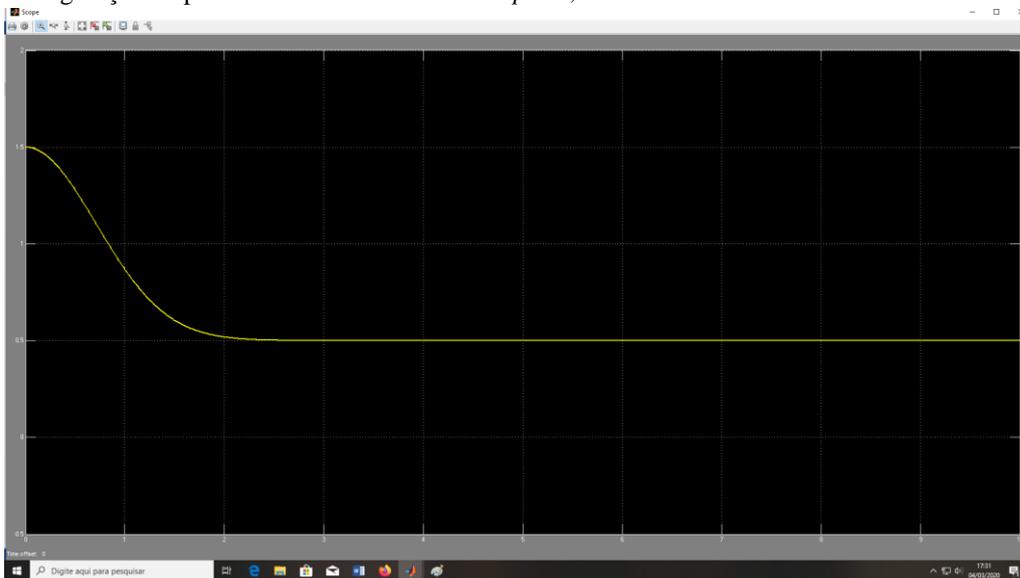
<sup>8</sup> O usuário pode testar novas parametrizações e analisar a qualidade do gráfico depois gerado.

**Figura 24:** Parâmetro de configuração do modelo (MCPs) para *Fixed-step* (=0,01).



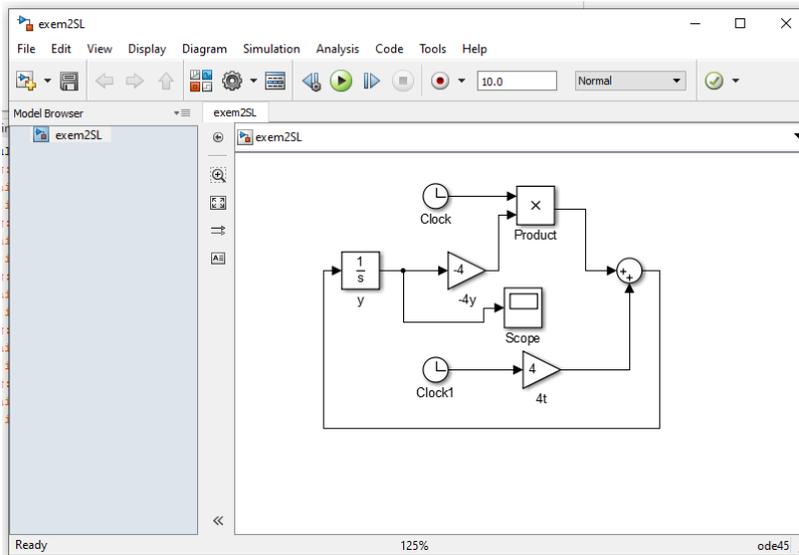
Gera-se novamente o gráfico que corresponde à solução do exercício (Figura 25). Nota-se que a qualidade do gráfico agora é sensivelmente melhor, se parece mais com uma curva diferenciável sem cotovelos.

**Figura 25:** trajetória de  $y(t)$  na solução de  $\frac{dy}{dt} + 2ty = t$  com a condição inicial  $y(0) = 1,5$ . Melhor configuração de parâmetros no MCP: *Fixed-step* = 0,01.



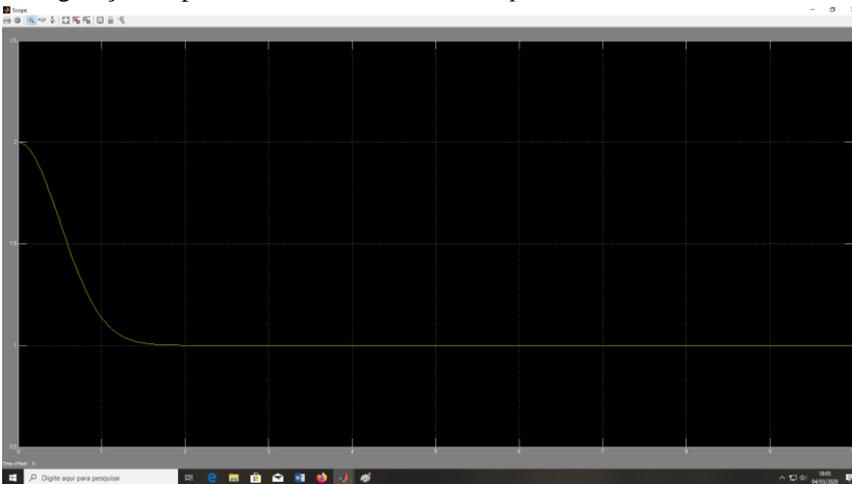
Vejamos agora a solução do Exercício 2 já visto. Trata-se da equação diferencial  $\frac{dy}{dt} + 4ty = 4t$ , cuja solução obtida teoricamente é  $y(t) = Ae^{-2t^2} + 1$ . “A” depende da condição inicial e faremos, por simplicidade,  $A = 1$ , ou seja  $y(0) = 2$ . O modelo de fluxo no Simulink, para a equação  $\frac{dy}{dt} = 4t - 4ty$ , é mostrado na Figura 24, e salvo no arquivo exem2SL. Note que agora optamos por utilizar duas fontes de tempo, mas o fluxo de blocos utiliza as mesmas caixinhas básicas.

**Figura 26:** diagrama completo para o exercício  $\frac{dy}{dt} + 4ty = 4t$  com dois blocos “Clock”.



Alimentando a condição inicial,  $y(0) = 2$ , no bloco *Integrator*, roda-se o modelo e depois aciona-se a caixinha *Scope* para a geração do gráfico (Figura 27). Tal gráfico foi gerado para certa configuração de parâmetros no MCP com passo fixo de 0,02, obtido após sucessivas tentativas de obter-se o “melhor” gráfico.<sup>9</sup>

**Figura 27:** trajetória de  $y(t)$  na solução de  $\frac{dy}{dt} + 4ty = 4t$  com a condição inicial  $y(0) = 2$ . Melhor configuração de parâmetros no MCP: *Fixed-step* = 0,02.



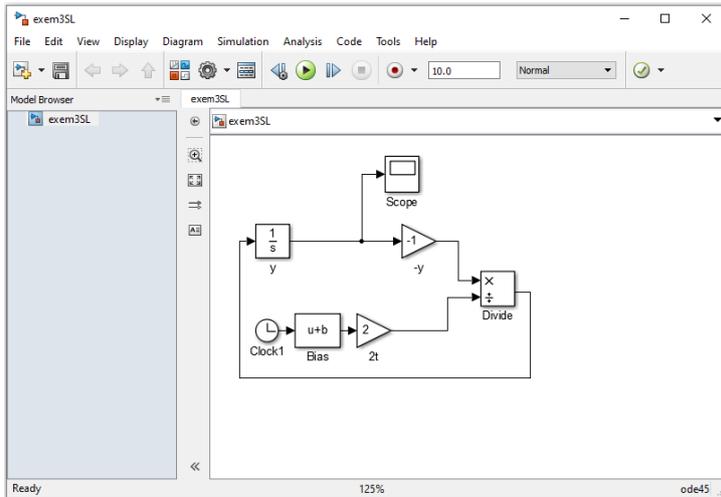
Vejamos agora a solução por Simulink do exemplo trabalhado na páginas 14 deste livro, em que  $\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{2t}$  e cuja solução foi obtida como sendo  $y(t) = c.t^{-\frac{1}{2}}$ . Na diagramação dos blocos, há de se levar em conta que o programa pode ter problema ao procurar a solução por um método iterativo de varredura do tempo começando por  $t = 0$  na equação diferencial, pois  $t^{\frac{1}{2}}$  aparece no denominador de  $y(t)$ . A solução aqui proposta, dentre outras possíveis, na montagem da diagramação é incorporar um acréscimo no tempo, um pequeno viés  $u$ , para que o relógio não comece a trabalhar em

<sup>9</sup> Neste exercício, não se gera um “bom” gráfico com passo fixo de 0,01 como no exercício anterior.

$t = 0$ , mas em  $t = u$ ,  $u$  tão pequeno quanto se queira. Para tanto, acoplamos na saída do bloco “Clock” o bloco “Bias” com um deslocamento do tempo de apenas 1 décimo de milésimo ( $u = 0,0001$ ).<sup>10</sup> De resto, a diagramação é muito simples conforme mostra-se na Figura 28 (modelo salvo no arquivo 29iry29min).

Na solução conhecida,  $y(t) = c \cdot t^{-\frac{1}{2}}$ , imaginemos que  $c = 1$ , de modo que  $y(0,0001) = (0,0001)^{-\frac{1}{2}} = 100$ . Essa condição “inicial” foi marcada no bloco *Integrator* e, mantendo-se o MCP em “variable-step” (pois, não se obteve “bom” gráfico com passo fixo), com “Number of consecutive min steps” = 1, chega-se ao gráfico da Figura 29.

**Figura 28:** diagrama completo para o exemplo  $\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{2t}$  com bloco de viés, “Bias”.



**Figura 29:** trajetória de  $y(t)$  na solução de  $\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{2t}$  com a condição inicial  $y(0,0001) = 100$ .

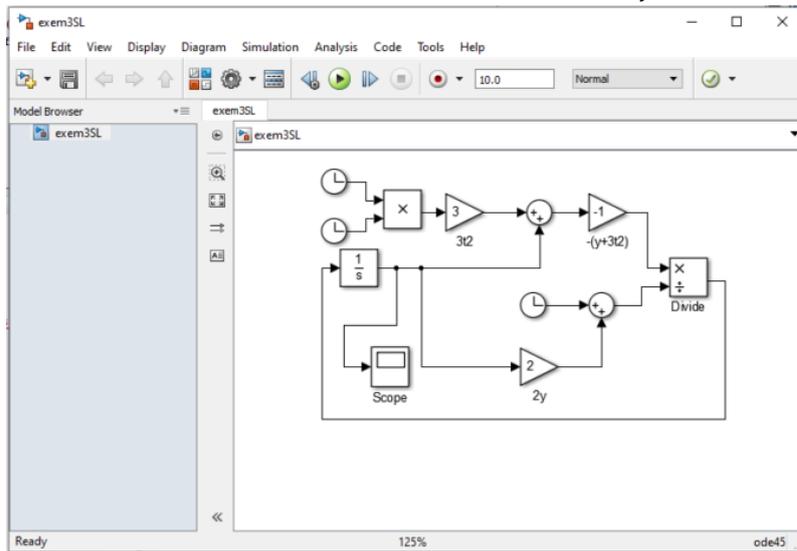


Veremos o *exercício 3*, relativo à equação  $\frac{dy}{dt} = -\frac{y+3t^2}{t+2y}$ . Vimos que a solução teórica é expressa pela equação  $y = \frac{-t \mp \sqrt{t^2 - 4(t^3 - c)}}{2}$ , portanto, fazer a diagramação gráfica

<sup>10</sup> Outro método de solução consiste em informar o passo inicial em 0,0001, ou qualquer valor superior e próximo a zero no campo *Start Time* do MCP.

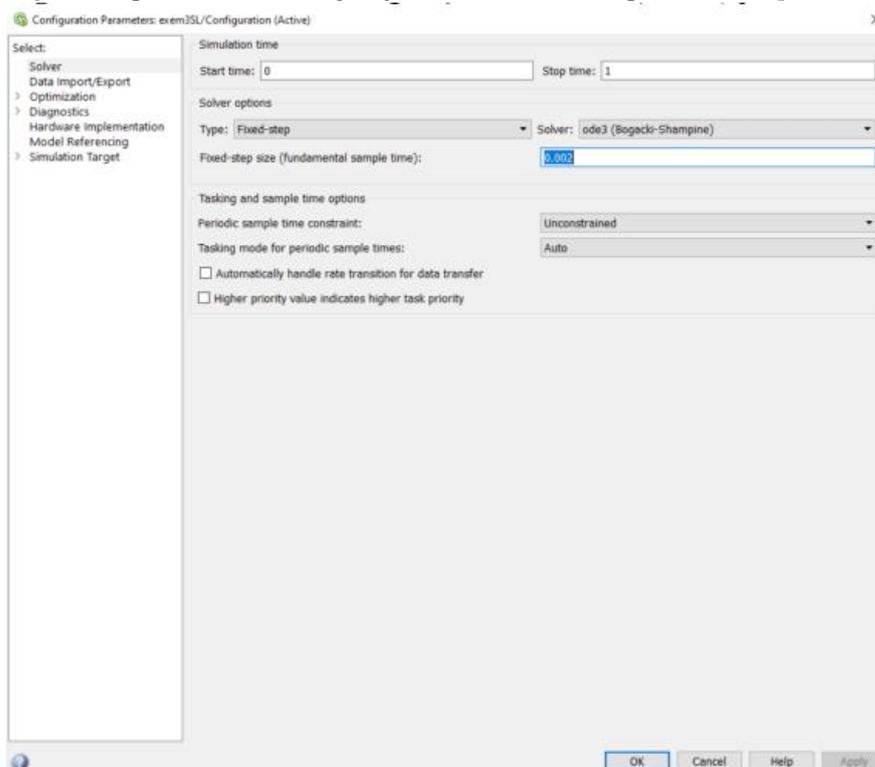
de blocos é mais trabalhoso neste caso. A Figura 30 mostra o modelo para esse exercício, gravado no arquivo exem3SL.

**Figura 30:** diagrama completo para o exemplo  $\frac{dy}{dt} = -\frac{y+3t^2}{t+2y}$ .



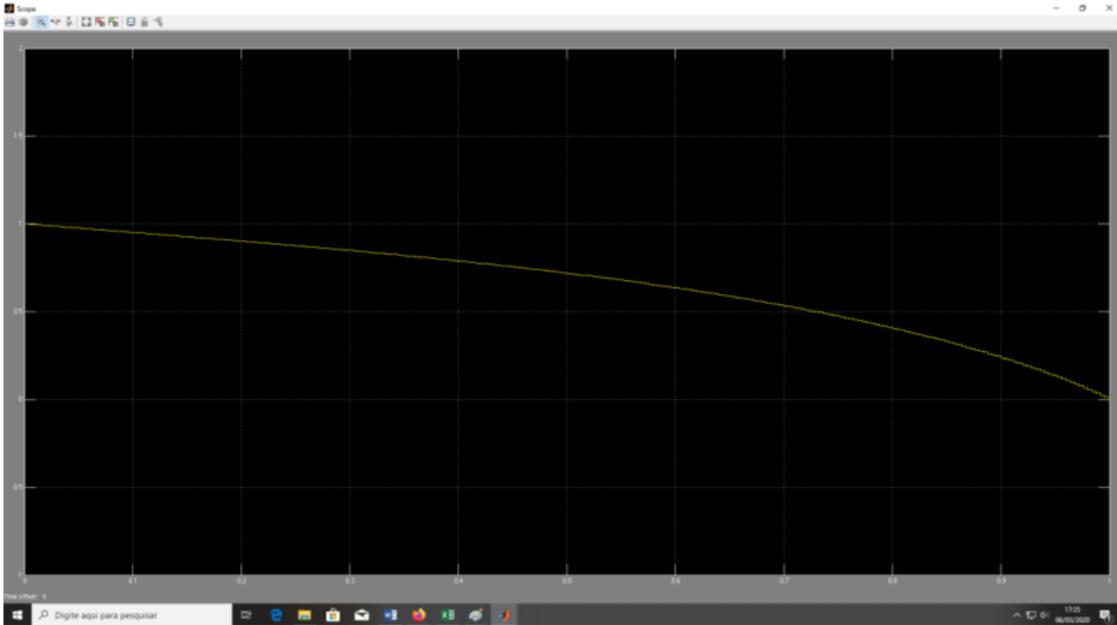
Na solução teórica,  $y = \frac{-t \mp \sqrt{t^2 - 4(t^3 - c)}}{2}$ , a condição inicial para  $t = 0$  é  $y(0) = \frac{\mp \sqrt{4c}}{2} = \mp c$ . Fazemos  $c = 1$ , por simplicidade, e a CI é  $y(0) = \mp 1$ . Vamos alimentar  $y(0) = 1$  no bloco *Integrator* e rodar o modelo. Note que para  $t > 1,09$  o radicando se torna negativo, pois teste  $t^2 - 4(t^3 - 1) = 4 + t^2 - 4t^3$  para  $t = 1,09$  e para  $t = 1,1$ , resultará respectivamente 0,008 e -0,114. Então antes de rodar o modelo iremos parametrizar o MCP da seguinte forma (Figura 31):

**Figura 31:** parâmetro de configuração do modelo (MCP) para *Fixed-step* (= 0,002) e *Stop time* = 1.



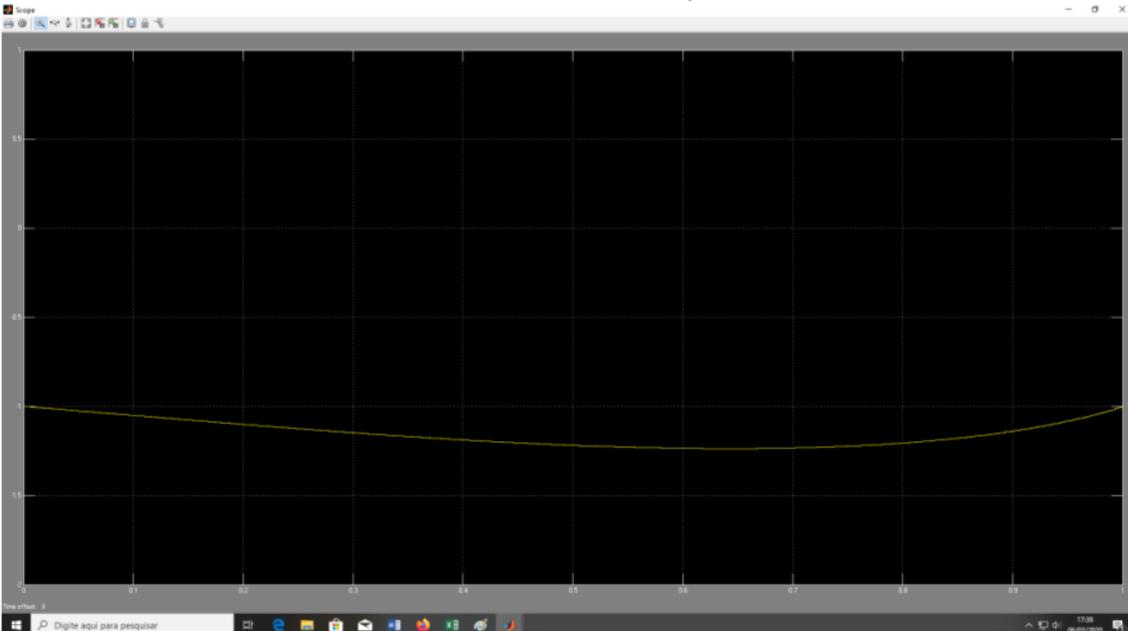
Previamente, informamos ainda que  $y(0) = 1$ . Para esse caso, o modelo é rodado e obtemos o seguinte gráfico no Simulink (Figura 32).

**Figura 32:** trajetória de  $y(t)$  na solução de  $\frac{dy}{dt} = -\frac{y+3t^2}{t+2y}$  com a condição inicial  $y(0) = 1$ .



Para o caso em que a condição inicial se torna  $y(0) = -1$ , informa-se essa condição nos parâmetros do bloco *Integrator* e roda-se o modelo, obtém-se agora o gráfico da Figura 33:

**Figura 33:** trajetória de  $y(t)$  na solução de  $\frac{dy}{dt} = -\frac{y+3t^2}{t+2y}$  com a condição inicial  $y(0) = -1$ .



## Equações diferenciais não-lineares de primeira ordem e primeiro grau

Vimos que, na equação linear, podia aparecer apenas termos com  $\left(\frac{dy}{dt}\right)^1$  e  $y^1$ , e não se admitia a existência de termos com produtos cruzados do tipo  $y\frac{dy}{dt}$ . Vamos agora manter a condição de que a equação seja linear em  $\frac{dy}{dt}$ , porém admitamos a existência de  $y^n$  para  $n > 1$ . Então temos equações diferenciais de primeira ordem e primeiro grau não-lineares. Genericamente escreve-se, para equação desse tipo:

$$f(y, t)dy + g(y, t)dt = 0 \quad (11)$$

Onde em  $f(y, t)$  e  $g(y, t)$  não se faz nenhuma restrição às potências de  $y$  e  $t$ . A equação (11) pode ser escrita em termo de derivada como  $\frac{dy}{dt} = h(y, t)$ , para  $h$  novamente sem restrição às potências das variáveis envolvidas. A equação (11) é de 1ª ordem e de 1º grau em  $\frac{dy}{dt}$ , mas é equação diferencial não-linear. Resolvê-las nem sempre é fácil ou possível, mas vejamos agora os casos mais fáceis.

### Solução para equações exatas

Caso já visto, por exemplo em  $-2ytdy + y^2dt = 0$ . Usa-se o método teórico já conhecido e as correspondentes soluções computacionais (vide os exercícios em Matlab EXEM3.m e EXEM4.m).

### Problema com variáveis separadas

No caso em que a equação (11) puder ser simplificada para  $f(y)dy + g(t)dt = 0$ , ou seja, em que o primeiro coeficiente só dependa de  $y$  e o segundo coeficiente apenas de  $t$ , temos um caso com variáveis separadas. Para este, usa-se técnicas simples de integração. A título de exemplo, vejamos o Exercício 4:

### Exercício 4

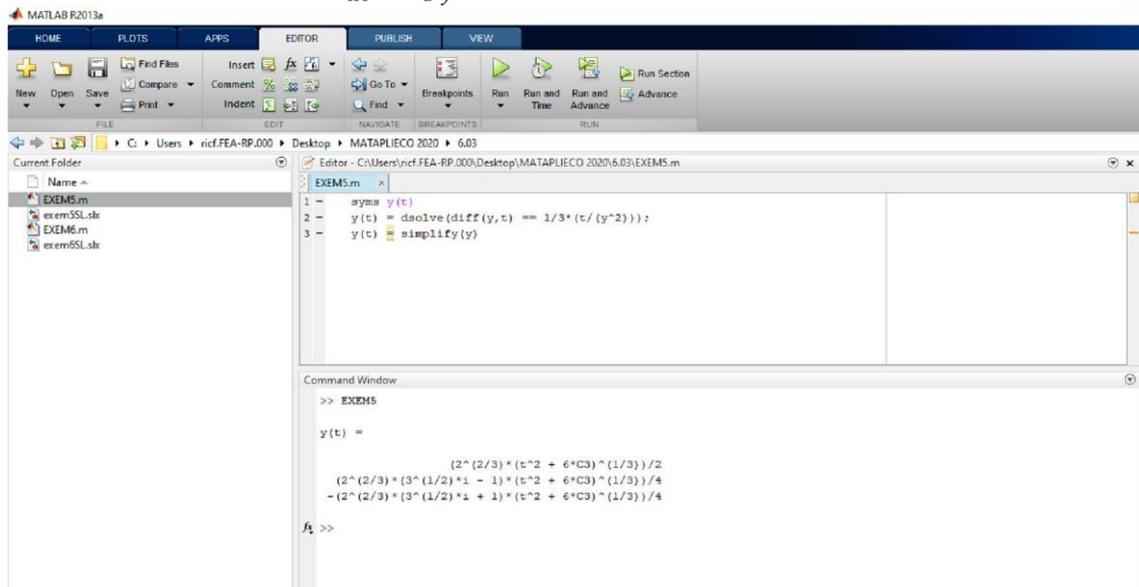
Resolva a equação diferencial expressa em diferenciais:  $3y^2dy - tdt = 0$ .

Pode-se escrever então  $3y^2dy = tdt$  e integra-se os dois membros:  $\int 3y^2dy = \int tdt$ . Ou seja, resolvendo-se ambas as integrais,  $y^3 + c_1 = \frac{1}{2}t^2 + c_2$ ,  $y^3 = \frac{1}{2}t^2 + c$ ,  $c = c_1 + c_2$ . De modo que  $y(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{\frac{1}{3}}$ . Vejamos a solução usando a janela de comando do Matlab. Como sempre, antes de escrever a equação diferencial do exercício devemos isolar no 1º membro apenas o termo da derivada, de modo que  $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}\frac{t}{y^2}$  deverá aparecer como argumento na função *dsolve*. Portanto, escreve-se na janela em questão:

```
syms y(t)
y(t) = dsolve(diff(y,t) == 1/3*(t/(y^2)));
y(t) = simplify(y)
```

E ao executar tais comandos o programa exibe a solução mostrada na Figura 34. Tal sequência de programação foi salva no arquivo *m* denominado EXEM5.m.

**Figura 34:**  $y(t)$  na solução de  $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3} \frac{t}{y^2}$ .



A solução apresentada pelo programa parece algo confusa e diferente da encontrada teoricamente como sendo  $y(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{\frac{1}{3}}$ . É preciso saber interpretar os resultados oferecidos pelo Matlab. Primeiramente, nota-se que nas suas últimas linhas da *janela de comando* há um par conjugado de soluções complexas que envolvem o número imaginário  $i$ . De fato, livros textos como Chiang e Wainwright ou Simon e Blume costumam ignorar as soluções complexas que aparecem em casos simples como o do exercício em tela (certamente porque elas remetem a um aprofundamento didaticamente inapropriado do exame das soluções), mas tais soluções complexas podem aparecer.<sup>11</sup> Nossa solução teórica, já obtida, corresponde apenas a uma apresentação mais simplificada da solução oferecida pelo programa na primeira das três soluções listadas na figura (a solução não complexa).

De fato, se a solução obtida por nós é  $y(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{\frac{1}{3}}$ , então  $y(t) = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} (t^2 + 2c)^{\frac{1}{3}} = 2^{1-\frac{1}{3}} \frac{(t^2+2c)^{\frac{1}{3}}}{2} = 2^{\frac{2}{3}} \frac{(t^2+2c)^{\frac{1}{3}}}{2} = 2^{\frac{2}{3}} \frac{(t^2+6C_3)^{\frac{1}{3}}}{2}$ . Onde  $C_3 = \frac{1}{3}c$ . Note que se trata da mesma solução oferecida pelo Matlab. Às vezes, a solução do programa não parece muito elegante ou simplificada, isso tem a ver com o método de cálculo dele. Mas será precisamente a mesma solução já examinada em teoria com outro formato, e aquela pode ser simplificada de modo a coincidir perfeitamente com a solução teórica.

<sup>11</sup> No estudo das equações diferenciais de ordem elevada, veremos certos contextos em que apareceram soluções complexas. Mas não examinaremos essa possibilidade para equações diferenciais de 1ª ordem.

### Problema com variáveis separadas trocadas

Neste caso, aparece uma expressão do tipo  $f(t)dy + g(y)dt = 0$ , ao invés do caso de variáveis separadas simples  $f(y)dy + g(t)dt = 0$ . O problema pode ser resolvido facilmente com uma simples operação, conforme veremos a seguir no Exercício 5.

#### Exercício 5

Resolva a equação diferencial expressa em diferenciais:  $2tdy + ydt = 0$ .

Portanto, neste caso o argumento de  $f$  e  $g$  estão errados, isto é, trocados. Mas se dividirmos ambos os termos por  $2yt$ , supondo que  $yt \neq 0$ , chega-se à expressão  $\frac{1}{y}dy + \frac{1}{2t}dt = 0$ , que agora apresenta os coeficientes “certos”. Podemos novamente resolver por integração:  $\int \frac{1}{y}dy + \int \frac{1}{2t}dt = c$ ,  $\ln y + \frac{1}{2}\ln t = c$ ,  $\ln yt^{\frac{1}{2}} = c$ ,  $yt^{\frac{1}{2}} = e^c$  e portanto  $y(t) = kt^{-\frac{1}{2}}$ , onde  $k = e^c$ .

Note que outro modo de resolver o exercício seria multiplicar a equação do problema por  $y$  e teríamos então  $2ytdy + y^2dt = 0$ , que já vimos tratar-se de equação diferencial exata.

A fim de resolver o exercício no Matlab, devemos escrever  $\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{2t}$ , e então escrever na janela de comando a seguinte sequência de programação:

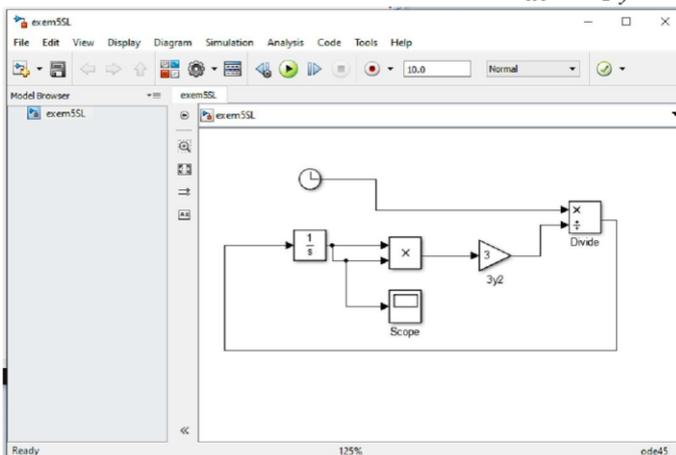
```
syms y(t)
y(t) = dsolve(diff(y,t) == -y/(2*t))
```

Chegamos então à mesma solução obtida teoricamente. Tal sequência de comandos é salvo no arquivo EXEM6.m.

### Análise gráfica das soluções dos problemas propostos usando-se o Simulink

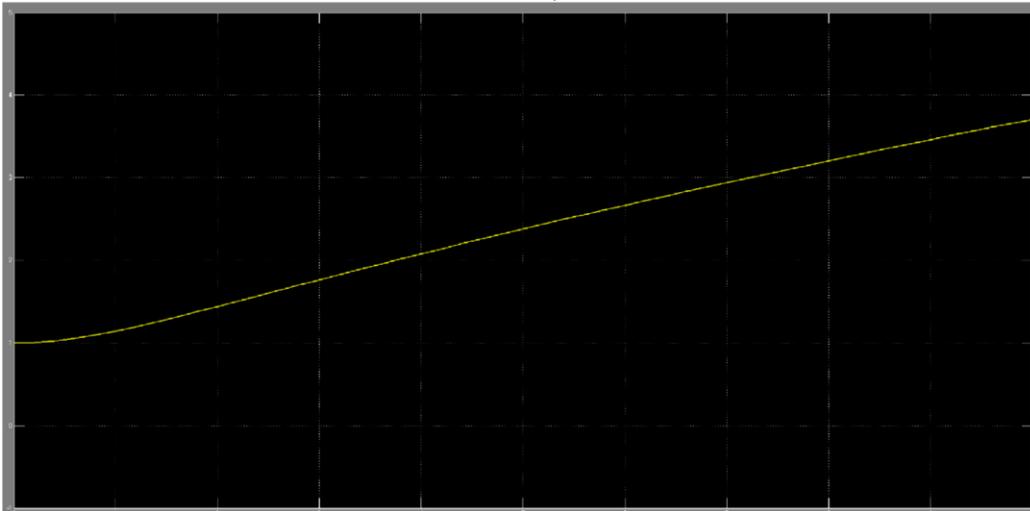
A fim de resolver o exercício 4 no Simulink, fazemos a diagramação gráfica de blocos da equação do problema  $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3} \frac{t}{y^2}$  na janela *Model* do programa. A Figura 35 representa a diagramação para esse caso. A montagem parece bem simples e evidente.

**Figura 35:** diagrama completo para o exemplo  $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3} \frac{t}{y^2}$ .



A seguir, rodamos o modelo para a condição inicial *default*, portanto, não ativamente informada,  $y(0) = 1$ . Tal condição pode ser vista nos parâmetros do bloco *Integrator*. Após executar o modelo, podemos gerar o gráfico clicando-se na caixinha do *Scope*. Obtém-se assim o gráfico da figura 36. Note que ele corresponde bem à trajetória teórica  $y(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)^{\frac{1}{3}}$ . Perceba ainda que como  $y(0) = 1$ ,  $c = 1$  neste caso específico. O diagrama foi salvo no arquivo de blocos em fluxo *exem5SL*.

**Figura 36:** trajetória de  $y(t)$  na solução de  $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3} \frac{t}{y^2}$  com a condição inicial  $y(0) = 1$ .



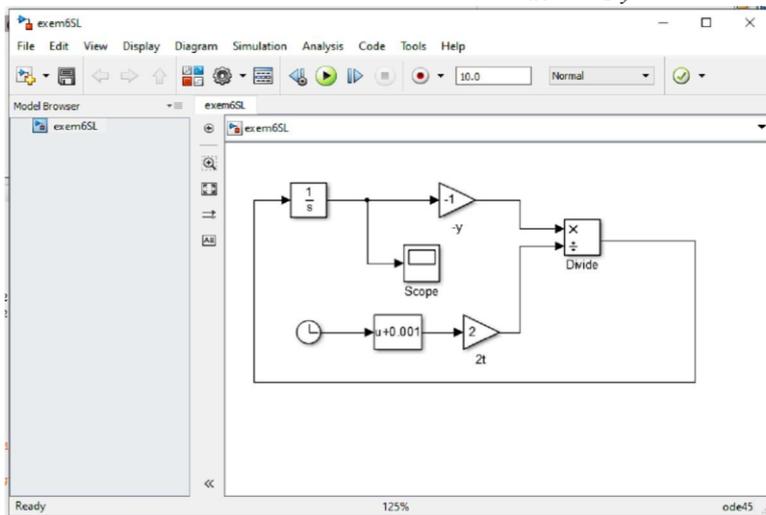
Para a solução do exercício 5 no Simulink, procede-se à diagramação gráfica de blocos da equação do problema  $\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{2t}$  na janela *Model* do Simulink. Da solução teórica,  $y(t) = kt^{-\frac{1}{2}}$ , note que se zerarmos o cronômetro, ou seja se  $t_0 = 0$ , podemos estourar a iteração em  $t_0$ , porque a raiz quadrada de  $t$  aparece no denominador, e o programa irá fornecer uma mensagem de erro. A fim de contornar esse problema, introduzimos uma defasagem de 0,001, ou um milésimo, na saída do bloco *Clock*, por meio do bloco *Bias*.<sup>12</sup>

Além disso, iremos preparar uma condição inicial apropriada. Para tanto, como usamos uma defasagem no tempo de um milésimo,  $t_0 = 0,001$ , portanto  $y(t_0) = y(0,001) = k(0,001)^{-\frac{1}{2}}$ . Para  $k = 1$ , arbitrariamente suposto,  $y(0,001) = 31,6$ , que foi informado no bloco *Integrator* como sendo a “condição inicial” do problema. A Figura 37 mostra a diagramação dos blocos para esse problema, que nos parece facilmente compreensível para o leitor que chegou até aqui. O diagrama foi salvo no arquivo *exem6SL*. Já a Figura 38 mostra o gráfico da trajetória  $y(t) = kt^{-\frac{1}{2}}$ . De fato, conhecida a trajetória a curva pode ser facilmente desenhada. Mas nota-se que no Simulink não se informa a função da trajetória, o programa que a obtém como fundamento para o gráfico depois apresentado pelo *Scope*. O gráfico apresenta trechos com cotovelos e, como tal, não representa perfeitamente uma curva suave e diferenciável. No entanto, não foi possível melhorar a curva pela opção de passo fixo na janela de *parâmetros de configuração*.

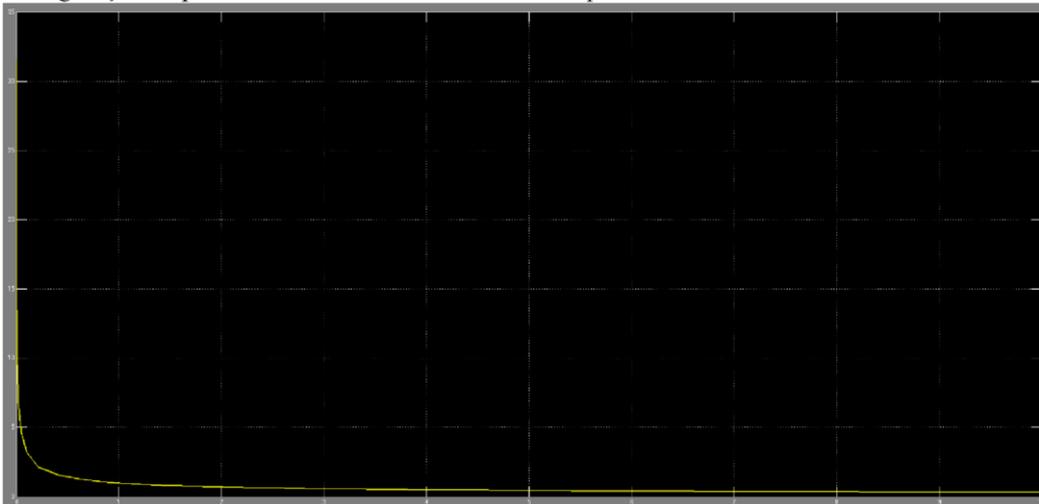
<sup>12</sup> Ou então, conforme já comentado na nota de rodapé 10, pode-se em informar um passo inicial com um tempo ligeiramente maior que zero no campo *Start Time* do MCP.

ção do modelo (MCP). A curva, portanto, foi gerada com a opção de passo variado (*Variable-step*).

**Figura 37:** diagrama completo para o exemplo  $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3} \frac{t}{y^2}$ .



**Figura 38:** trajetória de  $y(t)$  na solução de  $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3} \frac{t}{y^2}$  com a “condição inicial”  $y(0,001) = 31,6$ . Melhor configuração de parâmetros no MCP com *Variable-step*.



### *Equação de Bernoulli*

A equação diferencial de 1ª ordem  $\frac{dy}{dt} = h(y, t)$  assume a forma não linear do tipo equação de Bernoulli:  $\frac{dy}{dt} + R(t)y = T(t)y^m$ . Onde o expoente  $m$  é um inteiro qualquer diferente de 0 e 1.<sup>13</sup> A equação de Bernoulli é considerada uma generalização da equação linear porque ela sempre pode ser linearizada por uma mudança de variável conveniente e simplificadora. Vejamos então como ela se transforma em uma equação diferencial linear. Para tanto, escreva a equação como  $y^{-m} \frac{dy}{dt} + R(t)y^{1-m} = T(t)$  e proponha a

<sup>13</sup> Se  $m = 1$ , temos uma equação exata (verifique!), portanto nos concentraremos no caso em que  $m > 1$ .

seguinte mudança de variável:  $z = y^{1-m}$ . Note que  $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dt} = (1-m)y^{1-m} \frac{dy}{dt}$ . Ou seja, que  $y^{1-m} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{(1-m)} \frac{dz}{dt}$  e podemos substituir na equação original, de modo que agora  $\frac{1}{(1-m)} \frac{dz}{dt} + Rz = T$ . Então, claramente,  $\frac{dz}{dt} + (1-m)Rz = (1-m)T$  trata-se de uma equação diferencial de 1ª ordem linear, com coeficiente variável  $u(t) = (1-m)R(t)$  e termo variável  $\omega(t) = (1-m)T(t)$ . E cuja solução para  $z$ , em analogia à equação (10), é a equação (12):

$$z(t) = e^{-\int (1-m)R(t)dt} \left( A + \int (1-m)T(t) \cdot e^{\int (1-m)R(t)dt} dt \right) \quad (12)$$

Vejamos um exercício a título de exemplo e aplicação.

### Exercício 6

Resolva a equação de Bernoulli  $\frac{dy}{dt} + ty = 3ty^2$ .

Primeiramente perceba que  $y = 0$  e  $y = \frac{1}{3}$  são soluções evidentes. Na busca de uma solução não constante, nota-se que se trata de uma equação de Bernoulli com  $m = 2$ ,  $R(t) = t$  e  $T(t) = 3t$ . Começamos então com a mudança de variável em que se define a nova variável dependente:  $z = y^{1-m} = y^{-1}$ . Neste caso,  $u(t) = (1-m)R(t) = -t$  e  $\omega(t) = (1-m)T(t) = -3t$ . Calcula-se a integral  $\int u dt = -\int t dt = -\frac{t^2}{2}$ . Agora empregue-se a equação (12):  $z(t) = e^{\frac{t^2}{2}} (A + \int (-3t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt)$ . A primitiva do integrando é facilmente reconhecida como sendo  $3e^{-\frac{t^2}{2}}$ , de modo que  $z(t) = Ae^{\frac{t^2}{2}} + 3$ . Falta determinar a função que nos interessa  $y(t)$ , que é obtida voltando-se à mudança de variável original para se chegar a  $y$  a partir de  $z$ . Facilmente verifica-se que  $y = z^{-1} = \frac{1}{Ae^{\frac{t^2}{2}} + 3}$ .

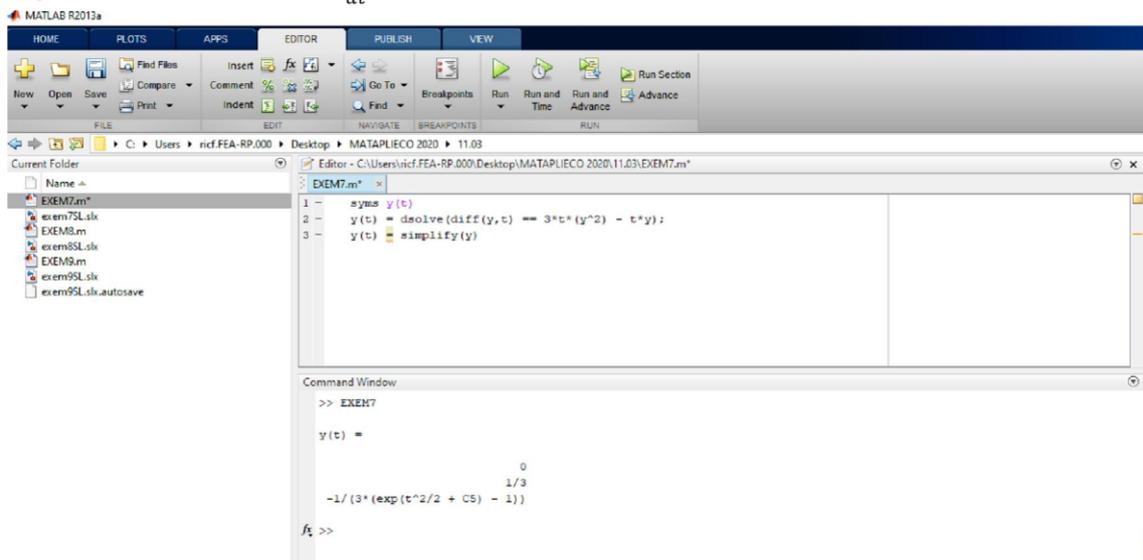
Para resolver o exercício no Matlab, devemos escrever  $\frac{dy}{dt} = 3ty^2 - ty$ , e então desenvolver na janela de comando a seguinte sequência de programação:

```
syms y(t)
y(t) = dsolve(diff(y,t) == 3*t*(y^2) - t*y);
y(t) = simplify(y)
```

Chegamos então às três soluções encontradas teoricamente: as duas constantes e a solução na forma da função  $y(t)$  acima determinada. Na Figura 39 temos, na *janela de comando*, as soluções em questão. Note que novamente a solução encontrada pelo Matlab para a variável dependente,  $y = -\frac{1}{3(e^{\frac{t^2}{2} + C_3} - 1)}$ , pode ser modificada de modo a coincidir

precisamente com nossa solução teórica anterior, pois,  $y = -\frac{1}{3(e^{\frac{t^2}{2} + C_3} - 1)} = -\frac{1}{3(e^{\frac{t^2}{2}} e^{C_3} - 1)} = -\frac{1}{(3e^{C_3} e^{\frac{t^2}{2}} - 3)}$ . Fazendo-se  $3e^{C_3} = -A$ ,  $y = -\frac{1}{(-Ae^{\frac{t^2}{2}} - 3)} = \frac{1}{Ae^{\frac{t^2}{2}} + 3}$ , que corresponde exatamente à solução teórica já encontrada.

Figura 39:  $y(t)$  na solução de  $\frac{dy}{dt} = 3ty^2 - ty$ .



Tal sequência de comandos é salvo no arquivo EXEM7.m. Vejamos agora outro exercício como aplicação da técnica de linearização das equações de Bernoulli.

### Exercício 7

Resolva a equação de Bernoulli  $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}y = y^3$ .

Primeiramente perceba que  $y = 0$  é solução. Na busca de outra solução, agora não constante, nota-se que novamente se trata de uma equação de Bernoulli. No caso,  $m = 3$ ,  $R(t) = \frac{1}{t}$  e  $T(t) = 1$ . Na mudança de variável define-se a nova variável dependente:  $z = y^{1-m} = y^{-2}$ . Neste caso,  $u(t) = (1 - m)R(t) = -\frac{2}{t}$  e  $\omega(t) = (1 - m)T(t) = -2$ . Calcule a integral  $\int u dt = -2 \int \frac{1}{t} dt = -2 \ln t$ . Emprega-se novamente a equação (12):  $z(t) = e^{2 \ln t} (A + (-2) \int e^{-2 \ln t} dt)$ . A integral é facilmente resolvida:  $\int e^{-2 \ln t} dt = \int t^{-2} dt = -\frac{1}{t}$ , de modo que  $z(t) = t^2 \left( A + (-2)(-1) \frac{1}{t} \right) = At^2 + 2t$ . Agora vamos à função que nos interessa  $y(t)$ , que é obtida voltando-se à mudança de variável original para se chegar a  $y$  a partir de  $z$ . Facilmente verifica-se que  $y = z^{-\frac{1}{2}}$ , ou seja,  $y^2 = z^{-1}$  ou  $y = \mp \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} = \mp \frac{1}{(At^2 + 2t)^{\frac{1}{2}}}$ . Em ambos os exercícios, os resultados obtidos podem ser conferidos substituindo-se nas respectivas equações diferenciais originárias.

A fim de resolver o exercício 7 no Matlab, devemos escrever  $\frac{dy}{dt} = y^3 - \frac{1}{t}y$ , e então desenvolver na janela de comando a seguinte sequência de programação:

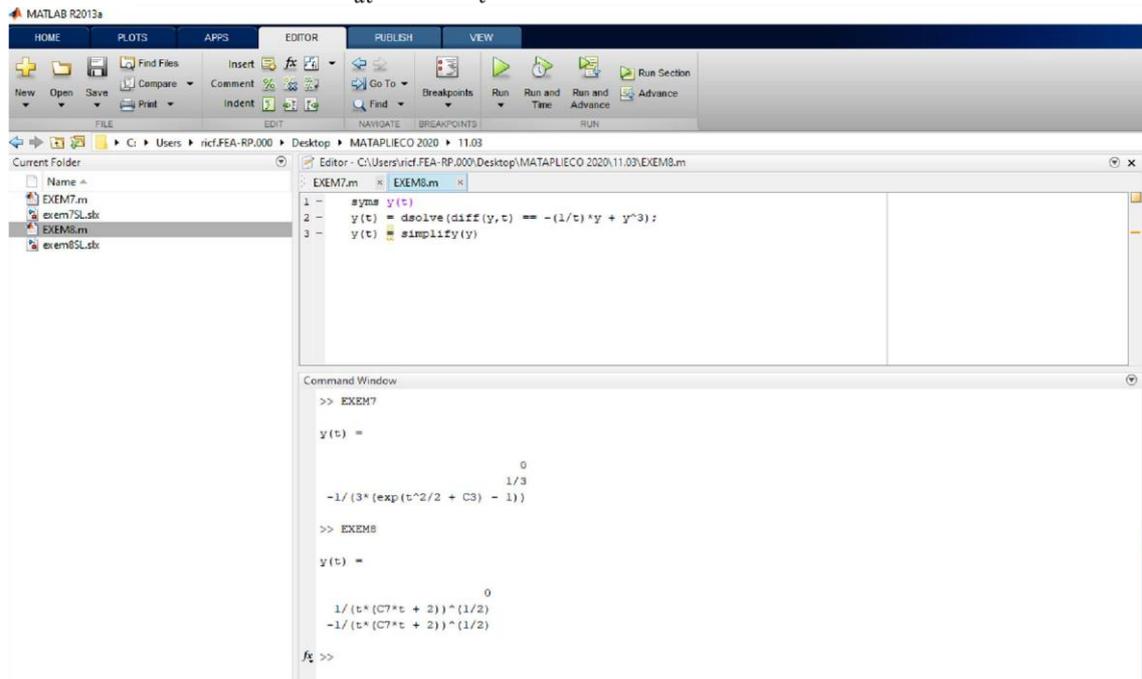
```

syms y(t)
y(t) = dsolve(diff(y,t) == -(1/t)*y + y^3);
y(t) = simplify(y)

```

Chegamos então às duas soluções encontradas teoricamente: a constante zero e a solução na forma da função  $y(t)$  acima determinada.

**Figura 40:**  $y(t)$  na solução de  $\frac{dy}{dt} = y^3 - \frac{1}{t}y$ .



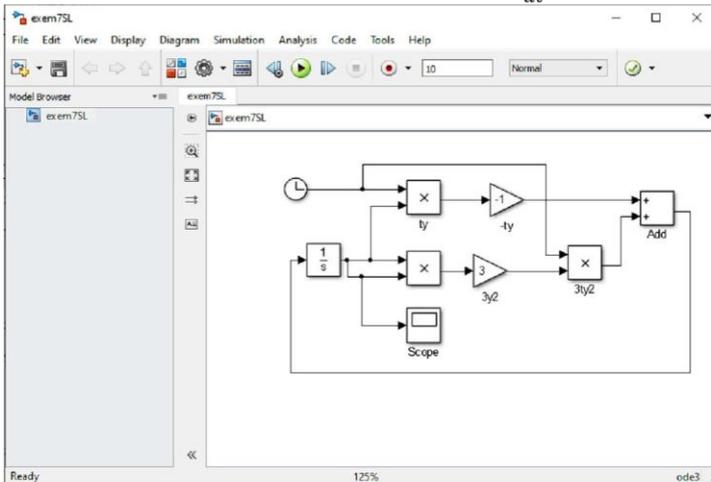
Observe que, na verdade, aparece na *janela de comando* duas soluções não constantes para  $y(t)$ , que correspondem às duas possibilidades de sinais conforme nossa solução teórica.

A sequência de comandos foi salva no arquivo *m* EXEM8.m.

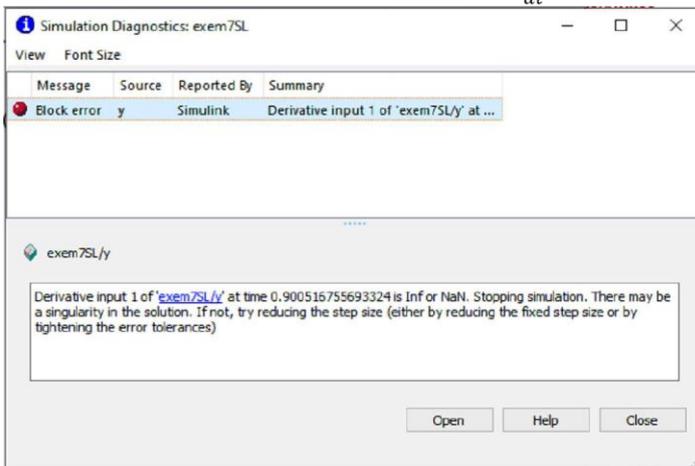
### **Análise gráfica das soluções dos exercícios 6 e 7 usando-se o Simulink**

A fim de resolver o exercício 6 no Simulink, faz-se a diagramação gráfica de blocos da equação do problema,  $\frac{dy}{dt} = 3ty^2 - ty$ , na janela *Model* do programa. A Figura 41 representa tal diagramação. A montagem é autoexplicativa. Antes de rodar o modelo, observe, na solução teórica, que  $y$ , ( $= \frac{1}{Ae^{\frac{t^2}{2} + 3}}$ ), pode anular-se para certo valor de  $t$  dependendo também das condições iniciais que irão determinar o valor de  $A$ . Portanto, o Simulink, ao tentar obter a trajetória pelo método iterativo, pode acusar erro para certo valor de  $t$ . No caso *default*, por exemplo,  $y(0) = 1$ , o programa acusa erro para  $t = 0,9$ , conforme a figura 42 que mostra a janela Simulink de “diagnósticos da simulação”. Para evitar esse erro e gerar-se um gráfico preciso de  $y(t)$ , iremos impor outra condição inicial, como  $y(0) = 0,1$ , e rodar novamente o modelo.

**Figura 41:** diagrama completo para o exemplo  $\frac{dy}{dt} = 3ty^2 - ty$ .

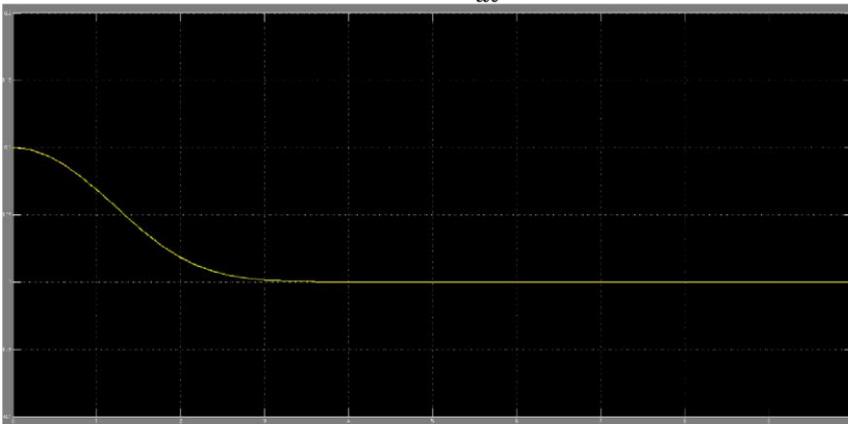


**Figura 42:** diagrama completo para o exemplo  $\frac{dy}{dt} = 3ty^2 - ty$ .



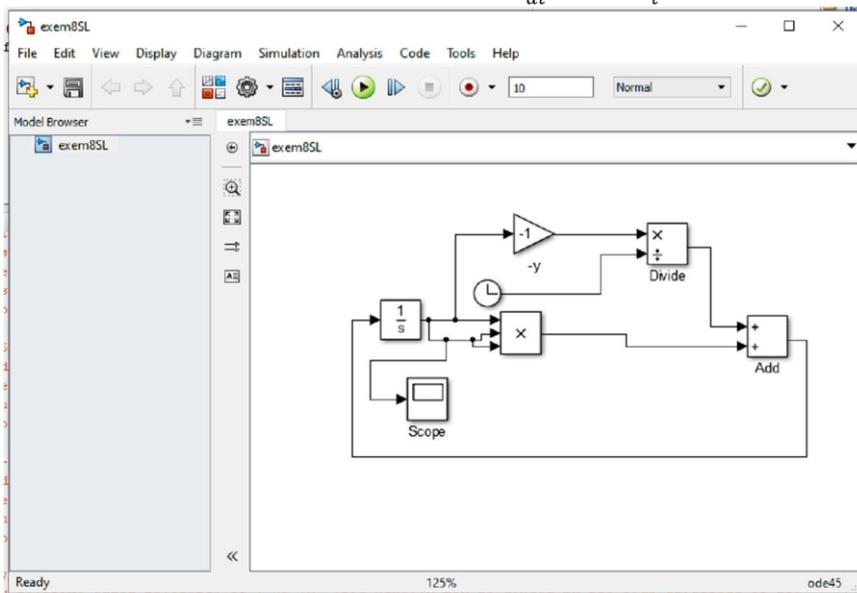
A condição  $y(0) = 0,1$  é alimentada no campo apropriado dos parâmetros do bloco *Integrator*. Após executar o modelo, gera-se o gráfico de  $y(t)$  clicando-se na caixinha do *Scope*. Obtém-se assim o desenho da figura 43. Note que ele corresponde bem à trajetória teórica  $y(t) = \frac{1}{t^2 + 3}$ , com  $y(t)$  tendendo a zero para  $t$  indo ao infinito. Salvamos o diagrama no arquivo de blocos em fluxo *exem7SL*.

**Figura 43:** trajetória de  $y(t)$  na solução de  $\frac{dy}{dt} = 3ty^2 - ty$  com a condição inicial  $y(0) = 0,1$ .

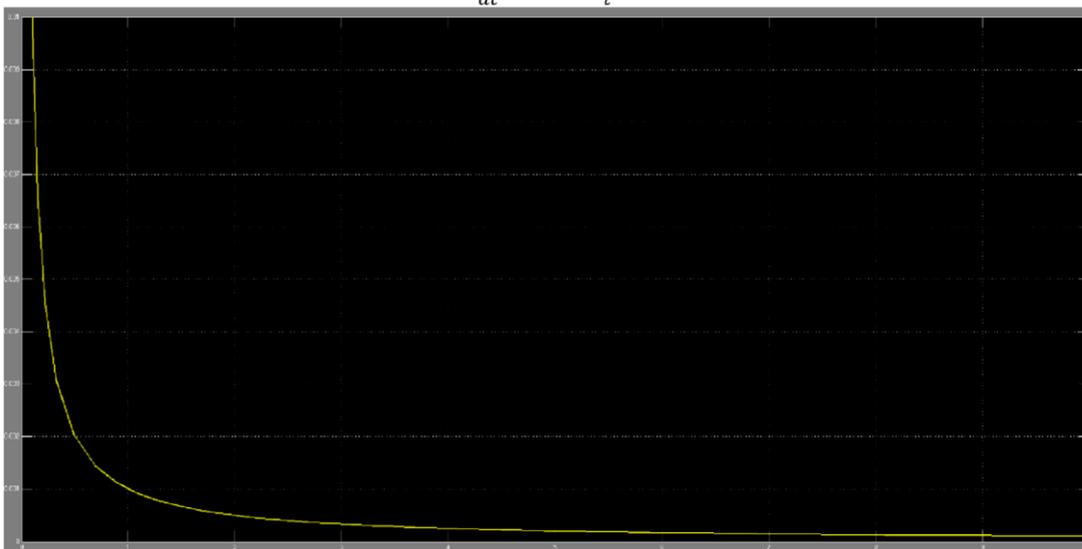


Para a solução do exercício 7 no Simulink, procede-se à diagramação gráfica de blocos da equação do problema  $\frac{dy}{dt} = y^3 - \frac{1}{t}y$  na janela *Model* do Simulink (Figura 44). Rodamos o modelo na condição inicial *default* ( $y(0) = 1$ ), e obtivemos o gráfico ilustrado na Figura 45. O diagrama foi salvo no arquivo *exem8SL*. A figura mostra a trajetória correspondente ao braço positivo da solução  $y = \frac{1}{(At^2+2t)^{\frac{1}{2}}}$ , pois, foi imposto um valor positivo,  $y(0) = 0,1$ , como ponto inicial de passagem da curva. A curva foi gerada com a opção de passo variado (*Variable-step*), porém, como para  $t_0 = 0$  o denominador da solução se anula, começamos o processo iterativo em  $t_0 = 0,001$ .

**Figura 44:** diagrama completo para o exemplo  $\frac{dy}{dt} = y^3 - \frac{1}{t}y$ .



**Figura 45:** trajetória de  $y(t)$  na solução de  $\frac{dy}{dt} = y^3 - \frac{1}{t}y$ .



### Equação de Riccati

A equação de Riccati, do tipo  $\frac{dy}{dt} = f(t) + g(t)y + r(t)y^2$ , não tem, em geral, solução por métodos elementares.<sup>14</sup> Contudo, se uma solução particular  $y_p(t)$  for conhecida, então a solução da equação tem a forma  $y(t) = z(t) + y_p(t)$ . Onde  $z(t)$  é solução da equação de Bernoulli (equação 13):

$$\frac{dz}{dt} - \left(g(t) + 2r(t)y_p(t)\right)z = r(t)z^2 \quad (13)$$

A prova começa a ser feita introduzindo-se a variável  $z$  dada por  $z = y - y_p$  (ou  $y = z + y_p$ ) e substituindo-a na equação original, de modo que  $\frac{dz}{dt} + \frac{dy_p}{dt} = f(t) + g(t)(z + y_p) + r(t)(z^2 + 2zy_p + y_p^2)$ . Como  $y_p(t)$  é solução particular da equação original,  $\frac{dy_p}{dt} = f(t) + g(t)y_p + r(t)y_p^2$ , a equação fica  $\frac{dz}{dt} + \left(f(t) + g(t)y_p + r(t)y_p^2\right) = f(t) + g(t)(z + y_p) + r(t)(z^2 + 2zy_p + y_p^2)$  ou  $\frac{dz}{dt} = g(t)z + r(t)(z^2 + 2zy_p) = r(t)z^2 + (g(t) + 2r(t)y_p)z$ , que é a equação de Bernoulli anterior (equação (13)).

Resolve-se então a equação (13) e, conhecidos  $z$  e  $y_p$ , chega-se à solução da equação de Riccati,  $y(t)$ . Vejamos um exemplo a título de exercício.

#### Exercício 8

Resolva a equação de Riccati  $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} + t^3y^2 - t^5$ .

Para esse caso, note que  $f(t) = -t^5$ ,  $g(t) = \frac{1}{t}$  e  $r(t) = t^3$ . De modo que a equação (13) pode ser escrita como  $\frac{dz}{dt} - \left(\frac{1}{t} + 2t^3y_p(t)\right)z = t^3z^2$ . Antes de resolvê-la, precisamos encontrar a solução particular  $y_p(t)$ . Ora,  $\frac{dy_p}{dt} = -t^5 + \frac{1}{t}y_p + t^3y_p^2$ , portanto  $y_p = t$  é solução evidente, já que  $1 = -t^5 + \frac{t}{t} + t^3t^2$  sempre se realiza. Assim sendo, temos agora de resolver a equação de Bernoulli  $\frac{dz}{dt} - \left(\frac{1}{t} + 2t^4\right)z = t^3z^2$ . Neste caso, primeiramente perceba que  $z = 0$  é solução. Na busca de outra solução, agora não constante, nota-se que  $m = 2$ ,  $R(t) = -\left(\frac{1}{t} + 2t^4\right)$  e  $T(t) = t^3$ . Na mudança de variável define-se a nova variável dependente:  $\tau = z^{1-m} = z^{-1}$ . Neste caso,  $u(t) = (1-m)R(t) = \left(\frac{1}{t} + 2t^4\right)$  e  $\omega(t) = (1-m)T(t) = -t^3$ . Calcula-se a integral  $\int u dt = \int \left(\frac{1}{t} + 2t^4\right) dt = \ln t + \frac{2}{5}t^5$ . Agora emprega-se de novo a equação (12):  $\tau(t) = e^{-\ln t - \frac{2}{5}t^5} \left(A - \int t^3 e^{\ln t + \frac{2}{5}t^5} dt\right)$ . A integral é facilmente resolvida:  $\int t^3 e^{\ln t + \frac{2}{5}t^5} dt = \int t^3 t e^{\frac{2}{5}t^5} dt = \int t^4 e^{\frac{2}{5}t^5} dt = \frac{1}{2} e^{\frac{2}{5}t^5}$ , de modo que  $\tau(t) = t^{-1} e^{-\frac{2}{5}t^5} \left(A - \frac{1}{2} e^{\frac{2}{5}t^5}\right) = \frac{A}{t} e^{-\frac{2}{5}t^5} - \frac{1}{2t}$ .

Agora vamos à função que nos interessa  $y(t)$ , que é obtida fazendo-se duas mudanças de variáveis: primeiramente, iremos de  $\tau$  para  $z$ . Note que  $z = \tau^{-1}$ , de modo que  $z = \frac{1}{\left(\frac{A}{t} e^{-\frac{2}{5}t^5} - \frac{1}{2t}\right)}$  (ou, como vimos,  $z = 0$ ). Agora observe a solução da equação original

---

<sup>14</sup> Essa equação foi proposta inicialmente pelo matemático Vincenzo Riccati e ficou conhecida pelo nome dele.

do problema  $y(t)$ . Chega-se a essa solução a partir de  $z$ .  $y = z + y_p$  e, portanto,  $y = \frac{1}{(\frac{A}{2}e^{-\frac{2}{5}t^5} - \frac{1}{2t})} + t = \left(\frac{2}{(Be^{-\frac{2}{5}t^5} - 1)} + 1\right)t$  (ou  $y = t$ ).<sup>15</sup>

Programando-se a equação de Ricatti  $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} + t^3y^2 - t^5$  na janela de comando do Matlab o programa fornece uma solução em termo de *tangente hiperbólica* ( $y(t) = -t \cdot \tanh\left(\frac{t^5}{5} + C\right)$ ).<sup>16</sup> Sabemos que  $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ,<sup>17</sup> portanto,  $-t \cdot \tanh\left(\frac{t^5}{5} + C\right) = -t \left(\frac{e^{\frac{t^5}{5} + C} - e^{-\frac{t^5}{5} - C}}{e^{\frac{t^5}{5} + C} + e^{-\frac{t^5}{5} - C}}\right) = -t \left(\frac{e^{\frac{t^5}{5}} e^C - e^{-\frac{t^5}{5}} e^{-C}}{e^{\frac{t^5}{5}} e^C + e^{-\frac{t^5}{5}} e^{-C}}\right) = -t \left(\frac{e^{2C} e^{\frac{t^5}{5}} - e^{-\frac{t^5}{5}}}{e^{2C} e^{\frac{t^5}{5}} + e^{-\frac{t^5}{5}}}\right) = -t \left(\frac{e^{2C} - e^{-\frac{2t^5}{5}}}{e^{2C} + e^{-\frac{2t^5}{5}}}\right) = t \left(\frac{e^{-\frac{2t^5}{5}} - e^{2C}}{e^{2C} + e^{-\frac{2t^5}{5}}}\right) = t \left(\frac{e^{-\frac{2t^5}{5}} - e^{2C}}{e^{-\frac{2t^5}{5}} + e^{2C}}\right) = t \left(\frac{e^{-\frac{2t^5}{5}} - e^{2C}}{e^{-\frac{2t^5}{5}} + e^{2C}}\right) = t \left(\frac{e^{-\frac{2t^5}{5}} - e^{2C}}{e^{-\frac{2t^5}{5}} + e^{2C}}\right) = t \left(\frac{-2e^{2C}}{e^{-\frac{2t^5}{5}} + e^{2C}} + 1\right) = t \left(\frac{-2}{e^{-\frac{2}{5}t^5} + 1} + 1\right)$ .

Para  $C = 0$ ,  $e^{2C} = 1$ , temos portanto que  $-t \cdot \tanh\left(\frac{t^5}{5} + C\right) = t \left(\frac{-2}{(e^{-\frac{2}{5}t^5} + 1)} + 1\right)$  que é a mesma solução obtida teoricamente para  $B = -1$ , pois,  $\left(\frac{2}{(-1 \cdot e^{-\frac{2}{5}t^5} - 1)} + 1\right)t = t \left(\frac{-2}{(e^{-\frac{2}{5}t^5} + 1)} + 1\right)$  que é a mesma solução do Matlab. Então novamente por manipulação lógica parte-se da solução do programa e chega-se à mesma expressão algébrica da solução teórica.

Cabe assinalar que funções hiperbólicas aparecem nas soluções de várias equações diferenciais lineares. A fim de resolver o exercício 8 no Matlab, devemos escrever  $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} + t^3y^2 - t^5$ , e então desenvolver na janela de comando a seguinte sequência de programação:

```
syms y(t)
y(t) = dsolve(diff(y,t) == (y/t)+(t^3)*(y^2)-(t^5));
y(t) = simplify(y)
```

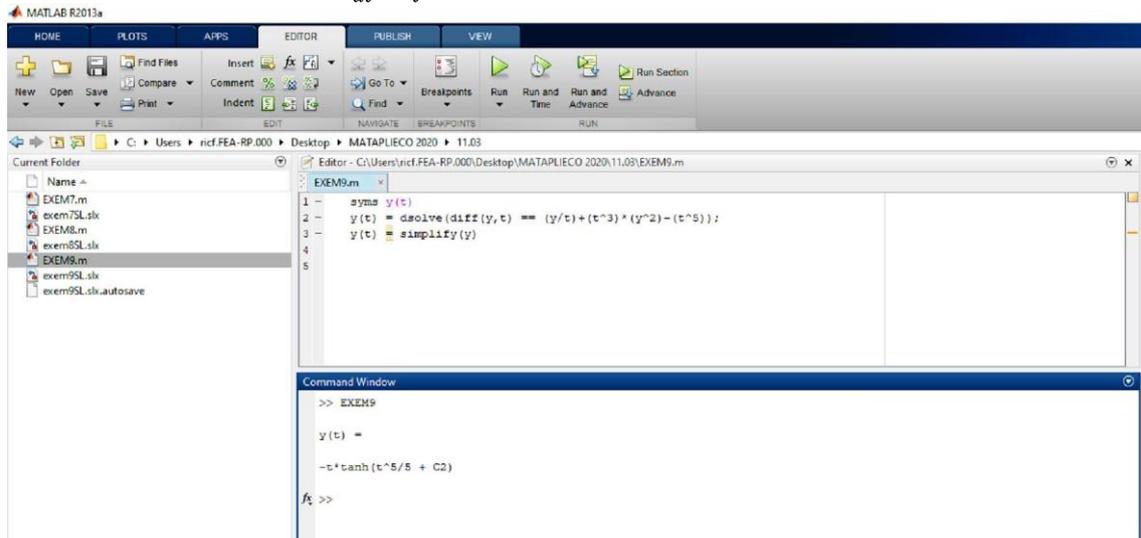
Chegamos então à solução em termos de tangente hiperbólica (Figura 46) que equivale à nossa solução teórica  $y = \left(\frac{2}{(Be^{-\frac{2}{5}t^5} - 1)} + 1\right)t$ . Essa sequência de comandos foi salva no arquivo EXEM9.m.

<sup>15</sup> Fazendo-se a devida manipulação algébrica, a primeira solução também pode ser escrita como  $y = \frac{2t}{(2Ae^{-\frac{2}{5}t^5} - 1)} + t = \left(\frac{2}{(Be^{-\frac{2}{5}t^5} - 1)} + 1\right)t$  onde  $B = 2A$ .

<sup>16</sup> Funções hiperbólicas foram introduzidas por volta de 1760 de maneira independente por Ricatti e pelo matemático Johann Heinrich Lambert. Funções hiperbólicas básicas são o seno hiperbólico e o cosseno hiperbólico, dos quais são derivados a tangente hiperbólica, a cossecante hiperbólica ou a secante hiperbólica e a cotangente hiperbólica, análogas às funções trigonométricas derivadas. Essa classe de funções recebe esse nome porque em muitos casos nos quais o uso de funções trigonométricas gera círculos ou elipses o uso de funções hiperbólicas gera hipérbolés.

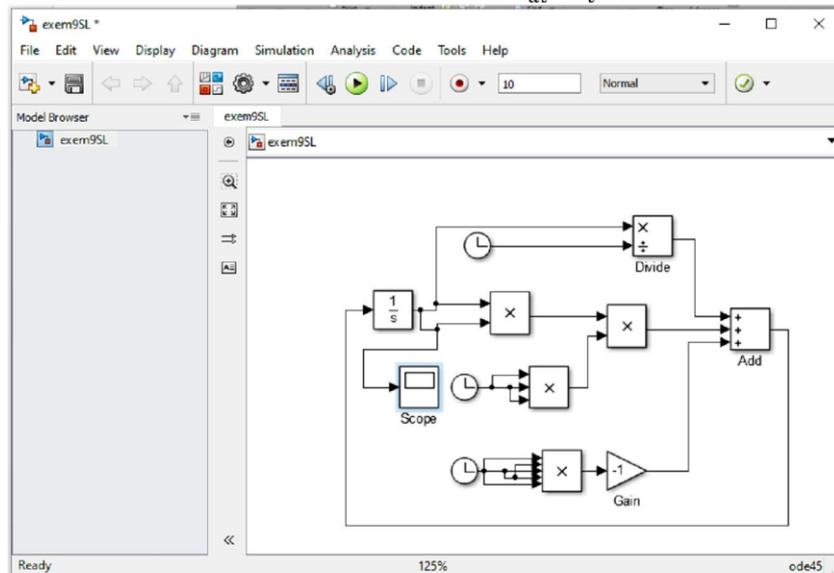
<sup>17</sup> As expressões das funções hiperbólicas são as seguintes: Seno hiperbólico é  $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , o cosseno hiperbólico é  $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , e, portanto, a tangente hiperbólica é obtida por  $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

**Figura 46:**  $y(t)$  na solução de  $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} + t^3y^2 - t^5$ .



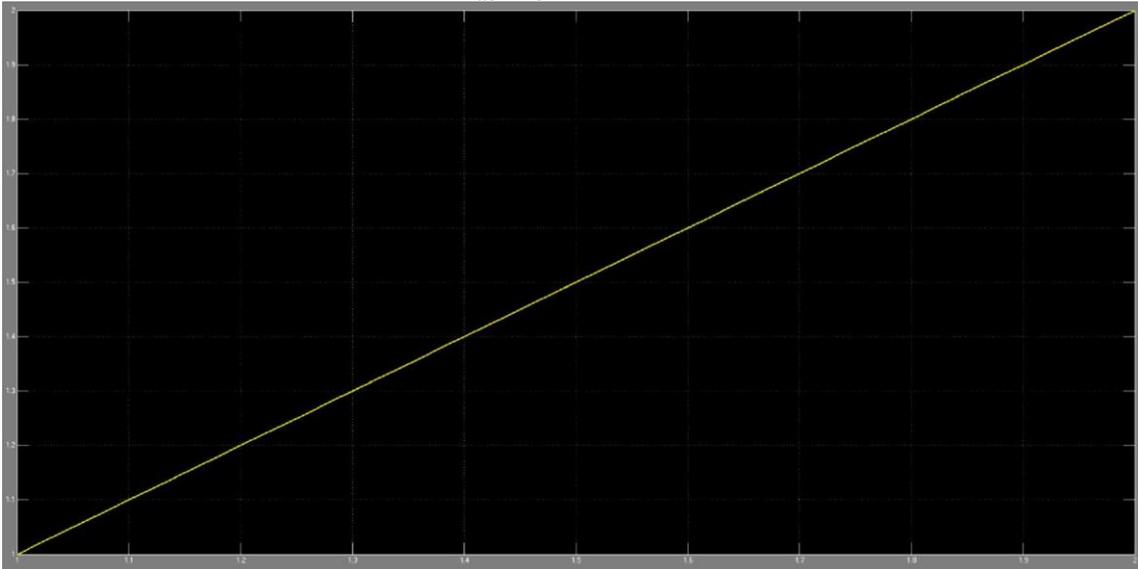
O modelo de diagramação dos blocos no Simulink é mostrado na figura abaixo. Note que o denominador ( $Be^{-\frac{2}{5}t^5} - 1$ ) pode tornar-se negativo para certo  $t$ , a depender das condições iniciais que determinam o valor de  $B$ . A fim de evitar  $t$  explosivo, iremos gerar o gráfico em segmentos curtos como na figura 48, em que  $1 \leq t \leq 2$ .

**Figura 47:** diagrama completo para o exemplo  $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} + t^3y^2 - t^5$ .



O modelo do Simulink para esse exercício foi salvo no arquivo exem9SL.

**Figura 48:** trajetória de  $y(t)$  na solução de  $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} + t^3y^2 - t^5$ . Para  $1 \leq t \leq 2$ .



### Teoremas de existência de solução

Vimos alguns casos em que é possível obter soluções explícitas e quantitativas de equações ordinárias de 1ª ordem não lineares. Contudo, isso nem sempre é possível e nesses outros casos podemos lançar mão de recursos computacionais ou então nos limitarmos a uma análise qualitativa, por exemplo, por meio dos diagramas de fase, conforme será visto na próxima seção.

Nesta seção, iremos formular um teorema que nos assegure a existência e a unicidade de uma solução algébrica explícita, dentro de uma região ou vizinhança, mesmo que não sejamos capazes de determinar teoricamente tal solução. Esse teorema, que não será demonstrado, apenas anunciado, vale apenas para equações de 1ª ordem, mas também há condições de existência e unicidade para equações ordinárias de ordem  $n$  qualquer.<sup>11</sup> A questão da unicidade também se coloca, pois, como vimos, uma equação diferencial pode ter mais de uma solução, como as soluções constantes identificadas anteriormente.

*O teorema:* Seja  $\frac{dy}{dt} = f(y)$  uma equação diferencial. Seja  $f(y)$  definida numa bola aberta  $\Omega$  do plano  $y \times t$ , e tal que a função  $f$  e sua derivada  $\frac{dy}{dt}$  sejam contínuas no aberto  $\Omega$ . Nessas condições:

- Existe uma solução  $y = y(t)$  tal que  $y(t_0) = y_0$  para cada ponto  $(t_0, y_0)$  do aberto  $\Omega$ .
- Se duas soluções  $y = y^1(t)$  e  $y = y^2(t)$  da equação diferencial coincidem para um valor  $t_0$ , isto é, se  $y^1(t_0) = y^2(t_0)$ , então as duas soluções serão idênticas para todos os valores da variável  $t$  para os quais ambas sejam definidas.

---

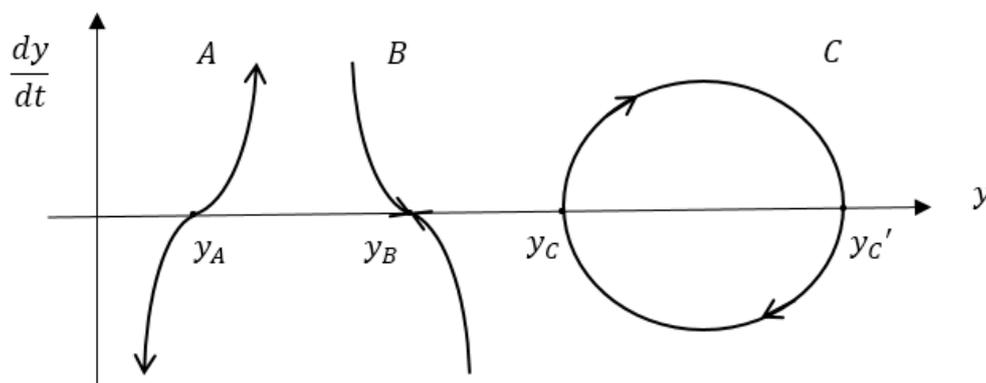
<sup>11</sup> Como tal teorema envolve sistemas de equações diferenciais, deixemos para vê-lo mais adiante, quando tivermos estudado equações de ordem elevada e sistema de equações de 1ª ordem associado a elas.

## Abordagem gráfico-qualitativa

Até aqui, obtivemos  $y(t)$  como solução explícita e quantitativa da correspondente equação diferencial. Quando isso não for possível e quisermos apenas ver as propriedades qualitativas da trajetória temporal, por exemplo, se ela converge a um equilíbrio estacionário, podemos construir e analisar os chamados diagramas de fase num exercício de análise gráfica.

Seja  $\frac{dy}{dt} = f(y)$  que pode ser linear ou não. Quando  $t$  não aparece em  $f$  como argumento da função, dizemos que se trata de uma equação diferencial *autônoma*. Para esse caso, introduziremos o leitor à técnica dos *diagramas de fase*. O gráfico 6 representa três possibilidades de um diagrama de fase.

**Gráfico 6:** diagramas de fase para três casos.

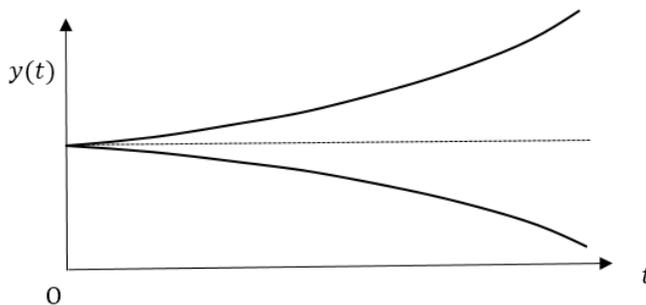


O diagrama de fase, portanto, fornece informações meramente qualitativas, porém importantes, da trajetória temporal da variável dependente. A direção da trajetória é indicada nas setas sobre as curvas. Evidentemente, nas regiões em que  $\frac{dy}{dt} > 0$  (1º quadrante)  $y$  deve estar crescendo. Nas regiões em que  $\frac{dy}{dt} < 0$  (4º quadrante)  $y$  deve sempre decrescer. O equilíbrio está no eixo  $y$ , mas nem todas as interseções com o eixo da abscissa representam equilíbrio estático. Nos pontos  $y_C$  e  $y_{C'}$  vicejam equilíbrios temporários e dinâmicos. As curvas representadas nesse diagrama são chamadas de *linhas de fase*. Pode-se, portanto, ter uma noção qualitativa da estabilidade do sistema em questão examinando-se a respectiva linha de fase.

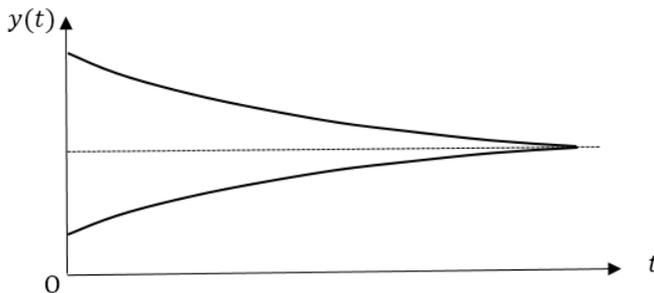
Note que quando a linha de fase é positivamente inclinada (curva A), o equilíbrio é divergente e instável em  $y_A$ , a variável dependente tende a se afastar dele em duas direções. Quando a inclinação é negativa, o equilíbrio é convergente e estável, a variável caminha em direção ao ponto  $y_B$  quer vindo da esquerda ou da direita. Na curva C, descreve-se um movimento cíclico no sentido horário.

Ainda com base na informação do Gráfico 6, representemos graficamente agora a trajetória de  $y(t)$  no tempo no lugar da trajetória de  $\frac{dy}{dt}$  em  $y$ . O Gráfico 7 representa aquela trajetória em relação à curva A do diagrama de fase e o Gráfico 8, a trajetória da curva B. Note que no primeiro caso temos um equilíbrio dinamicamente instável e no segundo, um equilíbrio estável em  $y_B$ . Portanto, linhas de fase com inclinação positiva correspondem a *instabilidade dinâmica* e linhas com inclinação negativa correspondem a *estabilidade dinâmica*.

**Gráfico 7:** trajetória  $y(t)$  correspondente à curva A do diagrama de fase.



**Gráfico 8:** trajetória  $y(t)$  correspondente à curva B do diagrama de fase.

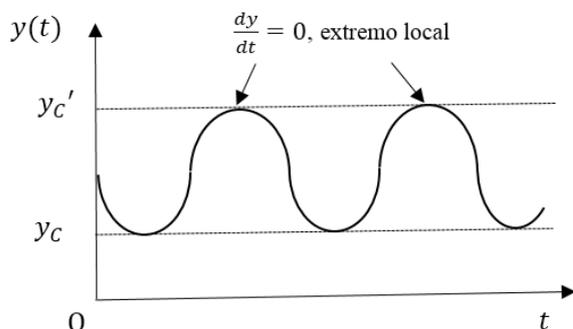


Vejamos, a título de exemplo, a linha de fase da equação diferencial ordinária com termo e coeficiente constante, equação (1):  $\frac{dy}{dt} + ay = b$ . Ou  $\frac{dy}{dt} = -ay + b$ , que é evidentemente uma reta com inclinação  $-a$ . Portanto, se  $a > 0$  a inclinação  $-a$  é negativa e estamos no caso em que a função  $y(t)$  converge para o equilíbrio. Naturalmente que se  $a < 0$  a inclinação  $-a$  é positiva e a função  $y(t)$  diverge do equilíbrio. Vimos que a solução quantitativa é dada pela equação (3):  $y(t) = \left[ y(0) - \frac{b}{a} \right] e^{-a.t} + \frac{b}{a}$ . Se  $a > 0$ , portanto, o fator exponencial  $e^{-a.t}$  tenderá a zero com  $t \rightarrow \infty$ , e assim  $y(t)$  convergirá a  $\frac{b}{a}$ . Se  $a < 0$ , por outro lado, o fator exponencial é explosivo ( $e^{-a.t} \rightarrow \infty$ ) e a solução  $y(t)$  não converge. A análise gráfica dos diagramas de fase, portanto, leva à mesma condição da análise algébrica.

Voltando ao gráfico 6, vejamos o caso da linha de fase C. Não se trata de uma função (porque?), mas de uma *relação* descrita por expressões algébricas do tipo  $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = f(y)$ . Afigura-se uma trajetória temporal que oscila periodicamente entre  $y_c$  e  $y_c'$ . A trajetória temporal corresponde à descrita no gráfico 9. Note que  $y_c$  e  $y_c'$  não são valores

de equilíbrio estático, e que nesses limites oscilatórios a curva descreve um extremo local em que  $\frac{dy}{dt} = 0$ .

**Gráfico 9:** trajetória de  $y(t)$  para a curva  $C$  do diagrama de fase no gráfico 6.



*Aplicação: modelo de crescimento de Solow*

Os primeiros modelos formais de crescimento foram desenvolvidos por Sir Roy F. Harrod, em 1939, e Evsey Domar, em 1946. Anos depois, em 1956, o economista Robert Solow propôs um novo modelo de crescimento, ligeiramente modificado em relação a modelos mais antigos. Nele, o crescimento de longo-prazo é determinado pela taxa de acumulação de fatores de produção (capital e trabalho) e pelo ritmo de crescimento da produtividade do trabalho (progresso tecnológico). Esses fatores determinam a tendência de crescimento de longo-prazo. Há uma pequena diferença básica entre a proposta de Harrod-Domar e a de Solow. Naquela, a trajetória de crescimento do modelo é resultado de uma premissa sobre a função de produção. Supõe-se que a relação capital/trabalho ( $\frac{K}{L} = \kappa$ ) seja proporcional ao nível de capital  $K$ , ou seja,  $\kappa = \rho K$ , de modo que o trabalho não aparece como determinante dessa relação, como se a combinação capital/trabalho fosse em proporção fixa. Já na versão de Solow, explicita-se que o produto  $Q$  ( $Q = f(K, L)$ ;  $K, L > 0$ ) depende de ambos os fatores, capital e trabalho, que podem se combinar em proporções variáveis. Em ambos, desconsidera-se a depreciação do capital.

A derivadas parciais  $f_K$  e  $f_L$  são ambas positivas ( $f_K, f_L > 0$ ) considerando-se as produtividades marginais positivas. Já as derivadas segundas são negativas por conta dos retornos decrescentes ( $f_{KK}, f_{KL} < 0$ ).  $f$  é uma função linearmente homogênea pela hipótese de *retornos a escala* constante. Portanto,  $Q = L \cdot f\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L\phi(\kappa)$ , onde  $\kappa \equiv \frac{K}{L}$ .

Note que o sinal de  $\phi'$  acompanha o sinal de  $f_K$ , e o sinal de  $\phi''$  corresponde ao sinal de  $f_{KK}$ :  $\phi'(\kappa) > 0$  e  $\phi''(\kappa) < 0$ . Esses sinais podem ser demonstrados algebricamente:  $f_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial [L\phi(\kappa)]}{\partial K} = L \frac{\partial \phi(\kappa)}{\partial K} = L \frac{d\phi(\kappa)}{d\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial K} = L\phi'(\kappa) \frac{1}{L} = \phi'(\kappa)$ , onde aplicamos a regra da cadeia. Para a derivada segunda,  $f_{KK} = \frac{\partial \phi'(\kappa)}{\partial K} = \frac{d\phi'(\kappa)}{d\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial K} = \phi''(\kappa) \frac{1}{L}$ . Portanto, o seu sinal acompanha o sinal de  $\phi''(\kappa)$ .

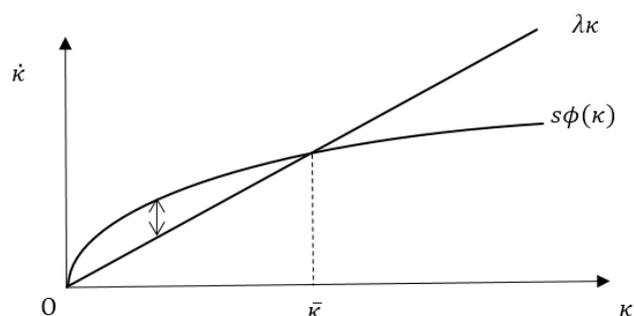
Vejamos agora o desenvolvimento do modelo de Solow. Ele faz duas hipóteses a respeito de  $K$  e  $L$ : uma proporção constante de  $Q$  é investida,  $\frac{dK}{dt} = \dot{K} = sQ$ . A força de trabalho cresce exponencialmente,  $\frac{dL}{L} = \lambda$ , onde a taxa de crescimento é positiva,  $\lambda > 0$ .

Sendo assim,  $\dot{K} = sL\phi(\kappa)$ . Como  $\kappa = \frac{K}{L}$ ,  $K = \kappa L$  e  $\dot{K} = L\dot{\kappa} + \kappa\lambda L$ . Igualando-se ambas as equações,  $sL\phi(\kappa) = L\dot{\kappa} + \kappa\lambda L$ . Isolando-se  $\dot{\kappa}$ , chega-se à equação fundamental do modelo de crescimento de Solow, equação (14).

$$\dot{\kappa} = s\phi(\kappa) - \lambda\kappa \quad (14)$$

Para uma melhor análise desta equação, façamos uma interpretação gráfica. Para tanto, iremos desenhar, no plano  $\dot{\kappa} \times \kappa$  a curva convexa correspondente ao termo  $s\phi(\kappa)$  e a reta  $\lambda\kappa$  – Gráfico 10.

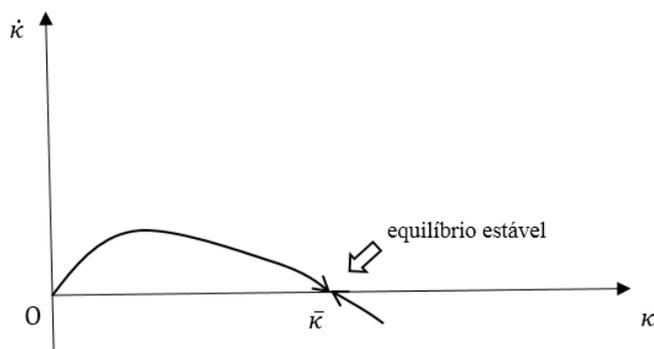
**Gráfico 10:** dois termos da equação de crescimento de Solow.



Note que, no gráfico 9, o valor de  $\dot{\kappa}$  é dado pela distância vertical entre as duas curvas  $s\phi(\kappa) - \lambda\kappa$ . O ponto  $\bar{\kappa}$  identifica uma situação de equilíbrio estacionário em que a razão capital/trabalho de equilíbrio intertemporal permanece constante. O correspondente diagrama de fase pode ser obtido plotando-se todas as diferenças ao longo das verticais e representando-as como pontos da curva no plano  $\dot{\kappa} \times \kappa$  – gráfico 11.

Perceba que se trata, em  $\bar{\kappa}$ , de um equilíbrio dinâmico estável, porque a linha de fase, neste intercepto, tem uma inclinação negativa, o que vimos levar à convergência da variável em questão ao equilíbrio em que  $\frac{\partial \kappa}{\partial t} = 0$ . No equilíbrio, a razão capital/trabalho permanece inalterada, ou seja, neste ponto o capital cresce par a par com o trabalho, a uma idêntica taxa de crescimento  $\lambda$ . O crescimento do capital, isto é, o investimento, ocorre a uma taxa equivalente à taxa de crescimento da população  $\lambda$ . No estado estacionário, portanto, todas as variáveis crescem a uma taxa idêntica.

**Gráfico 11:** linha de fase do modelo de crescimento de Solow ( $\dot{\kappa} = s\phi(\kappa) - \lambda\kappa$ ).



### Exercício 8

Verifique a condição de equilíbrio do modelo de crescimento em que a função de produção é uma função Cobb-Douglas  $Q = K^\alpha L^{1-\alpha}$ .

Seja essa função, então explicitando-se a relação capital/trabalho,  $Q = L\left(\frac{K}{L}\right)^\alpha = L\kappa^\alpha = L\phi(\kappa)$ . Pela equação (14),  $\dot{\kappa} = s\kappa^\alpha - \lambda\kappa$ ,  $\dot{\kappa} + \lambda\kappa = s\kappa^\alpha$  é uma equação de Bernoulli em  $\kappa$ . Na qual,  $R = \lambda$ ,  $T = s$ ,  $m = \alpha$ . E ainda, introduzindo-se nova variável,  $z = \kappa^{1-\alpha}$ , chega-se à equação linear de termo e coeficiente constante na variável  $z$ :  $\frac{dz}{dt} + (1 - \alpha)\lambda z = (1 - \alpha)s$ , em que, comparando-se com a equação (1),  $a = (1 - \alpha)\lambda$  e  $b = (1 - \alpha)s$ . A solução na variável  $z$ , portanto, é obtida pela equação (3) aplicada ao problema  $z(t) = \left[z(0) - \frac{s}{\lambda}\right]e^{-(1-\alpha)\lambda t} + \frac{s}{\lambda}$ . Precisamos agora escrever a solução para a variável  $\kappa$  da equação original:  $\kappa^{1-\alpha}(t) = \left[\kappa(0)^{1-\alpha} - \frac{s}{\lambda}\right]e^{-(1-\alpha)\lambda t} + \frac{s}{\lambda}$ , de onde poderíamos extrair uma expressão para  $\kappa$  (trivial!).

Note que quando  $t$  tende ao infinito ( $t \rightarrow \infty$ ),  $\kappa^{1-\alpha}$  tende a  $\frac{s}{\lambda}$ , ou  $\kappa \rightarrow \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$  que é o equilíbrio intertemporal estacionário do modelo de Solow com função Cobb-Douglas.

## Equações diferenciais de ordem elevada

Tendo visto as equações de 1ª ordem, vejamos agora equações de ordem mais elevada, por exemplo em  $\frac{d^2y}{dx^2} = kY$  temos a derivada segunda, isto é, a taxa de variação da taxa de variação, uma equação diferencial de 2ª ordem. Destas, veremos apenas as equações lineares, que podem ser expressas genericamente como na equação (15).

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = b \quad (15)$$

Que também pode ser representada como na equação (16) em que se substituem as derivadas na representação de Leibniz ( $\frac{d^n y}{dx^n}$ ) por derivadas indicadas no sobre índice ( $y^{(n)}$ ) que indica a ordem  $n$  da derivada.

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y = b \quad (16)$$

A equação é tida como linear porque tanto as derivadas quanto a variável dependente aparecem no 1º grau e não existe termos cruzados do tipo  $yy'(t)$ . No caso em estudo, os coeficientes  $a_i$  e o termo  $b$  são constantes. Mai adiante, também veremos o caso com  $b$  variável.

### Equação diferencial de 2ª ordem com coeficientes e termo constantes

Começemos, por simplicidade, com o caso em que  $n = 2$  em que podemos escrever  $y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b$ . Se não for homogênea, naturalmente  $b \neq 0$ . Novamente, a solução geral da equação poder ser vista como a soma de dois termos: o termo  $y_c$  chamado de função complementar, que é a solução geral da homogênea associada, e o termo  $y_p$ , uma solução particular, que representa o equilíbrio intertemporal quando  $t$  tende a infinito ( $t \rightarrow \infty$ ), Portanto,  $y(t) = y_c + y_p$  é solução geral da equação completa (a não homogênea).

Vejamos primeiramente a solução particular. Trata-se de qualquer solução da não homogênea. A mais simples dela é para  $y_p(t) = k$ , uma constante. Neste caso,  $y'' = y' = 0$ . O que simplifica a equação diferencial a  $a_2 y_p(t) = b$ , ou  $y_p(t) = \frac{b}{a_2}$ ,  $a_2 \neq 0$ . Para  $a_2 = 0$ , temos de buscar outra solução particular, por exemplo o equilíbrio móvel  $y_p(t) = kt$ . Sendo assim,  $y_p''(t) + a_1 y_p'(t) = b$ , e  $y_p'(t) = k$ ,  $y_p''(t) = 0$ , o que simplifica a equação diferencial a  $a_1 k = b$  ou  $k = \frac{b}{a_1}$ . Ou seja, a solução particular fica  $y_p(t) = \frac{b}{a_1} t$ , para  $a_2 = 0$  ( $a_1 \neq 0$ ). E se  $a_1 = a_2 = 0$ ? Nessa condição, temos de testar outra solução particular, e a possibilidade mais simples seria agora  $y_p(t) = kt^2$ . O que daria  $y_p'(t) = 2kt$  e  $y_p''(t) = 2k$ . E a equação diferencial original ficaria apenas  $2k = b$ ,  $k = \frac{b}{2}$ , o que resultaria na solução particular  $y_p(t) = \frac{b}{2} t^2$ . O mesmo raciocínio para  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ , para  $n > 2$ .

### A função complementar

Tomemos a homogênea associada à equação de 2ª ordem, ou seja,  $y''(t) + a_1y'(t) + a_2y(t) = 0$ . Sabemos que na equação de 1ª ordem a solução da homogênea é  $y(t) = A \cdot e^{-a_1t}$ . Então iremos tentar algo parecido para a homogênea de 2ª ordem propondo  $y(t) = A \cdot e^{rt}$ , onde  $r$  deve se relacionar de alguma maneira com os parâmetros  $a_1$  e  $a_2$ . Sendo assim,  $y'(t) = rAe^{rt}$ ,  $y''(t) = r^2Ae^{rt}$  e, por conseguinte, substituindo na equação diferencial original,  $Ae^{rt}(r^2 + a_1r + a_2) = 0$ , que é satisfeita sob duas condições individualmente suficientes:  $A = 0$  ou  $r^2 + a_1r + a_2 = 0$ . A primeira delas depende das condições iniciais e somente é satisfeita sob condição bem específica. A segunda será satisfeita quando a expressão  $r^2 + a_1r + a_2$  se anula, e a equação em questão é chamada de *equação característica*. Como se trata de uma equação do 2º grau, tem-se duas soluções que são chamadas de *raízes características*. São elas – equação (17):

$$r_1, r_2 = \frac{-a_1 \mp \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \quad (17)$$

Note que a soma das raízes características é  $r_1 + r_2 = -a_1$  e o produto delas é  $\frac{(-a_1)^2 \mp (a_1^2 - 4a_2)}{4} = a_2$ . As duas soluções da homogênea são, portanto,  $y_1(t) = A_1 e^{r_1 t}$  e  $y_2(t) = A_2 e^{r_2 t}$ . Embora cada qual seja solução da homogênea, não devemos escolher apenas uma delas, precisamos de ambas, pois temos duas constantes arbitrárias  $A_1$  e  $A_2$  que precisam ser determinadas. Note que se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções da homogênea, então  $y_1(t) + y_2(t)$  também o é. A prova é trivial! Portanto,  $y_c = y_1(t) + y_2(t)$ . Sobre os valores de  $r_1$  e  $r_2$ , há três casos possíveis.

#### Caso 1: duas raízes reais distintas.

A solução da homogênea é combinação linear dessas raízes,  $y_c(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$ , para duas raízes distintas  $r_1 \neq r_2$ . Vejamos um exemplo. Seja a equação diferencial  $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = -10$ . A solução particular é imediata:  $y_p(t) = \frac{b}{a_2} = \frac{-10}{-2} = 5$ . Para a solução da homogênea associada, observe que a equação característica fica  $r^2 + r - 2 = 0$ . Ou seja, resolvendo-a,  $r_1, r_2 = \frac{-1 \mp \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \mp 3}{2}$ ,  $r_1 = 1$  e  $r_2 = -2$ . E a solução fica assim:  $y_c(t) = A_1 e^t + A_2 e^{-2t}$ . A solução geral da equação do exemplo é então  $y(t) = y_c + y_p = A_1 e^t + A_2 e^{-2t} + 5$ .

Os valores dos coeficientes  $A_1$  e  $A_2$  são determinados considerando-se duas condições iniciais. Isto é, não basta apenas saber o valor de  $y(t)$  em  $t_0 = 0$ , pois necessita-se de uma condição inicial adicional aplicada a  $y'(t)$ . Sejam, por exemplo,  $y(0) = 12$  e  $y'(0) = -2$ . Aplicando-as à solução encontrada:  $y(0) = A_1 + A_2 + 5 = 12$ ,  $A_1 + A_2 = 7$ . E  $y'(0) = A_1 e^0 - 2A_2 e^{-2 \cdot 0} = -2$ ,  $A_1 - 2A_2 = -2$ . O sistema com as duas equações leva a determinar o valor de cada coeficiente:  $A_1 = 4$ , e  $A_2 = 3$ . E, portanto, a solução determinada fica  $y(t) = 4e^t + 3e^{-2t} + 5$ . Note que essa solução satisfaz à equação diferencial do exemplo,  $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = -10$ , pois se  $y'(t) = 4e^t - 6e^{-2t}$  e, portanto,  $y''(t) = 4e^t + 12e^{-2t}$ , substituindo-se na equação original,  $4e^t + 12e^{-2t} + 4e^t - 6e^{-2t} - 8e^t - 6e^{-2t} - 10 = -10$ .

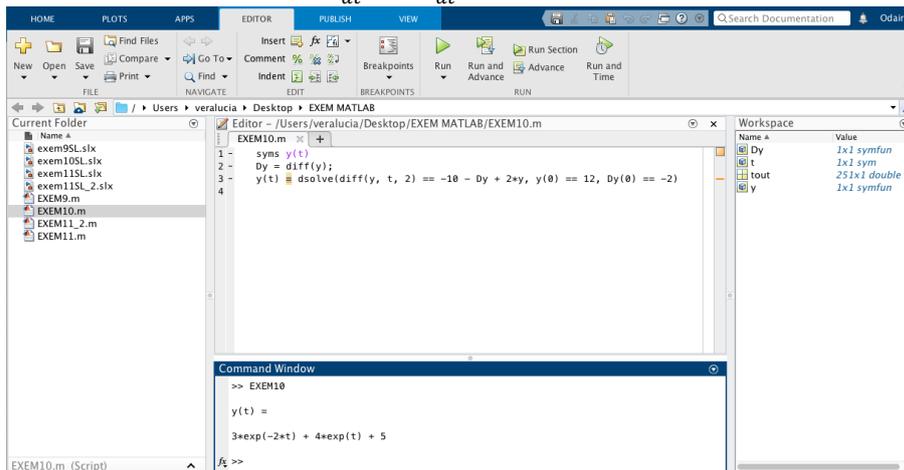
Vamos obter a mesma solução usando o programa Matlab. Para tanto, escreve-se a equação diferencial na forma  $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dy}{dt} + 2y - 10$ . Com base nela, digita-se na janela de comando as linhas de programa:

```
syms y(t)
Dy = diff(y) ;
y(t) = dsolve(diff(y, t, 2) == -10 - Dy + 2*y, y(0) == 12, Dy(0) == -2))
```

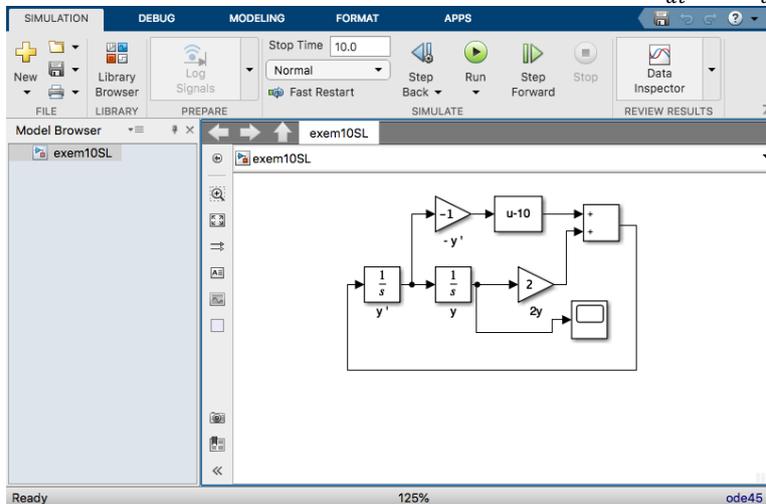
Note que usamos o comando “diff” duas vezes. Na segunda linha, ele permite criar a variável “Dy”, ou seja, a derivada  $\frac{dy}{dt}$ , depois empregada na linha seguinte. Na linha em que se emprega o “dsolve”, a derivada segunda é informada pelo comando “diff(y, t, 2)”, na qual a última entrada, o 2, informa a ordem em questão da derivada. As duas condições iniciais são informadas: “y(0) == 12, Dy(0) == -2” na parametrização do *dsolve*. O Matlab fornece a mesma solução obtida teoricamente. Essa sequência de programação foi salva no arquivo EXEM10.m.

A Figura 49 mostra a janela de comando do Matlab com idêntica solução. A solução por Simulink encontra-se no arquivo exem10SL. A Figura 50 mostra o diagrama correspondente a esse exercício.

**Figura 49:**  $y(t)$  na solução de  $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dy}{dt} + 2y - 10$ .

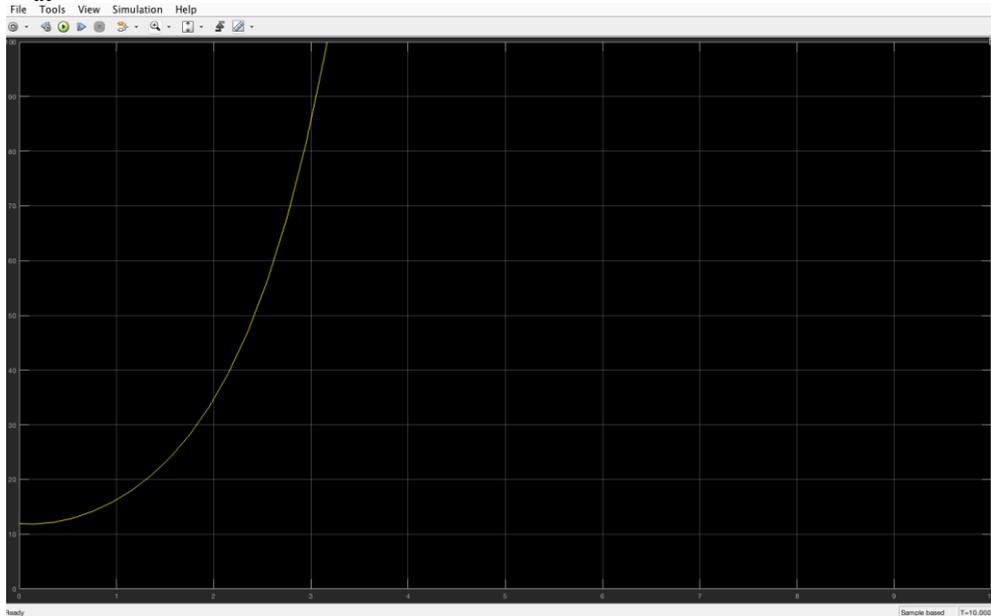


**Figura 50:** diagrama de blocos em Simulink para o exemplo  $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dy}{dt} + 2y - 10$ .



A figura 51 mostra a trajetória de  $y(t)$ , gerada pelo bloco *Scope*, após executar-se o Simulink informando-o das condições iniciais do exemplo nos parâmetros das respectivas caixinhas *Integrator*. Note que se trata de uma trajetória explosiva porque o primeiro termo de  $y(t) = 4e^t + 3e^{-2t} + 5$  é, de fato, divergente.

**Figura 51:** trajetória de  $y(t)$  obtida acionando-se o diagrama de blocos em Simulink para o exemplo  $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dy}{dt} + 2y - 10$ .



### Caso 2: raízes reais repetidas.

Neste caso, o discriminante da equação (17) se anula, e, portanto, tem-se que  $a_1^2 = 4a_2$ ,  $r = -\frac{a_1}{2}$ ,  $y_c(t) = A_3e^{r.t}$ . Ora, necessita-se de mais outro termo que seja linearmente independente (LI) com esse termo, para que tenhamos mais uma constante e a fim de que ambas as condições iniciais ( $y(0), y'(0)$ ) sejam consideradas na solução. O outro termo LI com o primeiro é tradicionalmente escolhido como  $A_4te^{r.t}$ . Neste caso, a derivada fica  $(rt + 1)A_4e^{r.t}$ , e a derivada segunda é  $rA_4e^{r.t} + (rt + 1)A_4re^{r.t} = (r^2t + 2r)A_4e^{r.t}$ . Vamos mostrar que  $A_4te^{r.t}$  é solução da equação diferencial homogênea  $y''(t) + a_1y'(t) + a_2y(t) = 0$ , pois, substituindo-o, o 1º membro fica  $(r^2t + 2r)A_4e^{r.t} + a_1(rt + 1)A_4e^{r.t} + a_2A_4te^{r.t} = [(r^2t + 2r) + a_1(rt + 1) + a_2t]A_4e^{r.t}$ , que se anula porque  $a_1^2 = 4a_2$  e  $r = -\frac{a_1}{2}$  (verifique!). Portanto,  $A_4te^{r.t}$  também é solução, e a solução completa da homogênea associada fica sendo  $y_c(t) = A_3e^{r.t} + A_4te^{r.t}$ .

Vejam os outro exemplo:  $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 27$ . Neste caso, também se satisfaz a condição  $a_1^2 = 4a_2$ , pois  $36 = 4 \times 9$ , e assim sendo as raízes são novamente repetidas. Note que  $r = -\frac{a_1}{2} = -3$ . Portanto, a solução é  $y_c = A_3e^{-3t} + A_4te^{-3t}$ . A solução particular é evidentemente  $y_p = 3$ , de modo que a solução completa fica sendo então  $y(t) = y_c + y_p = A_3e^{-3t} + A_4te^{-3t} + 3$ . A solução definida, para um par de condições iniciais ( $y(0) = 5, y'(0) = -5$ ), requer que se obtenha os valores específicos de  $A_3$  e  $A_4$ . De fato,  $y(0) = A_3 + 3 = 5$ ,  $A_3 = 2$ . Para determinar  $A_4$ , aplica-se a CI  $y'(0) =$

-5. Ora,  $y'(t) = -3A_3e^{-3t} + A_4(e^{-3t} + (-3)te^{-3t})$ ,  $y'(0) = -6 + A_4 = -5$ ,  $A_4 = 1$ . Portanto, a solução determinada e completa fica sendo  $y(t) = 2e^{-3t} + te^{-3t} + 3$ .

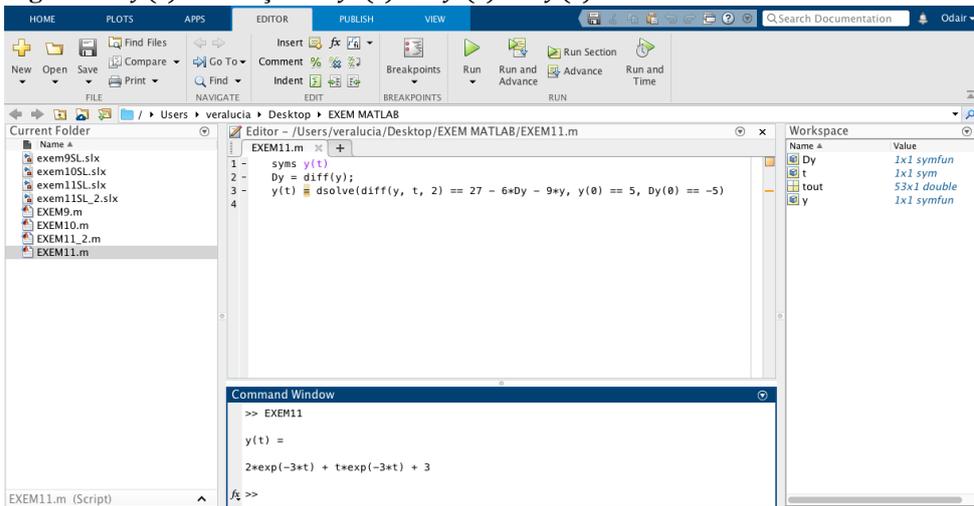
Vejamos agora a solução por Matlab. Escreve-se a equação diferencial na forma  $\frac{d^2y}{dt^2} = -6\frac{dy}{dt} - 9y + 27$ . Com base nela, digita-se as linhas de programa:

```
syms y(t)
Dy = diff(y) ;
y(t) = dsolve(diff(y, t, 2) == 27 - 6*Dy - 9*y, y(0) == 5, Dy(0) == -5)
```

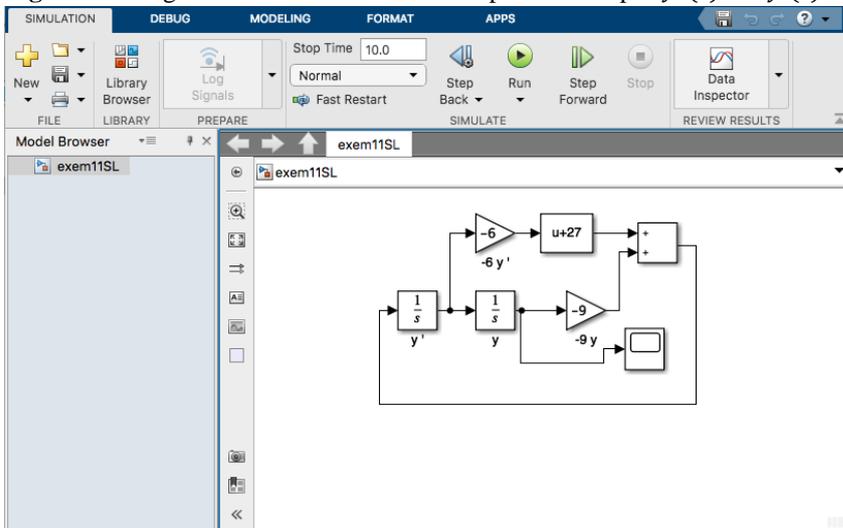
Note que as duas condições iniciais foram informadas na parametrização do *dsolve*: “ $y(0) == 5$ ,  $Dy(0) == -5$ ”. O Matlab fornece a mesma solução obtida teoricamente. Essa sequência de programação foi salva no arquivo EXEM11.m. A solução por Simulink encontra-se no arquivo exem11SL.

A Figura 52 mostra a janela de comando do Matlab com a mesma solução que obtivemos teoricamente. A solução por Simulink aparece em exem11SL. A Figura 53 mostra o diagrama de blocos do Simulink correspondente a esse exercício.

**Figura 52:**  $y(t)$  na solução de  $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 27$ .

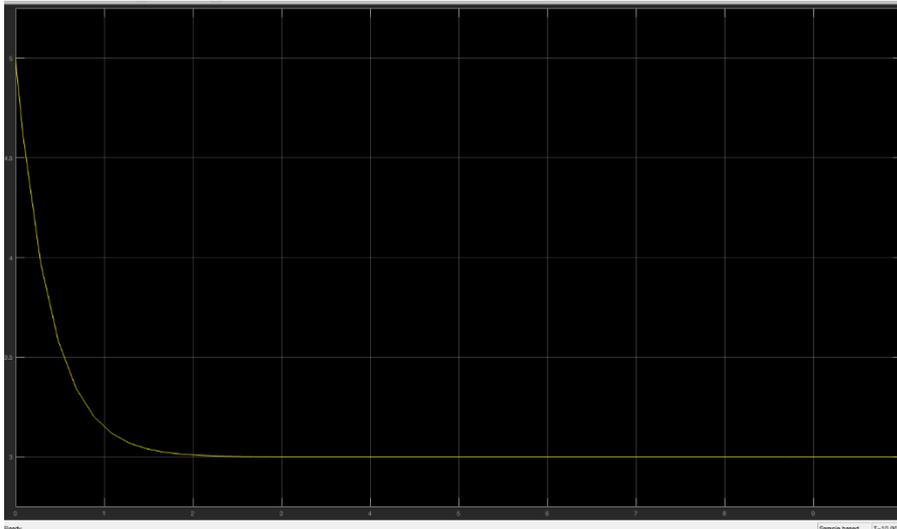


**Figura 53:** diagrama de blocos em Simulink para o exemplo  $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 27$ .



A figura 54 mostra a trajetória de  $y(t)$ , gerada pelo bloco *Scope*, após executar-se o Simulink informando-o das mesmas condições iniciais do exemplo nos parâmetros dos respectivos blocos *Integrator*. Note que se trata de uma trajetória convergente porque, de fato, os dois primeiros termo de  $y(t) = 2e^{-3t} + te^{-3t} + 3$ , associados à solução da homogêneas são convergentes.

**Figura 54:** trajetória de  $y(t)$  obtida acionando-se o diagrama de blocos em Simulink para o exemplo  $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 27$ .

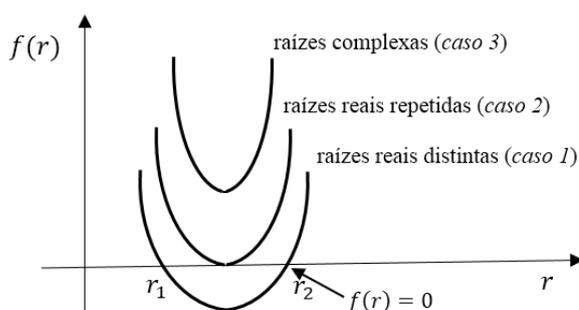


*Caso 3: raízes complexas.*

Neste caso,  $a_1^2 < 4a_2$ , e o discriminante de  $\sqrt{a_1^2 - 4a_2}$ , que aparece na fórmula da raiz característica, torna-se negativo. Então temos soluções apenas no domínio dos *números complexos*. Veremos, nas próximas seções, uma revisão dos números complexos antes de aplicarmos um conjunto de equações matemáticas para a formalização da solução nesse contexto.

Os três casos de raízes reais distintas, raízes reais repetidas e raízes complexas equivalem, cada qual, a uma posição particular da parábola que corresponde à equação característica no plano  $f(r) \times r$ . O gráfico 12 mostra a curva dos três casos. Note que no caso de raízes complexas a parábola da equação característica não toca no eixo da abscissa.

**Gráfico 12:** curva das equações características da equação diferencial de 2ª ordem nos três casos analisados.



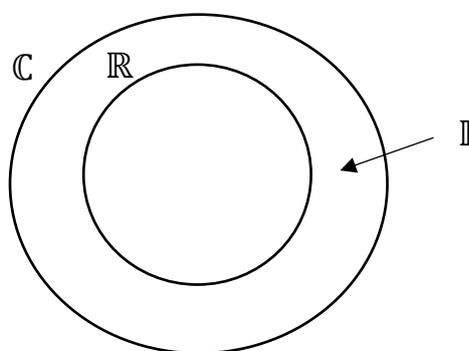
## Estabilidade dinâmica de equilíbrio para os casos 1 e 2

Até aqui, tendo completado o estudo para os casos 1 e 2 na solução da homogênea associada às equações de 2ª ordem lineares, vejamos que condições as raízes características em cada caso devem obedecer a fim de que o equilíbrio dinâmico seja alcançável. No caso 1, de raízes reais distintas,  $y_c(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$  e para a convergência ao equilíbrio dinâmico devemos ter ambos  $r_1, r_2 < 0$ , assim sendo,  $y_c \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . No caso 2, de raízes reais repetidas, a condição de convergência é que a raiz real única  $r$  seja negativa ( $r < 0$ ). Pela equação com a solução da homogênea do caso,  $y_c(t) = A_3 e^{rt} + A_4 t e^{rt}$ , o segundo termo ( $A_4 t e^{rt}$ ) também tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$  porque o crescimento linear em  $t$  é mais do que neutralizado pelo decrescimento exponencial em  $e^{rt}$ . Portanto,  $r < 0$  é condição necessária e suficiente para  $y_c \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

## Números complexo e funções circulares

Vimos que no 3º caso, quando  $a_1^2 < 4a_2$ , não existe solução no conjunto dos números reais. Temos então de trabalhar com números complexos, números que envolvem o número imaginário  $i = \sqrt{-1}$ . Números complexos, de fato, contêm uma parte real e outra imaginária, escrito, portanto, como a soma de dois termos. Por exemplo, em  $(8 + i)$ ,  $(3 + 5i)$  ou, genericamente,  $(h + vi)$ , onde  $h$  e  $v$  são números reais. O *diagrama de Venn* (gráfico 13) ilustra a relação entre o conjunto dos reais, dos imaginários e do número complexo:

**Gráfico 13:** diagrama de Venn dos números reais ( $\mathbb{R}$ ), imaginários ( $\mathbb{I}$ ) e complexos ( $\mathbb{C}$ ).

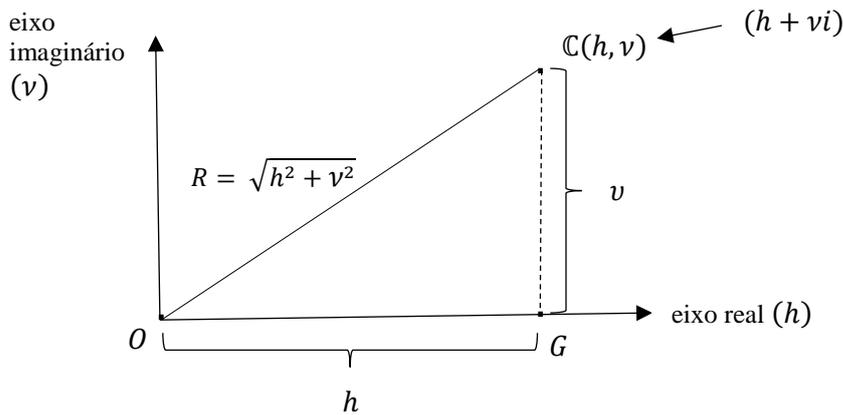


Note que  $\mathbb{R} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ . O número complexo pode ser representado no plano  $h \times v$ , que se convencionou chamar de *diagrama de Argand* (gráfico 14).

Neste diagrama, cada número complexo corresponde a um ponto no plano. A distância deste ponto à origem dos eixos é chamada de *valor absoluto* ou *módulo* do número complexo,  $R^2 = h^2 + v^2$ , ou  $R = \sqrt{h^2 + v^2}$ . No caso em que  $a_1^2 < 4a_2$ , as raízes características são número complexos em que a raiz da *fórmula de Bhaskara* envolve o número imaginário, pois,  $\sqrt{a_1^2 - 4a_2} = \sqrt{4a_2 - a_1^2} \sqrt{-1} = \sqrt{4a_2 - a_1^2} i$ . Portanto, na solução da equação característica,  $r_1, r_2 = h \pm vi$ ,  $h = \frac{-a_1}{2}$  e  $v = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$ . As soluções são tidas raízes complexas “conjugadas”, com mesmo valor absoluto  $R$  e apenas uma diferença de sinal no termo que envolve número imaginário. A solução da homogênea

para o caso 3, em analogia ao caso 1, é a combinação linear dessas raízes,  $y_c(t) = A_1 e^{r_1 \cdot t} + A_2 e^{r_2 \cdot t}$ , para duas raízes distintas  $r_1 \neq r_2$ , mas, agora, que são raízes complexas conjugadas:  $y_c(t) = A_1 e^{(h+vi) \cdot t} + A_2 e^{(h-vi) \cdot t} = e^{ht} (A_1 e^{vi \cdot t} + A_2 e^{-vi \cdot t})$ . Tais funções exponenciais imaginárias não podem ser imediatamente interpretadas, antes de fazê-lo, temos de transformá-las em funções circulares equivalentes.

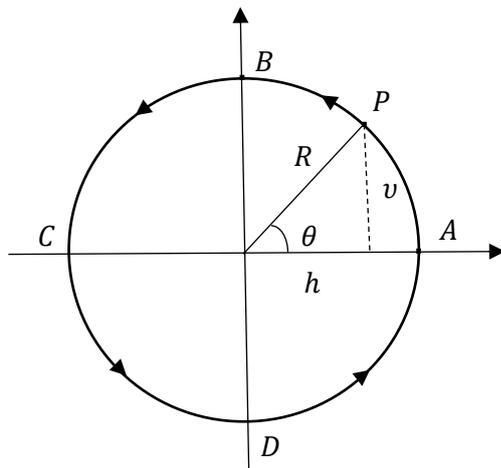
**Gráfico 14:** diagrama de Argand dos números complexos.



### Funções circulares

A fim de estudar as funções circulares, recordemos o círculo trigonométrico e as definições de seno ( $\text{sen } \theta$ ) e cosseno de um ângulo ( $\text{cos } \theta$ ). No referido círculo (gráfico 15), as relações  $\frac{v}{R}$  e  $\frac{h}{R}$  variam com  $\theta$ . Por construção,  $\frac{v}{R}$  constitui a função seno e  $\frac{h}{R}$ , a função cosseno:  $\text{sen } \theta \equiv \frac{v}{R}$  e  $\text{cos } \theta \equiv \frac{h}{R}$ .

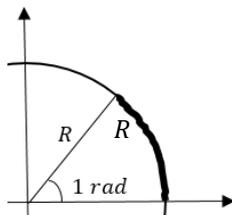
**Gráfico 15:** círculo trigonométrico com a representação de um número complexo no ponto P.



No gráfico, representamos uma volta completa no sentido anti-horário, começando do ponto A, passando pelos demais pontos e retornando a este. Seno e cosseno

são funções tidas circulares, trigonométricas ou funções senoidais.<sup>12</sup> Outra classe de função deste tipo é a tangente de um ângulo, obtida pela razão entre seno e cosseno:  $\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{v}{h}$ ,  $h \neq 0$ . Note que, aqui,  $\theta$  deve ser pensado como variável independente, em graus ou radianos. Medidas em radianos resultam em expressões de derivadas mais simples e elegantes. Lembre-se de que 1 radiano (1 *rad*) é o ângulo  $\theta$  tal que o correspondente arco tem comprimento  $R$  (gráfico 16). Todo o círculo, como se sabe, tem comprimento de  $2\pi R$  e corresponde a um ângulo de  $360^\circ$  ou  $2\pi$  radianos. A tabela abaixo relaciona a medida em graus com a medida em radianos.

**Gráfico 16:** relação entre o ângulo em radianos e o raio do círculo.



Graus	Radianos
0	0
45	$\frac{\pi}{4}$
90	$\frac{\pi}{2}$
180	$\pi$
270	$\frac{3\pi}{2}$
360	$2\pi$

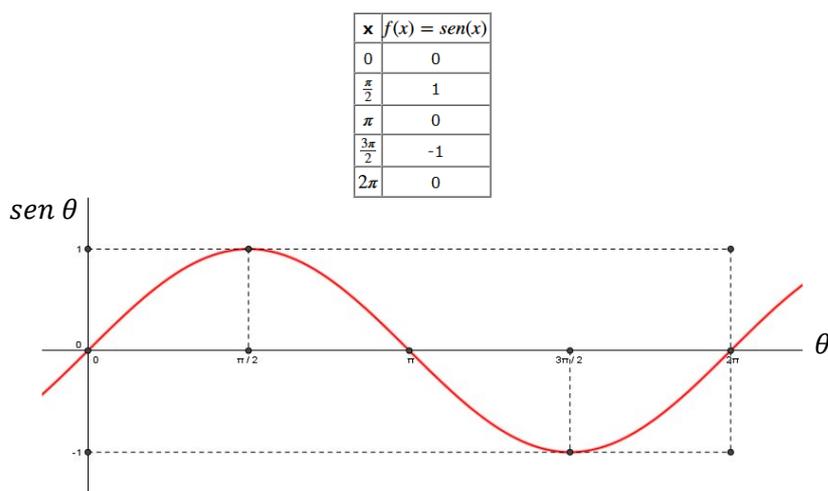
Vejamos agora algumas propriedades das funções seno e cosseno. Os valores de  $v$  e de  $\theta$  para cada um dos pontos notáveis do círculo trigonométrico do gráfico 15 estão assinalados na tabela abaixo:

ponto	arco	$v$	$\theta$
A	OA	0	0
B	OB	R (máx.)	$\frac{\pi}{2}$ rad (90°)
C	OC	0	$\pi$ rad (180°)
D	OD	- R	$\frac{3\pi}{2}$ rad (270°)
A	OA	0	$2\pi$ rad (360°) (fim do ciclo)

Os valores de certos ângulos ( $x = \theta$ ) e os senos correspondentes estão representados na tabela abaixo e no gráfico 17, que representa o desenho da função seno para  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

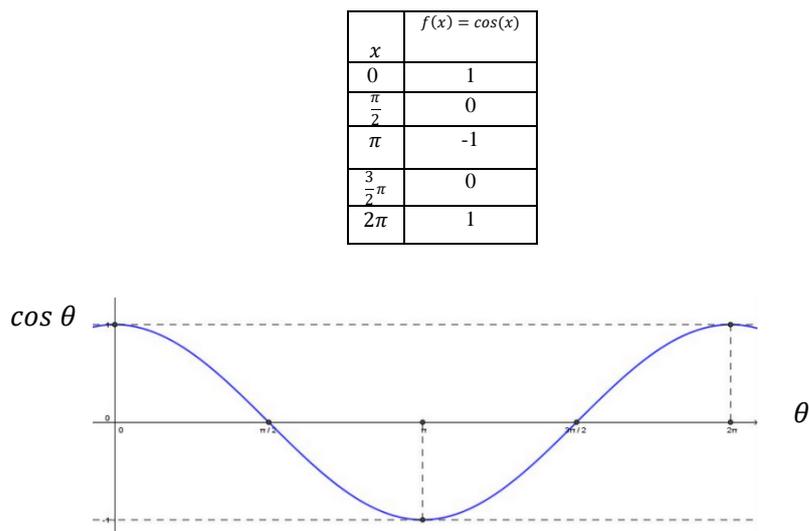
<sup>12</sup> Já vimos a tangente hiperbólica como exemplo de função trigonométrica que não está associada a um círculo, mas a uma hipérbole. Então frisa-se que nem toda função trigonométrica afigura-se uma função circular.

**Gráfico 17:** desenho da função seno.



Já para a função cosseno, temos a tabela abaixo, com os valores em pontos específicos, e o gráfico (gráfico 18) com o traçado da curva de cosseno para  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

**Gráfico 18:** desenho da função cosseno.



Note que geramos o gráfico imaginando um avanço do ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário. Note também que o domínio dessas funções trigonométricas é todo o conjunto dos reais  $\mathbb{R}$ , e que a imagem é o subconjunto  $[-1, 1]$  dos reais. Seno e cosseno são funções periódicas de período  $2\pi$  radianos, portanto,  $\text{sen}(\theta + 2n\pi) = \text{sen } \theta$  e  $\text{cos}(\theta + 2n\pi) = \text{cos } \theta$ . A amplitude de flutuação dessa função é 1, e elas estão, uma em relação à outra, numa diferença de fase de modo que  $\text{cos } \theta = \text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ .  $\text{Cos } \theta$  é simétrica em relação ao eixo vertical, assim sendo  $\text{cos}(-\theta) = \text{cos } \theta$ , enquanto que  $\text{sen } \theta$  é antissimétrica em relação ao mesmo eixo:  $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen } \theta$ .

Note ainda que  $\text{sen}^2\theta = \frac{v^2}{R^2}$  e  $\text{cos}^2\theta = \frac{h^2}{R^2}$ , portanto,  $\frac{v^2}{R^2} + \frac{h^2}{R^2} = \frac{v^2+h^2}{R^2} = 1$ . Decorre então que  $\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1$ . As seguintes relações são bem conhecidas e fáceis de

demonstrar:  $\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \pm \cos \theta_1 \sin \theta_2$  e  $\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \mp \sin \theta_1 \sin \theta_2$ . Neste caso, note a inversão dos sinais correspondentes (de  $\pm$  para  $\mp$ ).

As funções seno e cosseno são contínuas e suaves, e, portanto, diferenciáveis. As derivadas a seguir são bastante conhecidas:  $\frac{d \sin \theta}{d\theta} = \cos \theta$  e  $\frac{d \cos \theta}{d\theta} = -\sin \theta$ .<sup>13</sup> As derivadas segundas e de ordem mais elevadas são facilmente obtidas, por exemplo,  $\frac{d^2 \sin \theta}{d\theta^2} = \frac{d \cos \theta}{d\theta} = -\sin \theta$ .

### Relações de Euler

As expressões exponenciais imaginárias podem ser transformadas em funções circulares. A fim de mostrar de que forma, iremos lançar mão da conhecida técnica do cálculo de expandir-se funções diferenciáveis em série de termos, como as *séries de Taylor* e *séries de Maclaurin*.

Então exercitaremos expansões em série de termos de certas funções bem-comportadas, de classe  $C_n$ , que serão, em seguida, empregadas na demonstração de importantes relações que nos possibilitarão bem interpretar o significado da solução do caso 3 da equação homogênea associada às equações diferenciais de 2ª ordem,  $y_c(t) = e^{ht}(A_1 e^{vi.t} + A_2 e^{-vi.t})$ . Começando pela função seno. A tabela abaixo mostra a função e uma sequência de suas derivadas de ordem crescentemente superior para o seno aplicado a um ângulo genérico  $\theta$  e para  $\theta = 0$ .

$\phi(\theta) = \sin \theta$	$\phi(0) = \sin 0 = 0$
$\phi'(\theta) = \cos \theta$	$\phi'(0) = \cos 0 = 1$
$\phi''(\theta) = -\sin \theta$	$\phi''(0) = -\sin 0 = 0$
$\phi'''(\theta) = -\cos \theta$	$\phi'''(0) = -\cos 0 = -1$
$\phi^{iv}(\theta) = \sin \theta$	$\phi^{iv}(0) = \sin 0 = 0$
$\phi^v(\theta) = \cos \theta$	$\phi^v(0) = \cos 0 = 1$
$\vdots$	$\vdots$

Agora, usando informações da tabela, iremos expandir a função  $\phi(\theta) = \sin \theta$  em uma série de *Maclaurin*. Sabemos que, pela série de Taylor,  $\sin \theta = \phi(a) + \phi'(a) \frac{(\theta-a)^1}{1!} + \phi''(a) \frac{(\theta-a)^2}{2!} + \dots + \phi^n(a) \frac{(\theta-a)^n}{n!}$ , em que  $a$  representa o centro de uma vizinhança e  $\theta - a$  o tamanho dessa vizinhança. Fazendo-se  $a = 0$ , estaremos aplicando essa expansão em torno da origem em zero e teremos então uma série de Maclaurin. Nessa série, costuma-se truncar a expansão até uma ordem  $n$  finita e representar o que falta para a série infinita, de modo a equivaler à série infinita, o chamado *resto de Maclaurin*:  $\frac{\phi^{n+1}(p)}{(n+1)!} \theta^{n+1}$ , onde  $p$  é um ponto dentro da vizinhança em questão. Portanto, a expansão fica assim:  $\sin \theta = \phi(0) + \phi'(0) \frac{\theta^1}{1!} + \phi''(0) \frac{\theta^2}{2!} + \dots + \phi^n(0) \frac{\theta^n}{n!} = 0 + \theta + 0 - \frac{\theta^3}{3!} + 0 + \frac{\theta^5}{5!} + \dots + \frac{\phi^{n+1}(p)}{(n+1)!} \theta^{n+1}$ . Examinando-se o resto de Maclaurin, note que o fator  $\phi^{n+1}(p)$  é sempre  $\pm \sin p$  ou  $\pm \cos p$  e, portanto, deve estar neste intervalo:  $\in [-1, 1]$ .

<sup>13</sup> Isso é válido quando os ângulos forem medidos em radianos. Com medidas em graus, as expressões tomam-se mais trabalhosas, por exemplo,  $\frac{d \sin \theta}{d\theta} = \frac{\pi}{180^\circ} \cos \theta$ ,  $\theta$  em graus.

Assim sendo, o numerador da fração fica contido e o denominador  $(n + 1)!$  Cresce muito com  $n$ . Conclui-se que o resto se aproxima de zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Em suma, a função  $\sin \theta$  pode ser aproximada por uma série do tipo:  $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$ .

Vejam os caso da função  $\psi(\theta) = \cos \theta$ . A tabela a seguir mostra essa função e uma sequência de suas derivadas de ordem crescentemente superior para o cosseno aplicado a um ângulo genérico  $\theta$  e para  $\theta = 0$ .

$\psi(\theta) = \cos \theta$	$\psi(0) = \cos 0 = 1$
$\psi'(\theta) = -\sin \theta$	$\psi'(0) = -\sin 0 = 0$
$\psi''(\theta) = -\cos \theta$	$\psi''(0) = -\cos 0 = -1$
$\psi'''(\theta) = \sin \theta$	$\psi'''(0) = \sin 0 = 0$
$\psi^{iv}(\theta) = \cos \theta$	$\psi^{iv}(0) = \cos 0 = 1$
$\psi^v(\theta) = -\sin \theta$	$\psi^v(0) = -\sin 0 = 0$
$\vdots$	$\vdots$

Usando-se informações da tabela, iremos expandir a função  $\psi(\theta) = \cos \theta$  em uma série de *Maclaurin* com resto  $\frac{\psi^{n+1}(p)}{(n+1)!} \theta^{n+1}$ . A expansão fica assim:  $\cos \theta = 1 + 0 - \frac{\theta^2}{2!} + 0 + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + \frac{\psi^{n+1}(p)}{(n+1)!} \theta^{n+1}$ . Examinando-se o resto de Maclaurin, note que o fator  $\psi^{n+1}(p)$  é sempre  $\pm \sin p$  ou  $\pm \cos p$  e, portanto, deve estar no intervalo  $[-1,1]$ . Assim sendo, o numerador da fração fica contido e o denominador  $(n + 1)!$  Cresce muito com  $n$ . Conclui-se que, também nesse caso, o resto se aproxima de zero quando  $n \rightarrow \infty$ . A função  $\cos \theta$  pode ser aproximada por uma série do tipo:  $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$ .

Vejam agora a expansão em série para a função  $e^\theta$ . Ora, essa expansão é bem simples e bem conhecida do curso de cálculo:  $e^\theta = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$ . Essa expressão também vale substituindo-se  $\theta$  por  $i\theta$ , onde  $i$  é o número imaginário, portanto, podemos escrever  $e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \dots = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$ . Note que a primeira expressão em parênteses corresponde à expansão do cosseno e a segunda corresponde ao seno. Portanto,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ . Essa igualdade expressa a chamada *relação de Euler*. São duas as relações de Euler, conforme apontadas na equação (18):

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta \end{aligned} \tag{18}$$

Vejam dois exemplos:  $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0 = -1$ . No caso,  $\theta = \pi$ .  $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = 0 - i(1) = -i$ . No caso,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e com o sinal menos.

### Representações alternativas de números complexos e teorema de Moivre

O número complexo foi, até aqui, representado com a soma de dois termos ( $h + vi$ ), porém, há outras representações. Observando-se o círculo trigonométrico do gráfico 15, note que  $h = R \cos \theta$  e  $v = R \sin \theta$ . Portanto, o mesmo número complexo  $h \pm vi$  pode

ser representado por  $R \cos \theta \pm Ri \sin \theta = R(\cos \theta \pm i \sin \theta)$ , que é a representação de um número complexo em coordenadas polares  $(R, \theta)$ . Note ainda que, em termos de função exponencial,  $R(\cos \theta \pm i \sin \theta) = Re^{\pm i\theta}$ .

Para valores dados de  $h$  e  $v$ , o  $\theta$  das equações senoidal e exponencial naturalmente não são únicos. Contudo, confinamos esse ângulo dentro de uma volta no círculo trigonométrico:  $\theta = [0, 2\pi]$ . Vejamos dois exercícios de fixação.

Representaremos  $5e^{3i\frac{\pi}{2}}$  na forma cartesiana  $(h + vi)$ . Neste caso,  $R = 5$  e  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ . Portanto,  $h = 5\cos\frac{3\pi}{2} = 0$  e  $v = 5\sin\frac{3\pi}{2} = -5$ . Assim sendo,  $h + vi = -5i$  que é a correspondente forma cartesiana. Vejamos agora a forma exponencial de  $(1 + \sqrt{3}i)$ . Neste caso,  $h = 1$ ,  $v = \sqrt{3}$  e  $R = \sqrt{1 + 3} = 2$ . Precisamos encontrar um  $\theta$  tal que  $\cos \theta = \frac{h}{R} = \frac{1}{2}$  e  $\sin \theta = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Evidentemente  $\theta = \frac{\pi}{3}$ . E assim,  $1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

Vejamos agora o *teorema de Moivre*. Dado uma representação de um número complexo elevado a uma potência,  $(h + vi)^n$ , como ficam as formas polar e exponencial? Ora,  $h + vi = Re^{i\theta}$ , portanto,  $(h + vi)^n = R^n e^{in\theta}$ . Do mesmo modo,  $(h - vi)^n = R^n e^{-in\theta}$ . Portanto, temos demonstrado o teorema que é expresso na equação (19):

$$(h \pm vi)^n = R^n(\cos n\theta \pm i \sin n\theta) \quad (19)$$

### Análise do caso da raiz complexa

Finalmente temos as ferramentas matemática revistas e fixadas a fim de enfrentarmos agora o caso 3 das raízes características complexas na solução da equação homogênea  $y''(t) + a_1y'(t) + a_2y = 0$ . Na obtenção da função complementar, a solução geral dessa homogênea, caso em que  $a_1^2 < 4a_2$ , temos de examinar a situação em que o discriminante de  $\sqrt{a_1^2 - 4a_2}$ , que aparece na fórmula da raiz característica, é negativo. Como se trata de radicando negativo, as soluções são complexos conjugados,  $r_1, r_2 = h \pm vi$ , em que  $h = -\frac{1}{2}a_1$  e  $v = \frac{1}{2}\sqrt{4a_2 - a_1^2}$ . Em analogia ao caso de raízes reais distintas, a solução continua sendo  $y(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t}$ , mas agora as raízes  $r_1$  e  $r_2$  são números complexos de modo que  $y(t) = A_1e^{(h+vi)t} + A_2e^{(h-vi)t} = e^{ht}(A_1e^{vit} + A_2e^{-vit})$  é a solução.

A função complementar expressa em expoentes deve agora ser interpretada. O significado de exponenciais que envolvem números imaginários não é fácil de ser percebido, portanto, necessitamos utilizar as relações vistas anteriormente, na revisão de números complexos, para dar nova forma a essa expressão. Para tanto, iremos transformar as expressões exponenciais imaginárias em expressões trigonométricas.

Note que, pela equação (18) das relações de Euler, para  $\theta = vt$ ,  $e^{vit} = \cos vt + i \sin vt$ , e  $e^{-vit} = \cos vt - i \sin vt$ . Portanto, a solução da homogênea fica  $y(t) = e^{ht}(A_1e^{vit} + A_2e^{-vit}) = e^{ht}[A_1(\cos vt + i \sin vt) + A_2(\cos vt - i \sin vt)] = e^{ht}[(A_1 + A_2) \cos vt + (A_1 - A_2)i \sin vt]$ . Definindo novas constantes, de tal modo que  $A_5 = A_1 + A_2$  e  $A_6 = (A_1 - A_2)i$ , podemos simplificar a expressão. Note que  $A_6$  inclui o número imaginário, mas não nos preocupamos com o fato de definirmos uma constante

que pode ser imaginária, pois, de qualquer modo, o valor dela irá depender das condições iniciais, ela poderia ser um número real desde que atenda às duas condições iniciais em questão.<sup>14</sup>

Portanto,  $y_c(t) = e^{ht}[A_5 \cos vt + A_6 \sin vt]$ . Para facilitar ainda mais a interpretação dessa equação, note que o fator que envolve funções trigonométricas é puramente oscilatório, de modo que podemos substituir o argumento  $vt$  por um simples ângulo em radianos:  $\theta = vt$ . Assim chegamos à *função complementar*  $y_c(t)$  do caso 3 descrito pela equação (20).

$$y_c(t) = e^{ht}[A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta] \quad (20)$$

### Exercício 9

Resolva a equação diferencial  $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 17y = 34$ , com as condições iniciais  $y(0) = 3$  e  $\frac{dy}{dt}(0) = 11$ .

Nesta equação,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 17$ , e  $b = 34$ . Portanto,  $a_1^2 = 4 < 4a_2 = 68$ , e as raízes características são complexos conjugados do tipo  $h \pm vi$ , com  $h = -\frac{1}{2}a_1 = -1$  e  $v = \frac{1}{2}\sqrt{4a_2 - a_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{64} = 4$ . Note que, destarte, a solução da homogênea é  $y_c(t) = e^{-t}[A_5 \cos 4t + A_6 \sin 4t]$ . A solução particular da equação completa é simplesmente  $y_p = \frac{b}{a_2} = \frac{34}{17} = 2$ . De modo que a solução completa fica sendo  $y(t) = e^{-t}[A_5 \cos 4t + A_6 \sin 4t] + 2$ .

Vejamos agora os valores das constantes  $A_5$  e  $A_6$  que podem ser precisados pela aplicação das condições iniciais. Para  $t = 0$ ,  $e^{-0}[A_5 \cos 0 + A_6 \sin 0] + 2 = A_5 + 2 = 3$ . Portanto,  $A_5 = 1$ . A fim de determinar o valor de  $A_6$ , iremos aplicar a outra condição inicial:  $\frac{dy}{dt}(0) = 11$ . Para tanto, precisamos obter a expressão da derivada de  $y$ . Ora, conhecendo-se  $y(t)$  obtemos a derivada:  $y'(t) = -e^{-t}(A_5 \cos 4t + A_6 \sin 4t) + e^{-t}(A_5(-4\sin 4t) + 4A_6 \cos 4t)$ . E então  $y'(0) = -(A_5 \cos 0 + A_6 \sin 0) + (-4A_5 \sin 0 + 4A_6 \cos 0) = -(A_5 + 0) + (0 + 4A_6) = 4A_6 - 1 = 11$ . Logo,  $A_6 = 3$ .

Portanto, a solução definida fica sendo  $y(t) = e^{-t}[\cos 4t + 3 \sin 4t] + 2$ , onde o primeiro termo representa o desvio, que é um padrão flutuante, e a constante no segundo termo representa o nível de equilíbrio intertemporal de  $y$ .

Vejamos a solução por Matlab. Escreve-se a equação diferencial na forma  $\frac{d^2y}{dt^2} = 34 - 17y - 2\frac{dy}{dt}$ . Na janela de comando, digita-se a *procedure*:

```
syms y(t)
Dy = diff(y) ;
y(t) = dsolve(diff(y, t, 2) == 34 - 2*Dy - 17*y, y(0) == 3, Dy(0) == 11)
```

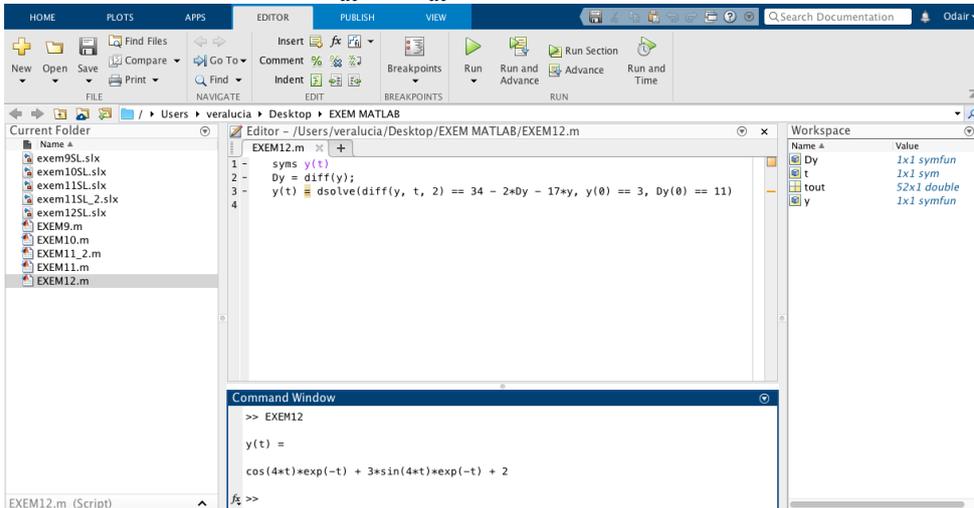
Note que as duas condições iniciais foram informadas na parametrização do *dsolve*: “ $y(0) == 3$ ,  $Dy(0) == 11$ ”. O Matlab fornece a solução já obtida teoricamente. Essa

<sup>14</sup> Note que se  $A_1 - A_2$  forem números imaginários, aparecerá em  $A_6$  o número  $i^2$  que não é imaginário (por que?).

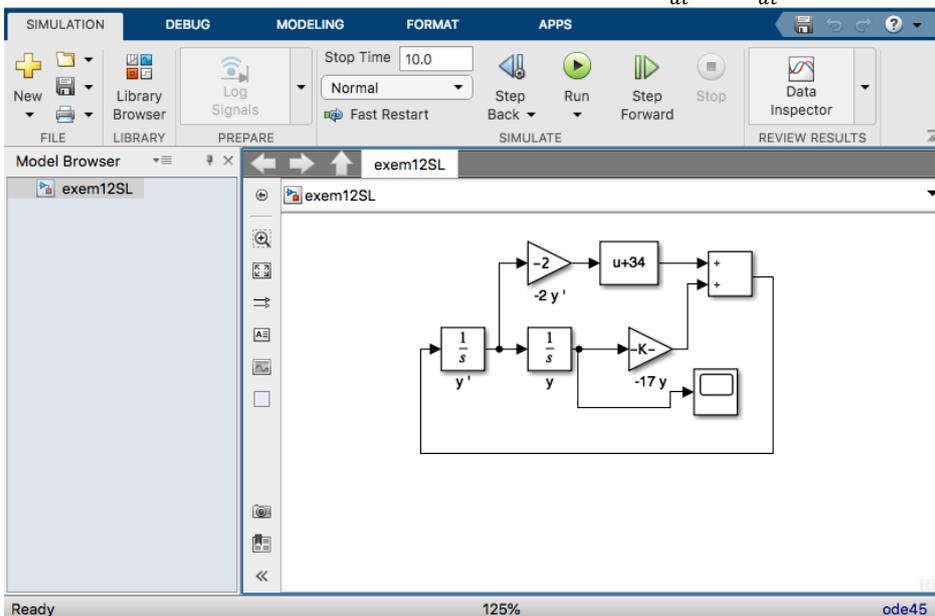
sequência de programação foi salva no arquivo EXEM12.m. A solução por Simulink encontra-se no arquivo exem12SL.

A Figura 55 mostra a janela de comando do Matlab com a solução idêntica à que já obtivemos. A solução por Simulink aparece em exem12SL. A Figura 56 mostra o correspondente diagrama de blocos do Simulink.

**Figura 55:**  $y(t)$  na solução de  $\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 17y = 34$ .

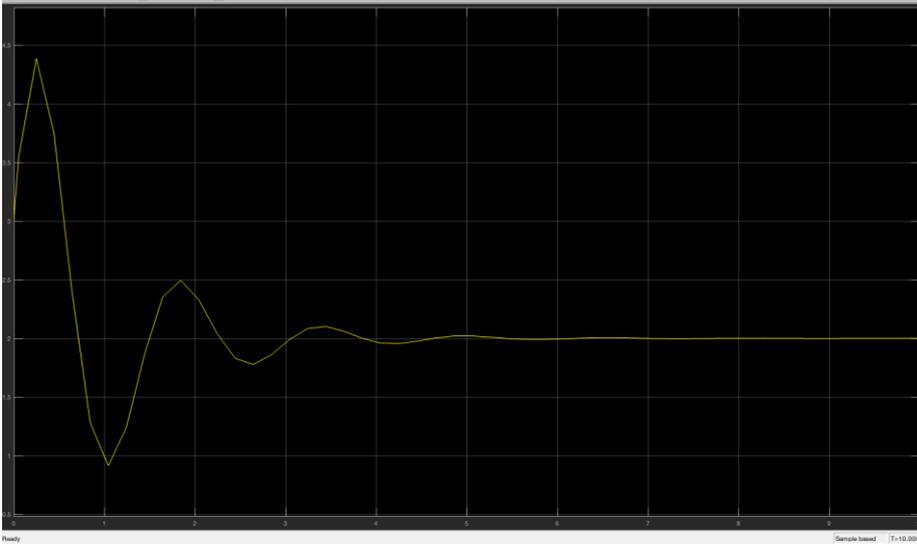


**Figura 56:** diagrama de blocos em Simulink para o exercício  $\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 17y = 34$ .



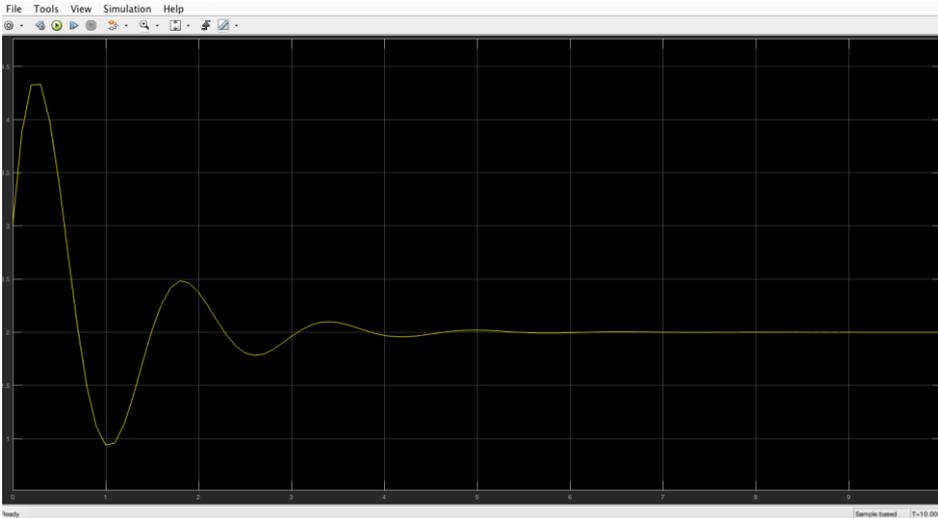
A Figura 57 mostra a trajetória de  $y(t)$ , gerada pelo bloco *Scope*, após executar-se o Simulink informando-o das condições iniciais do exercício nos parâmetros dos respectivas blocos *Integrator*. Note que se trata de uma trajetória oscilatória e convergente, pois vimos a presença de um coeficiente amortecedor na expressão  $y(t) = e^{-t}[\cos 4t + 3 \sen 4t] + 2$ .

**Figura 57:** trajetória de  $y(t)$  obtida acionando-se o diagrama de blocos em Simulink para o exercício  $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 17y = 34$ .



A curva obtida não está muito bem desenhada, ela não é totalmente suave, com cotovelos em alguns trechos. Novamente empregamos a técnica de melhorar o gráfico em questão alterando parâmetros no “*Model Configuration Parameters*” (MCP). Muda-se a opção do *Solver* de “*Variable-step*” para “*Fixed-step*” e, neste caso, fixa-se o tempo fundamental do passo (*Fixed-step size*) em 0,1. A Figura 58 mostra a curva “melhorada”.

**Figura 58:** trajetória melhorada de  $y(t)$  obtida acionando-se o diagrama de blocos em Simulink para o exercício  $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 17y = 34$ .



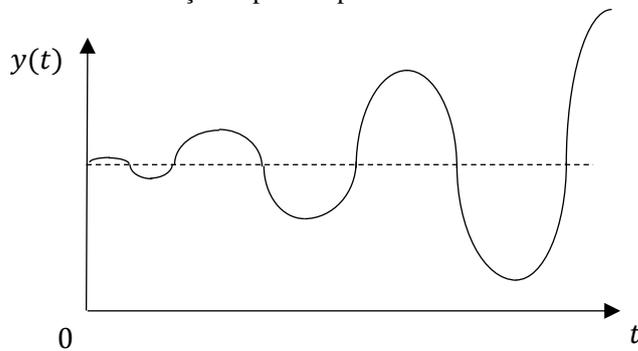
### A trajetória temporal

Qual é o gráfico de  $y_c(t) = e^{ht}[A_5 \cos vt + A_6 \sin vt]$ ? Note, para que o argumento das funções senoidais em questão ( $vt$ ) aumente  $2\pi$ , é necessário que  $t$  aumente para  $\frac{2\pi}{v}$  (pois evidentemente  $vt$  vai para  $v\frac{2\pi}{v} = 2\pi$ ). Então o período de  $\sin vt$  e  $\cos vt$  é  $\frac{2\pi}{v}$ .

$A_5$  e  $A_6$  são as amplitudes dos respectivos termos.  $\frac{2\pi}{v}$  é, portanto, o período comum de  $A_5 \cos vt + A_6 \sin vt$ . Com  $A_5$  e  $A_6$  dados, vamos achar dois novos pares de constantes  $A$  e  $\epsilon$  tal que  $A_5 = A \cos \epsilon$  e  $A_6 = -A \sin \epsilon$ . Sendo assim,  $A_5 \cos vt + A_6 \sin vt = A \cos \epsilon \cos vt - A \sin \epsilon \sin vt = A(\cos vt \cos \epsilon - \sin vt \sin \epsilon) = A(\cos(vt + \epsilon))$ . Esta última função tem amplitude  $A$  e, dado o argumento  $vt + \epsilon$ , período  $\frac{2\pi}{v}$ , pois, para que o argumento da função cosseno em questão ( $vt + \epsilon$ ) aumente  $2\pi$ , é necessário que  $t$  aumente para  $\frac{2\pi}{v}$  (evidentemente  $vt + \epsilon$  vai para  $v\frac{2\pi}{v} + \epsilon$ , e a diferença entre valores final e inicial é  $2\pi$ ).

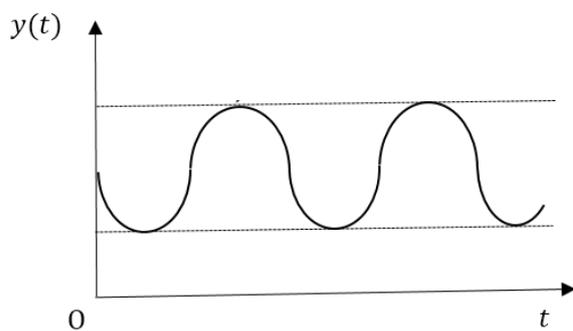
Então temos em  $A_5 \cos vt + A_6 \sin vt$  uma flutuação sem fim de amplitude constante ao redor do valor de equilíbrio de  $y$ . Falta examinar agora o fator  $e^{ht}$ . Se  $h > 0$ , para  $t \rightarrow \infty$ ,  $e^{ht} \rightarrow \infty$ , e por consequência aumenta a amplitude da flutuação senoidal, que se torna explosiva, conforme gráfico 19.

**Gráfico 19:** flutuação explosiva para  $h > 0$ .



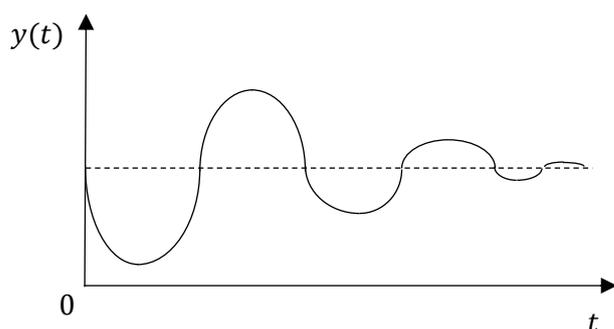
Agora, se  $h = 0$ ,  $e^{ht} = 1$  e temos uma flutuação senoidal de amplitude constante como no gráfico 20.

**Gráfico 20:** flutuação com amplitude constante para  $h = 0$ .



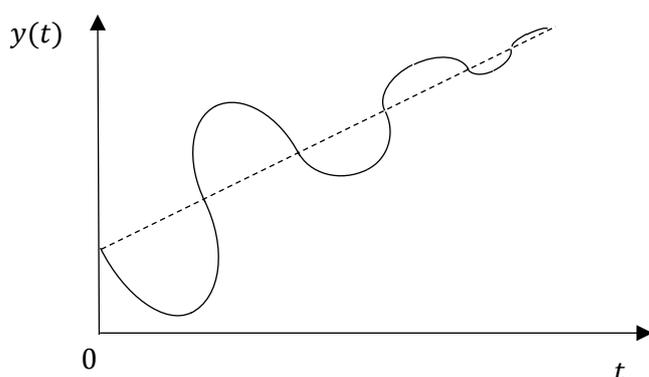
A última possibilidade é que  $h < 0$ , e, nesse caso, tem-se uma flutuação amortecida como no gráfico 21. Este é o único caso com trajetória temporal convergente!

**Gráfico 21:** flutuação amortecida para  $h < 0$ .



Até aqui vimos a trajetória de  $y(t)$  no caso de equilíbrio estacionário, mas o equilíbrio pode ser móvel se a solução particular  $y_p(t)$  não for uma constante. O gráfico 22 ilustra o caso de equilíbrio móvel ao longo de uma trajetória crescente de tendência linear e amortecida (nem sempre é o caso de ser linear ou amortecida!).

**Gráfico 22:** flutuação amortecida com equilíbrio móvel.



### *Estabilidade dinâmica do equilíbrio*

Nos casos 1 e 2 em que  $r_1, r_2$  são números reais, a condição de estabilidade dinâmica de equilíbrio é que  $r_i < 0$ , quer  $r_1 \neq r_2$  ou  $r_1 = r_2$ . No caso de raiz complexa, para equilíbrio dinâmico estável devemos ter  $h < 0$  e isso garante a trajetória temporal convergente. Então note que, neste caso, basta que a parte real de  $h \pm vi$  seja negativa. Então em todos os casos pode-se generalizar como sendo a condição de estabilidade dinâmica de equilíbrio que a parte real de toda raiz característica seja negativa, condição necessária e suficiente para  $y_c \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

### **Modelo de mercado com expectativas de preço**

Suponhamos agora um mercado em que a demanda ( $Q_d$ ) e a oferta ( $Q_s$ ) dependam não apenas do preço atual mas da tendência esperada do preço, das expectativas em relação ao nível de preços no futuro.

Agora perguntamos se o preço está subindo ou descendo a observar a derivada dele no tempo,  $\frac{dp}{dt}$ . Também nos preocupamos em saber a qual taxa ele estaria subindo ou

descendo olhando para a derivada segunda  $\frac{d^2p}{dt^2}$ . Portanto, podemos escrever, para a função de demanda,  $Q_d = D[p(t), p'(t), p''(t)]$ , e para a oferta  $Q_s = S[p(t), p'(t), p''(t)]$ , em que, agora, as derivadas de duas primeiras ordens entram como argumento das funções. A equação (21) mostra uma representação linear simples, a coeficientes constantes, dessas relações.

$$\begin{aligned} Q_d &= \alpha - \beta p + mp' + np'' & (\alpha, \beta > 0) \\ Q_s &= -\gamma + \delta p + up' + \omega p'' & (\gamma, \delta > 0) \end{aligned} \quad (21)$$

Nestas equações,  $m, n, u$  e  $\omega$  aparecem *sem* restrições de sinais. No caso em que  $m > 0$ , por exemplo,  $p' > 0$  leva a um aumento em  $Q_d$ , refletindo a situação na qual o preço que esteja subindo leva a que se espere que ele continue subindo, e o agente prefere demandar mais no presente, daí o crescimento na demanda  $Q_d$ . Com  $n > 0$ , a taxa de variação de  $p'$  isto é  $p''$  terá influência positiva nessa mesma demanda. Em suma,  $m$  e  $n$  refletem elementos de especulação de preços no lado da demanda.  $u$  e  $\omega$  refletem elementos de especulação no lado dos vendedores.

### Um modelo simplificado

Suponha que só a função de demanda contenha expectativa de preços, isto é,  $m, n \neq 0$  e  $u, \omega = 0$ . Na hipótese de que o mercado esteja em equilíbrio a todo instante,  $Q_d = Q_s$  e portanto  $\alpha - \beta p + mp' + np'' = -\gamma + \delta p$ ,  $p'' + \frac{m}{n}p' - \frac{\beta+\delta}{n}p = -\frac{\alpha+\gamma}{n}$ , que é uma equação diferencial linear de 2ª ordem na variável  $p$ , como coeficientes constantes,  $a_1 = \frac{m}{n}$ ,  $a_2 = -\frac{\beta+\delta}{n}$ , e termo constante  $b = -\frac{\alpha+\gamma}{n}$ . Cada  $p$  é um preço de equilíbrio em  $t$  tal que  $Q_d = Q_s$ , mas não necessariamente um preço de equilíbrio intertemporal em que  $\frac{dp}{dt} = 0$ . Note que neste modelo não iremos impor um mecanismo de ajuste do tipo imaginado por Hicks ( $\frac{dp}{dt} = j(Q_d - Q_s)$ ), porque agora a dinâmica ocorre por conta das próprias expectativas traduzidas em uma equação diferencial de 2ª ordem. Ou seja, a dinâmica decorre de  $mp'$  e  $np''$ , e não de uma explícita hipótese descritiva dessa dinâmica.

Vejamos agora como se comporta a trajetória temporal do preço no modelo. Sabemos que o preço de equilíbrio intertemporal do modelo é a solução particular da equação diferencial; como tal, a razão do termo com o segundo coeficiente  $p_p = \frac{b}{a_2} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ . Agora vejamos a solução da equação homogênea associada. Iremos examinar os três casos que identificamos anteriormente. O primeiro caso é o de raízes reais distintas, em que  $a_1^2 > 4a_2$ , ou seja,  $\left(\frac{m}{n}\right)^2 > -4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)$ . De modo que a solução da função complementar fica  $p_c(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$  e as raízes características são  $r_1, r_2 = \frac{-a_1 \mp \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{m}{n} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)} \right]$ . A solução completa é a soma da geral da homogênea com a solução particular,  $p(t) = p_c + p_p = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ .

Vamos ao 2º caso, o de raízes reais duplas e repetidas. Neste caso,  $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = -4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)$ ,  $r = -\frac{a_1}{2} = -\frac{m}{2n}$  e a solução fica sendo  $p(t) = A_3 e^{-\frac{mt}{2n}} + A_4 t e^{-\frac{mt}{2n}} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ . No caso de raízes complexas,  $\left(\frac{m}{n}\right)^2 < -4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)$ , as soluções dão números complexos  $r_1, r_2 = h \pm vi$ , em que  $h = -\frac{m}{2n}$  e  $v = \frac{1}{2}\sqrt{4a_2 - a_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{-4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right) - \left(\frac{m}{n}\right)^2}$ . A solução, conforme vimos, fica sendo então  $p(t) = e^{-\frac{mt}{2n}}(A_5 \cos vt + A_6 \sin vt) + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ .

Façamos agora uma análise de estabilidade. Suponha que a reação da demanda à derivada segunda dos preços seja positiva,  $n > 0$ . Neste caso, evidentemente  $-4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right) < \left(\frac{m}{n}\right)^2$  e se recai obrigatoriamente no caso 1 já que  $\beta, \delta > 0$ . As raízes características seriam  $r_1, r_2 = \frac{1}{2}\left[-\frac{m}{n} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)}\right]$ . Note que a raiz é necessariamente maior que  $\left|\frac{m}{n}\right|$ .<sup>15</sup> Portanto, predomina sempre o sinal do termo com raiz quadrada que acompanha ambos os sinais. Ou seja, as raízes características possuem sinais distintos:  $r_1 > 0$  e  $r_2 < 0$ . Olhando-se para a solução da homogênea,  $p_c(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$ , se  $A_1 \neq 0$  temos um equilíbrio dinamicamente instável.

Suponha agora que a reação da demanda à derivada segunda dos preços seja negativa,  $n < 0$ . Então  $-4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right) > \left(\frac{m}{n}\right)^2$  e os 3 casos são possíveis. Todos os casos, de 1 a 3, resultam em equilíbrio dinamicamente estável se  $m < 0$ . Pois,  $\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)}$  fica menor que  $\left|\frac{m}{n}\right|$ .<sup>16</sup> Então o sinal do primeiro termo da expressão  $-\frac{m}{n} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)}$  é que determina o sinal das raízes. Como  $n < 0$  na hipótese considerada, se  $m < 0$ , o primeiro termo é negativo e ambas as raízes ficam negativas. O mesmo quando se tem raízes repetidas  $r = -\frac{m}{2n}$ , bem como o caso de raiz complexa em que o expoente do algarismo natural,  $h = -\frac{m}{2n}$ , também se torna negativo.

### Exercício 10

Seja um modelo de mercado com expectativas de preço tal que  $Q_d = 40 - 2p - 2p' - p''$  e  $Q_s = -5 + 3p$ . Determine a trajetória dos preços resolvendo a correspondente equação diferencial, com as condições iniciais  $p(0) = 12$  e  $\frac{dp}{dt}(0) = 1$ .

Note que, como  $m, n < 0$ , o mercado tende a um equilíbrio intertemporal dinamicamente estável. Supomos que o mercado, ao longo da trajetória do preço, esteja sempre em equilíbrio de modo que  $Q_d = Q_s$ . Ou seja,  $40 - 2p - 2p' - p'' = -5 + 3p$ , ou  $p'' + 2p' + 5p = 45$ . A solução particular é imediata:  $p_p = \frac{45}{5} = 9$ . Para a solução da homogênea, vejamos a equação característica  $r^2 + 2r + 5 = 0$ . Neste caso,  $r_1, r_2 = \frac{1}{2}[-2 \pm \sqrt{4 - 20}] = \frac{1}{2}[-2 \pm 4i] = -1 \pm 2i$ . Portanto,  $h = -1$  e  $v = 2$ . A solução geral fica então  $p(t) = e^{-t}(A_5 \cos 2t + A_6 \sin 2t) + 9$ .

<sup>15</sup> Se  $4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right) > 0$ ,  $\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right) > \left(\frac{m}{n}\right)^2$  e  $\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)} > \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2} = \left|\frac{m}{n}\right|$ .

<sup>16</sup> Agora,  $4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right) < 0$ ,  $\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right) < \left(\frac{m}{n}\right)^2$  e  $\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)} < \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2} = \left|\frac{m}{n}\right|$ .

Respeitando as condições iniciais do exercício, iremos determinar os valores das duas constantes. Para  $t = 0$ ,  $p(0) = e^0(A_5 \cos 0 + A_6 \sin 0) + 9 = A_5 + 9 = 12$ ,  $A_5 = 3$ . Agora vamos obter a expressão da derivada:  $p'(t) = -e^{-t}(A_5 \cos 2t + A_6 \sin 2t) + e^{-t}(-2A_5 \sin 2t + 2A_6 \cos 2t)$ . E 71iry71m-la na condição inicial:  $p'(0) = -e^0(A_5 \cos 0 + A_6 \sin 0) + e^0(-2A_5 \sin 0 + 2A_6 \cos 0) = -(A_5 + 0) + (0 + 2A_6) = -3 + 2A_6 = 1$ . Portanto,  $A_6 = 2$ . E a solução geral definida para a equação completa fica  $p(t) = e^{-t}(3 \cos 2t + 2 \sin 2t) + 9$ .

Vejamos a solução por Matlab. Escreve-se a equação diferencial na forma  $\frac{d^2y}{dt^2} = 45 - 5y - 2\frac{dy}{dt}$ . Na janela de comando, digita-se a *procedure*:

```
syms y(t)
Dy = diff(y) ;
y(t) = dsolve(diff(y, t, 2) == 45 - 2*Dy - 5*y, y(0) == 12, Dy(0) == 1)
```

Note que as duas condições iniciais foram informadas na parametrização do *dsolve*: “ $y(0) == 12$ ,  $Dy(0) == 1$ ”. A Figura 59 mostra a janela de comando do Matlab com a mesma solução que obtivemos. A sequência de programação foi salva no arquivo EXEM13.m. A solução por Simulink encontra-se no arquivo exem13SL. A Figura 60 mostra o diagrama correspondente a esse exercício.

Figura 59:  $p(t)$  na solução de  $p'' + 2p' + 5p = 45$ .

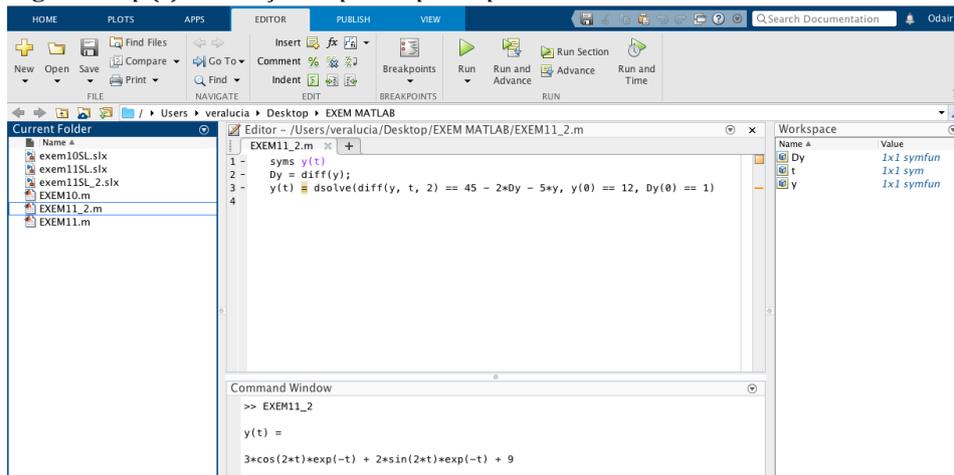
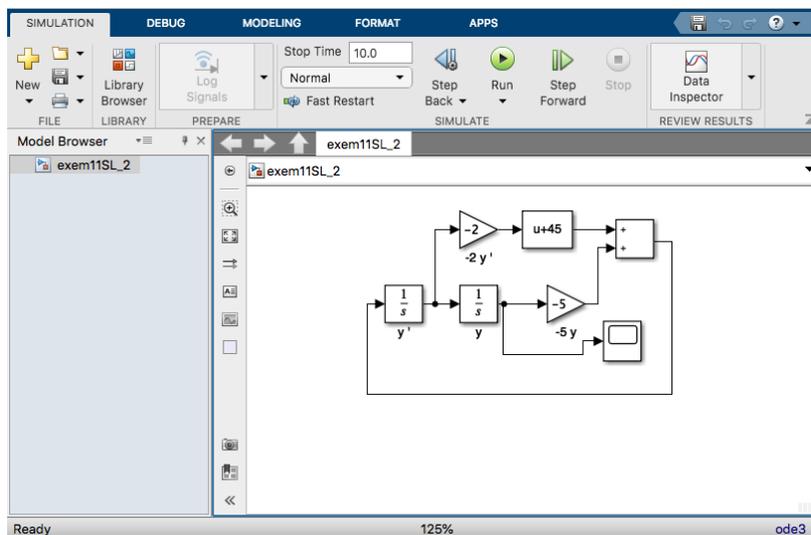
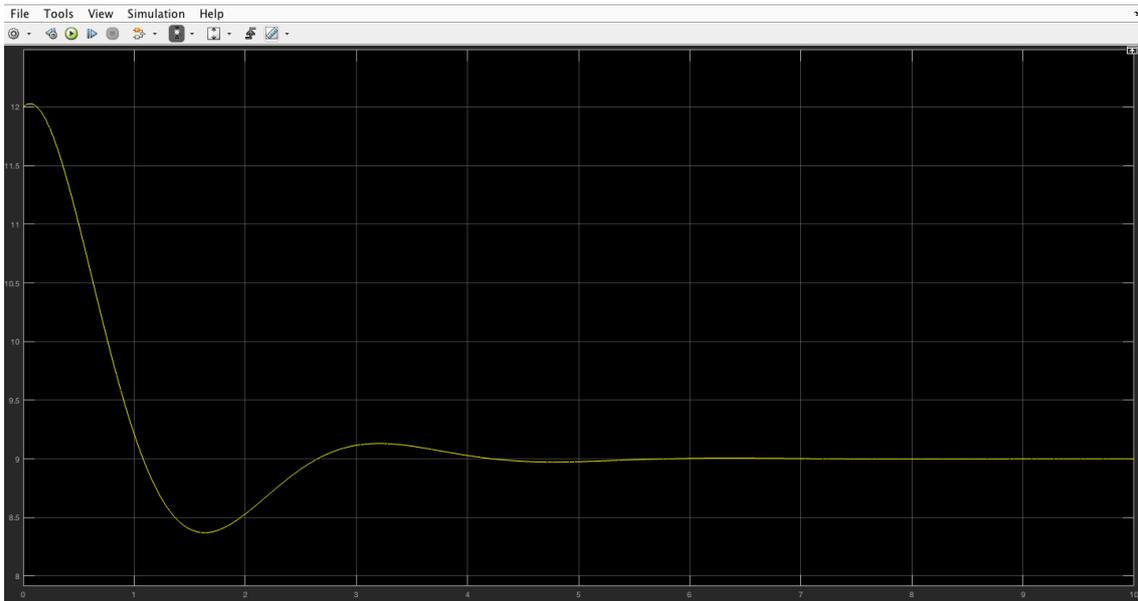


Figura 60: diagrama de blocos em Simulink para o exercício  $p'' + 2p' + 5p = 45$ .



A figura 61 mostra a trajetória de  $p(t)$ , gerada pelo bloco *Scope*, após executar-se o Simulink informando-o das mesmas condições iniciais do exercício nos parâmetros das respectivas caixinhas *Integrator*. Note que a trajetória se afigura uma oscilação senoidal amortecida que tende ao equilíbrio estacionário em  $p(t) = 9$ .

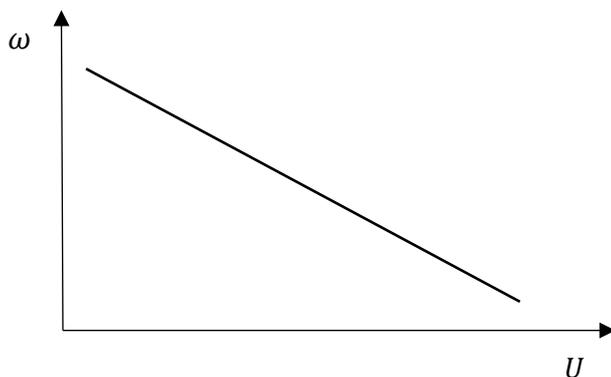
**Figura 61:** trajetória de  $p(t)$  obtida acionando diagrama de blocos em Simulink para o exercício  $p'' + 2p' + 5p = 45$ .



### Interação entre inflação e desemprego

Utilizando as técnicas para solução de equações diferenciais de 2ª ordem, vamos examinar a conhecida relação de Phillips, do curso de macroeconomia, entre salário  $\omega$  e desemprego  $U$ ,  $\omega = f(U)$ , na qual  $f'(U) < 0$  traduz a relação inversa entre essas duas grandezas conforme o gráfico 23.  $U$  é a taxa de desemprego da economia e  $\omega$  é a taxa de crescimento da renda salarial  $W$ ,  $\omega \equiv \frac{\dot{W}}{W}$ . Diz-se que essa relação traduz o lado da oferta da economia.

**Gráfico 23:** relação entre salário  $\omega$  e desemprego  $U$  na curva de Phillips.



Ao modelo tradicional de Phillips, vamos acrescentar a ideia de que a inflação de preços  $p$  pode ser compensada ou atenuada por um aumento na produtividade do trabalho  $T$  exógena. Seja  $p$  a taxa de inflação dos preços  $P: p \equiv \frac{\dot{P}}{P}$ . Tal taxa acompanha a taxa de crescimento dos salários descontada da taxa de crescimento da produtividade  $T$ , de modo que  $p = \omega - T$ . Suponha uma relação linear decrescente entre salário e desemprego como no Gráfico 23,  $\omega = \alpha - \beta U$ . Vamos expressá-la em termo de inflação:  $p + T = \alpha - \beta U$ ,  $p = \alpha - T - \beta U$ ,  $(\alpha, \beta) > 0$ .

#### *A relação de Phillips com expectativas incorporadas*

Suponha que os salários também dependam da taxa de inflação esperada  $\pi$ , de modo que  $\omega = f(U) + g\pi$ ,  $0 < g \leq 1$ . Quando as expectativas de inflação são incorporadas às demandas salariais,  $\omega = \alpha - \beta U + g\pi$ , a nova equação dos preços fica então:

$$p = \omega - T = \alpha - T - \beta U + g\pi \quad (22)$$

A equação (22) traduz o lado de oferta da economia. Adicionam-se agora, ao modelo, hipóteses sobre como as expectativas de inflação são formadas, conhecidas como *expectativas adaptativas* e representadas na equação (23).

$$\frac{d\pi}{dt} = j(p - \pi) \quad (0 < j \leq 1) \quad (23)$$

Temos, portanto, três variáveis ( $p, \pi, U$ ) e duas equações. A fim de finalizá-las no modelo, necessitamos de uma terceira equação. Então iremos propô-la, trata-se de uma equação que capta o retorno da inflação para o desemprego, como aquela variável afeta esta. São diversos os mecanismos pelos quais a inflação afeta o desemprego. Taxas mais elevadas de inflação impactam o nível de poupança da economia, bem como o consumo privada, a demanda agregada, e tudo isso acaba afetando a taxa de desemprego. Também pode afetar o desemprego perturbando a relação entre oferta real e oferta nominal de moeda, com impacto na produção e, por meio desta, no desemprego.

Iremos propor uma terceira equação a envolver inflação e desemprego com a identificação de um mecanismo em que a moeda, a política monetária, afeta o desemprego. Sendo assim, dada uma taxa de crescimento  $m$  da oferta monetária  $M$ ,  $m \equiv \frac{\dot{M}}{M}$ , a taxa de variação temporal da produção dependerá do excesso de crescimento nominal da moeda  $m$  vis-à-vis o crescimento dos preços  $p$ , a inflação (efeito real de uma política monetária expansionista na economia). E a taxa de crescimento do desemprego é tanto menor quanto maior o crescimento da produção. Capta-se tal efeito com um sinal negativo, e escreve-se então:

$$\frac{dU}{dt} = -k(m - p) \quad (k > 0) \quad (24)$$

Note que  $m - p = \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{P}}{P} = r_M - r_P = r_{\frac{M}{P}}$ , onde  $r_M$  é a taxa de crescimento nominal da moeda,  $r_P$  a taxa de inflação e  $r_{\frac{M}{P}}$  a diferença entre essas taxas, que indica a taxa de

crescimento da chamada moeda real  $\frac{M}{P}$ , do poder de compra da moeda. Note que  $r_M = \frac{\dot{M}}{M}$ , e também é igual à diferença entre as taxas, pois,  $r_M - r_P = \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{M}P - \dot{P}M}{MP} = \frac{\dot{M}P - \dot{P}M}{PM} = \frac{\dot{M}P - \dot{P}M}{P^2} \frac{P}{M} = \frac{\dot{M}}{M}$ .

### A trajetória temporal de $\pi$ , a expectativa de inflação

Com base nas três equações de (22) a (24), podemos resolver o sistema para determinar as trajetórias temporais da expectativa de inflação  $\pi$ , da taxa de inflação  $p$  e da taxa de desemprego  $U$ . Iremos explicitar a determinação da trajetória temporal da primeira dessas três variáveis, a taxa  $\pi$ . Podemos também encontrar as trajetórias de  $p$  e  $U$  em exercícios semelhantes.

Para tanto, temos um modelo fechado em  $\pi$ ,  $p$  e  $U$  que devemos condensar em uma única equação diferencial de uma única variável  $\pi$ . Começemos inserindo a equação (22) na equação (23) de modo que podemos escrever  $\frac{d\pi}{dt} = j(\alpha - T - \beta U + g\pi - \pi) = j(\alpha - T - \beta U) - j(1 - g)\pi$ . Vamos derivar essa última equação em relação a  $t$ , lembrado que, no segundo membro, apenas  $U$  e  $\pi$  são variáveis. Fica então  $\frac{d^2\pi}{dt^2} = -j\beta \frac{dU}{dt} - j(1 - g) \frac{d\pi}{dt}$ .

Agora, usamos a equação (24), substituído, na equação anterior,  $\frac{dU}{dt}$  por  $-k(m - p)$ , ficando assim:  $\frac{d^2\pi}{dt^2} = j\beta km - j\beta kp - j(1 - g) \frac{d\pi}{dt}$ . Neste ponto, precisamos apenas eliminar a variável  $p$  da equação usando novamente (23) a fim de substituí-la por uma expressão em  $\pi$ . Note que se  $\frac{d\pi}{dt} = j(p - \pi)$ ,  $p = \frac{1}{j} \frac{d\pi}{dt} + \pi$ . Ficamos com  $\frac{d^2\pi}{dt^2} = j\beta km - j\beta k \left( \frac{1}{j} \frac{d\pi}{dt} + \pi \right) - j(1 - g) \frac{d\pi}{dt} = j\beta km - j\beta k\pi - [\beta k + j(1 - g)] \frac{d\pi}{dt}$ , que pode ser reordenada na equação (25).

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} + [\beta k + j(1 - g)] \frac{d\pi}{dt} + j\beta k\pi = j\beta km \quad (25)$$

Note que se tem, nessa equação, dois coeficientes constantes ( $a_1 = \beta k + j(1 - g)$ ,  $a_2 = j\beta k$ ) e um termo constante,  $b = j\beta km$ . A equação (25), de fato, trata-se de uma equação diferencial de 2ª ordem com coeficientes e termo constantes. Já sabemos resolvê-la com certa facilidade. A solução particular é  $\pi_p = \frac{b}{a_2} = m$ , e as raízes características são  $r_1, r_2 = \frac{1}{2} \left( -a_1 \mp \sqrt{a_1^2 - 4a_2} \right)$ . Note que  $a_1^2 \geq 4a_2$ . De modo que todos os três casos podem surgir.

Note que  $a_2 = j\beta k > 0$ . Em todos os casos, o equilíbrio intertemporal revelará ser dinamicamente estável, pois, no caso 1, em que  $a_1^2 > 4a_2$ ,  $\sqrt{a_1^2 - 4a_2} < \sqrt{a_1^2} = |a_1|$  e, portanto,  $r_1, r_2 < 0$ , pois predomina o sinal negativo do primeiro termo na expressão entre parênteses. No caso 2,  $a_1^2 = 4a_2$ ,  $r_1, r_2 = -\frac{a_1}{2} < 0$ . No caso 3,  $h = -\frac{a_1}{2} < 0$ . Em todos os três casos, portanto, a parte real das raízes é sempre negativa, o que atende à condição de convergência.

### Exercício 11

Seja um modelo de inflação e desemprego dado pelas equações abaixo (as variáveis têm o significado que vimos atribuindo):

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{6} - 3U + \pi \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{3}{4}(p - \pi) \\ \frac{dU}{dt} &= -\frac{1}{2}(m - p) \end{aligned}$$

Determine a trajetória temporal das três variáveis endógenas  $p$ ,  $\pi$  e  $U$ .

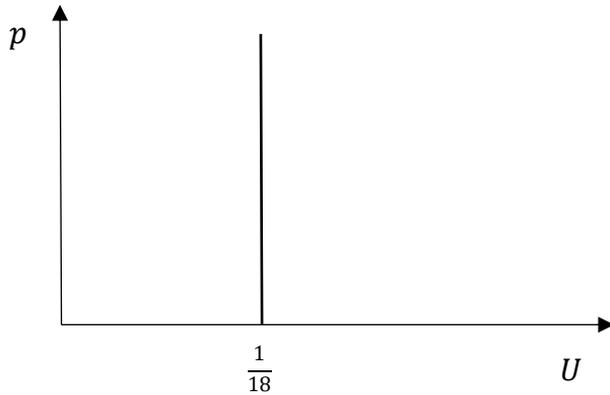
À luz do desenvolvimento teórico anterior, obtemos facilmente a trajetória de  $\pi$ , a expectativa de inflação. Nesse exercício,  $\beta = 3$ ,  $g = 1$ ,  $j = \frac{3}{4}$  e  $k = \frac{1}{2}$ . Portanto, no caso,  $a_1 = \beta k + j(1 - g) = \frac{3}{4}$ ,  $a_2 = j\beta k = \frac{9}{8}$  e  $b = j\beta km = \frac{9}{8}m$ . E a solução particular é  $\pi_p = \frac{b}{a_2} = m$ . Ou seja, o equilíbrio dinâmico da expectativa de inflação é a taxa de crescimento da moeda. Vejamos as raízes características na solução da homogênea em  $\pi$ :  $r_1, r_2 = \frac{1}{2} \left( -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}i \right) = -\frac{3}{4} \pm \frac{3}{4}i$ . Note que, neste contexto,  $a_1^2 < 4a_2$  e as raízes características são complexa. Destarte,  $h = -\frac{3}{4}$  e  $v = \frac{3}{4}$ . A solução completa é então  $\pi(t) = e^{-\frac{3t}{4}} \left( A_5 \cos \frac{3}{4}t + A_6 \sin \frac{3}{4}t \right) + m$ , uma flutuação amortecida ao redor de  $m$ .

A expressão para  $p$  sai da segunda equação do exercício, na qual se pode escrever  $p = \frac{4}{3} \frac{d\pi}{dt} + \pi$ . Precisamos então conhecer a expressão da derivada  $\frac{d\pi}{dt}$ . Ora,  $\frac{d\pi}{dt} = -\frac{3}{4} e^{-\frac{3t}{4}} \left( A_5 \cos \frac{3}{4}t + A_6 \sin \frac{3}{4}t \right) + e^{-\frac{3t}{4}} \left( -\frac{3}{4} A_5 \sin \frac{3}{4}t + \frac{3}{4} A_6 \cos \frac{3}{4}t \right)$ . Portanto, substituindo na expressão para a inflação,  $p(t) = \frac{4}{3} \left( -\frac{3}{4} e^{-\frac{3t}{4}} \left( A_5 \cos \frac{3}{4}t + A_6 \sin \frac{3}{4}t \right) + e^{-\frac{3t}{4}} \left( -\frac{3}{4} A_5 \sin \frac{3}{4}t + \frac{3}{4} A_6 \cos \frac{3}{4}t \right) \right) + e^{-\frac{3t}{4}} \left( A_5 \cos \frac{3}{4}t + A_6 \sin \frac{3}{4}t \right) + m = e^{-\frac{3t}{4}} \left( A_6 \cos \frac{3}{4}t - A_5 \sin \frac{3}{4}t \right) + m$ .

A expressão para  $U$  pode ser extraída começando-se da primeira equação em que  $U = \frac{1}{3}(\pi - p) + \frac{1}{18}$ . Como já determinamos as trajetórias de  $\pi$  e  $p$ , demonstra-se facilmente que  $U(t) = \frac{1}{3} e^{-\frac{3t}{4}} \left( (A_5 - A_6) \cos \frac{3}{4}t + (A_5 + A_6) \sin \frac{3}{4}t \right) + \frac{1}{18}$ .

Note que o valor de  $m$ , a taxa de crescimento da moeda nominal, é o eixo ao redor do qual flutuam  $\pi$  e  $p$ . Já a taxa de desemprego  $U$  não depende de  $m$ . Viceja uma taxa de desemprego que corresponde ao equilíbrio estacionário  $p(t) = \frac{1}{18}$ , que os macroeconomistas denominam de *taxa natural de desemprego*. Conforme o gráfico 24, qualquer que seja a taxa de inflação, ela será, no longo prazo, compatível com uma única taxa natural de desemprego, no exercício em  $\frac{1}{18}$ . Trata-se da chamada *curva de Phillips de longo prazo*.

**Gráfico 24:** relação entre inflação  $p$  e desemprego  $U$  na curva de Phillips de longo prazo.



### Equações diferenciais com termo variável

Seja uma equação diferencial de 2ª ordem cujo termo não é mais uma constante  $b$ , mas uma função de  $t$ ,  $f(t)$ . Evidentemente, nesse caso, a técnica de obtenção da solução particular modifica-se bastante, embora a solução geral da homogênea permaneça a mesma, pois a homogênea associada não se altera. Quando a função  $f(t)$  é de uma classe delimitada de tipos de funções, veremos alguns métodos para se encontrar a solução particular da equação diferencial em questão.

#### *Método de coeficientes indeterminados*

Aplica-se esse método para encontrar a solução particular da equação completa para equações diferenciais de coeficiente constante e termo variável  $f(t)$ . Desde que esse termo e suas sucessivas derivadas contenham, em conjunto, somente um número finito de tipos de expressões.

Vejamos um exemplo: qual a solução particular  $y_p(t)$  da equação diferencial  $y''(t) + 5y'(t) + 3y = 6t^2 - t - 1$ ?

Queremos um valor de  $y$  que satisfaça essa equação para qualquer  $t$ . Note que o termo variável  $f(t)$  contém três tipos de expressões:  $t^2$ ,  $t$  e uma constante. À luz disso, vamos chutar uma solução particular com a mesma estrutura da função  $f(t)$ :  $y_p(t) = B_1t^2 + B_2t + B_3$ . Por conseguinte,  $y_p'(t) = 2B_1t + B_2$  e  $y_p''(t) = 2B_1$ . Substituindo-se a solução tentativa no primeiro membro da equação diferencial: 1º membro =  $2B_1 + 5(2B_1t + B_2) + 3(B_1t^2 + B_2t + B_3) = 3B_1t^2 + (10B_1 + 3B_2)t + (2B_1 + 5B_2 + 3B_3) = 2^\circ$  membro =  $6t^2 - t - 1$ , igualando-se os dois membros da equação, termo a termo, obtém-se o sistema de equações:

$$3B_1 = 6,$$

$$10B_1 + 3B_2 = -1,$$

$$2B_1 + 5B_2 + 3B_3 = -1.$$

Cuja solução é  $B_1 = 2$ ,  $B_2 = -7$ , e  $B_3 = 10$ . Portanto,  $y_p(t) = 2t^2 - 7t + 10$ . Note que esse método de solução da equação diferencial de 2ª ordem com termo variável vale quando a função do termo  $f(t)$  possua todas as suas derivadas perfazendo um número finito de tipos de expressão, com por exemplo, as funções  $bt^2$ ,  $e^{bt}$ ,  $b \operatorname{sen} t$  etc. ( $b$  constante). Polinômios com um número finito de termos sempre satisfaz essa condição. Note o caso de  $f(t) = b \operatorname{sen} t$ . Suas derivadas são  $f'(t) = b \cos t$ ,  $f''(t) = -b \operatorname{sen} t$ ,  $f'''(t) = -b \cos t$ ,  $f^{iv}(t) = b \operatorname{sen} t \dots$ . Ou seja, são dois tipos de expressão, sempre associada a valores particulares de  $B_1$  e  $B_2$  na expressão compósita  $B_1 \operatorname{sen} t + B_2 \cos t$ .

Note ainda que essa técnica não se aplica para a descoberta de uma solução particular da equação diferencial  $y''(t) + ay'(t) + by = t^{-1}$ . Pois, se  $y_p(t) = \ln t$  tem como derivada  $\frac{1}{t} = t^{-1}$ , as próximas ordens de derivada de  $y_p(t)$  são  $y_p''(t) = -\frac{1}{t^2}$ ,  $y_p'''(t) = \frac{1}{t^3} \dots$ , que são diferentes expressões a se sucederem indefinidamente. Se o pré-requisito é cumprido por  $f(t)$ , a solução particular pode ser tentada como uma combinação linear de todos os tipos de expressões contidas em  $y_p(t)$ ,  $y_p'(t)$ ,  $y_p''(t) \dots$  e eventualmente somando-se também uma constante.

Na equação diferencial de 2ª ordem a termo variável,  $y''(t) + a_1y'(t) + a_2y = f(t)$ , quando o coeficiente de  $y$  for nulo ( $a_2 = 0$ ), será necessário introduzir uma modificação na técnica. Por exemplo, em  $y''(t) + 5y'(t) = 6t^2 - t - 1$ , a solução particular tentativa não mais pode ser  $y_p(t) = B_1t^2 + B_2t + B_3$ , pois isso daria  $y_p'(t) = 2B_1t + B_2$  e  $y_p''(t) = 2B_1$ , de modo que não aparece no 1º membro um termo na forma de  $B_1t^2$  para ser igualado ao termo de  $6t^2$ . Uma nova solução experimental recomendada neste caso é  $t(B_1t^2 + B_2t + B_3)$ . Se mesmo assim falhar, tente  $t^2(B_1t^2 + B_2t + B_3)$  e assim por diante (note que esta última solução particular se aplica bem a  $y''(t) = 6t^2 - t - 1$ , com  $a_1, a_2 = 0$ ).

Voltando ao exemplo,  $y''(t) + 5y'(t) + 3y = 6t^2 - t - 1$ , iremos obter agora a solução completa, sabendo que a particular é  $y_p(t) = 2t^2 - 7t + 10$ , e impondo-se as condições iniciais  $y(0) = 10$  e  $y'(0) = -7$  a fim de obter-se uma solução com valores definidos das constantes envolvidas. A equação característica fica  $r^2 + 5r + 3 = 0$ , ou seja,  $r_1, r_2 = \frac{1}{2}(-5 \mp \sqrt{25 - 12}) = \frac{-5 \mp \sqrt{13}}{2}$ . A solução completa é  $y(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t} + 2t^2 - 7t + 10 = A_1e^{\frac{-5+\sqrt{13}}{2}t} + A_2e^{\frac{-5-\sqrt{13}}{2}t} + 2t^2 - 7t + 10$ . Os valores de  $A_1$  e  $A_2$  são determinados pelas condições iniciais. Note que, para  $y(0) = 10$ ,  $y(0) = A_1 + A_2 + 10 = 10$  e portanto  $A_1 + A_2 = 0$  ou  $A_1 = -A_2$ . Usando-se agora a condição  $y'(0) = -7$ ,  $y'(t) = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}A_1e^{\frac{-5+\sqrt{13}}{2}t} + \frac{-5-\sqrt{13}}{2}A_2e^{\frac{-5-\sqrt{13}}{2}t} + 4t - 7 = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}A_1e^{\frac{-5+\sqrt{13}}{2}t} - 5 - \sqrt{13}A_1e^{\frac{-5-\sqrt{13}}{2}t} + 4t - 7$ . Portanto,  $y'(0) = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}A_1 - 5 - \sqrt{13}A_1 - 7 = -7$ ,  $\sqrt{13}A_1 = 0$ , ou seja,  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 0$  e a solução geral definida da equação diferencial completa é  $y(t) = 2t^2 - 7t + 10$ , idêntica à solução particular para essas condições iniciais.

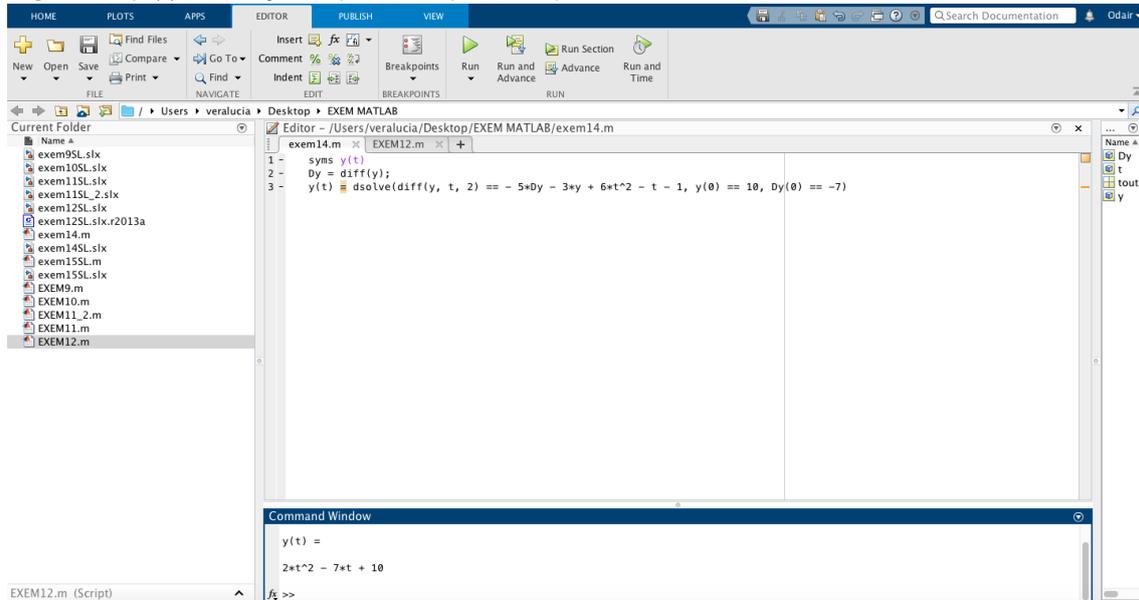
Podemos obter a solução de  $y''(t) + 5y'(t) + 3y = 6t^2 - t - 1$  por Matlab. Para tanto, escreve-se a equação diferencial na forma  $y''(t) = -5y'(t) - 3y + 6t^2 - t - 1$ . Na janela de comando, digita-se a *procedure*:

```
syms y(t)
Dy = diff(y) ;
```

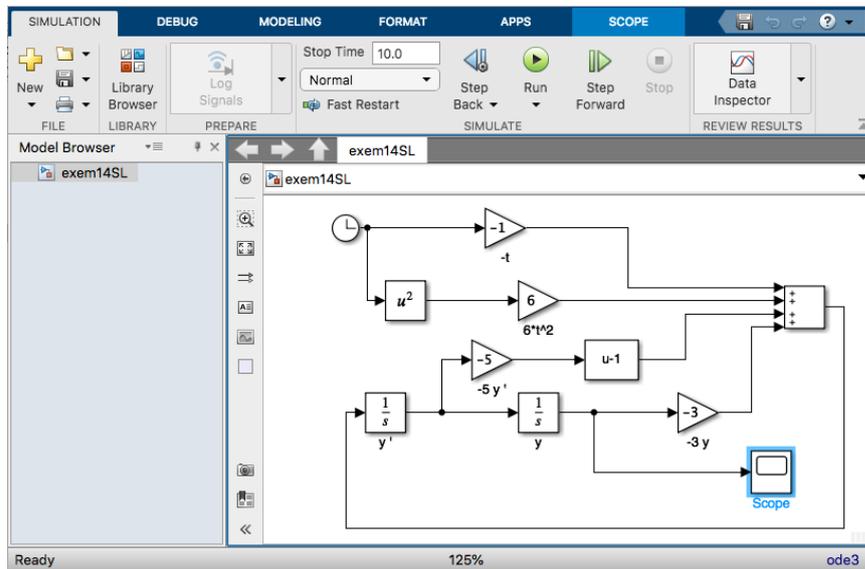
$$y(t) = \text{dsolve}(\text{diff}(y, t, 2) == -5 \cdot Dy - 3 \cdot y + 6 \cdot t^2 - t - 1, y(0) == 10, Dy(0) == -7)$$

Novamente as duas condições iniciais foram informadas na parametrização do *dsolve*: “ $y(0) == 10, Dy(0) == -7$ ”. A Figura 62 mostra a janela do editor do Matlab com o programa acima. A sequência de programação foi salva no arquivo EXEM14m. Ao executá-lo, chega-se ao mesmo resultado. A solução por Simulink encontra-se no arquivo exem14SL. A Figura 63 mostra o diagrama de blocos correspondente a esse exercício.

**Figura 62:**  $y(t)$  na solução de  $y''(t) + 5y'(t) + 3y = 6t^2 - t - 1$ .

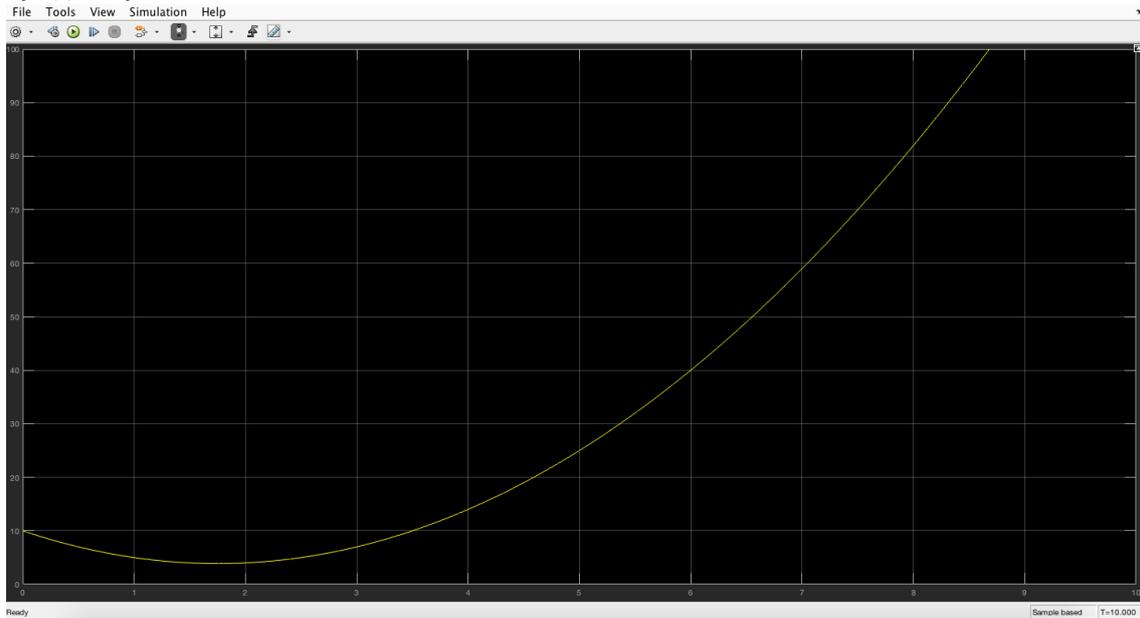


**Figura 63:** diagrama de blocos em Simulink para o exemplo  $y''(t) + 5y'(t) + 3y = 6t^2 - t - 1$ .



A figura 64 mostra a trajetória de  $y(t)$ , gerada pelo bloco *Scope*, após executar-se o Simulink informando-o das mesmas condições iniciais do exemplo nos parâmetros dos respectivos blocos *Integrator*. Note que a trajetória corresponde, de fato, à parábola com boca para cima descrita por  $y(t) = 2t^2 - 7t + 10$ .

**Figura 64:** trajetória de  $y(t)$  obtida acionando diagrama de blocos em Simulink para o exemplo  $y''(t) + 5y'(t) + 3y = 6t^2 - t - 1$ .



### Exercício 12

Dada a equação diferencial de 2ª ordem com coeficientes constantes mas termo variável  $y''(t) + 3y'(t) - 4y = 2e^{-4t}$ . Determine a solução particular  $y_p(t)$  e a solução completa e definida para  $y(0) = 2$  e  $\frac{dy}{dt}(0) = -3,4$ .

Como o termo no 2º membro é uma função exponencial de base no algarismo natural, todas as derivadas pertencem ao mesmo tipo de exponencial “natural” com expoente  $-4t$  (pois, as derivadas, em ordem crescente, são  $-8e^{-4t}$ ,  $32e^{-4t}$ ,  $-128e^{-4t}$  e assim por diante). Iremos, portanto, tentar solução particular na forma de  $y_p(t) = Be^{-4t}$ . Sendo assim,  $y_p'(t) = -4Be^{-4t}$  e  $y_p''(t) = 16Be^{-4t}$ . Substituindo  $y_p(t)$  e suas derivadas na equação diferencial, obtemos, no 1º membro,  $(16 - 12 - 4)Be^{-4t}$ , expressão que evidentemente se anula. Trata-se de um resultado “inglório”, pois não se tem nada para igualar ao segundo membro  $2e^{-4t}$  a fim de obter-se o valor da constante  $B$ .

Note que, neste exercício, a equação característica é  $r^2 + 3r - 4 = 0$ , em que  $r_1, r_2 = \frac{1}{2}[-3 \pm \sqrt{9 + 16}] = \frac{1}{2}[-3 \pm 5]$ . Portanto,  $r_1 = 1$  e  $r_2 = -4$ . Sempre que uma das raízes características coincida com o expoente da função de base natural, no caso a raiz  $r_2 = -4$  coincide com a constante no expoente de  $e^{-4t}$ , ocorre esse tipo de problema na solução tentativa padrão. Neste caso, parte-se para uma tentativa do tipo  $y_p(t) = Bte^{-4t}$ , onde se incorpora o fator  $t$ . Neste caso,  $y_p'(t) = (1 - 4t)Be^{-4t}$ ,  $y_p''(t) = -4Be^{-4t} + (-4)(1 - 4t)Be^{-4t} = (-8 + 16t)Be^{-4t}$ . Substituindo-se na equação diferencial de 2ª ordem do exercício,  $(-8 + 16t)Be^{-4t} + 3(1 - 4t)Be^{-4t} - 4Bte^{-4t} = (-8 + 16t + 3 - 12t - 4t)Be^{-4t} = -5Be^{-4t}$ . Igualando-se ao 2º membro, temos  $-5Be^{-4t} = 2e^{-4t}$ ,  $B = -\frac{2}{5}$ . Portanto, a solução particular é  $y_p(t) = -\frac{2}{5}te^{-4t}$ . E a solução completa fica sendo  $y(t) = A_1e^t + A_2e^{-4t} - \frac{2}{5}te^{-4t}$ .

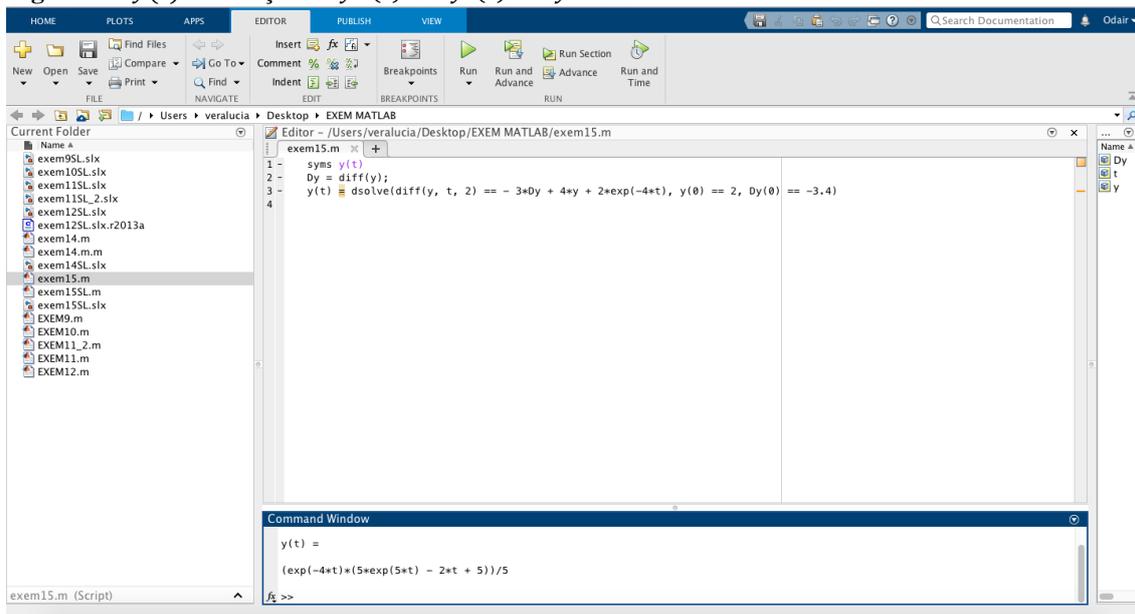
Vamos agora determinar o valor das constantes  $A_1$  e  $A_2$  empregando as condições iniciais  $y(0) = 2$  e  $\frac{dy}{dt}(0) = -3,4$ . Pois bem,  $y(0) = A_1 + A_2 = 2$ ,  $y'(t) = A_1 e^t - 4A_2 e^{-4t} - \frac{2}{5}e^{-4t} + \frac{8}{5}te^{-4t}$ , e portanto,  $y'(0) = A_1 - 4A_2 - \frac{2}{5} = 2 - 5A_2 - \frac{2}{5} = -3,4$ . Ou seja,  $-5A_2 = -3,4 - 2 + \frac{2}{5} = -5,4 + 0,4 = -5$ . Em suma,  $A_2 = 1$  e  $A_1 = 1$ . A solução geral definida fica sendo  $y(t) = e^t + e^{-4t} - \frac{2}{5}te^{-4t}$ .

Agora, iremos obter a solução de  $y''(t) + 3y'(t) - 4y = 2e^{-4t}$  usando o programa Matlab. Para tanto, escreve-se a equação diferencial na forma  $y''(t) = -3y'(t) + 4y + 2e^{-4t}$ . Na janela de comando, digita-se a *procedure*:

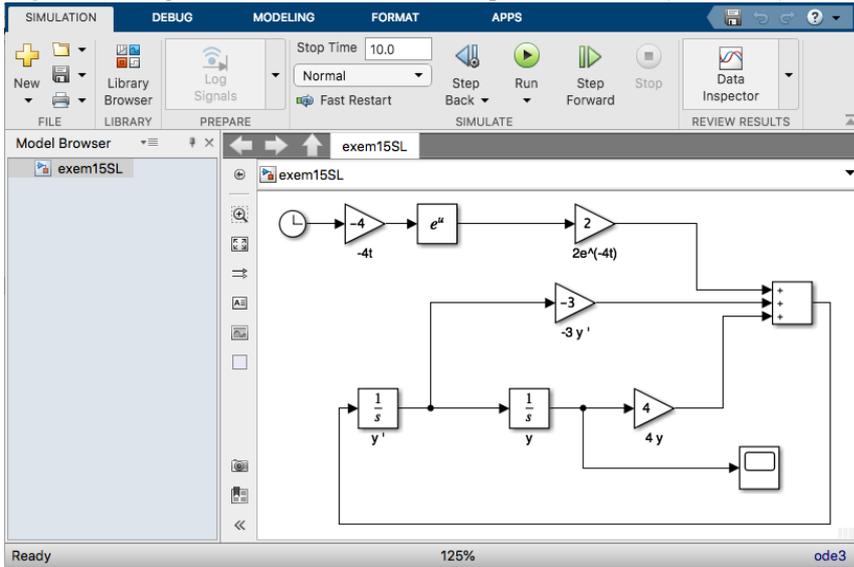
```
syms y(t)
Dy = diff(y) ;
y(t) = dsolve(diff(y, t, 2) == - 3*Dy + 4*y + 2*exp(-4*t), y(0) == 2, Dy(0) == -3.4)
```

As duas condições iniciais foram informadas na parametrização do *dsolve*: “ $y(0) == 2$ ,  $Dy(0) == -3,4$ ”. A Figura 65 mostra a janela do editor do Matlab com o programa acima. A sequência de programação foi salva no arquivo EXEM15m. Na execução do arquivo *m*, chega-se, manipulando-se a expressão fornecida na saída do programa, ao mesmo resultado  $y(t) = e^t + e^{-4t} - \frac{2}{5}te^{-4t}$ . A solução por Simulink está gravada em *exem15SL*. A Figura 66 mostra o diagrama de blocos correspondente a esse exercício.

**Figura 65:**  $y(t)$  na solução de  $y''(t) + 3y'(t) - 4y = 2e^{-4t}$ .

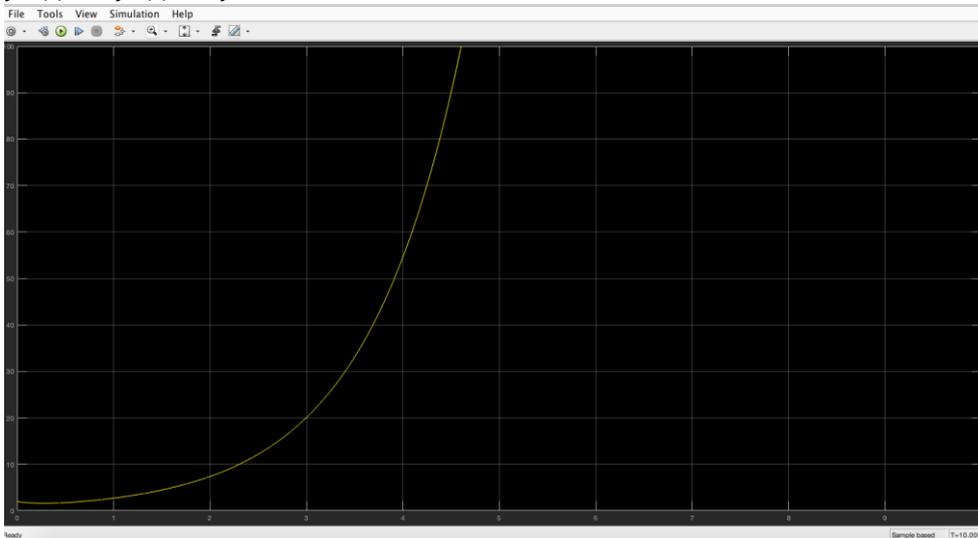


**Figura 66:** diagrama de blocos em Simulink para o exercício  $y''(t) + 3y'(t) - 4y = 2e^{-4t}$ .



A figura 67 mostra a trajetória de  $y(t)$ , gerada pelo bloco *Scope*, após executar-se o Simulink informando-o das mesmas condições iniciais do exemplo nos parâmetros dos respectivos blocos *Integrator*. Note que a trajetória, de fato, é explosiva dado o primeiro termo da solução com expoente positivo.

**Figura 67:** trajetória de  $y(t)$  acionando-se o *Scope*, no diagrama de blocos em Simulink, para o exercício  $y''(t) + 3y'(t) - 4y = 2e^{-4t}$ .



## Equações diferenciais lineares de ordem mais alta

Vejam os casos em que a equação diferencial seja de ordem enésima, com  $n > 2$ . Nesse contexto, votemos ao caso em que termo e coeficientes são constantes. Genericamente, escreve-se então:  $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y = b$ . A solução, como no caso de 2ª ordem, é a soma da solução geral da homogênea associada com a solução particular da equação completa. Para a busca da particular  $y_p(t)$ , começa-se com a tentativa mais simples  $y_p(t) = k$ ,  $k$  constante, que resulta em  $a_n k = b$ ,  $y_p(t) = k = \frac{b}{a_n}$ ,  $a_n \neq 0$ . Se  $a_n = 0$ ,  $y_p(t) = kt$  é tentado. Neste caso,  $y_p'(t) = k$  e  $y_p''(t) = y_p'''(t) = \dots = 0$ . Fica  $a_{n-1} k = b$ ,  $k = \frac{b}{a_{n-1}}$ , e a solução particular  $y_p(t) = \frac{b}{a_{n-1}} t$ , com  $a_n = 0$  e  $a_{n-1} \neq 0$ . Se  $a_n = a_{n-1} = 0$ , deve ser tentado  $y_p(t) = kt^2$  e assim por diante.

Vamos agora em busca da solução da função complementar ou equação homogênea. Note que, como temos derivadas de ordem mais elevadas, eleva-se a ordem da homogênea associada e o grau da correspondente equação característica. Vejamos como isso ocorre. Dada a homogênea  $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y = 0$ , suponha a solução tentativa  $y_c(t) = Ae^{rt}$ . Portanto,  $y_c'(t) = rAe^{rt}$ ,  $y_c''(t) = r^2 Ae^{rt}$ , ...,  $y_c^{(n)}(t) = r^n Ae^{rt}$ . Substituindo-se na equação homogênea,  $Ae^{rt}(r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n) = 0$ . E a solução dessa equação depende da solução de uma equação característica que é um polinômio de grau  $n$ ,  $r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$ .

Note que agora a equação característica possui não apenas duas raízes, mas  $n$  raízes que devem ser, cada qual, incluídas na solução geral da homogênea:

$$y_c(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \dots + A_n e^{r_n t} = \sum_{i=1}^n A_i e^{r_i t} \quad (26)$$

Se houver  $n$  raízes que não sejam raízes reais e distintas, aplica-se um método específico. No caso em que apareça como solução da equação característica, por exemplo, três raízes reais repetidas,  $r_1 = r_2 = r_3 = r$ , os três primeiros termos da solução da homogênea apareceriam como  $A_1 e^{rt} + A_2 t e^{rt} + A_3 t^2 e^{rt}$ , empregando-se a mesma técnica já empregada nas raízes repetidas da equação de 2ª ordem. Note, porém, que agora aparecem potências de  $t$  superior a um. Se  $r_4 = r$ , segue-se um 4º termo  $A_4 t^3 e^{rt}$  e assim por diante.

Suponha agora que apareçam como solução da característica, dentre outras, duas raízes complexas. São os complexos conjugados que se formam aos pares, na forma  $r_5, r_6 = h \pm vi$ . Neste caso, o quinto e sexto termo da solução da homogênea ficam  $e^{ht}(A_5 \cos vt + A_6 \sin vt)$ . Pode ser que encontremos dois pares distintos de raízes complexas, o que resultaria em duas expressões trigonométricas com diferentes  $h$ 's e  $v$ 's e diferentes pares de constantes arbitrárias. Com efeito, as raízes complexas sempre surgem em pares e, no caso, podem aparecer dois pares distintos associados a duas expressões trigonométricas.

Caso apareçam dois pares repetidos de raízes complexas, pode-se usar  $e^{ht}$  de termo multiplicativo em um par e  $t e^{ht}$  como termo multiplicativo em outro par, também com um par diferente de constantes arbitrárias.

A solução geral, portanto, é da forma  $y(t) = y_c(t) + y_p(t)$ , que envolve agora  $n$  constantes arbitrárias e  $n$  condições iniciais  $y(0), y'(0), \dots, y^{(n)}(0)$ .

### Exercício 13

Dada a equação diferencial de 4ª ordem com coeficientes e termo constantes  $y^{(4)}(t) + 6y'''(t) + 14y''(t) + 16y'(t) + 8y = 24$ , determine a solução particular  $y_p(t)$  e a solução completa e definida para  $y(0) = 2, y'(0) = -2, y''(0) = 2, y'''(0) = -2$ .

A solução particular, como vimos, é a constante obtida pela divisão do termo pelo último coeficiente  $y_p(t) = \frac{b}{a_n} = \frac{24}{8} = 3$ . Já a solução da homogênea depende das raízes características da equação  $r^4 + 6r^3 + 14r^2 + 16r + 8 = 0$ . Tal equação pode ser fatorada:  $r^4 + 6r^3 + 14r^2 + 16r + 8 = r^4 + 2r^3 + 4r^3 + 8r^2 + 6r^2 + 12r + 4r + 8 = (r + 2)(r^3 + 4r^2 + 6r + 4) = (r + 2)(r^3 + 2r^2 + 2r^2 + 4r + 2r + 4) = (r + 2)(r + 2)(r + 2)(r^2 + 2r + 2)$ . Portanto, das quatro raízes, duas são raízes reais repetidas  $r_1 = r_2 = -2$  e duas são as raízes da equação de 2º grau  $r^2 + 2r + 2 = 0$ , que são  $r_3, r_4 = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$ . Portanto, são raízes complexas conjugadas com  $h = -1$  e  $v = 1$ . Portanto,  $y_c(t) = A_1e^{-2t} + A_2te^{-2t} + e^{-t}(A_3 \cos t + A_4 \sin t)$  e a solução completa fica  $y(t) = y_c(t) + y_p(t) = A_1e^{-2t} + A_2te^{-2t} + e^{-t}(A_3 \cos t + A_4 \sin t) + 3$ .

Falta determinar os valores definidos das constantes  $A_1, A_2, A_3, A_4$  com base nas quatro condições iniciais. Com um pouco de trabalho obtém-se  $A_1 = -7, A_2 = -5, A_3 = 6$  e  $A_4 = -5$ . E a solução definida fica sendo  $y(t) = -7e^{-2t} - 5te^{-2t} + e^{-t}(6 \cos t - 5 \sin t) + 3$ . Note que as raízes características reais e a parte real das raízes imaginárias são negativas, o que garante a trajetória temporal convergente. Portanto, o equilíbrio intertemporal é dinamicamente estável.

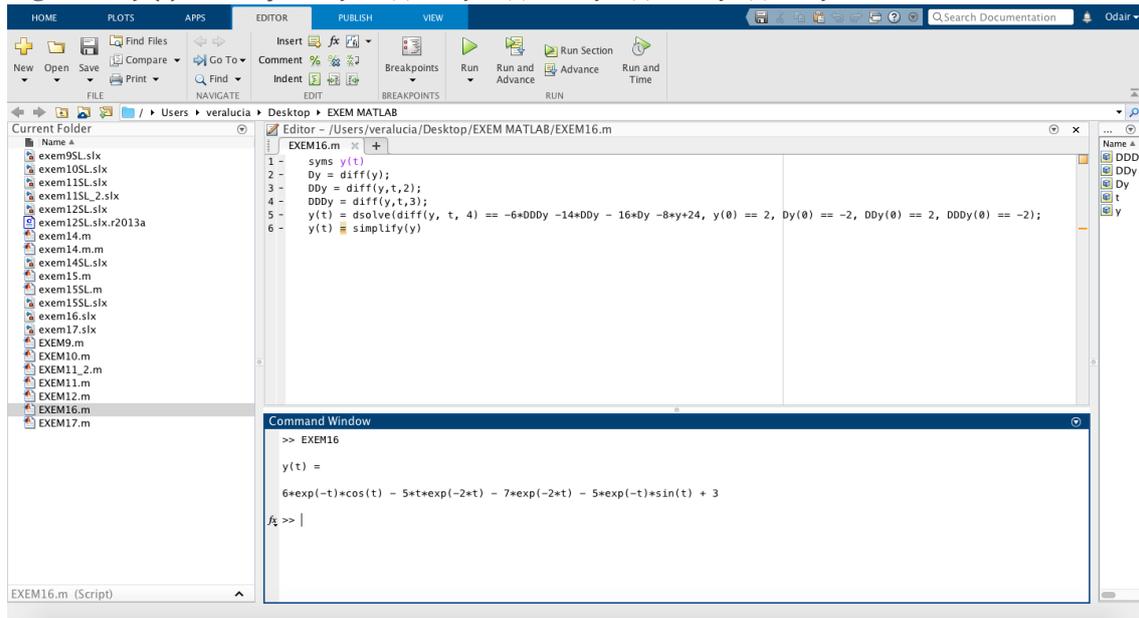
Vejam os novamente soluções por Matlab. Escreve-se a equação diferencial na forma  $y^{(4)}(t) = 24 - 6y'''(t) - 14y''(t) - 16y'(t) - 8y$ . Na janela de comando, digita-se a *procedure*:

```
syms y(t)
Dy = diff(y) ;
Ddy = diff(y,t,2) ;
DDdy = diff(y,t,3) ;
y(t) = dsolve(diff(y, t, 4) == -6*DDdy -14*Ddy - 16*Dy -8*y+24, y(0) == 2, Dy(0) == -2,
Ddy(0) == 2, DDdy(0) == -2) ;
y(t) = simplify(y)
```

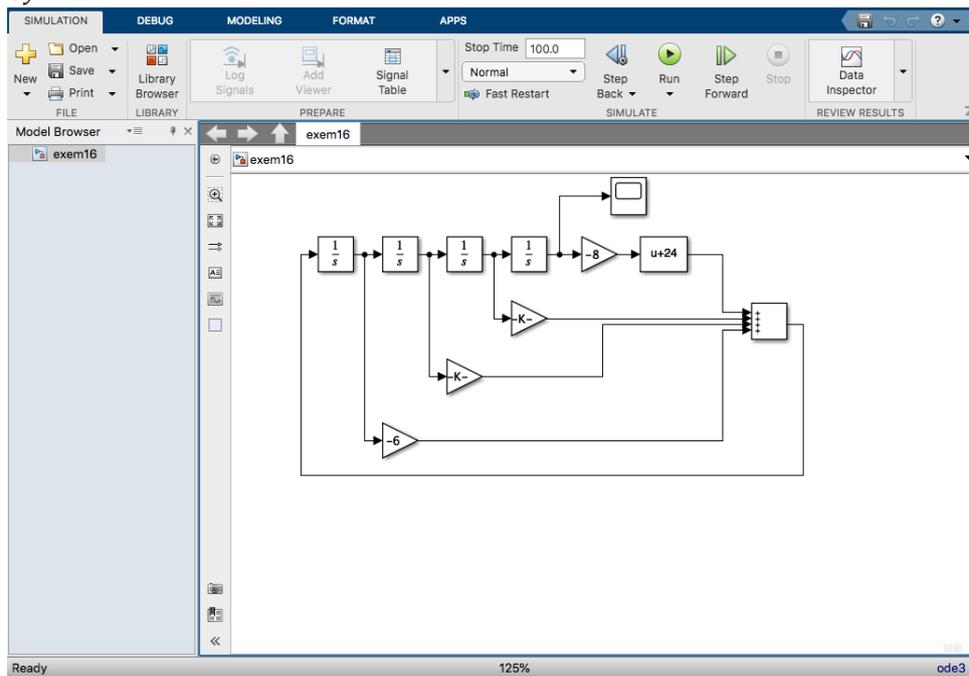
Note que quatro condições iniciais foram informadas na parametrização do *dsolve*: “ $y(0) == 2, Dy(0) == -2, Ddy(0) == 2, DDdy(0) == -2$ ”. O Matlab fornece a solução idêntica à que obtivemos teoricamente. Essa sequência de programação foi salva no arquivo EXEM16.m.

A Figura 68 mostra a janela de comando do Matlab com solução idêntica à que já obtivemos. O diagrama de blocos em Simulink foi gravado em exem16SL. A Figura 69 mostra esse diagrama.

**Figura 68:**  $y(t)$  na solução de  $y^{(4)}(t) + 6y'''(t) + 14y''(t) + 16y'(t) + 8y = 24$ .

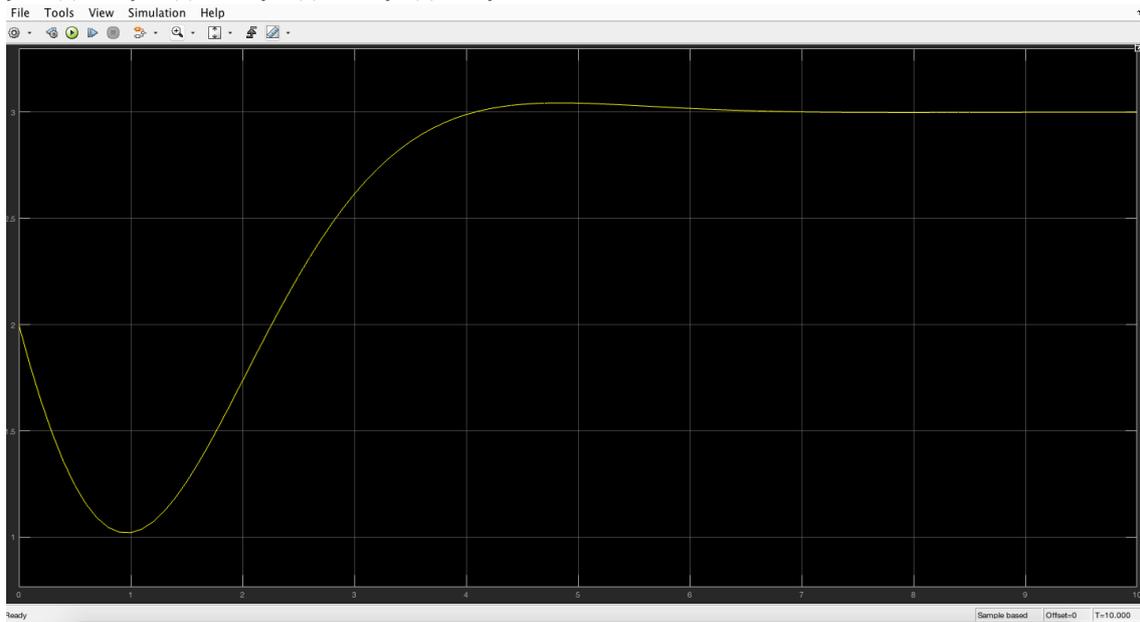


**Figura 69:** diagrama de blocos em Simulink para o exercício  $y^{(4)}(t) + 6y'''(t) + 14y''(t) + 16y'(t) + 8y = 24$ .



A Figura 70 mostra a trajetória de  $y(t)$ , gerada pelo bloco *Scope*, após executar-se o Simulink informando-o das quatro condições iniciais do exercício nos parâmetros dos respectivos blocos *Integrator*. Note que se trata de uma trajetória oscilatória e convergente, conforme antecipamos da análise teórica.

**Figura 70:** trajetória de  $y(t)$  obtida acionando-se o diagrama de blocos em Simulink para o exercício  $y^{(4)}(t) + 6y'''(t) + 14y''(t) + 16y'(t) + 8y = 24$ .



## Equações diferenciais de 2ª ordem com coeficiente e termo variáveis

Soluções para equação de 2ª ordem, ou de ordem mais elevada, com termo e coeficientes variáveis são difíceis de se obter, e somente se conhecem soluções algébricas explícitas em um número restrito de equações desse tipo. Quando além do termo variável  $f(t)$  se analisam equações desse tipo com coeficiente variável  $g(t)$ , a solução muitas vezes envolve uma matemática muito avançada para um curso de graduação.

Em muitos casos, no entanto, o programa MATLAB consegue chegar a uma solução algébrica, embora na maioria das vezes a expressão algébrica seja longa e de difícil compreensão para um não especialista. A título de ilustração, vejamos uma equação diferencial de 2ª ordem aparentemente simples, mas de solução bastante trabalhosa e que requer conhecimentos bem mais avançados de cálculo.

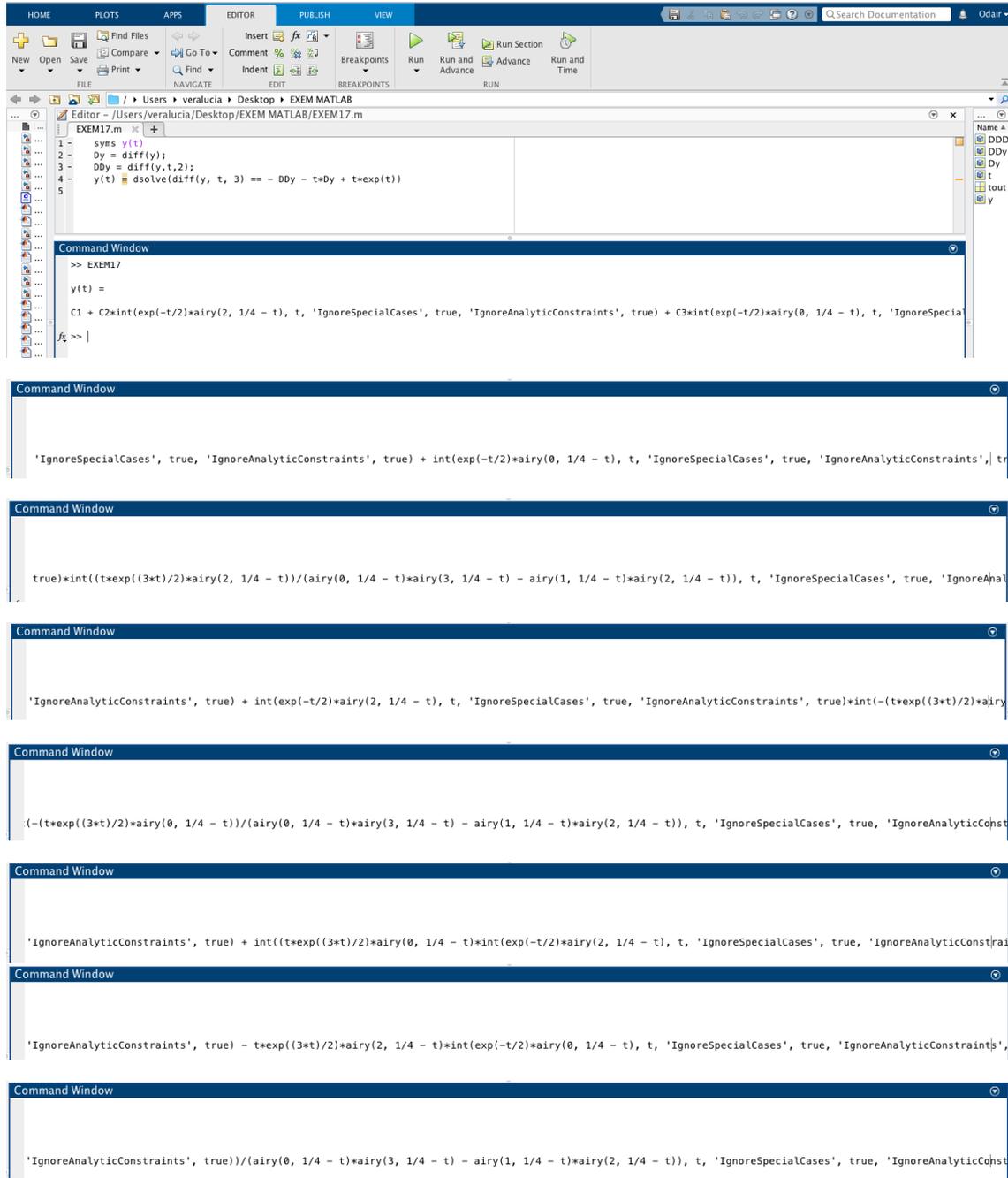
Seja a equação  $y'''(t) + y''(t) + ty'(t) = te^t$ . Trata-se de uma equação diferencial de 3ª ordem com termo variável  $te^t$ , e ainda com um coeficiente variável  $t$  que acompanha  $y'(t)$ . Essa equação parece simples de resolver, porém, de fato, a técnica de obtenção da solução é bastante sofisticada, muito além de nossos propósitos aqui.

Vejamos a solução por Matlab para que se perceba a sofisticação envolvida nessa solução. A Figura 71 mostra a janela de comando do Matlab onde se escreve as seguintes linhas de programação:

```
syms y(t)
Dy = diff(y) ;
Ddy = diff(y,t,2) ;
y(t) = dsolve(diff(y, t, 3) == - Ddy - t*Dy + t*exp(t))
```

Note que escrevemos a mesma equação do problema na forma  $y'''(t) = -y''(t) - ty'(t) + te^t$ . Ao executar a procedure gravada no arquivo *m* EXEM17.m, obtém-se uma solução praticamente ininteligível a um estudante de graduação conforme a saída mostrada na janela de comando.

**Figura 71:**  $y(t)$  na solução de  $y'''(t) + y''(t) + ty'(t) = te^t$ .



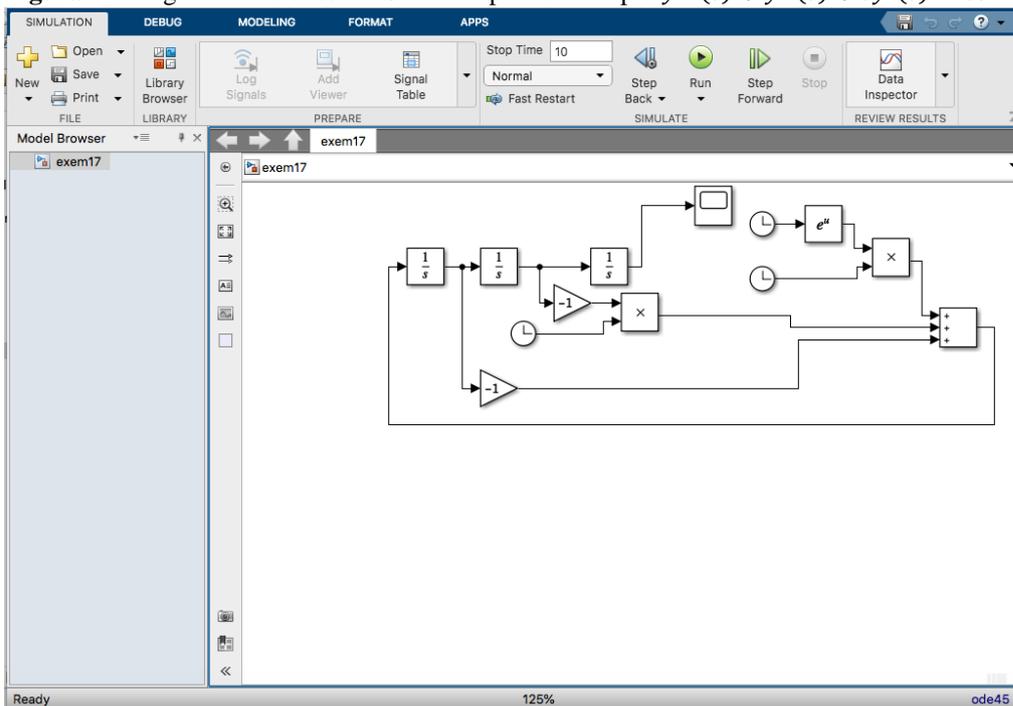
Note que, na figura acima, a solução apresenta várias linhas que correspondem à rolagem horizontal da solução. Fizemos vários *prints* no intuito de exibir boa parte dela. Do que se trata afinal? Como interpretar essa função? O que significa nomes como “Airy”, que aparece logo no segundo termo da solução? Airy refere-se ao matemático e astrônomo George Airy que estudou soluções de equações diferenciais bem complicadas. Airy percebeu que soluções linearmente independentes (LI) dessas equações diferenciais

seguiam um padrão e propôs então uma família de funções que se tornaram conhecidas como funções Airy.

Assim é que  $airy(x) = Ai(x)$  é como se denomina as soluções LI de  $\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0$ . O valor de  $x$  determina o tipo de função Airy. Assim é que  $airy(0)$  é  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ,  $airy(1)$  é  $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$  e assim por diante. Vamos escrever de modo mais claro parte da solução apresentada da Figura 71. O programa está informando que  $y(t) = A_1 + \int e^{-\frac{t}{2}}airy(2, \dots) \dots dt + \dots$ . Note que *int* indica integral; dos argumentos da função Airy, “2” trata-se do tipo de função Airy, e assim por diante.

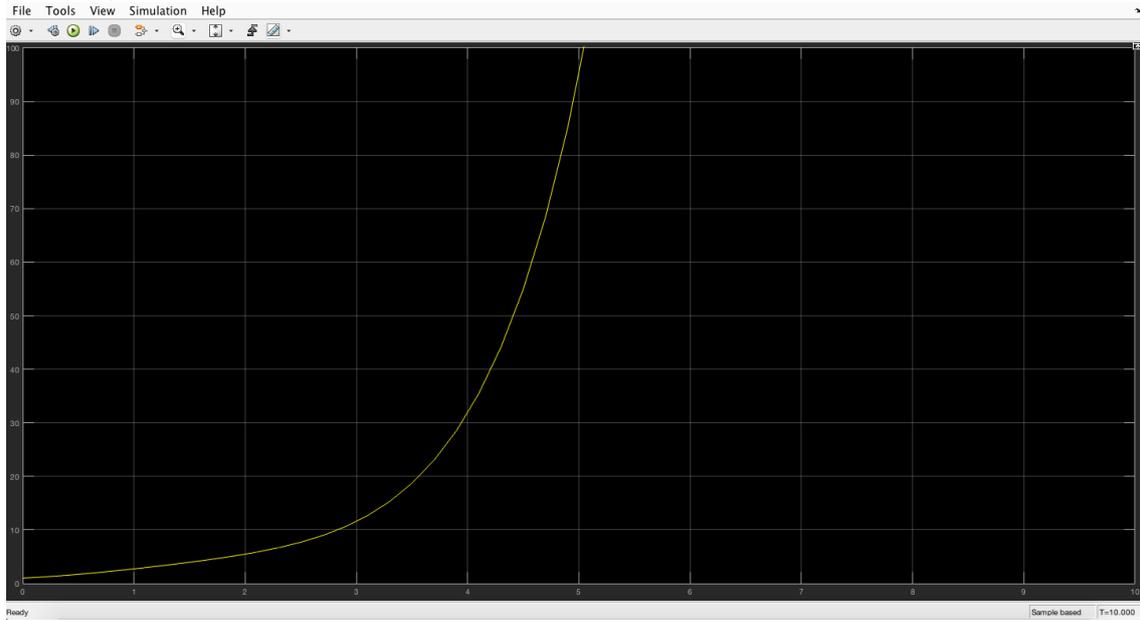
A solução analítica apresentada pelo programa é difícil de ser interpretada, mais difícil ainda, bem mais, é obtê-la teoricamente sem o auxílio do programa. Apesar da complexidade da solução algébrica, em muitos casos o gráfico de  $y(t)$  é relativamente simples, e em muitos problemas de análise econômica tudo o que necessitamos é de obter-se o gráfico a fim de fazer um estudo qualitativo da solução. A fim de acompanhar a trajetória de  $y(t)$ , iremos, portanto, usar o Simulink fornecendo-lhe um diagrama adequado representativo do problema. A Figura 72 mostra o correspondente diagrama de blocos no editor do Simulink.

**Figura 72:** diagrama de blocos em Simulink para o exemplo  $y'''(t) + y''(t) + ty'(t) = te^t$ .



Vamos agora executar o diagrama no Simulink a fim de obter-se pelo bloco *Scope* o gráfico da trajetória de  $y(t)$ . A Figura 73 mostra essa trajetória. Então nota-se que, embora a solução analítica seja bastante sofisticada e de difícil compreensão, o gráfico de  $y(t)$  é bem simples, ao menos para  $0 \leq t \leq 10$ . Trata-se simplesmente de uma trajetória monotônica crescente e explosiva, conforme percebe-se da observação da figura.

**Figura 73:** trajetória de  $y(t)$  obtida acionando-se o diagrama de blocos em Simulink para o exemplo  $y'''(t) + y''(t) + ty'(t) = te^t$ .



## Convergência e teorema de Routh

Em muitas situações em sua pesquisa científica os economistas só precisam saber se o processo representado por um modelo de equação diferencial converge ou diverge de um equilíbrio dinâmico. Não é preciso, nesses casos, conhecer a solução quantitativa precisa que descreva a trajetória da variável dependente, apenas é necessário averiguar a convergência ou divergência da trajetória temporal sem que se achem as raízes características da equação homogênea associada. Com efeito, informação sobre o padrão da trajetória dessa variável pode ser extraída da análise direta dos coeficientes da equação diferencial do problema. Dados esses coeficientes e a estrutura da equação, seja a equação polinomial de enésimo grau associada à equação diferencial de enésima ordem do problema:  $a_0 r^n + a_1 r^{n+1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$ . Um importante teorema, que foi desenvolvido e demonstrado pelo matemático Edward Routh<sup>17</sup> e que aparece no famoso livro de Paul Samuelson, *Fundamentos da Análise Econômica*, garante sob que condições a trajetória temporal de  $y(t)$  converge ao equilíbrio dinâmico independentemente das condições iniciais do problema.

O *teorema de Routh* assegura que, dado o polinômio de enésimo grau, as partes reais de todas as raízes são negativas, e, portanto, viceja a convergência, se os primeiros determinantes de uma sequência específica de matrizes são todos positivos. As matrizes, e, portanto, os determinantes, são as seguintes:

---

<sup>17</sup> Edward John Routh (1831-1907) foi um matemático inglês. Ele trabalhou na sistematização na teoria matemática da mecânica e criou várias ideias importantes para o desenvolvimento da moderna teoria de sistemas de controle.

$$|a_1|, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} \dots > 0 \quad (27)$$

Note a regra de formação dessas matrizes: na diagonal principal, começando com  $a_1$ , escreve-se a sequência de coeficientes nas entradas sucessivas. Em cada coluna, olha-se a diagonal principal e caminha-se na ordem crescente dos coeficientes para cima, coeficientes sucessivamente menores abaixo. Entradas abaixo de  $a_0$  recebem valores 0. Seja a ordem do determinante igual a  $n$ . Routh em seu teorema, na construção dessas matrizes, impõe ainda a seguinte condição: seja uma entrada  $a_m$  qualquer, se  $m > n$ ,  $a_m = 0$ . Por exemplo, se for o 3º determinante  $a_4 = a_5 = 0$ , e se for o 4º determinante  $a_5 = a_6 = a_7 = 0$ , de modo que a sequência de determinantes fica igual à equação (28):

$$|a_1|, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} \dots > 0 \quad (28)$$

O número de determinantes depende da ordem da equação, se for uma equação de 3ª ordem, por exemplo avança-se até o terceiro determinante. O teorema de Routh diz respeito ao sinal das raízes do polinômio de grau  $n$ , mas sabemos que isso também diz respeito à convergência de uma equação diferencial de ordem  $n$ . De fato, a equação característica tradicional  $r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$  é a equação polinomial do teorema com  $a_0 = 1$ . Então basta examinar o sinal dos próximos  $n - 1$  determinantes. Se houve a observância do teorema de Routh ocorrerá a convergência.

#### Exercício 14

Dada a equação diferencial de 4ª ordem com coeficientes e termo constantes  $y^{(4)}(t) + 6y'''(t) + 14y''(t) + 16y'(t) + 8y = 24$ , veja se existe convergência sem resolvê-la, como no exercício anterior, apenas aplicando o teorema de Routh.

Neste caso,  $n = 4$  e  $a_0 = 1, a_1 = 6, a_2 = 14, a_3 = 16$  e  $a_4 = 8$ . impõe-se a condição  $a_5 = a_6 = a_7 = 0$ . Com esses valores e sabendo que se trata de uma equação de 4ª ordem,

monta-se a sequência de determinantes  $|6|, \begin{vmatrix} 6 & 16 \\ 1 & 14 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 16 & 0 \\ 1 & 14 & 8 \\ 0 & 1 & 16 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 16 & 0 & 0 \\ 1 & 14 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & 14 & 8 \end{vmatrix} =$

6; 68; 800; 6400. Portanto, todos os determinantes do caso são positivos e a trajetória temporal é convergente, conforme já sabíamos do exercício 13.

Os determinantes de matrizes podem ser calculados manualmente, o que muitas vezes se torna bastante trabalhoso, ou então obtidos utilizando-se o programa Matlab. Por uma sequência de comandos muito simples, que se deve escrever na janela de comando, o programa calcula quase instantaneamente os determinantes de matrizes informadas e fornece, no *prompt* da janela, seus valores.

A Figura (74) mostra a tela do Matlab com as entradas, informadas pelo usuário, das matrizes do exercício 14. Conforme a seguinte sequência de programação:

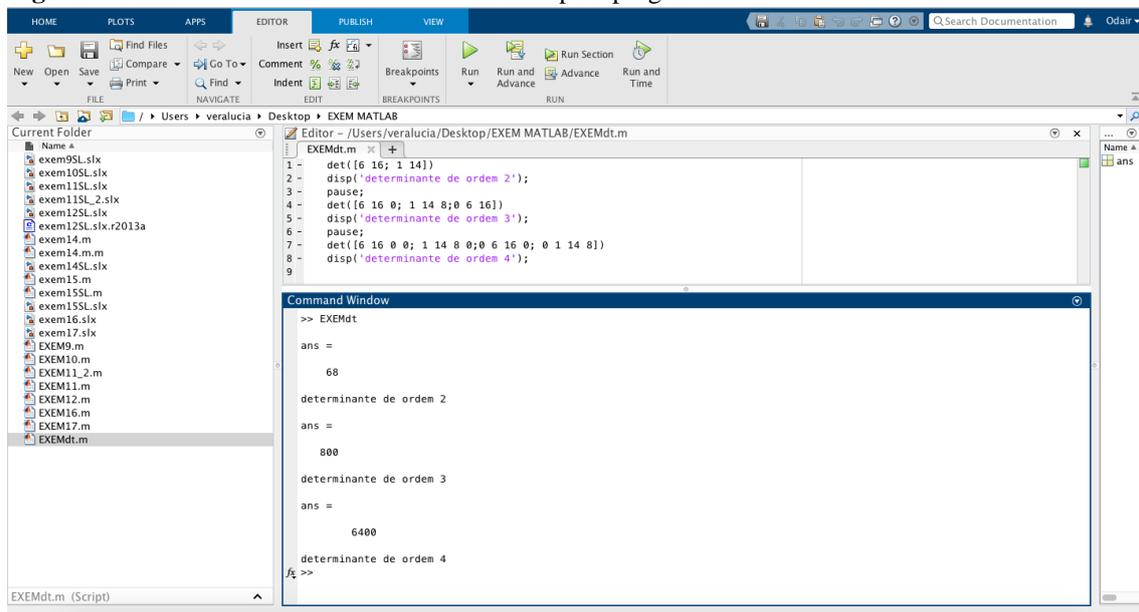
```

det([6 16; 1 14])
disp('determinante de ordem 2');
pause;
det([6 16 0; 1 14 8; 0 6 16])
disp('determinante de ordem 3');
pause;
det([6 16 0 0; 1 14 8 0; 0 6 16 0; 0 1 14 8])
disp('determinante de ordem 4');

```

Tal programação foi salva no arquivo *m* EXEMdt.m, que pode ser executado, depois, ao se escrever, na janela de comando, o nome do arquivo (sem o sufixo *m*). Conforme se vê na figura, o programa informa os valores 68, 800 e 6400 dos determinantes das respectivas matrizes de ordem 2, 3 e 4.

**Figura 74:** determinantes de 3 matrizes calculados pelo programa Matlab.



## Equações a diferenças de 1ª ordem

No caso de equações diferenciais, tínhamos funções diferenciais  $y(t)$ ,  $y'(t)$ ,  $y''(t)$ , ..., nas quais  $t$  era uma variável contínua. Suponha agora que  $t$  seja variável discreta, isto é, que assuma apenas valores inteiros:  $t = 1, t = 2, \dots$ . Então a análise passa a ser em termo das *diferenças* de  $y(t)$  (no caso contínuo, eram as diferenciais de  $y$ ). Temos assim equações a diferenças. Agora a variável  $t$  serve para demarcar períodos,  $t$  períodos, e não se refere mais a instantes. A análise, portanto, é por período.

### *Tempo discreto, diferenças e equações a diferenças*

Com a introdução de variáveis discretas, temos mudanças na formulação do problema, onde escrevíamos  $\frac{dy}{dt}$  devemos escrever  $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ , em que  $\Delta$  se refere a variações discretas, em intervalos finitos e não infinitesimais. Em períodos consecutivos convencionamos  $\Delta t = 1$ . Em vez de trabalhar com derivada  $\frac{dy}{dt}$ , olha-se agora as razões de diferenças  $\frac{\Delta y}{\Delta t}$  ou simplesmente a primeira diferença de  $y$ ,  $\Delta y$ . Em geral, o delta se aplica especificando-se dois períodos adjacentes ou consecutivos.  $\Delta y_t \equiv y_{t+1} - y_t$ , ou seja, dois períodos consecutivos estão sendo considerados. Escreve-se, por exemplo,  $\Delta y_t = 2$  ou  $\Delta y_t = -0,1y_t$ .

Nas equações a diferenças, entretanto, preferimos trabalhar apenas com sub-índices sem usar o  $\Delta$ . Note que em vez de escrever  $\Delta y_t = 2$ , podemos anotar  $y_{t+1} - y_t = 2$ , ou  $y_t - y_{t-1} = 2$ . Sem usar o sub-índice, pode-se escrever  $y(t+1) = y(t) + 2$ , mas preferimos a notação com índices, por exemplo,  $y_{t+1} - 0,9y_t = 0$ ,  $y_{t+1} = 0,9y_t$ .

As equações a diferenças podem ser lineares, não-lineares, homogêneas, não-homogêneas, de 1ª ordem, 2ª ordem ou ordem superior. A equação  $y_{t+1} - y_t = 2$ , já empregada, é linear, pois aparece apenas  $y_{t+1}^1, y_t^1$  e não existe termos cruzados  $y_{t+1}y_t$ . É não-homogênea, porque  $2 \neq 0$ , e é de 1ª ordem pois aparece apenas, no máximo, a primeira defasagem  $y_{t+1}$  (se fosse de 2ª ordem apareceria  $y_{t+2}$ , e assim por diante). E finalmente trata-se de uma equação com coeficiente e termo constante.

### *Método de solução*

Queremos determinar a trajetória temporal  $y_t(t)$  no caso em que  $t$  é discreto, que seja consistente com a equação a diferenças e com suas condições iniciais. A solução não deve conter  $\Delta y_t, y_{t+1}$  etc. Equações diferenciais são resolvidas por processos de integração, já as equações a diferenças empregam o método iterativo na sua solução.

Seja uma equação a diferença, por exemplo,  $y_{t+1} = y_t + 2$ . Resolvemo-la, até chegar a  $y(t)$ , pela aplicação repetitiva do padrão num processo conhecido como *iteração*. Com base na iteração, chega-se a determinar a trajetória temporal. No exemplo, se  $y_0 = 15$ ,  $y_1 = y_0 + 2$ ,  $y_2 = y_1 + 2 = (y_0 + 2) + 2 = y_0 + 2(2)$ ,  $y_3 = y_2 + 2 = [y_0 + 2(2)] + 2 = y_0 + 3(2)$ , ...,  $y_t = y_0 + t(2) = 15 + 2t$ , que é a solução!

Outro exemplo,  $y_{t+1} - 0,9y_t = 0$ , dado  $y_0$ .  $y_1 = 0,9y_0$ ,  $y_2 = 0,9y_1 = 0,9(0,9y_0) = (0,9)^2y_0$ ,  $y_3 = 0,9y_2 = 0,9(0,9)^2y_0 = (0,9)^3y_0$ , ... ,  $y_t = (0,9)^t y_0$ , que é a nova solução. Um exemplo genérico:  $my_{t+1} - ny_t = 0$ ,  $y_{t+1} = \frac{m}{n}y_t$ ,  $y_t = (\frac{m}{n})^t y_0$ , que funciona como a solução de uma equação a diferenças homogêneas no caso mais simples. Note a analogia entre o fator  $(\frac{m}{n})^t$  e o fator  $e^{rt}$  que aparece na solução geral do caso mais simples da equação diferencial homogênea. A solução geral da equação a diferenças homogênea de 1ª ordem fica, portanto,  $y_t = (\frac{m}{n})^t y_0 = Ab^t$ , onde  $A = y_0$  e  $b = \frac{m}{n}$ .

Vejamos um método geral de solução da equação a diferenças  $y_{t+1} + ay_t = c$ , em que  $a$  e  $c$  são constantes. A solução completa geral  $y(t)$ , novamente, sai da soma da solução particular  $y_p(t)$  da não-homogênea, que nos fornece o equilíbrio intertemporal, com função complementar, a solução geral da equação homogênea associada  $y_{t+1} + ay_t = 0$ ,  $y_c(t)$ , que nos fornece os desvios em relação ao equilíbrio intertemporal.

$y(t) = y_c(t) + y_p(t)$ , com uma constante arbitrária definida com base nas condições iniciais do problema. Conforme vimos, a função complementar é  $y_t = Ab^t$  (supostamente diferente de 0), de modo que podemos escrever  $y_{t+1} = Ab^{t+1}$  e substituir na equação homogênea em questão. Assim sendo,  $Ab^{t+1} + aAb^t = 0$ , ou seja,  $b + a = 0$ ,  $b = -a$ . De modo que  $y_c(t) = Ab^t = A(-a)^t$ . Para a solução particular da equação completa, imaginamos o caso mais simples em que  $y_t = k$ , e portanto  $y_{t+1} = k$ , substituindo-os,  $k + ak = c$ ,  $k = \frac{c}{1+a}$ , e a solução particular é simplesmente  $y_p(t) = \frac{c}{1+a}$ , com  $a \neq -1$ . Se  $a = -1$ , tentemos o segundo caso mais simples  $y_t = kt$ , portanto  $y_{t+1} = k(t+1)$ . Substituindo-os,  $k(t+1) + akt = c$ ,  $k = \frac{c}{t+1+at} = \frac{c}{t+1-t} = c$ . Note que  $y_t = ct$  é um equilíbrio móvel.

Portanto, temos dois tipos de solução geral: para  $a \neq -1$ ,  $y(t) = y_t = A(-a)^t + \frac{c}{1+a}$ . Para  $a = -1$ ,  $y(t) = y_t = A(-a)^t + ct = A + ct$ . Aplicando-se a condição  $y_t = y_0$ , para  $t = 0$ , temos que  $y_0 = A + \frac{c}{1+a}$  ou  $A = y_0 - \frac{c}{1+a}$ . A solução geral definida fica então  $y_t = \left(y_0 - \frac{c}{1+a}\right)(-a)^t + \frac{c}{1+a}$ . No caso  $a = -1$ ,  $y_0 = A(-a)^0 + c(0) = A$ , e a solução completa fica  $y_t = y_0 + ct$ . Note que, em  $y_t = \left(y_0 - \frac{c}{1+a}\right)(-a)^t + \frac{c}{1+a}$ , a condição  $t = 0$  já garante  $y_t = y_0$ , ou seja, que a condição inicial esteja satisfeita. Note ainda, no mais geral  $a \neq -1$ , que se substituirmos  $y_t$  na equação a diferenças do problema,  $y_{t+1} + ay_t = c$ , temos  $\left(y_0 - \frac{c}{1+a}\right)(-a)^{t+1} + \frac{c}{1+a} + a\left(\left(y_0 - \frac{c}{1+a}\right)(-a)^t + \frac{c}{1+a}\right) = \left(y_0 - \frac{c}{1+a}\right)(-a)^t(-a) + \frac{c}{1+a} + a\left(\left(y_0 - \frac{c}{1+a}\right)(-a)^t + \frac{c}{1+a}\right) = \frac{c}{1+a} + \frac{ac}{1+a} = \frac{(1+a)c}{1+a} = c$  e a equação fica, de fato, atendida.

Vejamos um exemplo:  $y_{t+1} - 5y_t = 1$ , com a condição inicial  $y_0 = \frac{7}{4}$ . Vamos substituir na equação homogênea associada soluções gerais do tipo  $y_t = Ab^t$ ,  $y_{t+1} = Ab^{t+1}$ . Fica  $Ab^{t+1} - 5Ab^t = 0$ ,  $b = 5$ . Portanto, a solução da homogênea fica  $y_c = A5^t$ . Agora vamos à solução particular. Supomos  $y_t = k$ ,  $y_{t+1} = k$ . Fica então  $k - 5k = 1$ , ou seja,  $k = -\frac{1}{4}$ , e portanto  $y_p(t) = -\frac{1}{4}$ . A solução geral da equação completa é  $y(t) = y_c(t) + y_p(t) = A5^t - \frac{1}{4}$ . Agora calculemos o valor da constante  $A$  com base na condição inicial. Em  $t = 0$ ,  $y_0 = A - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ . Portanto,  $A = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = 2$ . E assim,  $y_t = 2 \cdot 5^t - \frac{1}{4}$ . O

mesmo resultado é obtido empregando-se a fórmula geral para  $a = -5 \neq -1$ . Neste caso,  $y_t = \left(y_0 - \frac{c}{1+a}\right)(-a)^t + \frac{c}{1+a} = \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{1-5}\right)(5)^t + \frac{1}{1-5} = 2 \cdot 5^t - \frac{1}{4}$ .

### A estabilidade dinâmica de equilíbrio

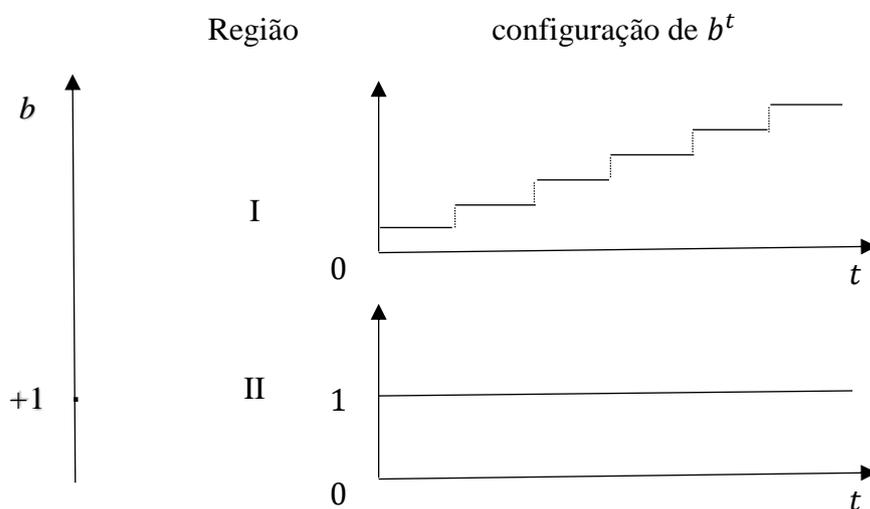
No caso contínuo, a solução da homogênea associada às equações diferenciais dependia de  $Ae^{rt}$ , já no caso discreto, como acabamos de ver, depende de um termo na forma de  $Ab^t$ . Há uma diferença importante entre as duas soluções, pois enquanto a base  $e$  do caso contínuo é sempre positiva, a base  $b$  poder ter qualquer sinal. No primeiro caso, a fim de que a função complementar, o desvio, tenda a 0 com  $t \rightarrow \infty$ , basta que o expoente seja negativo, no segundo caso, o das equações a diferenças discretas, o comportamento da solução da função complementar depende não apenas do sinal de  $b$  mas do módulo dessa constante.

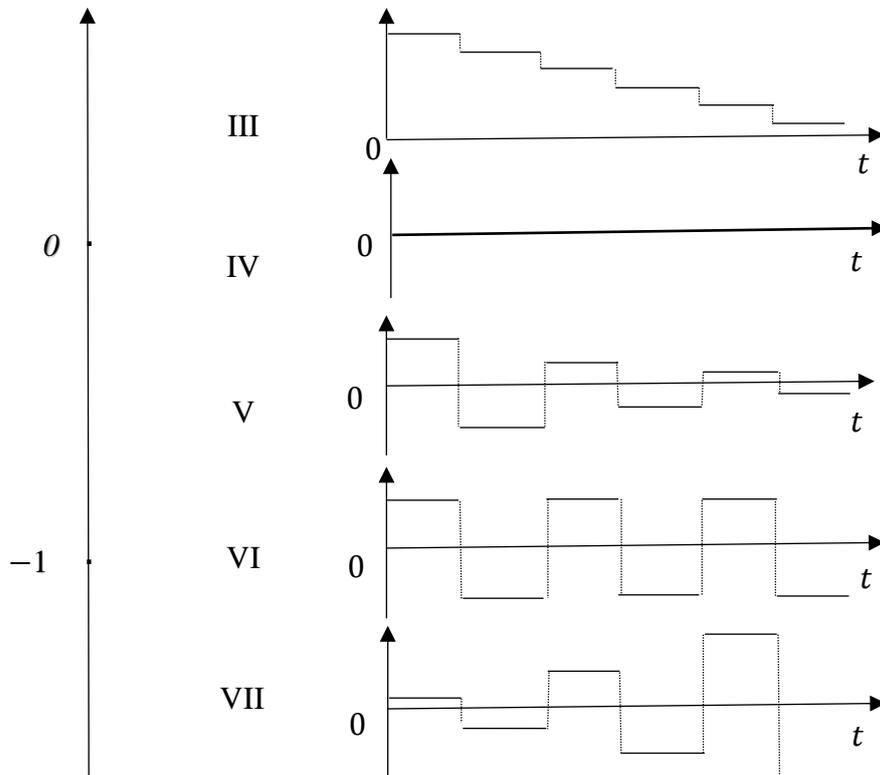
Na tabela abaixo, situamos o comportamento da solução da homogênea em sete regiões, definidas pela faixa de variação da base  $b$ , e, portanto, do valor desta.

Região	Valor de $b$	Valor de $b^t$ (ex.)	$t = 0$	1	2	3	4
I	$b > 1$ ( $ b  > 1$ )	$2^t$	1	2	4	8	16
II	$b = 1$ ( $ b  = 1$ )	$1^t$	1	1	1	1	1
III	$0 < b < 1$ ( $ b  < 1$ )	$\left(\frac{1}{2}\right)^t$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
IV	$b = 0$ ( $ b  = 0$ )	$0^t$	?	0	0	0	0
V	$-1 < b < 0$ ( $ b  < 1$ )	$\left(-\frac{1}{2}\right)^t$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
VI	$b = -1$ ( $ b  = 1$ )	$(-1)^t$	1	-1	1	-1	1
VII	$b < -1$ ( $ b  > 1$ )	$(-2)^t$	1	-2	4	-8	16

Das regiões I a VII, temos valores de  $b$  em ordem decrescente. À luz da tabela anterior, vejamos a trajetória de  $y_c(t)$ , a solução da homogênea, com variações de  $t$  por períodos discretos – gráfico 25.

**Gráfico 25:** configuração de  $b^t$  para diferentes valores de  $b$ .





Então nota-se que para  $b > 1$  viceja uma subida em degrau; para  $0 < b < 1$ , uma descida em degrau. Não há oscilação quando  $b > 0$ . O caso em que  $b = 0$  não desperta interesse, já que  $Ab^t \neq 0$  e também note que a função não está definida para  $t, b = 0$  (Por quê?). Para  $b < 0$ , ocorrem oscilações, com valores que se alteram entre positivo e negativo. Sempre que  $|b| < 1$  a trajetória é divergente e com  $|b| > 1$  a trajetória é explosiva. O fator  $b^t$  é responsável pela oscilação. Não falamos em *flutuação*, mas em *oscilação*, neste caso não suave em que as mudanças ocorrem em patamares.

Em suma, sobre a trajetória de  $b^t$  deve-se concluir que: (1) é não oscilatória se  $b > 0$ , oscilatória se  $b < 0$ . (2) É convergente se  $|b| < 1$  e divergente se  $|b| > 1$ . Lembrando que, no caso contínuo, o padrão ser flutuante ou não somente dependia do fato de a raiz característica  $r$  em  $e^{rt}$  ser complexa ou não. A constante  $A$  tem o papel de produzir um efeito de escala, afetando as amplitudes das oscilações. Também apresenta um efeito de sinal se  $A < 0$ , gerando uma imagem especular, um efeito de espelho.

### *Convergência ao equilíbrio*

A solução da homogênea,  $Ab^t$ , como sabemos, representa um desvio em relação ao equilíbrio intertemporal. Se a solução da equação a diferenças completa for  $Ab^t + c$ , onde  $c$  é uma constante, essa constante representa um nível de referência à convergência. Apenas nas regiões III e V  $Ab^t$  tende a desaparecer com o tempo. Nos outros casos, ocorre sempre um deslocamento vertical do equilíbrio em relação a esse nível de referência. A solução particular,  $y_p$ , funciona com um nível de convergência. No caso em que  $b = 1$ ,  $y_t = Ab^t + y_p = A + y_p$  e a solução nunca alcança esse nível  $y_p$ , a não ser que  $A = 0$ , uma solução muito particular a depender da condição inicial.  $y_t = Ab^t + y_p$  é trajetória convergente sempre que  $|b| < 1$ .

### Exercício 15

Que tipo de trajetória vem associada a  $y_t = 2\left(-\frac{4}{5}\right)^t + 9$ ?

Note que, neste caso,  $b = -\frac{4}{5} < 0$ , o que resulta em trajetória oscilatória. Note também, que  $|b| < 1$ , associado a oscilação amortecida. Ocorre uma convergência para o nível  $y_t = 9$ .

### O modelo da teia de aranha

Vejamos o conhecido modelo econômico da teia de aranha, uma interessante aplicação de equações a diferenças de 1ª ordem. A hipótese central do modelo é que a oferta depende do preço observado no período anterior, ou seja, o preço do bem em questão aparece defasado como argumento na função oferta,  $Q_s(p_{t-1})$ . Esse fenômeno é observado, por exemplo, na produção agrícola em que a decisão de produzir no presente é feita com base no preço observado hoje, mas a oferta só ocorrerá no período seguinte, pois, a produção agrícola envolve um grande lapso de tempo.

Então a decisão de produção ocorre um período antes da venda real. O preço observado hoje,  $p_t$ , condiciona a decisão de produção em  $t$  para entrega em  $t + 1$ . Então seja a função de oferta defasada  $Q_{s,t+1}(p_t)$ . No modelo, imagina-se que não existam estoques, apenas um fluxo de produção que é ofertada no período seguinte. A oferta nesse período pode ser representada por  $Q_{s,t+1}(p_t) = S(p_t)$ . Já a demanda não é defasada no tempo, de modo que  $Q_{d,t}(p_t) = D(p_t)$ . Essas duas equações, quando se impõe o equilíbrio estático (mercado em equilíbrio “compensado”,  $Q_{d,t}(p_t) = Q_{s,t}(p_{t-1})$ ) em todos os períodos, produzem um padrão dinâmico de preços.

Seja então oferta e demanda representados pelo sistema de equações em (29).

$$Q_{d,t}(p_t) = \alpha - \beta p_t \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (29)$$

$$Q_{s,t}(p_{t-1}) = -\gamma + \delta p_{t-1} \quad (\gamma, \delta > 0)$$

De (29), segue-se que  $\alpha - \beta p_t = -\gamma + \delta p_{t-1}$ . Dessa equação, e deslocando o subíndice indicador de intervalo um período adiante, chega-se à equação a diferença (30) do modelo da teia de aranha.

$$p_{t+1} + \frac{\delta}{\beta} p_t = \frac{\alpha + \gamma}{\beta} \quad (30)$$

Trata-se de uma equação a diferença de 1ª ordem, com coeficiente constante  $a = \frac{\delta}{\beta}$  e termo constante  $c = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$ . Estamos no caso em que  $a \neq -1$ , porque  $\beta, \delta > 0$ , e portanto a solução já nos é conhecida:  $p_t = \left(p_0 - \frac{c}{1+a}\right)(-a)^t + \frac{c}{1+a}$ . Substituindo-se nessa equação os valores do modelo em tela, chega-se à equação (31) da “teia de aranha”:

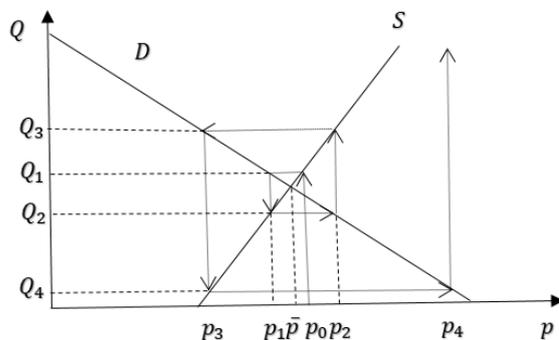
$$p_t = \left(p_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\right)\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \quad (31)$$

### As teias de aranha

Sintetizamos o modelo na equação a diferenças (31). Analisando-a, vê-se que o preço de equilíbrio intertemporal é  $\bar{p} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$ . Como se trata de constante, temos um equilíbrio dinâmico estacionário. Substituindo  $\bar{p}$  em (31), temos  $p_t = (p_0 - \bar{p})\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \bar{p}$ . Note que o fator  $(p_0 - \bar{p})$  traduz um efeito de escala, ou efeito espelho. Já o fator  $\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t$  representa o  $b$  de  $Ab^t$  da solução da homogênea, o desvio em relação ao equilíbrio estacionário. Como, no caso,  $b < 0$ , temos uma trajetória que oscila. De fato, a base  $b$  negativa está relacionada ao fenômeno da teia de aranha. A oscilação será explosiva se  $|b| > 1$  e amortecida se  $|b| < 1$ . Olhando-se as letras gregas, conclui-se que a oscilação é explosiva sempre que  $\delta > \beta$ , uniforme se  $\delta = \beta$  e atenuada se  $\delta < \beta$ .

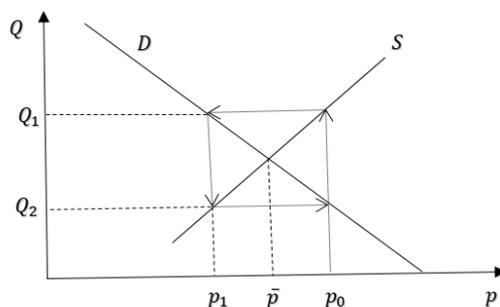
Isso tem implicação naturalmente nas inclinações das curvas de oferta e de demanda. Vejamos graficamente como funciona o efeito da teia de aranha. O gráfico (26) representa a situação em que a oferta é mais inclinada que a demanda em módulo, e, portanto,  $\delta > \beta$  e a oscilação é explosiva. A trajetória é desenhada com o seguinte critério: começa-se com um preço inicial  $p_0$ . Rebate-se o valor da quantidade associada  $Q_1$  na função de oferta (note a defasagem). Para essa quantidade, veja agora o preço  $p_1$  associado na função de demanda (sem defasagem). Para  $p_1$ , rebata na função de oferta a quantidade  $Q_2$  e, na função de demanda, vá de  $Q_2$  a  $p_2$ , e assim por diante. Interligando-se os pontos, tem-se o padrão da teia de aranha.

**Gráfico 26:** modelo da teia de aranha com oscilação explosiva



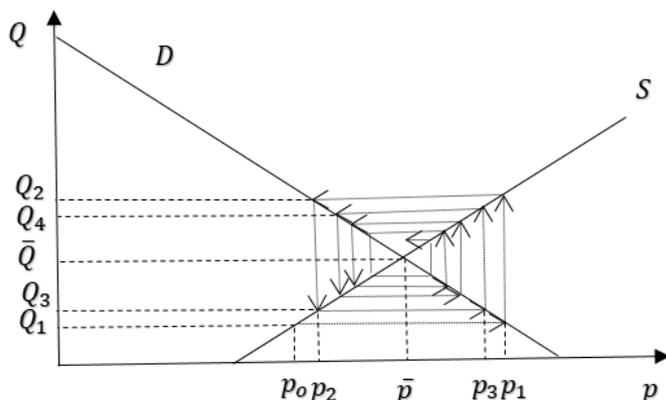
O gráfico (27) representa o caso em que ambas as curvas têm a mesma inclinação em módulo,  $\delta = \beta$ , e a oscilação é uniforme.

**Gráfico 27:** modelo da teia de aranha com oscilação uniforme



Finalmente, o gráfico (28) representa o caso em que a oferta é menos inclinada que a demanda, em módulo,  $\delta < \beta$ , e a oscilação é atenuada, com trajetória convergente ao equilíbrio estacionário de longo prazo.

Gráfico 28: modelo da teia de aranha com oscilação amortecida.



### Um modelo de mercado com estoque

No modelo anterior supõe-se que o preço que iguala oferta e demanda equilibra o mercado, no sentido de que tudo o que é produzido é vendido. Nesse caso, diz-se que tal preço “compensa” a produção corrente em  $t$ . Hipótese subjacente nessa classe de modelo é a de que a mercadoria transacionada seja perecível, de modo que ela não possa ser estocada.

No modelo de mercado com estoque, supõe-se que os vendedores mantenham um estoque das mercadorias. Iremos agora explicitar as hipóteses desse modelo: as quantidades demandadas e ofertadas,  $Q_{dt}(p_t)$  e  $Q_{st}(p_t)$ , são funções do preço corrente, não mais do preço do período passado como no modelo da teia de aranha. O ajuste de preços ocorre não pelo processo de equilíbrio, ou de compensação, dos mercados, mas pela ação estratégica dos vendedores. Dada uma situação de estoque em  $t$ , e o preço no período anterior  $p_{t-1}$ . Se o volume estocado hoje aumentou em relação ao período anterior, os vendedores oferecem a mercadoria a um preço menor, de modo que  $p_t < p_{t-1}$ , sendo  $p_t$  o preço atual. Se o estoque hoje é menor que o do período anterior, os vendedores oferecem a mercadoria a um preço maior, de modo que  $p_t > p_{t-1}$ . Tal estratégia visa naturalmente a manter um nível de estoque adequado. Com estoques baixos, a estratégia de praticar preços maiores é compatível com a meta de repor os estoques. Estoques elevados são compatíveis com a escolha de preços menores,  $p_t < p_{t-1}$ , que permitem aos agentes desovar os estoques, movimentar a mercadoria e entregá-la ao mercado.

Assim, ajuste de preços e as variações de estoque são inversamente proporcionais. Ajuste de preços para baixo associa-se a variação de estoques para cima. Tais hipóteses do modelo podem ser traduzidas pelo sistema de equações em (32):

$$Q_{d,t}(p_t) = \alpha - \beta p_t \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (32)$$

$$Q_{s,t}(p_t) = -\gamma + \delta p_t \quad (\gamma, \delta > 0)$$

$$p_{t+1} = p_t - \sigma(Q_{s,t} - Q_{d,t}) \quad (\sigma > 0)$$

Na terceira equação,  $\sigma$  é um coeficiente de preço induzido pelo estoque. Note que tal equação guarda analogia com o modelo de Hicks em que  $\frac{dp}{dt} = f(Q_{d,t} - Q_{s,t})$ , ou seja, a variação de preços é proporcional ao excesso de demanda. Aqui a variação de preços,  $p_{t+1} - p_t$ , é inversamente proporcional à variação de estoques  $Q_{s,t} - Q_{d,t}$ . O sinal menos na equação dá conta dessa variação inversa. Embora haja analogia, o novo modelo leva a resultados analíticos muito diferentes. No modelo em tempo discreto, surge novamente o fenômeno das oscilações. Vejamos como determinar a trajetória temporal dos preços,  $p_t$ .

No sistema de equações (32), substituindo as duas primeiras na terceira temos  $p_{t+1} = p_t - \sigma(-\gamma + \delta p_t - \alpha + \beta p_t) = [1 - \sigma(\beta + \delta)]p_t + \sigma(\alpha + \gamma)$ . Na forma convencional, escrevemos a equação a diferenças assim:  $p_{t+1} - [1 - \sigma(\beta + \delta)]p_t = \sigma(\alpha + \gamma)$ . Trata-se de uma equação de 1ª ordem com coeficiente constante  $a = -[1 - \sigma(\beta + \delta)]$  e termo constante  $c = \sigma(\alpha + \gamma)$ . Portanto,  $p_t = \left(p_0 - \frac{c}{1+a}\right)(-a)^t + \frac{c}{1+a} = \left(p_0 - \frac{\sigma(\alpha+\gamma)}{1-[1-\sigma(\beta+\delta)]}\right) \cdot (1 - \sigma(\beta + \delta))^t + \frac{\sigma(\alpha+\gamma)}{1-[1-\sigma(\beta+\delta)]} = \left(p_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)(1 - \sigma(\beta + \delta))^t + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ . O termo constante  $\bar{p} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$  representa o equilíbrio estacionário. Portanto, a equação a diferenças relativa ao modelo com estoque é representada em (33).

$$p_t = (p_0 - \bar{p})(1 - \sigma(\beta + \delta))^t + \bar{p} \quad (33)$$

Nessa equação a diferenças de 1ª ordem, a base  $(1 - \sigma(\beta + \delta))$  comporta-se como a base  $b$  na expressão que determina a estabilidade dinâmica do modelo. Pensemos então nas sete regiões dos valores de  $b$ . Na verdade, devemos pensar apenas nas regiões de III a VII, pois, como as letras gregas assumem valores positivos,  $\beta, \delta, \sigma > 0$ , torna-se impossível  $b \geq 1$ , restando apenas cinco regiões. A tabela abaixo especifica, com base nas regiões de valores de  $b$ , os valores possíveis de  $\sigma$  e o comportamento dos preços,  $p_t$ . Lembrando que  $b = 1 - \sigma(\beta + \delta)$ .

Região	Valor de $b$	Valor de $\sigma$	Trajетória de $p_t$
III	$0 < b < 1$	$0 < 1 - \sigma(\beta + \delta) < 1, -1 < -\sigma(\beta + \delta) < 0, 0 < \sigma < \frac{1}{\beta + \delta}$	Não oscila e converge
IV	$b = 0$	$\sigma = \frac{1}{\beta + \delta}$	Em equilíbrio
V	$-1 < b < 0$	$-1 < 1 - \sigma(\beta + \delta) < 0, -2 < -\sigma(\beta + \delta) < -1, \frac{1}{\beta + \delta} < \sigma < \frac{2}{\beta + \delta}$	Oscilação amortecida
VI	$b = -1$	$\sigma = \frac{2}{\beta + \delta}$	Oscilação uniforme
VII	$b < -1$	$1 - \sigma(\beta + \delta) < -1, \sigma(\beta + \delta) > 2, \sigma > \frac{2}{\beta + \delta}$	Oscilação explosiva

Note que quando  $\sigma = \frac{1}{\beta + \delta}$  os preços permanecem sempre em equilíbrio. Com efeito, neste caso, a equação a diferenças do modelo,  $p_{t+1} - [1 - \sigma(\beta + \delta)]p_t = \sigma(\alpha + \gamma)$ , torna-se  $p_{t+1} - \left[1 - \frac{\beta + \delta}{\beta + \delta}\right]p_t = \left(\frac{1}{\beta + \delta}\right)(\alpha + \gamma)$ , portanto,  $p_{t+1} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} = \bar{p}$ .

### Exercício 16

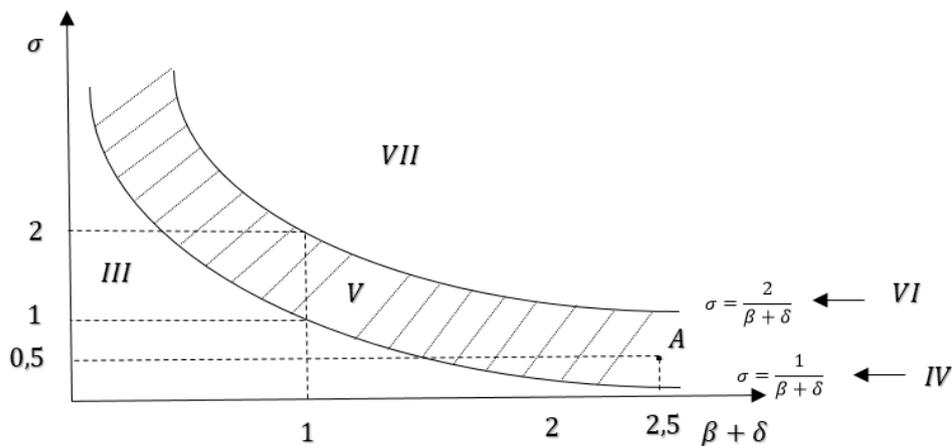
No modelo de mercado com estoque, suponha que os vendedores aumentem (reduzam) o preço de 10% em relação à quantidade de redução (aumento) do estoque. A inclinação da demanda em relação ao eixo de preços é  $-\beta = -1$  e a inclinação da oferta é  $\delta = 15$ . Qual o tipo de trajetória temporal do preço,  $p_t$ ?

Note que  $\sigma = 0,1$ , e  $\frac{1}{\beta+\delta} = \frac{1}{16} = 0,0625$ .  $\frac{2}{\beta+\delta} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 0,125$ . Portanto, temos que  $0,0625 < \sigma < 0,125$ , que se enquadra na região V onde  $\frac{1}{\beta+\delta} < \sigma < \frac{2}{\beta+\delta}$ . Portanto, trata-se de oscilação amortecida.

### Interpretação gráfica

A fim de interpretar graficamente as possíveis soluções do modelo de mercado com estoques, segmentadas nas cinco regiões de III a VII da tabela anterior, constrói-se no gráfico (29) o plano com eixos ortogonais nos parâmetros  $\beta + \delta$  na abscissa e  $\sigma$  na ordenada. As condições  $\sigma = \frac{1}{\beta+\delta}$  e  $\sigma = \frac{2}{\beta+\delta}$  são representadas por duas hipérbolas equilátero-ras nesse plano. Nota-se que a região III em que  $\sigma < \frac{1}{\beta+\delta}$  corresponde à área abaixo de ambas as hipérbolas. A região IV está nos pontos da hipérbole  $\sigma = \frac{1}{\beta+\delta}$ , a região V corresponde à área entre as duas hipérbolas, a região VI reside na hipérbole acima  $\sigma = \frac{2}{\beta+\delta}$  e a região VII corresponde à área superior à direita no gráfico.

**Gráfico 29:** representação gráfica das regiões na solução do modelo de mercado com estoque.



### Exercício 17

No modelo de mercado com estoque, suponha os seguintes valores para os parâmetros:  $\sigma = 0,5$ ,  $\beta = 1$  e  $\delta = 1,5$ . Com base em análise com o gráfico 29, determine se a trajetória temporal do preço  $p_t$  é convergente.

No gráfico, note que  $\beta + \delta = 2,5$ . Sendo  $\sigma = 0,5$ , veja que estamos no ponto A entre as hipérbolas. Portanto, trata-se da região V onde ocorre oscilação amortecida. A trajetória temporal é convergente, embora oscilatória.

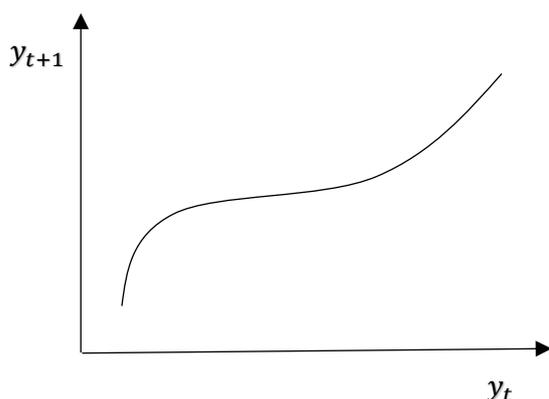
## Equação a diferenças não-linear

Quando nos deparamos com não-linearidades no caso de modelos com equação a diferenças de 1ª ordem, podemos apelar para um método de fácil aplicação que nos permite conclusões qualitativas da situação. Tal método, de fato, possui ampla aplicação, embora não nos permita uma análise quantitativa. Trata-se do método gráfico.

### Diagrama de fase

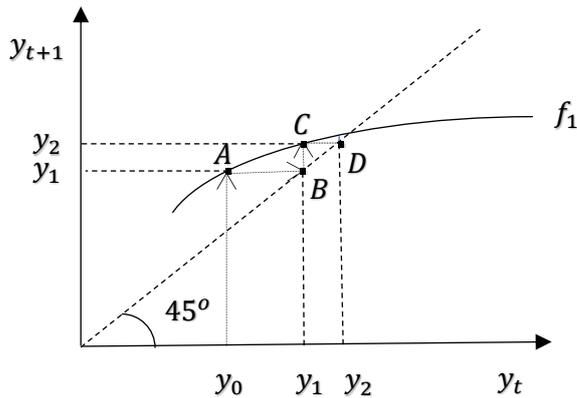
Suponha equações a diferenças de 1ª ordem, em que só apareçam, nos termos,  $y_{t+1}$  e  $y_t$ . A equação pode ser não-linear, com potências acima de 1 e/ou funções trigonométricas, logarítmicas etc. como em  $y_{t+1} + y_t^3 = 5$  ou  $y_{t+1} + \text{sen } y_t - \ln y_t = 3$ . Seja portanto,  $y_{t+1} = f(y_t)$ , sendo  $f(y_t)$  uma função de qualquer grau de complexidade. Os diagramas de fase, no caso de equação a diferenças, dizem respeito a uma representação no plano  $y_{t+1} \times y_t$ . O gráfico (30) mostra uma representação genérica de um trajeto nesse diagrama, chamado de *linha de fase*.

**Gráfico 30:** diagrama de fase com a representação genérica de uma linha de fase.



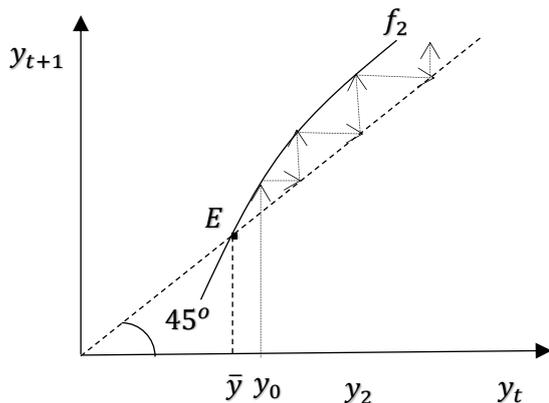
Note que, no caso contínuo, o diagrama de fase envolvia os eixos  $\frac{dy}{dt} \times y$ . No caso discreto, o análogo seria o plano  $\Delta y_t \times y$ , mas preferimos usar o plano  $y_{t+1} \times y_t$ . Neste plano, analisa-se a trajetória por um processo de iteração. O gráfico (31) mostra como ocorre a iteração começando por  $y_0$ . Dado esse valor inicial de  $y_t$ , rebate-se na curva para determinar o  $y_1$  no eixo vertical. A linha de 45° é usada para obter o mesmo  $y_1$  na abscissa, onde está a variável  $y_t$ . De  $y_1$  vai-se a  $y_2$  novamente rebatendo na curva.  $y_2$  em  $y_{t+1}$  é refletido na linha de 45° para o eixo  $y_t$ . Na curva, gera-se o  $y_3$  e assim por diante. O gráfico em questão mostra um processo em que ocorre a convergência a um  $y_t$  de equilíbrio. A linha de fase pode ser representada por uma equação  $y_{t+1} = f_1(y_t)$ . Então  $y_1$  foi obtido em  $y_1 = f_1(y_0)$ ,  $y_2$  em  $y_2 = f_1(y_1)$  e assim por diante, o que descreve o processo iterativo. O fato de a trajetória temporal ser convergente tem a ver com a inclinação da linha de fase. Linhas de fase de pouca inclinação, como a da figura, de fato, levam a trajetórias convergentes, linhas de fase com inclinação superior a 45° produzem trajetórias divergentes.

**Gráfico 31:** diagrama de fase para trajetória temporal convergente.



Com outras variedades básicas de linhas de fase, temos tipos específicos de trajetória temporal. O gráfico (32) ilustra o caso de uma trajetória de fase divergente, quando a linha de fase possui inclinação superior a  $45^\circ$  ou, no caso,  $f_2'(y_t) > 1$  (no caso anterior,  $0 < f_1'(y_t) < 1$ ). Se  $y_t \neq \bar{y}$ , o ponto de equilíbrio, qual o padrão de variação? Vemos, no gráfico, que essa situação se tratada de trajetória divergente. Note que na intersecção com a reta de  $45^\circ$ ,  $y_{t+1} = y_t$ .

**Gráfico 32:** diagrama de fase para trajetória temporal divergente.

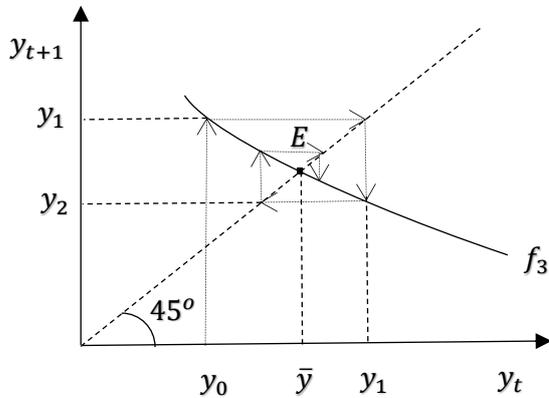


Então  $f_1(y_t)$  leva ao equilíbrio  $\bar{y}$  sem oscilação e  $f_2(y_t)$  resulta em trajetória temporal divergente sem oscilação. Também se  $y_t < \bar{y}$ . Nos casos em que as linhas de fase são negativamente inclinadas, ocorrem movimentos oscilatórios, com o conhecido fenômeno da ultrapassagem da marca de equilíbrio. Ambos os casos estão representados nos gráficos (33) e (34), respectivamente para as funções  $f_3(y_t)$  e  $f_4(y_t)$ . Note que  $f_3'(y_t) < 0$  e  $f_4'(y_t) < 0$ . No caso de  $f_3(y_t)$ , em que a linha de fase negativamente inclinada tem inclinação, em módulo, menor que  $45^\circ$ , a extensão da ultrapassagem tende a diminuir em períodos sucessivos, caso de linhas pouco inclinadas. Por linha pouco inclinada entende-se que  $|f_3'| < 1$ . Caso do gráfico (33).

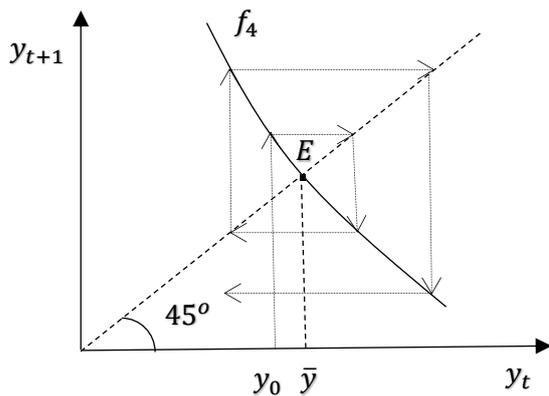
O gráfico (34) reflete a situação em que a linha de fase negativamente inclinada tem inclinação maior que  $45^\circ$ , nesse caso a trajetória temporal é oscilatória e divergente. Lembra a teia de aranha, mas aqui a teia é tecida entorno de uma linha de fase (que

contém a defasagem) e a reta de 45°. No caso anterior de teia de aranha, era ao redor de uma curva de demanda e de uma curva de oferta com defasagem. Aqui tem-se o caso com linhas de fase negativamente inclinadas e muito inclinadas, isto é, em que  $|f_4'| > 1$ .

**Gráfico 33:** diagrama de fase para trajetória temporal oscilatória e convergente.



**Gráfico 34:** diagrama de fase para trajetória temporal oscilatória e divergente.



Em suma, o sinal algébrico da inclinação da linha de fase diz se haverá oscilação. O módulo da derivada,  $|f_i'| < 1$ , indica se haverá ou não convergência. Caso mais complicados surgem quando correm mudanças na inclinação das linhas de fase entre diferentes segmentos da curva, nesse caso, a convergência ou não dependerá do valor inicial do processo iterativo.

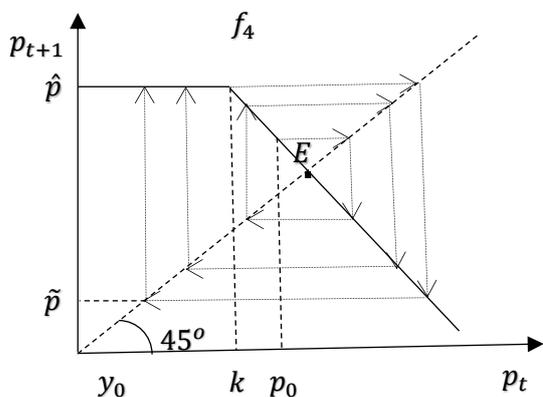
### Mercado com um teto de preço

Vejamos um interessante exemplo de equação a diferenças não-linear em que a linha de fase não seja suave. Trata-se do modelo já visto de teia de aranha com oferta defasada. Vimos que a equação a diferenças que rege esse modelo é a equação (30)  $p_{t+1} + \frac{\delta}{\beta} p_t = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$ , ou seja  $p_{t+1} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} p_t$ , com  $\frac{\delta}{\beta} > 0$ . Trata-se, portanto, de uma linha de fase  $p_{t+1} = f(p_t)$  linear, em que  $f'(p_t) < 0$ . Assim sendo, se  $\left| \frac{\delta}{\beta} \right| > 1$  a oscilação é explosiva.

Suponha agora que vigore um teto legal de preço  $\hat{p}$ , de modo que a linha de fase fique “quebrada” conforme o gráfico 35.

Temos então uma linha de fase não linear e não suave. Neste caso, o processo iterativo leva à oscilação explosiva indicada no gráfico.

**Gráfico 35:** diagrama de fase para trajetória temporal oscilatória e divergente no modelo de mercado com um teto de preço.



Note que a partir de um preço inicial  $p_0$  viceja um processo oscilatório divergente, com base na iteração que leva em conta o segmento linear da linha de fase e a reta de  $45^\circ$ , até alcançar-se o ponto de quebra em  $k$ . Até então a dobra é ignorada e o processo obedece à técnica de transposição  $p_{t-1} \rightarrow p_t$  pela linha de  $45^\circ$ . A partir de  $k$ , o processo iterativo é aprisionado em um retângulo que se repete indefinidamente, com os preços oscilando entre o limite inferior  $\tilde{p}$  e o teto  $\hat{p}$ .

Dado o preço inicial  $p_0$ , termina-se assim com um movimento cíclico perpétuo entre dois extremos. A oscilação explosiva só ocorre até alcançar-se o ponto de quebra. O teto opera contendo a tendência explosiva. Ele impõe ao processo um ciclo limite que bloqueia o processo oscilatório divergente a partir do preço inicial produzido pela iteração que leva em conta o segmento linear da linha de fase e a reta de  $45^\circ$ .

A trajetória de preços nesse modelo com teto de preços pode ser sumariada em duas equações:  $p_{t+1} = \hat{p}$  se  $p_t \leq k$  e  $p_{t+1} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta} - \frac{\delta}{\beta}p_t$  se  $p_t > k$ . Note, com base neste modelo, que não necessariamente a oscilação uniforme só ocorre quando a inclinação da linha de fase é  $-1$ . O caso mostra que oscilações deste tipo também podem ser produzidas em linhas de fase não lineares.

### Equações a diferenças de ordens mais altas

Até agora, nossas equações a diferenças envolviam apenas uma diferença. Relacionávamos  $y_t$  com  $y_{t-1}$  a fim de determinar a trajetória temporal de  $y$  quando se especifica um valor  $y_0$ . Iremos estudar a classe de equação a diferenças de  $2^{\text{a}}$  ordem, que relacionam a variável  $y_t$  não apenas a  $y_t$  mas também a  $y_{t-2}$ . Genericamente representa-se  $y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2})$ . A equação envolve diferença segunda de  $y_t$ , envolve  $\Delta^2 y_t$  mas não

contém termos com  $\Delta^3 y_t$  ou a diferenças de ordem ainda maior. Observam-se analogias entre  $\Delta^2$  e  $\frac{d^2}{dt^2}$ . De fato,  $\Delta^2$  representa uma instrução para tomar-se a diferença segunda.

Note que  $\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = \Delta(y_{t+1} - y_t) = (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t) = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$ . Observe ainda que  $\Delta^2 y_t = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t$ , e portanto  $\Delta(y_{t+1} - y_t) = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t$ , de modo análoga à propriedade distributiva da derivada segunda da soma ou diferença. Em nossa notação, evitamos os  $\Delta$ 's. Trabalha-se com equações apenas com defasagens. Assim, em nossas equações de 2ª ordem aparece no máximo  $y_{t+2}$  (quando forem equações de 3ª ordem aparecerá  $y_{t+3}$  e assim por diante).

### Equações a diferenças de 2ª ordem com coeficientes constantes e termo constante

Seja a equação a diferenças de 2ª ordem  $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = c$ , uma equação linear, não-homogênea, com coeficientes constantes  $(a_1, a_2)$  e termo constante  $c$ . A solução geral, como nos tipos anteriores, é a soma da solução geral da homogênea associada, a função complementar  $y_c$ , com uma solução particular da equação completa, que indica o nível de equilíbrio intertemporal da trajetória de  $y_t$ . Escreve-se, portanto,  $y_t = y_c + y_p$ . Onde  $y_p$  é qualquer solução da equação completa.

Vejamos o caso mais simples em que  $y_p = k$ , uma constante, de modo que  $k + a_1 k + a_2 k = c$ , ou  $k = \frac{c}{1+a_1+a_2}$ ,  $1 + a_1 + a_2 \neq 0$ ,  $a_1 + a_2 \neq -1$ . Neste caso,  $y_p = k = \frac{c}{1+a_1+a_2}$ .

#### Exercício 18

Seja a equação a diferenças de 2ª ordem  $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 4y_t = 6$ . Encontre uma solução particular.

No caso,  $a_1 = -3$ ,  $a_2 = 4$  e  $c = 6$ . Portanto,  $a_1 + a_2 = 1 \neq -1$ . E, assim,  $y_p = \frac{c}{1+a_1+a_2} = \frac{6}{1-3+4} = 3$ .

Nos problemas em que  $a_1 + a_2 = -1$ , tenta-se a nova solução experimental  $y_t = kt$ ,  $y_{t+1} = k(t+1)$ ,  $y_{t+2} = k(t+2)$ . Substituindo-se na equação a diferenças em questão,  $k(t+2) + a_1 k(t+1) + a_2 kt = c$ ,  $k(t+2 + a_1(t+1) + a_2 t) = k[(1+a_1+a_2)t + a_1 + 2] = c$ ,  $k = \frac{c}{(1+a_1+a_2)t + a_1 + 2} = \frac{c}{a_1 + 2}$ . Portanto a solução particular é  $y_p = kt = \frac{c}{a_1 + 2} t$ ,  $a_1 + a_2 = -1$  e  $a_1 \neq -2$ .

#### Exercício 19

Seja a equação a diferenças de 2ª ordem  $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 12$ . Encontre uma solução particular.

No caso,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -2$  e  $c = 12$ . Portanto,  $a_1 + a_2 = -1$  e  $a_1 \neq -2$ . A fórmula anterior aplica-se. A solução particular fica então  $y_p = \frac{c}{a_1 + 2} t = \frac{12}{1+2} t = 4t$ . Ou seja, é um equilíbrio intertemporal móvel.

Finalmente, falta examinar o caso em que  $a_1 + a_2 = -1$  e  $a_1 = -2$ . Isso só ocorre se  $a_1 = -2$  e  $a_2 = 1$ . Agora tenta-se uma nova solução experimental do tipo  $y_t = kt^2$ ,  $y_{t+1} =$

$k(t+1)^2, y_{t+2} = k(t+2)^2$ . Substituindo-se na equação a diferenças em questão,  $k(t+2)^2 + a_1k(t+1)^2 + a_2kt^2 = c$ ,  $k(t^2 + 4t + 4) + a_1k(t^2 + 2t + 1) + a_2kt^2 = c$ ,  $k(t^2 + 4t + 4 + a_1t^2 + 2a_1t + a_1 + a_2t^2) = c$ ,  $k[(1 + a_1 + a_2)t^2 + (4 + 2a_1)t + 4 + a_1] = c$ . As duas expressões entre parênteses se anulam, dado o caso em equação, e portanto  $k = \frac{c}{2}$ . A solução particular é  $y_p = kt^2 = \frac{c}{2}t^2$ . Note que essa solução se aplica apenas à equação a diferenças  $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = c$ , um caso bem específico.

### Função complementar

Examinemos a equação homogênea associada à equação a diferenças de 2ª ordem em questão:  $y_{t+2} + a_1y_{t+1} + a_2y_t = 0$ . Como nas equações a diferenças de 1ª ordem, as soluções são do tipo  $y_t = Ab^t$ . Ou seja,  $y_{t+1} = Ab^{t+1}$  e  $y_{t+2} = Ab^{t+2}$ . Naturalmente que os  $A_i$ 's são determinados pelas condições iniciais, enquanto que  $b$  é solução da equação característica pertinente, que surge substituindo essas expressões na equação homogênea do problema. Fazendo-o, temos que  $Ab^{t+2} + a_1Ab^{t+1} + a_2Ab^t = 0$ , o que resulta na equação característica  $b^2 + a_1b + a_2 = 0$ . As raízes são  $b_1, b_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$ . Na solução geral da equação a diferenças homogênea, estabelece-se assim a expressão com dois termos  $A_1b_1^t + A_2b_2^t$ , que são combinações de termos linearmente independentes do tipo  $Ab^t$ , os quais envolvem duas raízes características,  $b_1$  e  $b_2$ , e duas constantes multiplicativas  $A_1$  e  $A_2$  cujos valores são determinados por duas condições iniciais.

Vejamos agora os três casos tradicionais associados ao padrão das raízes características. No caso 1, temos raízes reais distintas,  $a_1^2 > 4a_2$  e  $b_1^t$  e  $b_2^t$  são linearmente independentes, de modo que a solução da homogênea associada é  $y_c = A_1b_1^t + A_2b_2^t$ .

### Exercício 20

Seja a equação a diferenças de 2ª ordem do exercício 19,  $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 12$ . Dadas as condições iniciais  $y_0 = 4$  e  $y_1 = 5$ , encontre a solução geral.

Para esse exercício, temos que  $a_1 = 1$  e  $a_2 = -2$ . Então as raízes características são  $b_1, b_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ . Portanto,  $b_1 = 1$  e  $b_2 = -2$ . A solução da homogênea é dada por  $y_c = A_1b_1^t + A_2b_2^t = A_1(1)^t + A_2(-2)^t = A_1 + A_2(-2)^t$ . Vimos que a solução particular é  $y_p = 4t$ . Sendo assim, a solução completa é  $y_t = y_c + y_p = A_1 + A_2(-2)^t + 4t$ . Empreguemos agora as condições iniciais a fim de determinar os valores das duas constantes arbitrárias  $A_1$  e  $A_2$ . Para  $t = 0$ , temos que  $y_0 = A_1 + A_2 = 4$ ; para  $t = 1$ ,  $y_1 = A_1 - 2A_2 + 4 = 5$ . Subtraindo-se a primeira equação da segunda, membro a membro, fica-se com  $3A_2 - 4 = 4 - 5$ ,  $3A_2 = 3$ ,  $A_2 = 1$ . Substituindo-se na primeira equação,  $A_1 = 4 - 1 = 3$ . Portanto, a solução geral definida é  $y_t = 3 + (-2)^t + 4t$ .

Podemos obter a solução da equação a diferenças  $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 12$  por Matlab. Para tanto, escreve-se a equação na forma  $y_{t+2} = -y_{t+1} + 2y_t + 12$ , isolando-se a diferença mais alta no 1º membro. Na janela de comando, escreve-se a sequência de programação:

```
clear all;
%y(t+2) + y(t+1) - 2y(t) = 12, t>0
```

```

%y(1) = 4, y(2) = 5
t=[1:30];
y(1) = 4;
y(2) = 5;
for m=3:30;
    y(m)=-y(m-1)+2*y(m-2)+12;
end
plot(t,y,'*')
xlabel ('tempo')
ylabel ('y')
title ('Trajetória obtida no Matlab (*')
pause
ayte(1)=4;
ayte(2)=5;
for i = 2:29
yte(i)=3+(-2)^(i)+4*(i);
ayte(i+1)=yte(i);
end
plot(t,ayte,'o')
xlabel ('tempo')
ylabel ('y')
title ('Trajetória teórica (o)')
pause
plot(t,y,'*',t,ayte, 'o')
xlabel ('tempo')
ylabel ('y')
title ('Trajetória obtida no Matlab (*) e teórica (o)')

```

Note que diferentemente do caso de equações diferenciais, no problema de equações a diferenças o Matlab não oferece funções prontas que resolvam a equação, como o comando *dsolve*. Temos de fazer um programa detalhado a fim de que o computador execute o processo de iteração informado.

Veja esse programa: na primeira linha, com o comando *clear all* apaga-se qualquer variável previamente criada pelo usuário que ainda esteja armazenada na memória do *software*. Isso é feito por precaução para evitar problemas com atribuições indevidas de valores às variáveis do programa em tela. A segunda e terceira linha são apenas *labels* descritivos da equação a diferenças, que não são considerados na execução do programa:  $\%y(t+2) + y(t+1) - 2y(t) = 12, t > 0, \%y(1) = 4, y(2) = 5$ . Na 4ª linha, define-se uma variável *t* como um vetor de inteiros de 1 a 30:  $t=[1:30]$ . Nas 5ª e 6ª linhas, informam-se as duas condições iniciais do problema:  $y(1) = 4; y(2) = 5$ . Nota-se que por questão de conveniência não se começa com 0 (pois o vetor de inteiros *t* somente pode ser definido a partir de 1). Então as duas condições iniciais são informadas na parametrização do problema dessa forma:  $y_0$  é  $y(1)$ , e  $y_1$  é  $y(2)$ .

Nas próximas três linhas do programa, cria-se um *loop* do tipo: `for m=3:30; y(m)=-y(m-1)+2*y(m-2)+12; end`. Ou seja, a rotina de um processo iterativo regido pela mesma equação a diferenças do exercício. Note que o processo começa em  $y(3)$  (equivalente ao  $y_2$ ), pois  $y(1)$  e  $y(2)$  já foram informados. Tem-se, portanto, todo o vetor de *y* para inteiros *t*,  $1 < t < 30$ .

As cinco linhas seguintes, `plot(t,y,'*')`, `xlabel ('tempo')`, `ylabel ('y')`, `title ('Trajetória obtida no Matlab (*')`, `pause`, representam uma sequência de comandos para se criar um gráfico

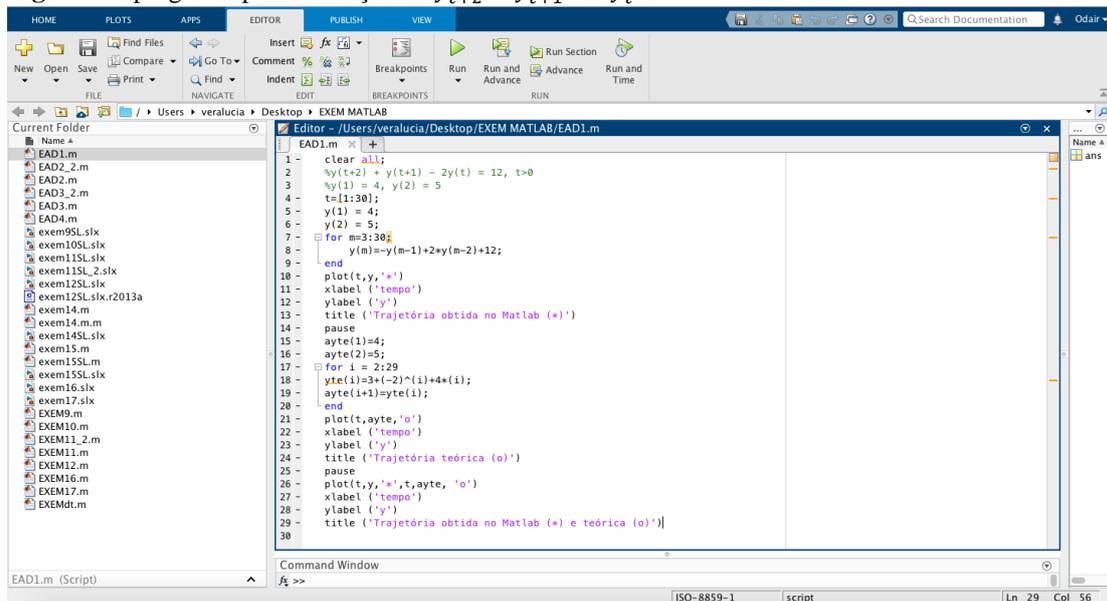
do tipo *plot*, nas variáveis discretas  $t$ , como variável independente, e  $y$  como variável dependente, no qual pontos discretos são representados por um asterisco (\*). Informam-se os *labels* dos eixos e o título do gráfico. O comando *pause* serve para visualizarmos o primeiro gráfico na saída do programa antes que o processamento continue.

O programa permite comparar a trajetória discreta obtida no processo iterativo com a solução teórica do exercício,  $y_t = 3 + (-2)^t + 4t$ , aplicada a valores discretos de  $t$ . Para tanto, nas linhas 15ª a 20ª cria-se uma variável discreta que segue a trajetória da equação teórica e que assume as mesmas condições iniciais:  $ayte(1)=4$ ;  $ayte(2)=5$ ;  $\text{for } i = 2:29$ ,  $yte(i)=3+(-2)^i+4*(i)$ ;  $ayte(i+1)=yte(i)$ ;  $\text{end}$ . Note que, nessa sequência de pontos discretos de  $2 < t < 29$ , o primeiro valor informado da variável  $yte$  é 2, mas o da variável derivada  $ayte$  é 3 (pois,  $ayte(i + 1) = yte(i)$ ), o último valor informado da variável  $yte$  é 29, mas o da variável derivada  $ayte$  é 30. Portanto, foram gerados valores de 1 a 30 da variável  $ayte$ , que refletem o resultado teórico e que faz o programa gerar uma série de pontos obtidos pela equação teórica para depois compará-los com os pontos gerados apenas pelo processo iterativo.

Para tanto, a próxima sequência do programa gera o gráfico para os pontos comandados pela equação teórica: `plot(t,ayte,'o')`, `xlabel('tempo')`, `ylabel('y')`, `title('Trajetória teórica (o)')`, `pause`. Por fim, comparam-se, no mesmo gráfico gerado no Matlab, esses pontos (“o”) com a trajetória discreta obtida pela iteração (pontos “\*”), na seguinte sequência de programação: `plot(t,ayte,'o')`, `xlabel('tempo')`, `ylabel('y')`, `title('Trajetória teórica (o)')`, `pause`, `plot(t,y,'*',t,ayte,'o')`, `xlabel('tempo')`, `ylabel('y')`, `title('Trajetória obtida no Matlab (*) e teórica (o)')`.

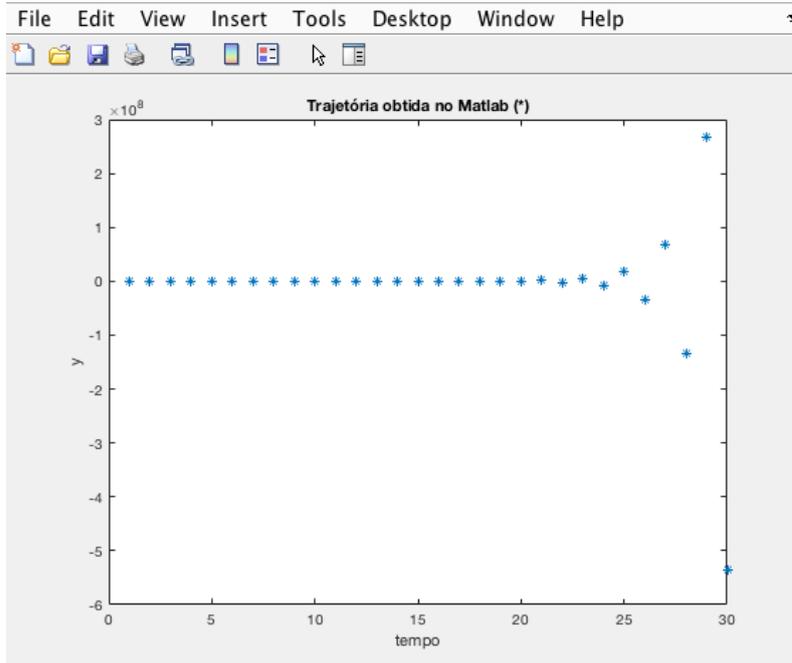
A Figura 75 mostra a janela do editor do Matlab com o programa acima. A sequência de programação foi salva no arquivo EAD1.m. Ao executá-lo, obtém-se os gráficos construídos pelos comandos informados e que são exibidos aos usuários (figuras 76 a 78). Em equações as diferenças, não faremos uso do Simulink (embora esse programa disponha de uma série de ferramentas para o tratamento com variáveis discretas).

**Figura 75:** programa para a solução de  $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 12$ .



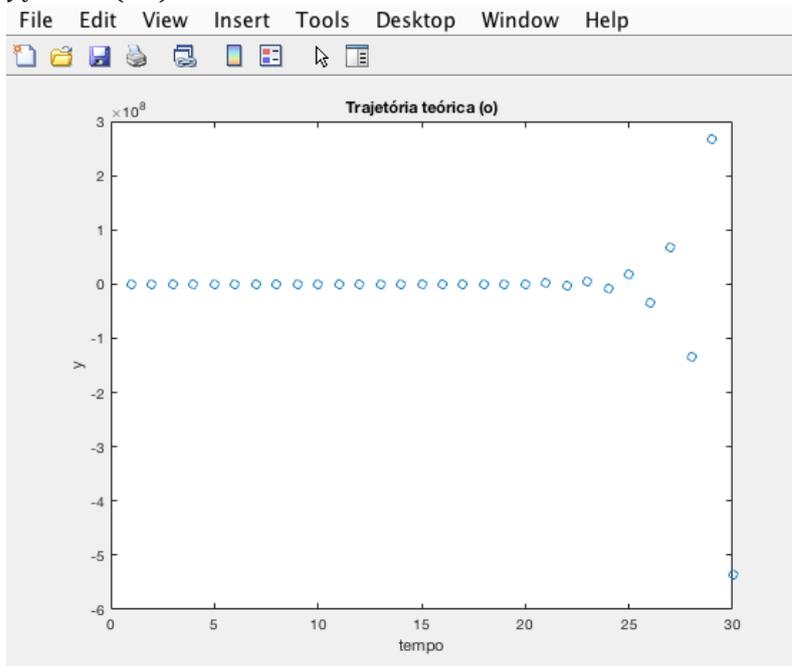
A Figura 76 mostra a trajetória discreta do exercício obtida pelo processo iterativo informado no programa.

**Figura 76:** trajetória discreta de  $y_t$  na solução de  $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 12$  e obtida por iteração.



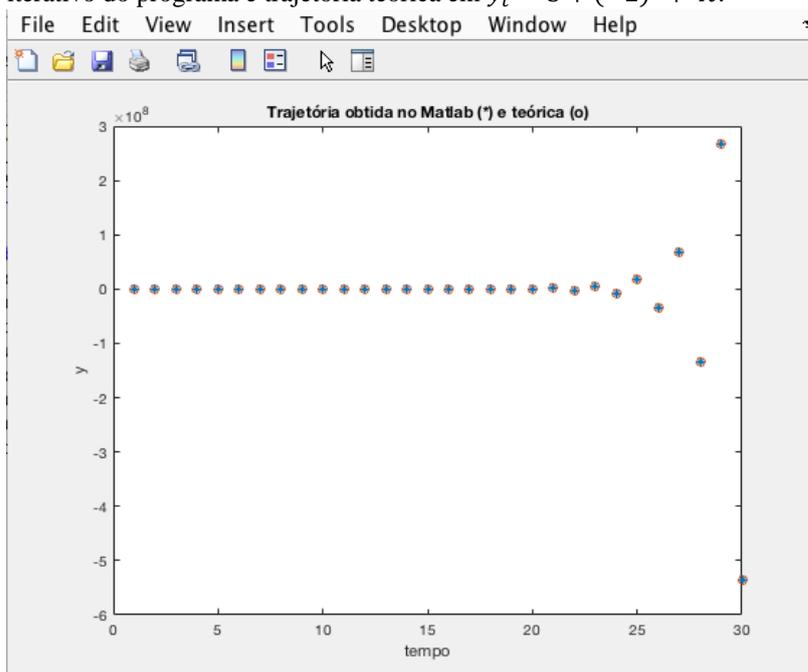
A Figura 77 exibe a trajetória discreta do exercício obtida atribuindo-se valores inteiros de  $t$  à equação  $y_t = 3 + (-2)^t + 4t$ .

**Figura 77:** trajetória discreta de  $y_t$  na solução de  $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 12$  e obtida pela equação teórica  $y_t = 3 + (-2)^t + 4t$ .



Na Figura 78 compara-se ambas as trajetórias, mostrando-se que, de fato, o método iterativo gerado no *loop* de programação conduz aos mesmos pontos da equação discreta teoricamente deduzida

**Figura 78:** comparação de trajetórias discretas de  $y_t$  na solução de  $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 12$ . Método iterativo do programa e trajetória teórica em  $y_t = 3 + (-2)^t + 4t$ .



Vejam agora o caso 2, de raízes reais repetidas, em que  $a_1^2 = 4a_2$ . Então  $b_1 = b_2 = -\frac{a_1}{2}$ . Sendo assim, a solução da equação homogênea *não* deve ser escrita como  $A_1b_1^t + A_2b_2^t = A_1b^t + A_2b^t = (A_1 + A_2)b^t \equiv A_3b^t$ , pois teríamos apenas uma constante, o que não serve para atender às duas condições iniciais. Então busca-se outro componente linearmente independente a  $A_3b^t$  que pode ser  $A_4tb^t$ , ou seja,  $y_t = A_4tb^t$ ,  $y_{t+1} = A_4(t+1)b^{t+1}$  e  $y_{t+2} = A_4(t+2)b^{t+2}$ . A função complementar fica, portanto,  $y_c = A_3b^t + A_4tb^t$ .

### Exercício 21

Seja a equação a diferenças de 2ª ordem  $y_{t+2} + 6y_{t+1} + 9y_t = 4$ . Dadas as condições iniciais  $y_0 = 1,25$  e  $y_1 = -5,75$ , encontre a solução geral.

Temos que  $a_1 = 6$  e  $a_2 = 9$ . Então  $a_1^2 = 36$  e  $4a_2 = 36$ , trata-se do caso 2. As raízes características repetidas são  $b_1, b_2 = b = \frac{-6}{2} = -3$ . A solução da homogênea é dada por  $y_c = A_3b^t + A_4tb^t = A_3(-3)^t + A_4t(-3)^t$ . Como a soma dos coeficientes é diferente de  $-1$  ( $a_1 + a_2 = 15 \neq -1$ ), sabemos que a solução particular pode ser  $y_p = \frac{c}{1+a_1+a_2} = \frac{4}{1+6+9} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ . Sendo assim, a solução completa é  $y_t = y_c + y_p = A_3(-3)^t + A_4t(-3)^t + \frac{1}{4}$ . Com as condições iniciais, iremos determinar os valores das duas constantes arbitrárias  $A_3$  e  $A_4$ . Para  $t = 0$ , temos que  $y_0 = A_3 + \frac{1}{4} = 1,25$ ,  $A_3 = 1$ . Para  $t = 1$ ,  $y_1 = -3A_3 - 3A_4 + \frac{1}{4} = -3 - 3A_4 + \frac{1}{4} = -5,75$ ,  $A_4 = 1$ . Portanto, a solução geral definida é  $(-3)^t + t(-3)^t + \frac{1}{4}$ .

Agora iremos obter a solução da equação a diferenças  $y_{t+2} + 6y_{t+1} + 9y_t = 4$  por Matlab. Para tanto, escreve-se a equação na forma  $y_{t+2} = -6y_{t+1} - 9y_t + 4$ , isolando-se a diferença mais alta no 1º membro. Na janela de comando, escreve-se a sequência de programação:

```
clear all;
%y(t+2) + 6y(t+1) + 9y(t) = 4, t>0
%y(0) = 1.25, y(1) = -5.75
t=[1:30];
y(1) = 1.25;
y(2) = -5.75;
for m=3:30;
    y(m)=-6*y(m-1)-9*y(m-2)+4;
end
plot(t,y,'*')
xlabel ('tempo')
ylabel ('y')
title ('Trajetória obtida no Matlab (*')
pause
ayte(1)=1.25;
ayte(2)=-5.75;
for i = 2:29
yte(i)=0.25+(-3)^(i)+i*(-3)^(i);
ayte(i+1)=yte(i);
end
plot(t,ayte,'o')
xlabel ('tempo')
ylabel ('y')
title ('Trajetória teórica (o)')
pause
plot(t,y,'*',t,ayte, 'o')
xlabel ('tempo')
ylabel ('y')
title ('Trajetória obtida no Matlab (*) e teórica (o)')
```

Note que novamente tivermos de fazer um programa detalhado a fim de que o computador execute o processo de iteração informado. Veja esse programa: na primeira linha, com o comando `clear all` apaga-se qualquer variável previamente criada pelo usuário que ainda esteja armazenada na memória do *software*. A segunda e terceira linha são apenas *labels* descritivos da equação a diferenças, que não são considerados na execução do programa:  $y_{t+2} + 6y_{t+1} + 9y_t = 4, t > 0$ ,  $y(0) = 1.25, y(1) = -5.75$ . Na 4ª linha, define-se uma variável  $t$  como um vetor de inteiros de 1 a 30:  $t=[1:30]$ . Nas 5ª e 6ª linhas, informam-se as duas condições iniciais do problema:  $y(1) = 1.25; y(2) = -5.75$ . Note que, por questão de conveniência, não se começa com 0 (pois o vetor de inteiros  $t$  somente pode ser definido a partir de 1). Então as duas condições iniciais são informadas na parametrização do problema dessa forma:  $y_0$  é  $y(1)$ , e  $y_1$  é  $y(2)$ .

Nas próximas três linhas do programa, cria-se um *loop* do tipo: `for m=3:30; y(m)=-6*y(m-1)-9*y(m-2)+4; end`. Ou seja, a rotina de um processo iterativo regido pela mesma equação a diferenças do exercício. Note que o processo começa em  $y(3)$  (equivalente ao  $y_2$ ), pois  $y(1)$  e  $y(2)$  já foram informados. Tem-se, portanto, todo o vetor de  $y$  para inteiros  $t, 1 < t < 30$ .

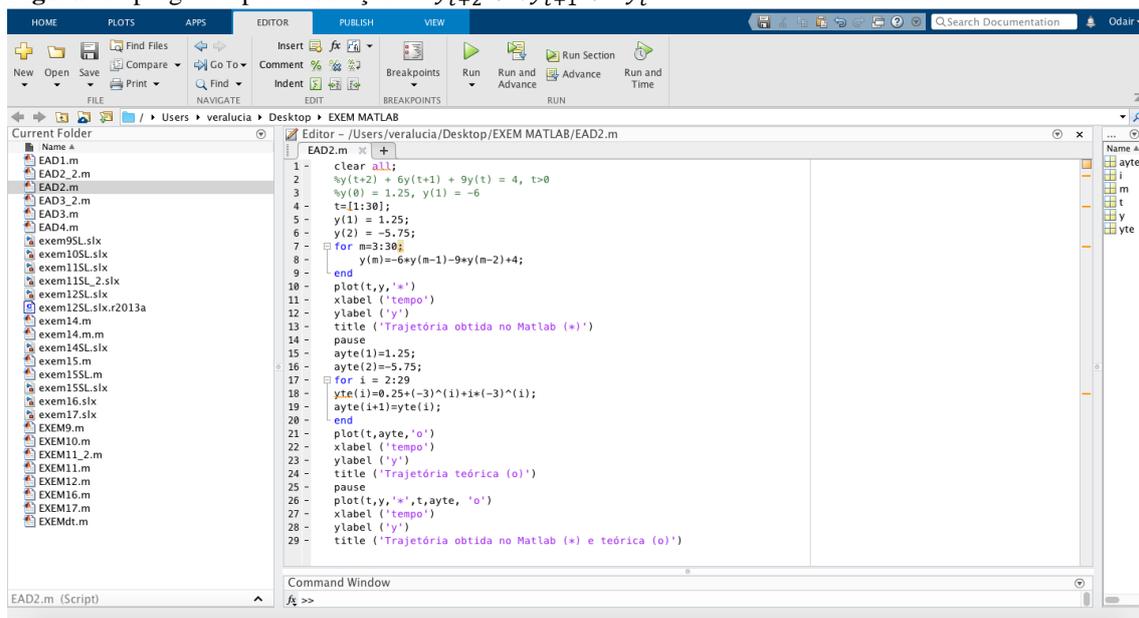
As cinco linhas seguintes, `plot(t,y,'*')`, `xlabel('tempo')`, `ylabel('y')`, `title('Trajetória obtida no Matlab (*))`, `pause`, representam uma sequência de comandos para se criar um gráfico do tipo *plot*, nas variáveis discretas *t*, como variável independente, e *y* como variável dependente, no qual pontos discretos são representados por um asterisco (\*). Informam-se os nomes dos eixos e o título do gráfico. O comando *pause* serve para visualizarmos o primeiro gráfico na saída do programa antes que o processamento continue.

O programa permite comparar a trajetória discreta obtida no processo iterativo com a solução teórica do exercício,  $y_t = (-3)^t + t(-3)^t + \frac{1}{4}$ , aplicada a valores discretos de *t*. Para tanto, nas linhas 15ª a 20ª cria-se uma variável discreta que segue a trajetória da equação teórica e que assume as mesmas condições iniciais: `ayte(1)=1.25; ayte(2)=-5.75; for i = 2:29, yte(i)=0.25+(-3)^(i)+i*(-3)^(i); ayte(i+1)=yte(i); end`. Note que, nessa sequência de pontos discretos de  $2 < t < 29$ , o primeiro valor informado da variável *yte* é o 2º, mas o da variável derivada *ayte* é o 3º (pois,  $ayte(i + 1) = yte(i)$ ), o último valor informado da variável *yte* é o 29º, mas o da variável derivada *ayte* é o 30º. Portanto, foram gerados valores do 1º ao 30º da variável *ayte*, que refletem o resultado teórico e que faz o programa produzir uma série de pontos obtidos pela equação teórica para depois compará-los com os pontos gerados apenas pelo processo iterativo.

Para tanto, a próxima sequência do programa gera o gráfico para os pontos comandados pela equação teórica: `plot(t,ayte,'o')`, `xlabel('tempo')`, `ylabel('y')`, `title('Trajetória teórica (o))`, `pause`. Por fim, comparam-se, no mesmo gráfico gerado no Matlab, esses pontos (“o”) com a trajetória discreta obtida pela iteração (pontos “\*”), na seguinte sequência de programação: `plot(t,y,'*',t,ayte,'o')`, `xlabel('tempo')`, `ylabel('y')`, `title('Trajetória teórica (o))`, `pause`, `plot(t,y,'*',t,ayte,'o')`, `xlabel('tempo')`, `ylabel('y')`, `title('Trajetória obtida no Matlab (*) e teórica (o))`.

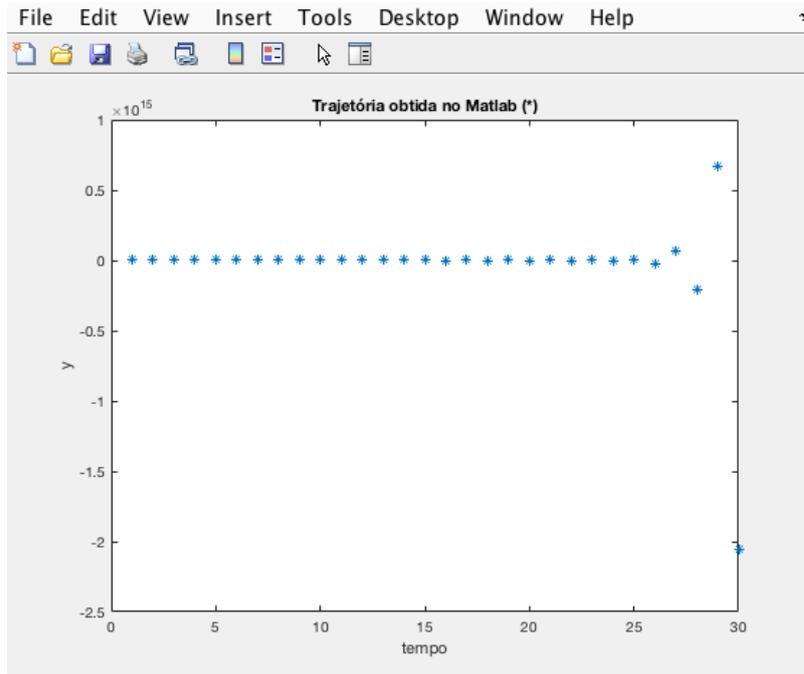
A Figura 79 mostra a janela do editor do Matlab com esse programa. A sequência de programação foi salva no arquivo EAD2.m. Ao executá-lo, obtém-se os gráficos construídos pelos comandos informados e que são exibidos aos usuários (figuras 80 a 82).

**Figura 79:** programa para a solução de  $y_{t+2} + 6y_{t+1} + 9y_t = 4$ .



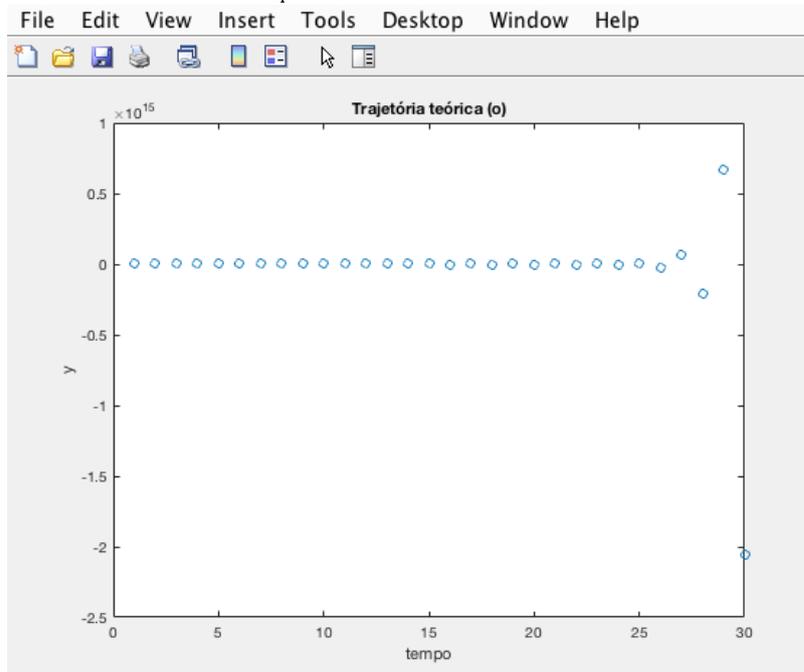
A Figura 80 mostra a trajetória discreta do exercício obtida pelo processo iterativo informado no programa.

**Figura 80:** trajetória discreta de  $y_t$  na solução de  $y_{t+2} + 6y_{t+1} + 9y_t = 4$  e obtida por iteração.



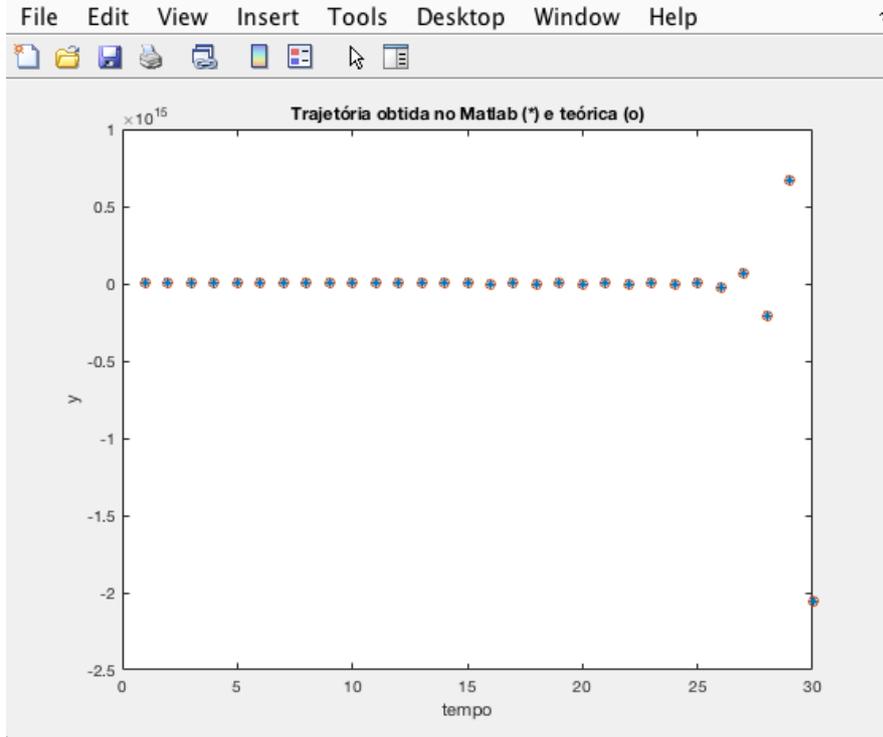
A Figura 81 exibe a trajetória discreta do exercício obtida atribuindo-se valores inteiros de  $t$  à equação  $y_t = (-3)^t + t(-3)^t + \frac{1}{4}$ .

**Figura 81:** trajetória discreta de  $y_t$  na solução de  $y_{t+2} + 6y_{t+1} + 9y_t = 4$  e obtida pela equação teórica  $y_t = (-3)^t + t(-3)^t + \frac{1}{4}$ .



Na Figura 82 comparam-se ambas as trajetórias, mostrando-se que, de fato, o método iterativo gerado no *loop* de programação conduz aos mesmos pontos da equação discreta teoricamente deduzida.

**Figura 82:** comparação de trajetórias discretas de  $y_t$  na solução de  $y_{t+2} + 6y_{t+1} + 9y_t = 4$ . Método iterativo do programa e trajetória teórica em  $y_t = (-3)^t + t(-3)^t + \frac{1}{4}$ .



Vejamos o caso 3, de raízes complexas, em que  $a_1^2 < 4a_2$ . O par de complexos conjugados é dado por  $b_1, b_2 = h \pm vi$ .  $h = -\frac{a_1}{2}$  e  $v = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$ . A solução da equação homogênea ou função complementar é  $y_c = A_1 b_1^t + A_2 b_2^t = A_1 (h + vi)^t + A_2 (h - vi)^t$ , que pode ser expressa na versão trigonométrica usando-se o teorema de Moivre:  $(h \pm vi)^t = R^t (\cos \theta t \pm i \sin \theta t)$ . Em que  $R = \sqrt{h^2 + v^2} = \sqrt{\frac{a_1^2 + 4a_2 - a_1^2}{4}} = \sqrt{a_2}$ . A letra grega  $\theta$  representa o ângulo em radianos,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Evidentemente  $\cos \theta = \frac{h}{R} = \frac{-a_1}{2\sqrt{a_2}}$ ,  $\sin \theta = \frac{v}{R} = \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{4a_2}} = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2\sqrt{a_2}}$ . Em termos trigonométricos, a solução da homogênea fica então  $y_c = A_1 R^t (\cos \theta t + i \sin \theta t)^t + A_2 R^t (\cos \theta t - i \sin \theta t)^t = R^t [(A_1 + A_2) \cos \theta t + (A_1 - A_2) i \sin \theta t] = R^t (A_5 \cos \theta t + A_6 \sin \theta t)$ , na qual  $A_5 = A_1 + A_2$  e  $A_6 = (A_1 - A_2)i$ .

Note a diferença em relação à função complementar do caso de equações diferenciais. Lá apareciam termos com  $\cos vt$  e  $\sin vt$ , aqui, no caso de equações a diferenças, aparecem termos com  $\cos \theta t$  e  $\sin \theta t$ . Lá aparecia o fator multiplicativo  $e^{ht}$ , no caso 3 das equações a diferenças o fator multiplicativo é  $R^t$ . Em suma, as soluções complexas para equações diferenciais são expressas em coordenadas cartesianas ( $h$  e  $v$ ),

enquanto que as soluções complexas das equações a diferenças aparecem em coordenadas polares ( $R$  e  $\theta$ ).

### Exercício 22

Seja a equação a diferenças de 2ª ordem  $y_{t+2} + \frac{1}{4}y_t = 5$ . Dadas as condições iniciais  $y_0 = 5$  e  $y_1 = 4,5$ , encontre a solução geral.

Temos que  $a_1 = 0$  e  $a_2 = \frac{1}{4}$ . Então  $a_1^2 < 4a_2$  e estamos no caso 3 de raízes complexas.  $h = \frac{-a_1}{2} = 0$ ,  $v = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2} = \frac{1}{2}$ .  $R = \sqrt{0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$ . Podemos facilmente calcular o ângulo  $\theta$ . Note que  $\cos \theta = \frac{h}{R} = 0$  e  $\sin \theta = \frac{v}{R} = 1$ . Portanto,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . A solução da homogênea é  $y_c = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(A_5 \cos \frac{\pi}{2}t + A_6 \sin \frac{\pi}{2}t\right)$ . A solução particular pode ser  $y_p = k$ . Substituindo na equação completa,  $k + \frac{1}{4}k = 5$ ,  $k\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 5$ ,  $k = 4$ . A solução geral, portanto,  $y_t = y_c + y_p = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(A_5 \cos \frac{\pi}{2}t + A_6 \sin \frac{\pi}{2}t\right) + 4$ . Com as condições iniciais, iremos determinar os valores das duas constantes arbitrárias  $A_5$  e  $A_6$ . Para  $t = 0$ , temos que  $y_0 = (A_5 \cos 0 + A_6 \sin 0) + 4 = A_5 + 4 = 5$ ,  $A_5 = 1$ . Para  $t = 1$ ,  $y_1 = \frac{1}{2}\left(A_5 \cos \frac{\pi}{2} + A_6 \sin \frac{\pi}{2}\right) + 4 = \frac{1}{2}(A_6) + 4 = 4,5$ ,  $A_6 = 1$ . Portanto, a solução geral definida é  $y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(\cos \frac{\pi}{2}t + \sin \frac{\pi}{2}t\right) + 4$ .

Vejamos a solução por Matlab da equação a diferenças  $y_{t+2} + \frac{1}{4}y_t = 5$ . No programa, escreve-se a equação na forma  $y_{t+2} = 5 - \frac{1}{4}y_t$ . Na janela de comando, digita-se a sequência:

```
clear all;
%y(t+2) + 0.25y(t) = 5, t>0
%y(1) = 5, y(2) = 4,5
y(1) = 5;
y(2) = 4.5;
for m=3:30;
    y(m)=-0.25*y(m-2)+5;
end
t=[1:30];
plot(t,y,'*')
xlabel ('tempo')
ylabel ('y')
title ('Trajetória obtida no Matlab (*)')
pause
t=[1:30];
ayte(1)=5;
ayte(2)=4.5;
for i = 2:29
yte(i)=(0.5)^i*(cos((pi/2)*i)+sin((pi/2)*i)) + 4;
ayte(i+1)=yte(i);
end
plot(t,ayte,'o')
xlabel ('tempo')
ylabel ('y')
title ('Trajetória teórica (o)')
```

```

pause
plot(t,y,'*',t,ayte,'o')
xlabel ('tempo')
ylabel ('y')
title ('Trajetória obtida no Matlab (*) e teórica (o)')

```

A explicação detalhada do programa assemelha-se a dos exercícios anteriores, de modo que chamaremos atenção apenas ao que há de específico neste exercício. Nas 4ª e 5ª linhas, informam-se as duas condições iniciais do problema:  $y(1) = 5$ ;  $y(2) = -4.5$ .

Nas próximas três linhas do programa, cria-se um *loop* do tipo: `for m=3:30; y(m)=-0.25*y(m-2)+5; end`. Ou seja, a rotina de um processo iterativo regido pela mesma equação a diferenças do exercício. O programa permite comparar a trajetória discreta obtida no processo iterativo com a solução teórica do exercício,  $y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(\cos\frac{\pi}{2}t + \sin\frac{\pi}{2}t\right) + 4$ , aplicada a valores discretos de  $t$ . Para tanto, nas linhas 16ª a 21ª cria-se uma variável discreta que segue a trajetória da equação teórica e que assume as mesmas condições iniciais: `ayte(1)=5; ayte(2)=4.5; for i = 2:29, yte(i)=(0.5)^i*(cos((pi/2)*(i))+sin((pi/2)*(i))) + 4; ayte(i+1)=yte(i); end`. Portanto, são gerados valores do 1º ao 30º da variável *ayte*, que refletem o resultado teórico e que faz o programa produzir uma série de pontos obtidos pela equação teórica para depois compará-los com os pontos gerados apenas pelo processo iterativo.

A Figura 83 mostra a janela do editor do Matlab com esse programa. A seqüência de programação foi salva no arquivo EAD3.m. Ao executá-lo, obtém-se os gráficos construídos pelos comandos informados e que são exibidos aos usuários (figuras 84 a 86).

**Figura 83:** programa para a solução de  $y_{t+2} + \frac{1}{4}y_t = 5$ .

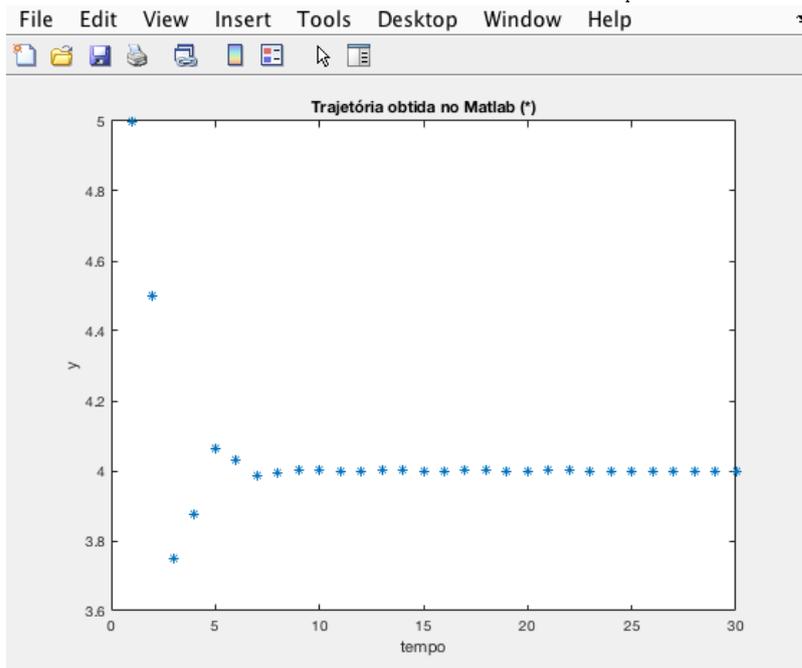
```

1 clear all;
2 yy(t+2) = 0.25*y(t) = 5, t>0
3 %y(1) = 5, y(2) = 4,5
4 - y(1) = 5;
5 - y(2) = 4.5;
6 - for m=3:30;
7 -     y(m)=-0.25*y(m-2)+5;
8 - end
9 - t=[1:30];
10 - plot(t,y,'*')
11 - xlabel ('tempo')
12 - ylabel ('y')
13 - title ('Trajetória obtida no Matlab (*)')
14 - pause
15 - t=[1:30];
16 - ayte(1)=5;
17 - ayte(2)=4.5;
18 - for i = 2:29
19 -     yte(i)=(0.5)^i*(cos((pi/2)*(i))+sin((pi/2)*(i))) + 4;
20 -     ayte(i+1)=yte(i);
21 - end
22 - plot(t,ayte,'o')
23 - xlabel ('tempo')
24 - ylabel ('y')
25 - title ('Trajetória teórica (o)')
26 - pause
27 - plot(t,y,'*',t,ayte,'o')
28 - xlabel ('tempo')
29 - ylabel ('y')
30 - title ('Trajetória obtida no Matlab (*) e teórica (o)')

```

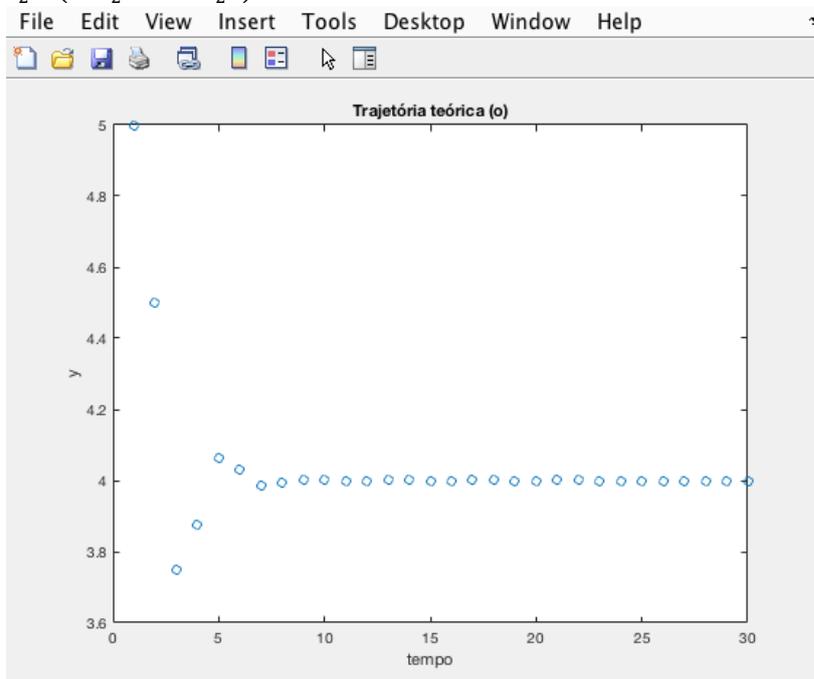
A Figura 84 mostra a trajetória discreta do exercício obtida pelo processo iterativo informado no programa. Sabendo-se que a solução teórica é  $y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(\cos\frac{\pi}{2}t + \sin\frac{\pi}{2}t\right) + 4$ , fica evidente que se trata de uma trajetória oscilatória e convergente, já que a base do expoente é menor que 1. É o que percebe nessa figura. Note também que a flutuação converge ao equilíbrio intertemporal estacionário em  $y_t = 4$ .

**Figura 84:** trajetória discreta de  $y_t$  na solução de  $y_{t+2} + \frac{1}{4}y_t = 5$  e obtida por iteração.



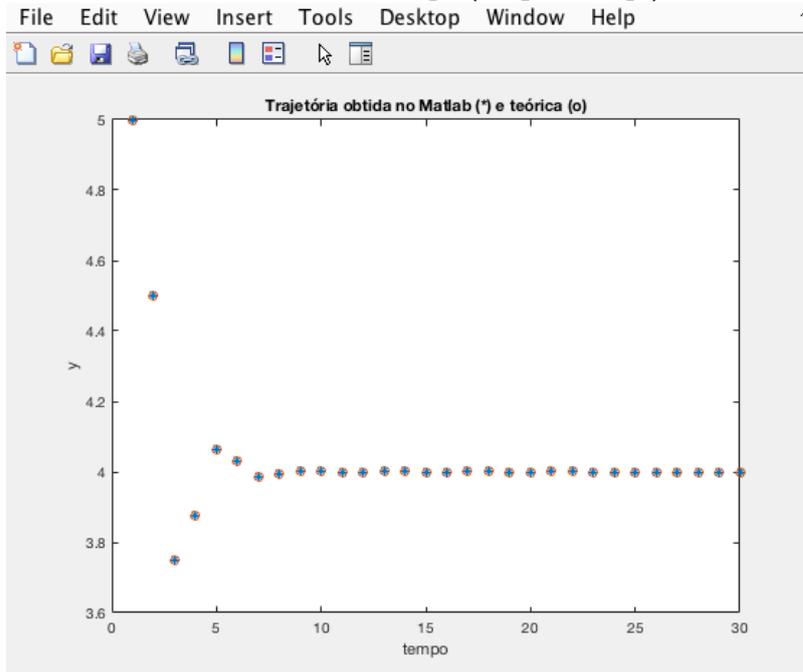
A Figura 85 exibe a trajetória discreta do exercício obtida atribuindo-se valores inteiros de  $t$  à equação  $y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(\cos \frac{\pi}{2} t + \sen \frac{\pi}{2} t\right) + 4$ .

**Figura 85:** trajetória discreta de  $y_t$  na solução de  $y_{t+2} + \frac{1}{4}y_t = 5$  e obtida pela equação teórica  $y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(\cos \frac{\pi}{2} t + \sen \frac{\pi}{2} t\right) + 4$ .



Na Figura 86 comparam-se ambas as trajetórias, mostrando-se que, de fato, o método iterativo gerado no *loop* de programação conduz aos mesmos pontos da equação discreta teoricamente deduzida.

**Figura 86:** comparação de trajetórias discretas de  $y_t$  na solução de  $y_{t+2} + \frac{1}{4}y_t = 5$ . Método iterativo do programa e trajetória teórica em  $y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(\cos \frac{\pi}{2}t + \sen \frac{\pi}{2}t\right) + 4$ .



### Exercício 23

Seja a equação a diferenças de 2ª ordem  $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 16y_t = 0$ . Dadas as condições iniciais  $y_0 = 1$  e  $y_1 = 2$ , encontre a solução geral.

Trata-se de uma equação a diferenças particular que é, em si mesma, uma equação homogênea, então nos preocupamos apenas com a solução geral dessa homogênea. Temos que  $a_1 = -4$  e  $a_2 = 16$ . Então  $a_1^2 < 4a_2$  e estamos novamente no caso de raízes complexas.  $h = \frac{-a_1}{2} = 2$ ,  $v = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2} = \frac{\sqrt{48}}{2} = \frac{\sqrt{3 \times 16}}{2} = 2\sqrt{3}$ .  $R = \sqrt{4 + 12} = 4$ . Podemos facilmente calcular o ângulo  $\theta$ . Note que  $\cos \theta = \frac{h}{R} = \frac{1}{2}$  e  $\sen \theta = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Portanto,  $\theta = \frac{\pi}{3}$ . A solução da equação é  $y_t = 4^t \left( A_5 \cos \frac{\pi}{3}t + A_6 \sen \frac{\pi}{3}t \right)$ .

Com as condições iniciais, iremos determinar os valores das duas constantes arbitrárias  $A_5$  e  $A_6$ . Para  $t = 0$ , temos que  $y_0 = (A_5 \cos 0 + A_6 \sen 0) = A_5 = 1$ . Para  $t = 1$ ,  $y_1 = 4 \left( A_5 \cos \frac{\pi}{3} + A_6 \sen \frac{\pi}{3} \right) = 4 \cos \frac{\pi}{3} + 4A_6 \sen \frac{\pi}{3} = 2$ ,  $A_6 = \frac{2-2}{4 \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0$ . Portanto, a solução geral definida é  $y_t = 4^t \cos \frac{\pi}{3}t$ .

Vejamos a solução por Matlab da equação a diferenças  $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 16y_t = 0$ . No programa, escreve-se a equação na forma  $y_{t+2} = 4y_{t+1} - 16y_t$ . Na janela de comando, digita-se a sequência:

```
clear all;
%y(t+2) -4y(t-1)+ 16y(t) = 0, t>=0
%y(0) = 1, y(1) = 2;
t=[1:30];
y(1) = 1;
```

```

y(2) = 2;
for m=3:30;
    y(m)=4*y(m-1)-16*y(m-2);
end
t=[1:30];
plot(t,y,'*')
xlabel ('tempo')
ylabel ('y')
title ('Trajetória obtida no Matlab (*')
pause
ayte(1)=1;
ayte(2)=2;
for i = 2:29
yte(i)=(4)^(i)*(cos(i*pi/3));
ayte(i+1)=yte(i);
end
plot(t,ayte,'o')
xlabel ('tempo')
ylabel ('y')
title ('Trajetória teórica (o)')
pause
plot(t,y,'*',t,ayte,'o')
xlabel ('tempo')
ylabel ('y')
title ('Trajetória obtida no Matlab (*) e teórica (o)')

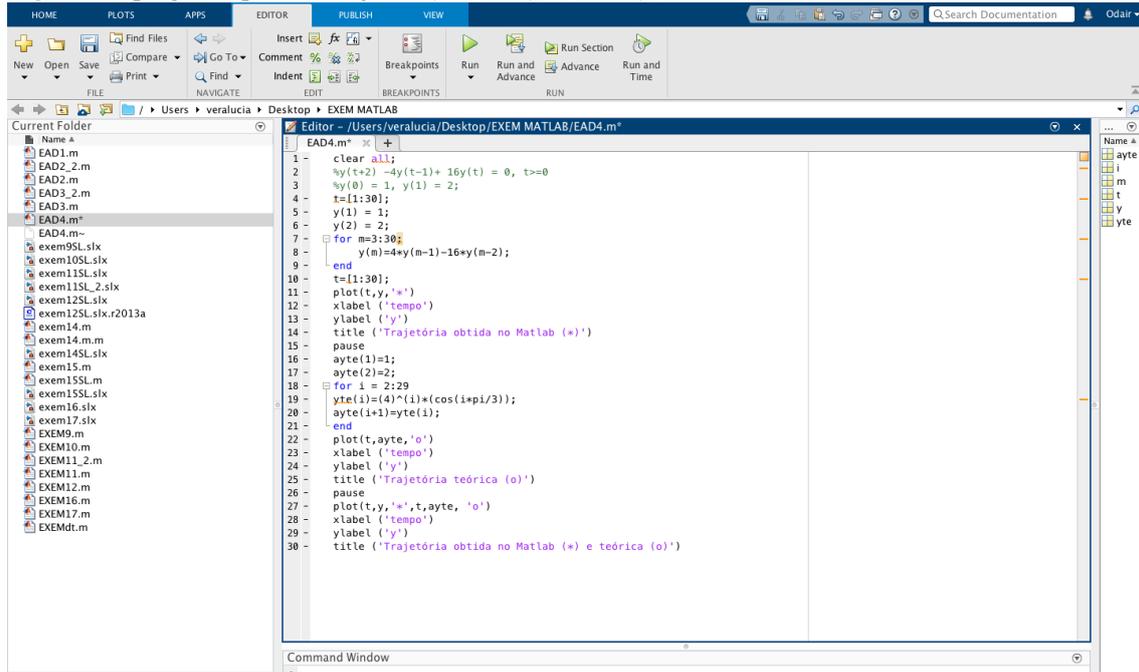
```

Novamente a explicação detalhada do programa assemelha-se a dos exercícios anteriores, de modo que chamaremos atenção apenas ao que há de específico no exercício. Nas 5ª e 6ª linhas, informam-se as duas condições iniciais do problema:  $y(1) = 1$ ;  $y(2) = 2$ .

Nas próximas três linhas do programa, cria-se um *loop* do tipo: `for m=3:30; y(m)=4*y(m-1)-16*y(m-2); end`. Ou seja, a rotina de um processo iterativo regido pela mesma equação a diferenças do exercício. O programa permite comparar a trajetória discreta obtida no processo iterativo com a solução teórica do exercício,  $y_t = 4^t \cos \frac{\pi}{3} t$ , aplicada a valores discretos de  $t$ . Para tanto, nas linhas 16ª a 21ª cria-se uma variável discreta que segue a trajetória da equação teórica e que assume as mesmas condições iniciais: `ayte(1)=1; ayte(2)=2; for i = 2:29, yte(i)=(4)^(i)*(cos(i*pi/3)); ayte(i+1)=yte(i); end`. Portanto, são gerados valores de 1 a 30 da variável *ayte*, que refletem o resultado teórico e que faz o programa produzir uma série de pontos obtidos pela equação teórica para depois compará-los com os pontos gerados apenas pelo processo iterativo.

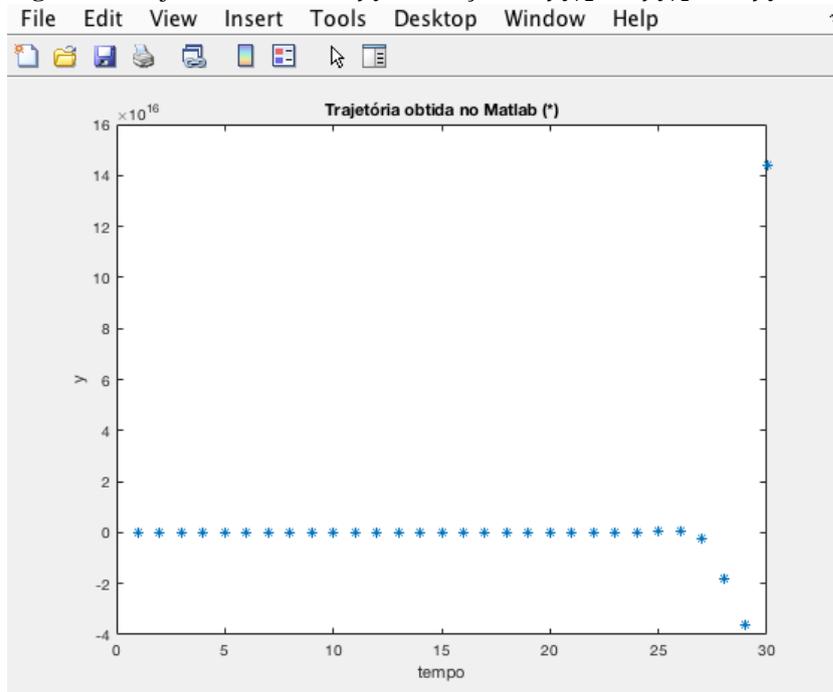
A Figura 87 mostra a janela do editor do Matlab com esse programa. A sequência de programação foi salva no arquivo EAD4.m. Ao executá-lo, obtém-se os gráficos construídos pelos comandos informados e que são exibidos aos usuários (figuras 88 a 90).

**Figura 87:** programa para a solução de  $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 16y_t = 0$ .



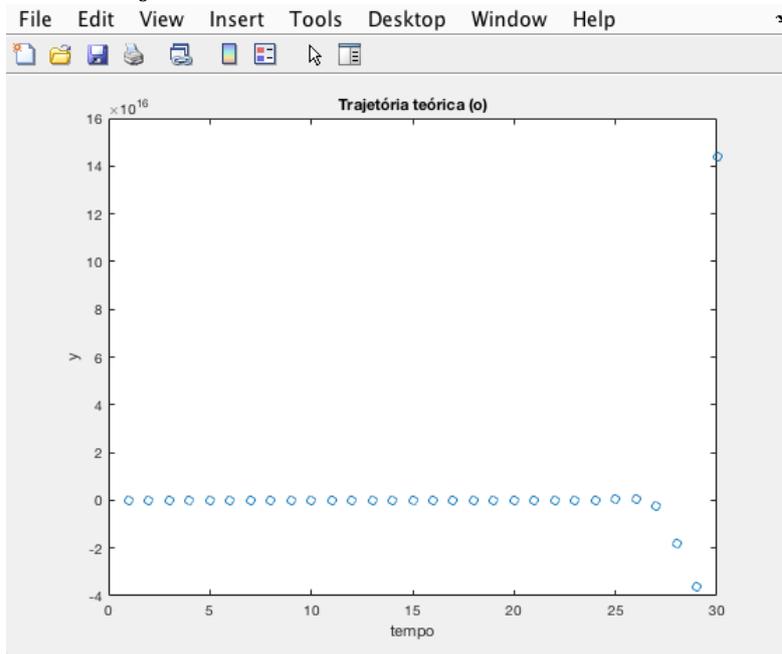
A Figura 88 mostra a trajetória discreta do exercício obtida pelo processo iterativo informado no programa. Sabendo-se que a solução teórica é  $y_t = 4^t \cos\frac{\pi}{3}t$ , fica evidente que se trata de uma trajetória oscilatória e divergente, já que a base do expoente é maior que 1. É o que percebe nessa figura.

**Figura 88:** trajetória discreta de  $y_t$  na solução de  $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 16y_t = 0$  e obtida por iteração.



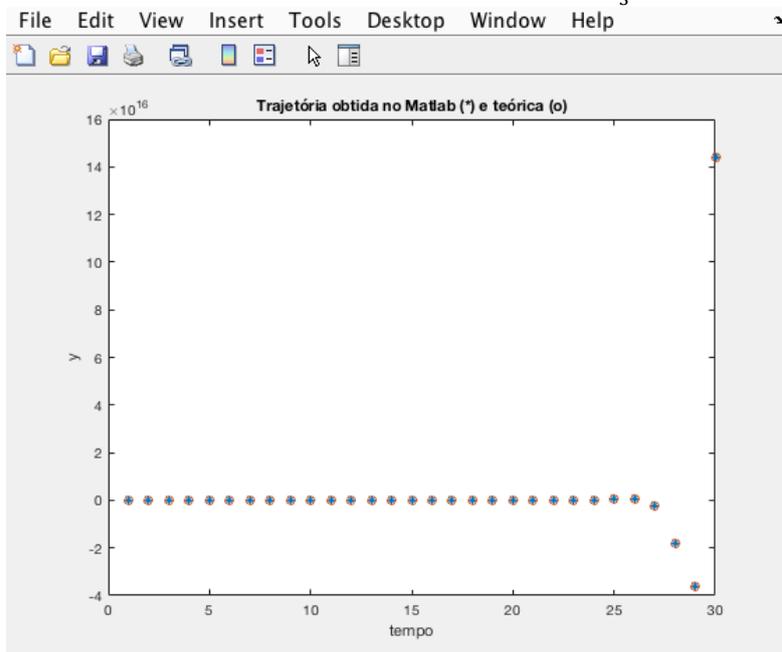
A Figura 89 exibe a trajetória discreta do exercício obtida atribuindo-se valores inteiros de  $t$  à equação  $y_t = 4^t \cos\frac{\pi}{3}t$ .

**Figura 89:** trajetória discreta de  $y_t$  na solução de  $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 16y_t = 0$  e obtida pela equação teórica  $y_t = 4^t \cos \frac{\pi}{3} t$ .



Na Figura 90, comparam-se ambas as trajetórias, mostrando-se que, de fato, o método iterativo gerado no *loop* de programação conduz aos mesmos pontos da equação discreta teoricamente deduzida.

**Figura 90:** comparação de trajetórias discretas de  $y_t$  na solução de  $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 16y_t = 0$ . Método iterativo do programa e trajetória teórica em  $y_t = 4^t \cos \frac{\pi}{3} t$ .



## A convergência da trajetória temporal

Quando  $t \rightarrow \infty$ , o que ocorre com a função complementar, a solução da homogênea associada  $y_c$ ? A fim de sabê-lo, observa-se a configuração da base  $b$ . No caso de equação a diferenças de 2ª ordem, suponha que as raízes características sejam distintas,  $b_1 \neq b_2$ . Se ambas possuem módulo maior que 1,  $|b_1| > 1$  e  $|b_2| > 1$ , então para ambos os termos da função complementar a trajetória é explosiva.  $y_c = A_1 b_1^t + A_2 b_2^t$  diverge em ambos os termos. Caso  $|b_1| < 1$  e  $|b_2| < 1$ , ambos os termos são convergentes e tendem a zero com  $t \rightarrow \infty$ . E se  $|b_1| > 1$  e  $|b_2| < 1$ ? Neste caso, o segundo termo tende a zero, mas o primeiro deles se afasta de zero e tem trajetória explosiva. Esse termo divergente acaba então dominando a série, o que leva a trajetória divergente de  $y_c$ .

### Exercício 24

Análise a trajetória de  $y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(A_5 \cos \frac{\pi}{2} t + A_6 \sin \frac{\pi}{2} t\right) + 4$ .

Como a base  $R = \frac{1}{2}$  é menor que 1, a trajetória é convergente, de fato, converge para 4.

### Exercício 25

Análise a trajetória de  $y_t = 4^t \left(A_5 \cos \frac{\pi}{3} t + A_6 \sin 3t\right)$ .

Como a base  $R = 4$  é maior que 1, a trajetória é divergente. A trajetória é não oscilatória (por quê?) e divergente.

## Modelo de Samuelson para a interação multiplicador-acelerador

Iremos aplicar a teoria matemática das equações a diferenças de 2ª ordem a um importante e muito conhecido modelo da macroeconomia, proposto pioneiramente pelo grande economista matemático Paul Samuelson. Trata-se do modelo clássico de interação entre o multiplicador e o acelerador, um processo estilizado de determinação da renda quando o princípio de aceleração age junto com o multiplicador keynesiano. Mostraremos que tal interação pode gerar endogenamente flutuações na economia.

A estrutura do modelo é a seguinte: seja a equação de determinação da renda agregada pelo lado da demanda agregada,  $Y_t = C_t + I_t + G_t$ , na qual o consumo agregado  $C_t$  é função da renda defasada do período anterior,  $C_t = \gamma Y_{t-1}$ , em que  $\gamma$  é a propensão marginal a consumir,  $0 < \gamma < 1$ . A variável  $I_t$  representa o investimento agregado induzido, o qual, no modelo, depende da diferença entre o consumo em  $t - 1$  e o consumo mais defasado no tempo, em  $t - 2$ ,  $I_t = \alpha(C_{t-1} - C_{t-2})$ . Trata-se da hipótese do acelerador como princípio determinante do investimento agregado.  $\alpha > 0$  é o acelerador. O princípio da aceleração assevera que a proporção  $\frac{I_t}{\Delta C_{t-1}}$  é fixa. O investimento, portanto, é induzido e isso, como veremos, forma um padrão estrutural no modelo representado por uma equação a diferenças de 2ª ordem. Tal equação retrata a interação entre o multiplicador e

o acelerador.  $G_t$  representa gasto exógeno do governo, que por suposição é constante, fixo em  $G_0$ .

Substituindo-se a função consumo na função investimento, temos portanto  $I_t = \alpha(\gamma Y_{t-1} - \gamma Y_{t-2}) = \alpha\gamma(Y_{t-1} - Y_{t-2})$ . Substituindo-o na equação da demanda agregada, temos agora  $Y_t = C_t + I_t + G_0 = \gamma Y_{t-1} + \alpha\gamma(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + G_0$ ,  $Y_t - \gamma(1 + \alpha)Y_{t-1} + \alpha\gamma Y_{t-2} = G_0$  ou, deslocando-se os subíndices dos períodos, temos a equação (34).

$$Y_{t+2} - \gamma(1 + \alpha)Y_{t+1} + \alpha\gamma Y_t = G_0 \quad (34)$$

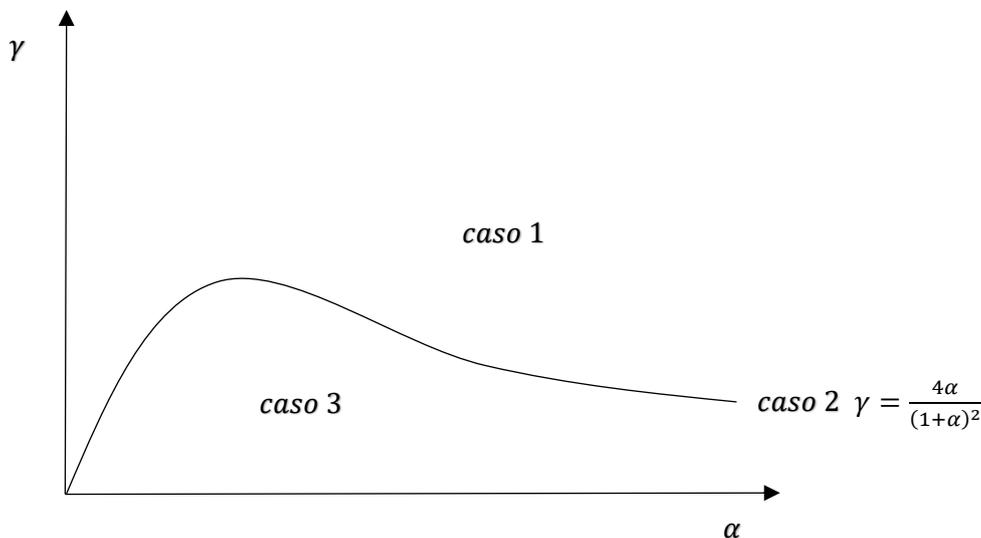
Esta última trata-se de uma equação a diferenças de 2ª ordem com coeficientes constantes  $(-\gamma(1 + \alpha), \alpha\gamma)$  e termo constante  $G_0$ .

A fim de compor a solução geral dessa equação, comecemos com uma solução particular  $Y_p$  que já sabemos ser determinada, na hipótese de solução constante, por  $Y_p = \frac{G_0}{1 - \gamma(1 + \alpha) + \alpha\gamma} = \frac{G_0}{1 - \gamma}$ . Onde  $\frac{1}{1 - \gamma}$  é o conhecido multiplicador keynesiano associado à ausência de investimento induzido. A solução particular  $Y_p$  indica a renda de equilíbrio intertemporal e estacionário  $\bar{Y}$ , que no caso, coincide com o próprio equilíbrio estático, renda igual a dispêndio agregado,  $Y^*$ .

Analisemos agora a solução da equação a diferenças de 2ª ordem do modelo de Samuelson separando os três casos de raízes características. No caso 1 de raízes reais distintas,  $a_1^2 > 4a_2$ , ou seja,  $\gamma^2(1 + \alpha)^2 > 4\alpha\gamma$ ,  $\gamma(1 + \alpha)^2 > 4\alpha$ ,  $\gamma > \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}$ . No caso 2 de raízes reais repetidas naturalmente  $\gamma = \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}$  e é fácil perceber que no caso 3 de raízes complexas  $\gamma < \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}$ .

À luz dessas equações e inequações que separam os casos, pode-se representar as três situações em um gráfico que relaciona a propensão marginal a consumir  $\gamma$  (e portanto o multiplicador) com o acelerador  $\alpha$ . A curva relevante no gráfico que demarca as regiões é  $\gamma = \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}$ , curva convexa que parte da origem. O gráfico 36 facilita essa análise.

**Gráfico 36:** relação entre o acelerador  $\alpha$  e o multiplicador  $\gamma$  no modelo de Samuelson.



Note que os três casos podem ser convergentes ou divergentes. Portanto, cabe uma análise adicional sobre esse aspecto das possíveis soluções do modelo multiplicador-acelerador.

### *Convergência versus divergência*

Com base na equação (34) podemos facilmente obter a equação característica do modelo de Samuelson  $b^2 - \gamma(1 + \alpha)b + \alpha\gamma = 0$ . Ou seja,  $b_1, b_2 = \frac{\gamma(1+\alpha) \pm \sqrt{\gamma^2(1+\alpha)^2 + 4\alpha\gamma}}{2}$ . Então a trajetória da renda agregada  $Y_{t+2}$  será convergente ou divergente, oscilatória ou não, dependendo do módulo e do sinal das raízes características  $b_1$  e  $b_2$ , que por sua vez dependem dos valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma$ .

Sobre as raízes características, note que  $b_1 + b_2 = \gamma(1 + \alpha)$  e  $b_1 b_2 = \alpha\gamma$ . Note ainda que  $(1 - b_1)(1 - b_2) = 1 - b_2 - b_1 + b_1 b_2 = 1 - (b_1 + b_2) + b_1 b_2 = 1 - \gamma(1 + \alpha) + \alpha\gamma = 1 - \gamma$ . Como  $0 < \gamma < 1$ ,  $0 > -\gamma > -1$ ,  $1 > 1 - \gamma > 0$  ou  $0 < (1 - b_1)(1 - b_2) < 1$ .

No caso 1, de raízes reais e distintas, como  $\alpha\gamma > 0$ ,  $b_1 b_2 > 0$ , e como  $\gamma(1 + \alpha) > 0$ ,  $b_1 + b_2 > 0$ . Por conseguinte,  $b_1$  e  $b_2$  são ambos positivos, ou seja, não há oscilações na trajetória de  $Y_t$ . Vejamos agora os possíveis valores do multiplicador  $\gamma$  e do acelerador  $\alpha$  em função das posições relativas das raízes características positivas  $b_1$  e  $b_2$ .

- 1) Se  $0 < b_2 < b_1 < 1$ , a condição obtida da especificação do modelo  $0 < (1 - b_1)(1 - b_2) < 1$  é sempre atendida. Note ainda que como  $0 < \gamma < 1$  e, neste subcaso,  $0 < b_1 b_2 < 1$ , então  $0 < \alpha\gamma < 1$ , e portanto  $\alpha\gamma < 1$ .
- 2) Se  $0 < b_2 < b_1 = 1$ , a condição  $0 < (1 - b_1)(1 - b_2) < 1$  é violada na primeira desigualdade, porque  $1 - b_1 = 0$ . Note ainda que como, neste subcaso,  $b_2 + 1 = \gamma(1 + \alpha)$  e  $b_2 = \alpha\gamma$ ,  $\alpha\gamma + 1 = \gamma + \alpha\gamma$ ,  $\gamma = 1$ , o que viola a condição  $0 < \gamma < 1$ . Portanto, esse segundo subcaso não é possível.
- 3) Se  $0 < b_2 < 1 < b_1$ ,  $(1 - b_1)(1 - b_2) < 0$  e a condição  $0 < (1 - b_1)(1 - b_2) < 1$  é flagrantemente violada. Este terceiro subcaso também é impossível.
- 4) Se  $1 = b_2 < b_1$ ,  $b_1 + 1 = \gamma(1 + \alpha)$  e  $b_1 = \alpha\gamma$ ,  $\alpha\gamma + 1 = \gamma + \alpha\gamma$ ,  $\gamma = 1$ , o que viola a condição  $0 < \gamma < 1$ . Portanto, esse quarto subcaso também não é possível.
- 5) Se  $1 < b_2 < b_1$ ,  $(1 - b_1)(1 - b_2) > 0$ . Resta testar a condição necessária  $(1 - b_1)(1 - b_2) < 1$ . Isso ocorrerá se os módulos de  $b_1$  e de  $b_2$  forem suficientemente pequenos. Note que, neste subcaso,  $b_1 b_2 > 1$  e portanto  $\alpha\gamma > 1$ . Este quinto subcaso, portanto, é possível.

Então temos dois subcasos do caso 1 nos quais as condições requeridas os parâmetros estão satisfeitas: o 1º e o 5º. A tabela abaixo sintetiza essas conclusões:

Caso	Subcaso	Valores de $\alpha$ e $\gamma$	$Y_t$
1: raízes reais distintas $\gamma > \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$	1: $0 < b_2 < b_1 < 1$	$\alpha\gamma < 1$	Não oscilatório e convergente
	5: $1 < b_2 < b_1$	$\alpha\gamma > 1$	Não oscilatório e divergente

No caso 2, de raízes reais repetidas,  $b_1, b_2 = b = \frac{\gamma(1+\alpha)}{2} > 0$ , pois  $\alpha > 0$  e  $\gamma > 0$ . Portanto, não existe oscilação e ficamos com três possibilidades:

- 1) Se  $0 < b < 1$ , a condição obtida da especificação do modelo  $0 < (1-b)(1-b) < 1$  é sempre atendida. Note que como  $0 < \gamma < 1$  e, neste subcaso,  $0 < b^2 < 1$ , então  $0 < \alpha\gamma < 1$ , e portanto  $\alpha\gamma < 1$ . Este subcaso é possível.
- 2) Se  $b = 1$ , viola-se a condição  $0 < (1-b)(1-b) < 1$ . Sendo assim, este segundo subcaso não é possível.
- 3) Se  $b > 1$ , a condição  $0 < (1-b)(1-b) < 1$  é satisfeita se  $1 < b < 2$ . Este terceiro subcaso também é possível. Note que, neste subcaso,  $b^2 > 1$  e portanto  $\alpha\gamma > 1$ .

Então temos dois subcasos do caso 2 nos quais as condições requeridas aos parâmetros estão satisfeitas: o 1º e o 3º. A tabela abaixo sintetiza essas conclusões:

Caso	Subcaso	Valores de $\alpha$ e $\gamma$	$Y_t$
2: raízes reais idênticas $\gamma = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$	1: $0 < b < 1$	$\alpha\gamma < 1$	Não oscilatório e convergente
	3: $1 < b < 2$	$\alpha\gamma > 1$	Não oscilatório e divergente

No caso 3, de raízes complexas conjugadas, ocorre oscilação degrau e ciclos econômicos endógenos. Vejamos por quê. Vimos que, neste caso,  $R = \sqrt{h^2 + v^2} = \sqrt{a_2}$ , onde  $a_2$  é o coeficiente do termo  $Y_t$  na equação a diferenças (34). Portanto,  $R = \sqrt{\alpha\gamma}$ . Temos três possibilidades:

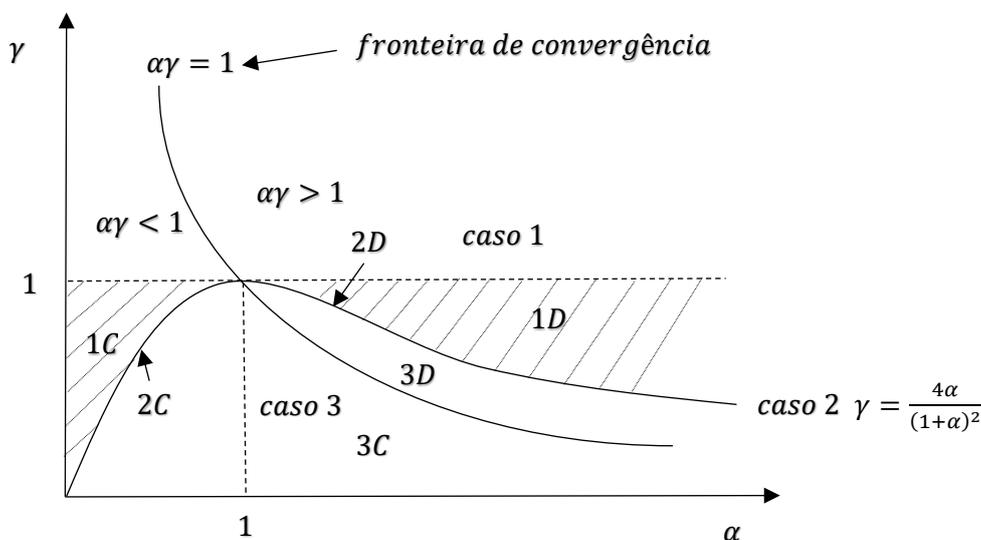
- 1) Se  $R < 1$ ,  $\alpha\gamma < 1$  e a trajetória é oscilante e convergente.
- 2) Se  $R = 1$ ,  $\alpha\gamma = 1$  e a trajetória é oscilante e de amplitude constante no tempo.
- 3) Se  $R > 1$ ,  $\alpha\gamma > 1$  e a trajetória é oscilante e explosiva.

Então temos três subcasos do caso 3 de solução complexa e oscilatória. A tabela abaixo sintetiza as conclusões:

Caso	Subcaso	Valores de $\alpha$ e $\gamma$	$Y_t$
3: raízes complexas $\gamma < \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$	1: $R < 1$	$\alpha\gamma < 1$	Oscilação degrau e convergente
	2, 3: $R \geq 1$	$\alpha\gamma \geq 1$	Oscilação degrau e divergente /constante

Podemos sintetizar em um único gráfico, no plano  $\gamma \times \alpha$ , as conclusões do modelo de Samuelson na análise dos três casos com essa análise dos subcasos. Para tanto, além da curva  $\gamma = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$ , iremos acrescentar a hipérbole  $\alpha\gamma = 1$ . No gráfico (37), os subcasos são identificados por *C* e *D* se estiverem associados às trajetórias convergente ou divergente. Assim, por exemplo, *IC* é o subcaso convergente do caso 1, o subcaso 1. *ID* é o subcaso divergente desse caso, subcaso 5. E assim por diante.

**Gráfico 37:** relação entre o acelerador  $\alpha$  e o multiplicador  $\gamma$  no modelo de Samuelson. Análise de subcasos.



Note que para  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 1$  na função  $\gamma = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$  e  $\gamma = 1$  na função  $\gamma = \frac{1}{\alpha}$ . Portanto, ambas as curvas se encontram em  $(\alpha, \gamma) = (1, 1)$ . Note que  $\frac{d\gamma}{d\alpha} = \frac{4(1+\alpha)^2 - 8\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)^4}$ ,  $\frac{d\gamma}{d\alpha}(1) = \frac{4 \times 4 - 8 \times 2}{(1+1)^4} = 0$ , portanto,  $\alpha = 1$  também é um ponto de máximo da curva côncava.

#### Exercício 26

No modelo de Samuelson do multiplicador-acelerador, seja  $\alpha = 0,8$  e  $\gamma = 0,7$ . Que tipo de trajetória temporal da renda agregada  $Y_t$  resultará?

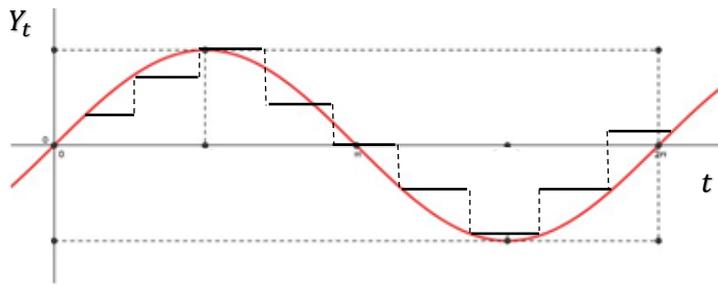
No caso,  $\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} = \frac{4 \times 0,8}{(1+0,8)^2} = \frac{3,2}{3,24} \sim 1$ . Como  $\gamma = 0,7 < 1$ , as raízes são complexas. Note que  $\alpha\gamma = 0,8 \times 0,7 = 0,48 < 1$ . Portanto se está no caso 3C, como oscilação de grau amortecida e convergente (vide gráfico (37)).

#### Exercício 27

No modelo de Samuelson do multiplicador-acelerador, seja  $\alpha = 2$  e  $\gamma = 0,5$ . Que tipo de trajetória temporal da renda agregada  $Y_t$  resultará?

No caso,  $\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} = \frac{8}{9} \sim 0,89$ . Como  $\gamma = 0,5 < 0,89$ , as raízes são complexas. Por outro lado,  $\alpha\gamma = 2 \times 0,5 = 1$ . Portanto se está sobre a hipérbole equilátera e no caso de oscilação de grau uniforme (nem divergente e nem amortecida). Note que a oscilação “uniforme” não é de amplitude constante, mas de amplitudes que oscilam segundo uma função senoidal, esta sim de amplitude constante conforme gráfico (38).

Gráfico 38: oscilação degrau uniforme.



## Inflação e desemprego em tempo discreto

Vejam os um modelo de interação entre inflação e desemprego no tempo discreto. Retomaremos o mesmo modelo, a respeito, já visto no caso de equações diferenciais, com as mesmas premissas “econômicas”, mas teremos de fazer algumas adaptações para o caso de equações a diferenças. No caso contínuo (vide p. 72), montamos as equações de (22) a (24) que reescreveremos agora:  $p = \alpha - T - \beta U + g\pi$ , que é relação de Phillips com expectativas,  $\frac{d\pi}{dt} = j(p - \pi)$ , que traduz a hipótese de expectativas adaptativas, e  $\frac{dU}{dt} = -k(m - p)$ , o efeito real da política monetária. Temos, portanto, três variáveis endógenas no modelo:  $p$ , a taxa de inflação,  $\pi$ , a inflação esperada, e  $U$  a taxa de desemprego. Temos ainda seis parâmetros:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $g$ ,  $j$ ,  $k$  e  $m$ , a taxa de crescimento da moeda nominal, uma variável de decisão política.

No caso discreto, a análise é feita por período, e iremos representar a relação de Phillips empregando subíndices. A equação (35) corresponde à essa relação em equação a diferenças.

$$p_t = \alpha - T - \beta U_t + g\pi_t \quad (\alpha, \beta > 0; 0 < g \leq 1) \quad (35)$$

A equação (36) representa a hipótese de expectativas adaptativas para o caso discreto:

$$\pi_{t+1} - \pi_t = j(p_t - \pi_t) \quad (0 < j \leq 1) \quad (36)$$

A equação (37), por sua vez, traduz o efeito da política monetária no desemprego em termos de equação a diferenças:

$$U_{t+1} - U_t = -k(m - p_{t+1}) \quad (37)$$

Nesta última equação, note que utilizamos no 2º membro  $p_{t+1}$  em vez de  $p_t$ . É mais simples imaginar o erro de ajuste do desemprego pela incerteza em  $t + 1$ , que em  $t$ , pensado como o período presente.

Iremos condensar as equações de (35) a (37) em apenas uma equação, com uma única variável endógena. Escolhemos manter apenas a variável  $p$ , inflação. Para tanto, dada a primeira equação,  $p_t = \alpha - T - \beta U_t + g\pi_t$ , identifiquemos o padrão associado. Utilizando-se a diferença,  $\Delta p_t \equiv p_{t+1} - p_t$ , vamos adiantar o índice:  $p_{t+1} = \alpha - T - \beta U_{t+1} + g\pi_{t+1}$ . E portanto,  $p_{t+1} - p_t = -\beta(U_{t+1} - U_t) + g(\pi_{t+1} - \pi_t) = \beta k(m - p_{t+1}) +$

$gj(p_t - \pi_t)$ . A variável endógena  $\pi_t$ , expectativa de inflação, precisa ser eliminada desta equação a fim de que fiquemos apenas com a variável  $p_t$  em vários períodos  $t$ . Para tanto,  $g\pi_t$  será substituído utilizando-se a equação (35):  $g\pi_t = p_t - (\alpha - T) + \beta U_t$ . E assim, rearranjando,  $p_{t+1} + \beta k p_{t+1} = \beta km + gjp_t - gj\pi_t + p_t$ ,  $(1 + \beta k)p_{t+1} = \beta km + gjp_t - j(p_t - (\alpha - T) + \beta U_t) + p_t = \beta km + gjp_t - jp_t + j(\alpha - T) - j\beta U_t + p_t$ ,  $(1 + \beta k)p_{t+1} - [1 - j(1 - g)]p_t + j\beta U_t = \beta km + j(\alpha - T)$ .

Agora, usemos a equação (37):  $U_{t+1} - U_t = -k(m - p_{t+1})$ . Antes, iremos adiantar um período a última equação do parágrafo anterior, obtendo:  $(1 + \beta k)p_{t+2} - [1 - j(1 - g)]p_{t+1} + j\beta U_{t+1} = \beta km + j(\alpha - T)$ . Fazendo-se esta menos aquela, chega-se a  $(1 + \beta k)(p_{t+2} - p_{t+1}) - [1 - j(1 - g)](p_{t+1} - p_t) + j\beta(U_{t+1} - U_t) = 0$ , em que, agora, substitui-se a expressão dentro do último parêntese por  $-k(m - p_{t+1})$ . Ficamos assim:  $(1 + \beta k)p_{t+2} - (1 + \beta k)p_{t+1} - [1 - j(1 - g)]p_{t+1} + [1 - j(1 - g)]p_t + j\beta k p_{t+1} - j\beta km = 0$ . Pondo-se em evidência  $p_{t+1}$ , temos então  $(1 + \beta k)p_{t+2} - [(1 + \beta k) + [1 - j(1 - g)] - j\beta k]p_{t+1} + [1 - j(1 - g)]p_t = j\beta km$ . Vamos desenvolver a expressão entre colchetes no 2º termo:  $[(1 + \beta k) + [1 - j(1 - g)] - j\beta k] = 1 + gj + (1 - j) + \beta k - j\beta k = 1 + gj + (1 - j) + (1 - j)\beta k = 1 + gj + (1 - j)(1 + \beta k)$ . Portanto,  $(1 + \beta k)p_{t+2} - [1 + gj + (1 - j)(1 + \beta k)]p_{t+1} + [1 - j(1 - g)]p_t = j\beta km$ . Dividindo-se todos os termos por  $1 + \beta k$ , chega-se a equação a diferenças (38):

$$p_{t+2} - \frac{1 + gj + (1 - j)(1 + \beta k)}{1 + \beta k} p_{t+1} + \frac{1 - j(1 - g)}{1 + \beta k} p_t = \frac{j\beta km}{1 + \beta k} \quad (38)$$

Note que a equação a diferenças para a variável inflação  $p_t$  trata-se de uma equação de 2ª ordem com coeficientes constantes  $a_1 = -\frac{1 + gj + (1 - j)(1 + \beta k)}{1 + \beta k}$  e  $a_2 = \frac{1 - j(1 - g)}{1 + \beta k}$  e termo constante  $c = \frac{j\beta km}{1 + \beta k}$ . Podemos facilmente obter a solução particular dessa equação a diferenças, que indica o equilíbrio intertemporal, no caso, estacionário por se tratar de uma constante  $\bar{p} = \frac{c}{1 + a_1 + a_2} = \frac{j\beta km}{1 - 1 - gj - (1 - j)(1 + \beta k) + 1 - j(1 - g)} = \frac{j\beta km}{j\beta k} = m$ . Conclui-se que a taxa de equilíbrio intertemporal da inflação é a taxa de expansão monetária.

Vejam agora a solução da equação homogênea associada que nos fornece o desvio em relação ao equilíbrio estacionário. Novamente temos de examinar os três casos: raízes reais distintas, raízes reais repetidas e raízes complexas, dependendo de  $a_1^2 \geq 4a_2$ . Ou seja,  $[1 + gj + (1 - j)(1 + \beta k)]^2 \geq 4[1 - j(1 - g)](1 + \beta k)$ . Como se tem um grande número de parâmetros, não existe um gráfico classificatório de fácil visualização como no modelo multiplicador-acelerador de Samuelson.

Precisamos analisar as raízes características  $(b_1, b_2)$  da equação em tela e sabemos que  $b_1 + b_2 = -a_1 = \frac{1 + gj}{1 + \beta k} + 1 - j$ . Como  $\frac{1 + gj}{1 + \beta k} > 0$  e  $1 - j > 0$ ,  $b_1 + b_2 > 0$ . Por outro lado, o produto das raízes é  $b_1 b_2 = a_2 = \frac{1 - j(1 - g)}{1 + \beta k}$ . Com os parâmetros são positivos e  $0 < j, g < 1$ ,  $b_1 b_2 \in (0, 1)$ . Note ainda que  $(1 - b_1)(1 - b_2) = 1 - (b_1 + b_2) + b_1 b_2 = 1 + a_1 + a_2 = \frac{c}{\bar{p}} = \frac{j\beta k}{1 + \beta k} > 0$ , pois todos os parâmetros são positivos.

Como  $b_1 b_2 > 0$ , as raízes possuem o mesmo sinal. Como também  $b_1 + b_2 > 0$ , se estivermos no caso de raízes reais distintas, ambas são positivas,  $b_1, b_2 > 0$  e não existe oscilação. Sabendo-se que  $(1 - b_1)(1 - b_2) > 0$ , obviamente  $b_1, b_2 \neq 0$  e exclui-se os

subcasos 2 e 4 das raízes características do modelo de Samuelson (respectivamente,  $0 < b_2 < b_1 = 1$  e  $1 = b_2 < b_1$ ). O subcaso 3 daquela modelo também não é possível, pois se  $0 < b_2 < 1 < b_1$ , ou seja,  $b_1 > 1$  e  $b_2 < 1$ , viola-se  $(1 - b_1)(1 - b_2) > 0$ , o produto de um fator negativo com outro positivo não pode ser maior que zero. O subcaso 5,  $b_1$  e  $b_2 > 1$ , viola a condição  $b_1 b_2 < 1$ . Portanto, o único subcaso possível para raízes reais distintas é  $b_1$  e  $b_2 < 1$ , mais precisamente  $0 < b_1, b_2 < 1$ , o subcaso 1. O que resulta em trajetória temporal não oscilatória e convergente.

Vejamos o caso 2 de raízes reais repetidas  $b_1 = b_2 = b$ . Por raciocínio análogo ao do caso anterior, conclui-se facilmente que  $0 < b < 1$  e a trajetória novamente é não oscilatória e convergente. Finalmente, no caso 3 das raízes complexas, sabemos que o módulo das raízes conjugada  $R$  é igual a  $\sqrt{a_2}$ . Como  $0 < a_2 < 1$ , naturalmente  $R < 1$  e a trajetória se torna convergente com oscilação, um tipo de flutuação degrau amortecida.

### *Análise da trajetória da taxa de desemprego*

Reescrevamos a equação (37) com a dinâmica da taxa de desemprego  $U_t$ :  $U_{t+1} - U_t = -k(m - p_{t+1})$ ,  $k > 0$ , que capta o efeito real na economia da política monetária. Vamos nos livrar da variável dependente inflação  $p_t$  e ficarmos apenas com a variável taxa de desemprego na equação a diferenças do modelo. Ora, de (35),  $p_t = \alpha - T - \beta U_t + g\pi_t$ , a relação de Phillips com expectativa. Substituindo na outra equação,  $U_{t+1} - U_t = -k(m - \alpha + T + \beta U_{t+1} - g\pi_{t+1})$ ,  $(1 + \beta k)U_{t+1} - U_t = k(\alpha - T - m) + kg\pi_{t+1}$ . Para eliminar a variável endógena expectativa de inflação  $\pi_t$  dessa equação, iremos empregar a equação (36),  $\pi_{t+1} - \pi_t = j(p_t - \pi_t)$ , das expectativas adaptativas. Façamos, para tanto, a mudança de período na outra equação:  $(1 + \beta k)U_{t+2} - U_{t+1} = k(\alpha - T - m) + kg\pi_{t+2}$ . Agora subtrai-se esta equação da outra:  $(1 + \beta k)U_{t+2} - (1 + \beta k)U_{t+1} - U_{t+1} + U_t = kg\pi_{t+2} - kg\pi_{t+1}$ ,  $(1 + \beta k)U_{t+2} - (2 + \beta k)U_{t+1} + U_t = kg(\pi_{t+2} - \pi_{t+1})$ . Nesse 2º membro, a expressão entre parênteses representa a versão deslocada para adiante da equação de expectativas adaptativas. Naturalmente que  $\pi_{t+2} - \pi_{t+1} = j(p_{t+1} - \pi_{t+1})$ . Portanto, a equação diferencial fica:

$$(1 + \beta k)U_{t+2} - (2 + \beta k)U_{t+1} + U_t = kgj(p_{t+1} - \pi_{t+1}) \quad (39)$$

Equação que já incorpora todas as informações do modelo.

Temos de eliminar as variáveis inflação  $p_t$  e expectativa de inflação  $\pi_t$  dessa equação (note que  $\pi$  ainda não desapareceu), pois queremos uma expressão em que apareça apenas a taxa de desemprego como variável dependente. A fim de eliminar-se  $p_{t+1}$  e  $\pi_{t+1}$ , note que, de (37),  $kp_{t+1} = U_{t+1} - U_t + km$ . Lembre ainda que, por (35),  $g\pi_t = p_t - (\alpha - T) + \beta U_t$ . Multiplicando-se essa expressão por  $-kj$  e deslocando-se os índices de tempo,  $-kjg\pi_{t+1} = -kj p_{t+1} + kj(\alpha - T) - \beta kj U_{t+1}$ , e na outra equação multiplicando-a por  $-j$ ,  $-j k p_{t+1} = -j U_{t+1} + j U_t - j k m$ , que pode ser substituído no 1º termo do 2º membro da equação anterior:  $-kjg\pi_{t+1} = -j U_{t+1} + j U_t - j k m + kj(\alpha - T) - \beta kj U_{t+1} = -j(1 + \beta k)U_{t+1} + j U_t + kj(\alpha - T - m)$ . Finalmente, voltando à equação (39) e substituindo no correspondente termo no 2º membro,  $(1 + \beta k)U_{t+2} - (2 + \beta k)U_{t+1} + U_t = kgj(p_{t+1} - \pi_{t+1}) = gjkp_{t+1} - kjg\pi_{t+1} = jgU_{t+1} - jgU_t + jgkm - j(1 + \beta k)U_{t+1} +$

$jU_t + kj(\alpha - T - m) = gj(U_{t+1} - U_t + km) - j(1 + \beta k)U_{t+1} + jU_t + kj(\alpha - T - m)$ ,  $(1 + \beta k)U_{t+2} - (2 + \beta k)U_{t+1} + U_t - gjU_{t+1} + gjU_t - gjkm + j(1 + \beta k)U_{t+1} - jU_t = kj(\alpha - T - m)$ . Portanto,  $U_{t+2} - \frac{(2+\beta k)+gj-j(1+\beta k)}{(1+\beta k)}U_{t+1} + \frac{1+gj-j}{(1+\beta k)}U_t = \frac{kj(\alpha-T-m)+kgjm}{(1+\beta k)}$ . Rearranjando e simplificando, chega-se à equação a diferenças (40) que rege a trajetória de desemprego do modelo inflação e desemprego no tempo discreto:

$$U_{t+2} - \frac{1+gj+(1-j)(1+\beta k)}{(1+\beta k)}U_{t+1} + \frac{1-j(1-g)}{(1+\beta k)}U_t = \frac{kj(\alpha-T-m)+kgjm}{(1+\beta k)} \quad (40)$$

Note que os coeficientes  $a_1 = -\frac{1+gj+(1-j)(1+\beta k)}{1+\beta k}$  e  $a_2 = \frac{1-j(1-g)}{1+\beta k}$  são os mesmos que regem a equação (39) da trajetória da inflação  $p_t$ , portanto, a função complementar é a mesma nos dois casos, no entanto agora o termo é diferente, não mais o termo  $\frac{j\beta km}{1+\beta k}$  mas o termo  $c = \frac{kj(\alpha-T-m)+kgjm}{(1+\beta k)}$ . No primeiro caso, o da trajetória da inflação, a taxa de equilíbrio intertemporal era a taxa de crescimento da moeda nominal  $m$ . Já a taxa de equilíbrio intertemporal do desemprego é  $\bar{U} = \frac{c}{1+a_1+a_2} = \frac{kj(\alpha-T-m)+kgjm}{\beta kj}$ . Note que a expressão  $1 + a_1 + a_2 = \frac{\beta kj}{(1+\beta k)}$  já tinha sido calculada para a trajetória da inflação.

#### Relação de Phillips de longo-prazo

A taxa de equilíbrio estacionário do desemprego é dada, portanto, por  $\bar{U} = \frac{kj[\alpha-T-(1-g)m]}{\beta kj} = \frac{1}{\beta}[\alpha - T - (1 - g)m]$ . Ora, sabemos que a taxa de equilíbrio intertemporal da inflação é  $\bar{p} = m$ . Assim, podemos substituir  $m$  por  $\bar{p}$  na equação anterior de modo a relacionar  $\bar{U}$  com  $\bar{p}$ . A equação (41) o faz e é conhecida como relação de Phillips de longo-prazo.

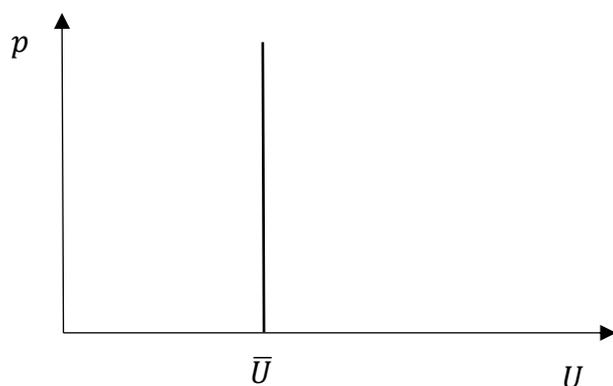
$$\bar{U} = \frac{1}{\beta}[\alpha - T - (1 - g)\bar{p}] \quad (41)$$

Nos livros de macroeconomia explica-se que a curva de Phillips é vertical no longo prazo. À luz da equação (41) vejamos como isso acontece: No longo prazo,  $g = 1$ , pois os trabalhadores, num período suficientemente longo, conseguem repassar toda a expectativa de inflação para os preços na equação (35), assim sendo,  $p_t = \alpha - T - \beta U_t + \pi_t$ . Como, com essa hipótese,  $1 - g = 0$ , equação (41) fica  $\bar{U} = \frac{\alpha-T}{\beta}$  qualquer que seja o nível do equilíbrio estacionário  $\bar{p}$  da inflação. No plano  $p \times U$  de inflação e desemprego, uma reta vertical relaciona qualquer nível de inflação a uma única taxa de desemprego  $\bar{U}$  que é a chamada taxa natural de desemprego, conforme gráfico 39.

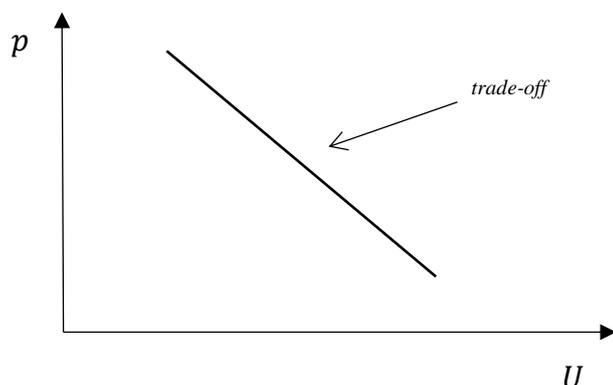
Num intervalo de tempo intermediário, entre o curto e o longo prazo, imagina-se um  $g < 1$ , de modo que a relação  $p \times U$  é comandada por uma reta negativamente inclinada, não vertical, portanto, com um coeficiente de inclinação que pode ser obtido a partir da equação (41):  $\bar{p} = -\frac{\beta}{1-g}\bar{U} + \frac{1}{1-g}(\alpha - T)$ . O *trade-off* entre inflação e desemprego no curto e médio prazo é garantido pelo coeficiente negativo  $-\frac{\beta}{1-g}$  da equação (gráfico 40). Quando  $g$  se aproxima de zero a inclinação da curva se aproxima da vertical como na curva de Phillips de longo prazo. Em suma, existe o *trade-off*

dependendo de como a taxa de inflação esperada pode se infiltrar na estrutura salarial e na própria taxa de inflação real.

**Gráfico 39:** relação entre inflação  $p$  e desemprego  $U$  na curva de Phillips de longo prazo.



**Gráfico 40:** relação entre inflação  $p$  e desemprego  $U$  na curva de Phillips de curto e médio prazo.



### **Equação a diferenças de termo variável**

Vejamos alguns casos de equações a diferenças de 2ª ordem com termo variável. Começemos pelo caso de termo variável na forma de  $cm^t$ . Antes tratamos apenas de equação de 2ª ordem com coeficiente e termo constante, na forma  $y_{t+2} + a_1y_{t+1} + a_2y_t = c$ . Agora iremos manter os coeficientes constantes, porém o termo será uma função  $f(t) = cm^t$  de modo que  $y_{t+2} + a_1y_{t+1} + a_2y_t = cm^t$ . Neste caso, é evidente que só muda a solução particular.

Vamos empregar, para obter essa solução, o método dos coeficientes indeterminados. Tal método tem como requisito que o termo variável  $f(t)$  e suas diferenças sucessivas assumam, em conjunto, somente um número finito de tipos de expressão, à parte as constantes multiplicativas. Segue um primeiro exercício a respeito.

### Exercício 28

Seja a equação a diferenças de 2ª ordem  $y_{t+2} + y_{t+1} - 3y_t = 7^t$ . Calcule a solução particular  $y_p$ .

Trata-se de uma equação de 2ª ordem e um termo variável do tipo  $cm^t$  em que o coeficiente multiplicador é  $c = 1$  e a base é  $m = 7$ . Mostraremos que  $7^t$  resulta em um número finito de tipos de expressões. De fato, note que, se  $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$ , então  $\Delta 7^t = 7^{t+1} - 7^t = (7 - 1)7^t = 6(7)^t$ . Continuando,  $\Delta^2(7^t) = \Delta(\Delta 7^t) = \Delta(6(7)^t) = 6(7)^{t+1} - 6(7)^t = 6(7 - 1)7^t = 36(7)^t$ . Portanto, todas as diferenças são múltiplos de  $7^t$  e há somente um único tipo de expressão.

Vamos tentar uma solução particular do tipo  $B(7)^t$ , substituindo na equação a diferenças,  $B(7)^{t+2} + B(7)^{t+1} - 3B(7)^t = 7^t$ ,  $B(7^2 + 7 - 3)(7)^t = 7^t$ ,  $B = \frac{1}{49+7-3} = \frac{1}{53}$ . Portanto, a solução particular é  $y_p = B(7)^t = \frac{1}{53}(7)^t$ , um equilíbrio móvel.

O exercício indica como seria a solução do caso mais geral em que o termo é do tipo  $cm^t$ . Note que todas as diferenças sucessivas assumem a mesma forma de expressão  $Bm^t$ . Portanto,  $y_t = Bm^t$  é a solução particular candidata. Substituindo a solução experimental  $y_t = Bm^t$ ,  $y_{t+1} = Bm^{t+1}$  e  $y_{t+2} = Bm^{t+2}$  em  $y_{t+2} + a_1y_{t+1} + a_2y_t = cm^t$ ,  $Bm^{t+2} + a_1Bm^{t+1} + a_2Bm^t = cm^t$ ,  $B = \frac{c}{m^2+a_1m+a_2}$  e a solução particular fica  $y_t = \frac{cm^t}{m^2+a_1m+a_2}$ ,  $m^2 + a_1m + a_2 \neq 0$ . Se o denominador se anula, deve-se tentar  $y_t = Btm^t$ . Se falhar novamente, tenta-se  $y_t = Bt^2m^t$  e assim por diante.

Vejamos agora quando o termo variável da equação a diferenças de 2ª ordem apresenta-se na forma  $ct^n$ . Note que agora a variável independente  $t$  aparece na base da potenciação e não no expoente.  $n$  é um inteiro positivo. Façamos um exercício à guisa de exemplo.

### Exercício 29

Seja a equação a diferenças de 2ª ordem  $y_{t+2} + 5y_{t+1} + 2y_t = t^2$ . Calcule a solução particular  $y_p$ .

Trata-se de um termo na forma de  $ct^n$ , com  $c = 1$  e  $n = 2$ . As primeiras três diferenças de  $t^2$  são  $\Delta t^2 = (t + 1)^2 - t^2 = 2t + 1$ ,  $\Delta^2 t^2 = \Delta(\Delta t^2) = \Delta(2t + 1) = 2(t + 1) + 1 - 2t - 1 = 2$ ,  $\Delta^3 t^2 = \Delta(\Delta^2 t^2) = \Delta 2 = 0$ . Sendo assim, aparecem apenas três tipos de expressões, com  $t^2$ ,  $t$  e constante. Destarte, a solução experimental pode ser do tipo  $y_t = B_0 + B_1t + B_2t^2$ , e portanto  $y_{t+1} = B_0 + B_1(t + 1) + B_2(t + 1)^2 = B_0 + B_1t + B_1 + B_2t^2 + 2B_2t + B_2 = (B_0 + B_1 + B_2) + (B_1 + 2B_2)t + B_2t^2$ ,  $y_{t+2} = B_0 + B_1(t + 2) + B_2(t + 2)^2 = B_0 + B_1t + 2B_1 + B_2t^2 + 4B_2t + 4B_2 = (B_0 + 2B_1 + 4B_2) + (B_1 + 4B_2)t + B_2t^2$ . Substituindo na equação a diferenças,  $y_{t+2} + 5y_{t+1} + 2y_t = (B_0 + 2B_1 + 4B_2) + (B_1 + 4B_2)t + B_2t^2 + 5(B_0 + B_1 + B_2) + 5(B_1 + 2B_2)t + 5B_2t^2 + 2B_0 + 2B_1t + 2B_2t^2 = t^2$ . E assim,  $(8B_0 + 7B_1 + 9B_2) + (8B_1 + 14B_2)t + 8B_2t^2 = t^2$ .

Igualando-se os 2 membros, termo a termo:  $8B_0 + 7B_1 + 9B_2 = 0$ ,  $8B_1 + 14B_2 = 0$  e  $8B_2 = 1$ ,  $B_2 = \frac{1}{8}$ . Substituindo-se nas outras equações,  $B_0 = \frac{13}{256}$  e  $B_1 = \left(-\frac{7}{4}\right)\frac{1}{8} = -\frac{7}{32}$ . E assim a solução particular fica  $y_p = \frac{13}{256} - \frac{7}{32}t + \frac{1}{8}t^2$ .

Para um termo variável numa potência genérica  $ct^n$ , pode-se tentar como solução particular um polinômio de grau  $n$ ,  $y_t = B_0 + B_1t + B_2t^2 + \dots + B_nt^n$ . Se a solução tentativa falhar, testa-se  $y_t = t(B_0 + B_1t + B_2t^2 + \dots + B_nt^n)$  e assim por diante.

### Equação a diferenças lineares de ordens mais altas

A ordem de uma equação a diferenças, como vimos, é o número máximo de períodos de defasagem de tempo. Assim em uma equação de enésima ordem há um máximo de  $n$  defasagens. Veremos a solução de uma equação a diferenças de enésima ordem com coeficientes constantes e termo constante:  $y_{t+n} + a_1y_{t+(n-1)} + \dots + a_{n-1}y_{t+1} + a_ny_t = c$ .

Iniciemos pela solução particular tentativa, começando do candidato mais simples,  $y_t = k$ . Ou então, se não der certo,  $y_t = kt$ ,  $y_t = kt^2$  e assim por diante. Depois se busca a função complementar, o que resulta em nova equação característica, agora um polinômio de grau  $n$ ,  $b^n + a_1b^{n-1} + \dots + a_{n-1}b + a_n = 0$ .

Tal polinômio apresenta  $n$  raízes características  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Conhecendo-se essas raízes, no caso de raízes reais distintas constrói-se a solução geral da homogênea como sendo  $y_c = \sum_{i=1}^n A_i b_i^t$ . No caso de raízes reais repetidas, por exemplo  $b_1 = b_2 = b_3$ , os três primeiros termos ficam  $A_1 b_1^t + A_2 t b_1^t + A_3 t^2 b_1^t$ . No caso de raízes complexas, imagine o par de raízes complexas conjugadas  $b_{n-1}, b_n$ . Então os dois últimos termos da soma são combinados na expressão trigonométrica  $R^t(A_{n-1} \cos \theta t + A_n \sin \theta t)$ . Expressão análoga vale para qualquer outro par de raízes complexas. Se houver outro par repetido de raízes complexas, uma das duas expressões trigonométricas associadas deve receber um fator  $tR^t$  no lugar de  $R^t$ . Em todos os três casos de raízes, a solução geral continua sendo a soma da solução geral da homogênea com a solução particular da equação completa, mas no caso de equação a diferenças de enésima ordem aparecem  $n$  constantes arbitrárias associadas às  $n$  condições iniciais do problema em questão.

#### Exercício 30

Seja a equação a diferenças de 3ª ordem  $y_{t+3} - \frac{7}{8}y_{t+2} + \frac{1}{8}y_{t+1} + \frac{1}{32}y_t = 9$ . Calcule a solução geral  $y_t$ .

Começemos pela solução particular tentativa,  $y_t = k$ . Portanto,  $(1 - \frac{7}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32})k = 9$ ,  $\frac{32-28+4+1}{32}k = \frac{9}{32}k = 9$ ,  $k = 32$ . E assim  $y_t = 32$ . Vejamos agora a solução da homogênea associada, a função complementar que depende das raízes da equação característica do exercício  $b^3 - \frac{7}{8}b^2 + \frac{1}{8}b + \frac{1}{32} = 0$ , que são  $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$  e  $b_3 = -\frac{1}{8}$ , pois a equação pode ser fatorada da seguinte maneira:  $(b - \frac{1}{2})(b - \frac{1}{2})(b + \frac{1}{8}) = (b - \frac{1}{2})(b^2 + \frac{b}{8} - \frac{b}{2} - \frac{1}{16}) = (b - \frac{1}{2})(b^2 - \frac{3}{8}b - \frac{1}{16}) = b^3 - \frac{3}{8}b^2 - \frac{1}{16}b - \frac{b^2}{2} + \frac{3}{16}b + \frac{1}{32} = b^3 - \frac{7}{8}b^2 + \frac{1}{8}b + \frac{1}{32}$ . Destarte, a função complementar fica  $y_c = A_1(\frac{1}{2})^t + A_2t(\frac{1}{2})^t + A_3(-\frac{1}{8})^t$ , e solução completa é  $y_t = y_c + y_p = A_1(\frac{1}{2})^t + A_2t(\frac{1}{2})^t + A_3(-\frac{1}{8})^t + 32$ . Note que todas as

raízes têm módulo menor que 1, portanto há convergência para o equilíbrio estacionário 32.

### Convergência e o teorema de Schur

Existe um teorema matemático usado para determinar a convergência da trajetória temporal de  $y_t$ , solução da equação a diferenças, quando a equação a diferenças de ordem elevada não é resolvida facilmente. A condição necessária e suficiente de convergência da trajetória temporal é que cada uma das raízes da equação característica tenha módulo menor que 1. Trata-se do conhecido teorema de Schur. Issai Schur (1875-1941) foi um grande matemático judeu que trabalhou a maior parte de sua vida na Alemanha.

O teorema de Schur pode ser formalizado da seguinte maneira: as raízes da equação polinomial de enésimo grau  $a_0b^n + a_1b^{n-1} + \dots + a_{n-1}b + a_n = 0$  são todas  $< 1$ , em módulo, se e somente se os  $n$  seguintes determinantes de uma sequência específica de matrizes são todos positivos. As matrizes, e, portanto, os determinantes, são as seguintes:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & 0 & a_n \\ a_n & 0 & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & a_0 \end{vmatrix} \dots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 & a_n & \dots & a_2 \\ \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & a_n \\ a_n & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix} > 0 \quad (42)$$

Observe como são formadas as matrizes que ensejam os respectivos determinantes. Na diagonal principal aparecem entradas apenas com  $a_0$ , a partir da matriz  $4 \times 4$  identificam-se submatrizes. Na primeira submatriz, acima e à esquerda, a entrada a nordeste é de zero ou triângulos de zeros. Em cada coluna, as estradas abaixo dos elementos da diagonal principal são coeficientes de índices crescentemente maiores  $a_1, a_2 \dots$ . A submatriz a sudeste, na diagonal principal, é a imagem espelhada desta. Na segunda matriz, acima e à direita, na diagonal principal aparece entradas apenas com  $a_n$ . A entrada a sudoeste é de zero ou triângulos de zeros. As estradas acima dos elementos da diagonal principal são coeficientes de índices cada vez menores  $a_{n-1}, a_{n-2} \dots$ . A submatriz a sudoeste, na diagonal secundária, é a imagem espelhada desta.

Note que no teorema de Routh, usado para a avaliar a convergência da trajetória temporal associada a equações diferenciais, os determinantes são outros:  $|a_1|, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$ ,

$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} \dots$ . No entanto, ambos os teoremas são análogos. Em ambos

os casos, note que na expressão da equação característica fazemos sempre  $a_0 = 1$ , por convenção. Contudo, isso não garante que o primeiro determinante do teorema de Schur ( $\Delta_1$ ) tenha o sinal adequado.

A título de fixação, vejamos dois exercícios:

### Exercício 31

Dada a equação a diferenças de 2ª ordem com coeficientes e termo constantes  $y_{t+2} + 3y_{t+1} + 2y_t = 12$ , veja se existe convergência sem resolvê-la, apenas aplicando o teorema de Schur.

Nesta equação,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 3$  e  $a_2 = 2$ , portanto  $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0$  já viola o teorema de Schur e conseqüentemente a condição de convergências. Note que as raízes características são  $b_1 = -1$ ,  $b_2 = -2$ , pois, na equação característica  $b^2 + 3b + 2 = 0$ , a soma das raízes é  $-3$  e o produto é  $2$ . Sendo assim, como um dos módulos da raiz é maior que 1 a trajetória da variável dependente é divergente.

### Exercício 32

Dada a equação a diferenças de 2ª ordem com coeficientes e termo constantes  $y_{t+2} + \frac{1}{6}y_{t+1} - \frac{1}{6}y_t = 2$ , veja se existe convergência sem resolvê-la, apenas aplicando o teorema de Schur.

Nesta equação,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \frac{1}{6}$  e  $a_2 = -\frac{1}{6}$ , portanto  $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 1 \end{vmatrix} = \frac{35}{36} >$

$$0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & 0 & a_n \\ a_n & 0 & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1176}{1296} > 0 \text{ e, sendo assim, estão satisfeitas as}$$

condições necessárias e suficientes do teorema de Schur e para a convergência na trajetória da variável dependente.

## Equações diferenciais e equações a diferenças simultâneas

Até aqui, a análise da dinâmica da variável dependente foi feita com base em uma única equação dinâmica, equação diferencial ou equação a diferenças. Agora veremos métodos que permitem analisar o movimento dessa variável a partir de um sistema de equações dinâmicas simultâneas. A solução de sistemas dinâmicos segue a mesma metodologia das equações individuais de se analisar o conjunto de soluções particulares e conjunto das funções complementares, as soluções gerais das homogêneas associadas. As primeiras representam os valores de equilíbrio intertemporais das variáveis dependentes e as segundas indicam os desvios em relação aos equilíbrios intertemporais.

A estabilidade dinâmica naturalmente irá depender dos sinais e dos valores das raízes características.

### *A gênese de sistemas dinâmicos*

Sistemas de equações dinâmicas descrevem o conjunto de padrões de variações interativas. Cada equação dinâmica, por si só, descreve um único padrão de variação, especialmente em se tratando de equação de ordem a partir de 2. No entanto, interessamos agora por padrões de variação interativos descritos por um sistema de equações dinâmicas. A título de exemplo, assinala-se o caso de modelos econômicos multissetoriais nos quais apresenta-se uma equação dinâmica para cada setor da economia, e se trabalha com a hipótese descritiva de que um setor interfere em, ao menos, um outro setor da economia. Nesse sentido desenvolve-se o modelo dinâmico de insumo produto, com  $n$  indústrias cujas variações nos respectivos resultados repercutem dinamicamente nas outras indústrias. Outro exemplo vem do modelo de mercado de equilíbrio dinâmico geral, em que  $n$  mercadorias se inter-relacionam por ajustes de preços.

Note que inexistem padrões de variação interativos em modelos de um único setor. Apenas na economia em escala maior identificam-se aspectos diferentes na economia, com um setor afetando ao outro em seu comportamento dinâmico. Nas equações dinâmicas que descrevem tal comportamento, o padrão de  $y_1$  afeta o padrão  $y_2$ , ou aquele é afetado por este. Em alguma situação, a interação pode não ocorrer, quando variações de  $y_1$  dependem apenas de  $y_1$  etc. No caso visto do modelo de inflação-desemprego, note que o padrão da expectativa de inflação  $\pi$  também depende do padrão da taxa de desemprego  $U$ , por meio da inflação  $p$ ; e também o padrão de  $U$  depende de  $\pi$ . De modo que as dinâmicas de  $\pi$  e  $U$  são determinadas simultaneamente. Neste, como em muitos outros casos, não é preciso condensar o modelo em uma única equação, o que é trabalhoso e, em alguns casos, impossível.

### *A transformação de uma equação dinâmica de ordem alta*

Uma equação diferencial (ou a diferenças) de  $n$ -ésima ordem e uma única variável dependente pode ser transformada em um sistema de  $n$  equações diferenciais (ou a diferenças) simultâneas de 1ª ordem em  $n$  variáveis. Por exemplo, uma equação de 2ª

ordem pode transforma-se em duas equações simultâneas de 1ª ordem com 2 variáveis, e vice-versa. A vantagem desse procedimento é que, fazendo-o, reduz-se a ordem das equações ao mínimo, ao custo de se trabalhar agora com muitas equações e não apenas uma única delas.

Seja a equação a diferenças de 2ª ordem  $y_{t+2} + a_1y_{t+1} + a_2y_t = c$ . Introduz-se uma nova variável, artificial,  $x_t \equiv y_{t+1}$ , o que implica  $x_{t+1} \equiv y_{t+2}$ . Tem-se agora duas equações de 1ª ordem simultâneas:  $x_{t+1} + a_1x_t + a_2y_t = c$  e  $y_{t+1} - x_t = 0$ . Procedimento análogo se aplica a equações de ordem mais alta, conforme o exercício adiante irá exemplificar.

### Exercício 33

Transforme a equação a diferenças de 3ª ordem com coeficientes e termo constantes  $y_{t+3} + y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0$  em um sistema de equações a diferenças de 1ª ordem.

Para tanto, vamos introduz as variáveis artificiais  $x_t = y_{t+1}$ ,  $\omega_t = x_{t+1}$ , o que implica em  $x_{t+1} = y_{t+2}$ ,  $\omega_{t+1} = x_{t+2} = y_{t+3}$ . Com base nelas, constrói-se o sistema de equações a diferenças de 1ª ordem:

$$\begin{aligned} \omega_{t+1} + \omega_t - 3x_t + 2y_t &= 0 \\ x_{t+1} - \omega_t &= 0 \\ y_{t+1} - x_t &= 0 \end{aligned}$$

### Exercício 34

Transforme a equação diferencial de 2ª ordem com coeficientes e termo constantes  $y''(t) + a_1y'(t) + a_2y(t) = 0$  em um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem.

A fim de fazê-lo, iremos introduz a variável artificial  $x(t) = y'(t)$  o que implica em  $x'(t) = y''(t)$ , a partir do qual se constrói o sistema de equações diferenciais de 1ª ordem:

$$\begin{aligned} x'(t) + a_1x(t) + a_2y(t) &= 0 \\ y'(t) - x(t) &= 0 \end{aligned}$$

## Resolvendo-se equações dinâmicas simultâneas

Iremos resolver sistemas de equações dinâmicas, diferenciais ou a diferenças, lineares e com coeficientes constantes. Começando com o caso das equações a diferenças simultâneas, seja o sistema  $x_{t+1} + 6x_t + 9y_t = 4$ ,  $y_{t+1} - x_t = 0$ , encontraremos  $x_t$  e  $y_t$  que satisfaçam a ambas as equações. Em cada qual, identificaremos a solução particular, os valores de equilíbrio intertemporal  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , e a função complementar. Assim a solução completa é obtida pela soma delas.

Em busca de soluções particulares, começa-se com as soluções constantes  $x_{t+1} = x_t = \bar{x}$ , e  $y_{t+1} = y_t = \bar{y}$ , o sistema fica  $7\bar{x} + 9\bar{y} = 4$ ,  $-\bar{x} + \bar{y} = 0$ . Multiplicando-se esta última por 7 e somando-as ambas as equações membro a membro, temos então  $16\bar{y} = 4$ ,  $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{4}$ . As soluções constantes, portanto, funcionaram, caso não tivessem funcionado tentaríamos  $x_t = k_1t$ ,  $y_t = k_2t$  e assim por diante.

Para obter as funções complementares. Imaginemos, por simplicidade, que haja uma raiz característica  $b$  comum a ambas as variáveis, de modo que possamos representar  $x_t = mb^t$  e  $y_t = nb^t$ ,  $b \neq 0$ . Sendo assim,  $x_{t+1} = mb^{t+1}$  e  $y_{t+1} = nb^{t+1}$ . A solução da homogênea, portanto, consiste em encontrar  $b$ ,  $m$  e  $n$  que a satisfaça. Vamos por substituição e fazendo-se os devidos cancelamentos, lembrando que  $b^t \neq 0$ . Destarte,  $mb^{t+1} + 6mb^t + 9nb^t = 0$ ,  $nb^{t+1} - nb^t = 0$ , que resulta em  $(b + 6)m + 9n = 0$ ,  $-m + bn = 0$ ,  $m$  e  $n$  como variáveis. A solução trivial desse sistema de equações, com  $m = n = 0$ , ocorre quando a matriz dos coeficientes do sistema é invertível. No entanto,  $x_t = y_t = 0$  é um caso sem interesse, pois coloca as variáveis dependentes sempre nos valores de equilíbrio intertemporal, sem nenhum desvio de curto prazo. Mais interessante é a solução não-trivial, que ocorre quando a matriz de coeficientes do sistema de equações for singular, isto é, com determinante nulo.

Então vamos impor essa condição, de modo que  $\begin{vmatrix} b+6 & 9 \\ -1 & b \end{vmatrix} = b^2 + 6b + 9 = 0$ . Essa equação quadrática, imposta pela condição de o determinante da matriz de coeficientes anular-se, trata-se da equação característica do sistema. No caso, tem como solução duas raízes reais repetidas  $b_1 = b_2 = b = -3$ . Note que cada raiz  $b_i$  permite estabelecer uma relação entre  $m$  e  $n$ , dado pela segunda equação do sistema  $m = b_i n$ . A princípio, teríamos um número infinito de soluções definidas no par  $(m, n) = (b_i n, n)$ , uma solução possível para cada valor de  $n$ . Como as raízes são repetidas, precisamos construir o segundo termo linearmente independente na expressão da função complementar com o recurso de multiplicar por  $t$  as expressões  $mb^t$  e  $nb^t$ . As soluções da homogênea associada, no caso de raízes repetidas, fica, portanto,  $x_t = m_1(-3)^t + m_2 t(-3)^t$ ,  $y_t = n_1(-3)^t + n_2 t(-3)^t$ . Nesse sistema com  $(m_1, m_2, n_1, n_2)$ ,  $m_i$  e  $n_i$  devem satisfazer o sistema de equações original em que  $x_{t+1} + 6x_t + 9y_t = 4$ ,  $y_{t+1} - x_t = 0$ , portanto, substituindo na segunda equação,  $n_1(-3)^{t+1} + n_2(t+1)(-3)^{t+1} = m_1(-3)^t + m_2 t(-3)^t$ ,  $-3n_1 - 3n_2(t+1) = m_1 + m_2 t$ ,  $-3(n_1 + n_2) - 3n_2 t = m_1 + m_2 t$ , ou seja, pela igualdade de polinômios,  $m_1 = -3(n_1 + n_2)$  e  $m_2 = -3n_2$ .

Então os valores de  $m_1$  e  $m_2$  dependem dos valores de  $n_1$  e  $n_2$ . Fazendo-se  $n_1 = A_3$  e  $n_2 = A_4$ , temos que  $m_1 = -3(A_3 + A_4)$  e  $m_2 = -3A_4$ . Portanto, podemos escrever a solução das equações homogêneas em  $x_t$  e  $y_t$  como sendo  $x_c = m_1(-3)^t + m_2 t(-3)^t = -3(A_3 + A_4)(-3)^t - 3A_4 t(-3)^t = -3A_3(-3)^t - 3A_4(t+1)(-3)^t$  e  $y_c = n_1(-3)^t + n_2 t(-3)^t = A_3(-3)^t + A_4 t(-3)^t$ . As constantes  $A_3$  e  $A_4$  são definidas pelas condições iniciais do problema.

Note que ambas as trajetórias temporais contêm um fator do tipo  $b^t$ , portanto ambas divergem do equilíbrio intertemporal ou ambas convergem a ele. No caso,  $|b| = |-3| > 1$  e, sendo assim, ambas divergem, ocorre oscilação explosiva.

### *Notação matricial*

Tal notação torna-se indispensável no tratamento de sistemas com muitas equações. Vejamos novamente o exemplo  $x_{t+1} + 6x_t + 9y_t = 4$ ,  $y_{t+1} - x_t = 0$ . Em termos matriciais ficaria  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ou, de uma maneira mais sintética,

poderíamos escrever  $Iu + kv = d$ , onde  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ ,  $k$  a matriz dos coeficientes de  $x_t$  e  $y_t$ ,  $u$  e  $v$  são os vetores coluna  $u = \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix}$ ,  $v = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$  e  $d$  é o vetor coluna  $d = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Para as soluções particulares do sistema de equação a diferenças, imaginam-se as soluções constantes  $x_{t+1} = x_t = \bar{x}$  e  $y_{t+1} = y_t = \bar{y}$ , o mesmo que estabelecer  $u = v = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$ . Sendo assim, a equação matricial fica  $(I + k) \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = d$ . Se existe a inversa  $(I + k)^{-1}$ ,  $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = (I + k)^{-1}d$ . No sistema  $x_{t+1} + 6x_t + 9y_t = 4$ ,  $y_{t+1} - x_t = 0$ ,  $k = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $I + k = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $(I + k)^{-1}d = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$  e portanto  $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{4}$ .

Iremos agora determinar as funções complementares para esse sistema. Supondo soluções da homogênea associada na forma  $x_t = mb^t$  e  $y_t = nb^t$ , temos que  $u = \begin{bmatrix} mb^{t+1} \\ nb^{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} b^{t+1}$  e  $v = \begin{bmatrix} mb^t \\ nb^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} b^t$ . Novamente imaginemos, por simplicidade, que haja uma raiz característica  $b$  comum a ambas as variáveis.

Substituindo-se na equação homogênea associada,  $Iu + kv = d$ ,  $I \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} b^{t+1} + k \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} b^t = 0$ ,  $(bI + k) \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ , onde este zero deve ser pensado como um vetor. O problema consiste em encontrar  $b$ ,  $m$  e  $n$ . Como vimos, deve-se evitar a solução trivial que simplesmente anula  $m$  e  $n$ , e elimina as funções complementares. Em busca de uma solução não-trivial, impõe-se que o determinante de  $(bI + k)$  se anule,  $|bI + k| = 0$ . De onde surge a equação característica do sistema que fornece as raízes  $b_i$ .

Ora,  $bI = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$  e  $k = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ , portanto,  $|bI + k| = \begin{vmatrix} 6 + b & 9 \\ -1 & b \end{vmatrix} = b^2 + 6b + 9 = 0$ .  $b = -3$ . De cada raiz  $b_i$  de  $(bI + k) \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$  extrai-se um conjunto particular de um número infinito de valores de solução de  $m$  e  $n$  ligados entre si por  $m_i = k_i n_i$ . Portanto, para cada valor de  $b_i$ ,  $n_i = A_i$  e  $m_i = k_i A_i$ , onde os  $A_i$ 's são constantes arbitrárias. Conhecidos  $n_i, m_i, b_i$ , substitui-se nas soluções experimentais, levando a formas específicas de funções complementares.

Se todas as raízes são números reais distintos,  $\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum m_i b_i^t \\ \sum n_i b_i^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum k_i A_i b_i^t \\ \sum A_i b_i^t \end{bmatrix}$ . No caso de raízes características repetidas, montam-se termos independentes com  $m_1 b^t + m_2 t b^t$  e  $n_1 b^t + n_2 t b^t$  para os  $y_c$ 's.  $n_i$  e  $m_i$  determinados respectivamente pelas condições iniciais e pela relação entre  $x$  e  $y$  nas equações do sistema. No caso de raízes complexas, as funções complementares são na forma  $y_c = R^t (A_i \cos \theta t + A_j \sin \theta t)$ .

Como sempre, a solução geral da equação completa é assoma da função complementar com a solução particular, na notação matricial  $\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$ . Com as condições iniciais, determinam-se os  $A_i$ 's. O tratamento matricial naturalmente pode ser estendido para sistemas com  $n$  equações. Se  $n$  for muito grande, aparecerão dificuldade para resolver a equação característica associada. Contudo, pode-se usar os teoremas de Routh ou de Schur para uma abordagem qualitativa.

## Equações diferenciais simultâneas

Analisemos, a título de exercício, um sistema de equações diferenciais lineares de 1ª ordem. Em relação às equações a diferenças, mudam-se as soluções experimentais da homogênea associada para  $x(t) = me^{rt}$  e  $y(t) = ne^{rt}$ . Novamente imaginamos raízes características comuns  $r$ 's em  $x$  e  $y$ . Derivando-se,  $x'(t) = rme^{rt}$  e  $y'(t) = rne^{rt}$ .

### Exercício 35

Seja o sistema de equações diferenciais de 1ª ordem com coeficientes e termo constantes

$$\begin{aligned}x'(t) + 2y'(t) + 2x(t) + 5y(t) &= 77 \\ y'(t) + x(t) + 4y(t) &= 61\end{aligned}$$

Sendo as condições iniciais  $x(0) = 6$  e  $y(0) = 12$ , encontre a solução geral e definida empregando o cálculo com matrizes.

Começemos pela representação matricial  $Ju + Mv = g$ , na qual  $J = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $u = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$ ,  $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $v = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$  e  $g = \begin{bmatrix} 77 \\ 61 \end{bmatrix}$ . Neste exercício, note que  $J$  não é a matriz identidade. Se  $J$  é invertível, existe  $J^{-1}$  e podemos *normalizar* a equação matricial:  $J^{-1}Ju + J^{-1}Mv = J^{-1}g$ ,  $Iu + Kv = d$ , em que  $K = J^{-1}M$  e  $d = J^{-1}g$ , e temos o mesmo formato que vínhamos trabalhando para equações a diferenças.

Agora, no entanto, manteremos a formulação matricial  $Ju + Mv = g$ . As soluções particulares são tentadas como constantes,  $x(t) = \bar{x}$  e  $y(t) = \bar{y}$ , e portanto  $x'(t) = y'(t) = 0$ . Se as soluções constantes são válidas,  $v = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$  e  $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Sendo assim,  $J \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = g$ ,

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = M^{-1}g = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 77 \\ 61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 77 \\ 61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

O próximo passo é determinar as funções complementares. Usando-se a conhecida solução das equações homogêneas,  $v = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} e^{rt}$ ,  $u = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} re^{rt}$ . Substituindo-se na equação homogênea  $Ju + Mv = 0$ ,  $J \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} re^{rt} + M \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} e^{rt} = 0$ ,  $(rJ + M) \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = 0$ .

Para soluções não triviais,  $|rJ + M| = 0$ , de onde se extrai as raízes características  $r_i$ . A cada  $r_i$ , há uma correspondente relação entre  $m_i$  e  $n_i$ . Assim é que  $|rJ + M| = \begin{vmatrix} r+2 & 2r+5 \\ 1 & r+4 \end{vmatrix} = r^2 + 4r + 3 = 0$ ,  $r_1 = -1$  e  $r_2 = -3$ . Substituindo-se essas raízes em  $(rJ + M) \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = 0$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} = 0$ , para  $r_1 = -1$  e  $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} = 0$ , para  $r_2 = -3$ . Ou seja,  $m_1 = -3n_1$  e  $m_2 = -n_2$ . Atribuindo-se constantes a  $n_1$  e  $n_2$ ,  $(n_1, n_2) = (-A_1, -A_2)$ , temos que  $m_1 = 3A_1$  e  $m_2 = A_2$ .

A funções complementares ficam então  $\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum m_i e^{r_i t} \\ \sum n_i e^{r_i t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum k_i A_i e^{r_i t} \\ \sum -A_i e^{r_i t} \end{bmatrix}$ , para raízes reais distintos. A solução geral é  $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t} + 1 \\ -A_1 e^{-t} - A_2 e^{-3t} + 15 \end{bmatrix}$ .

Empregando-se as condições iniciais do exercício,  $x(0) = 6$  e  $y(0) = 12$ , facilmente obtém-se  $A_1 = 1$  e  $A_2 = 2$ . Note que os mesmos fatores  $e^{-t}$  e  $e^{-3t}$  aparecem

em  $x(t)$  e  $y(t)$ . Assim sendo, ambos convergem ou ambos divergem. No caso, como  $r_1 = -1$  e  $r_2 = -3$ , ambos convergem para  $\bar{x} = 1$  e  $\bar{y} = 15$  respectivamente, por se tratar de expoentes negativos. Para equações diferenciais com  $n$  grande, pode-se usar o teorema de Routh a fim de se obter conclusões qualitativas.

## Modelos dinâmicos de insumo-produto

Em uma economia com muitas indústrias, quanto se deve produzir em cada indústria de modo que os requisitos de insumos de todas elas e a demanda final pelos consumidores sejam satisfeitos? No contexto estático, trata-se de resolver um sistema de equações simultâneas para os níveis de equilíbrio de produção de todas as indústrias. Com considerações adicionais, o sistema assume um caráter dinâmico. Temos agora um sistema de equações dinâmicas.

Suponha-se que haja  $n$  indústrias numa economia. O produto da  $j$ -ésima indústria no período  $t$  é representado por  $x_{j,t}$ . Cada qual oferece um produto distinto cuja demanda final, pelos consumidores, é  $d_j$ . Assim é que  $x_{1,t}$ ,  $x_{2,t}$  são as quantidades de mercadorias distintas ofertadas pelas indústrias 1 e 2 no período  $t$ , cujas respectivas demandas são  $d_1$  e  $d_2$ . Por simplicidade, trabalharemos com um sistema aberto de apenas duas indústrias. A notação matricial facilmente permite generalizar o modelo para  $n$  indústrias. O valor, em reais, da  $i$ -ésima mercadoria requerida na produção do valor de 1 real da  $j$ -ésima mercadoria é representado pelo coeficiente técnico  $a_{ij}$ .

### *Defasagem de tempo na produção.*

Considere um sistema aberto de apenas duas indústrias. O produto da indústria 1 é equacionado da seguinte forma:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1 \quad (43)$$

A equação (36) indica que o produto da indústria 1 é consumido, em parte, pela própria indústria em questão, dado o coeficiente técnico  $a_{11}$ ; pela indústria 2, que o emprega como insumo em sua produção, na quantidade que depende de  $a_{12}$ , e pelos consumidores finais que demandam  $d_1$ .

Suponha a existência de uma defasagem de tempo na produção, de modo que a demanda total da mercadoria em  $t$  determina a produção dela em  $t + 1$ . Assim, iremos escrever a equação defasada como sendo:

$$x_{1,t+1} = a_{11}x_{1,t} + a_{12}x_{2,t} + d_{1,t} \quad (44)$$

Sendo duas industriais com duas mercadorias distintas, temos então um sistema de equações a diferenças simultâneas, que configura a versão dinâmica do modelo

insumo-produto. Na notação matricial,  $x_{t+1} - Ax_t = d_t$ , na qual  $x_{t+1} = \begin{bmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{bmatrix}$ ,  $x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ,  $d_t = \begin{bmatrix} d_{1,t} \\ d_{2,t} \end{bmatrix}$ .

Na seção anterior, tínhamos a equação  $Iu + Kv = d$ , agora temos  $x_{t+1} - Ax_t = d_t$ . Sendo assim, o primeiro termo não mais vem pré-multiplicado por  $I$ , mas isso não faz diferença. Note que agora o vetor demanda final  $d_t$  é função do tempo. De qualquer modo, supomos que esse vetor tenha entradas constantes. Modifica-se o método se não for vetor de constantes.

A título de exemplo, vejamos um vetor de demanda final do tipo exponencial:  $d_t = \begin{bmatrix} \delta^t \\ \delta^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \delta^t$ . Onde  $\delta$  é um escalar positivo. O sistema de equações é representado por  $x_{t+1} - Ax_t = d_t$ . Na solução dele, comecemos procurando pelas soluções particulares. Dado o vetor termo, sabemos que são soluções na forma  $x_{1,t} = \beta_1 \delta^t$  e  $x_{2,t} = \beta_2 \delta^t$ , nas quais  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são coeficientes indeterminados.

A solução tentativa candidata é na forma de  $x_t = \begin{bmatrix} \beta_1 \delta^t \\ \beta_2 \delta^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \delta^t$ , e portanto  $x_{t+1} = \begin{bmatrix} \beta_1 \delta^{t+1} \\ \beta_2 \delta^{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \delta \\ \beta_2 \delta \end{bmatrix} \delta^t = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \delta^t$ , em que  $\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$  trata-se de uma matriz pré-multiplicativa conveniente.

O sistema fica então  $\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \delta^t - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \delta^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \delta^t$ . Como  $\delta^t \neq 0$ , simplifica-se para a equação matricial para  $\begin{bmatrix} \delta - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \delta - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Supomos que a matriz  $\begin{bmatrix} \delta - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \delta - a_{22} \end{bmatrix}$  seja invertível. Pela regra de Cramer, obtido o determinante  $\Delta$  dessa matriz, podemos calcular os betas:  $\beta_1 = \frac{\delta - a_{22} + a_{12}}{\Delta}$  e  $\beta_2 = \frac{\delta - a_{11} + a_{21}}{\Delta}$ , onde  $\Delta = (\delta - a_{11})(\delta - a_{22}) - a_{12}a_{21}$ . Insiram-se  $\beta_1$  e  $\beta_2$  na solução tentativa e temos as soluções particulares.

As funções complementares de  $x_{t+1} - Ax_t = d_t$  são as soluções gerais da equação homogênea associada  $x_{t+1} - Ax_t = 0$ . A equação características surge quando se evitam as soluções triviais forçando o determinante da matriz coeficiente a se anular. Portanto,  $|bI - A| = \begin{vmatrix} b - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & b - a_{22} \end{vmatrix} = 0$ . Encontram-se as raízes características  $b_1$  e  $b_2$ .

### *Excesso de demanda e ajuste de produção*

Vamos introduzir outra hipótese no modelo: o excesso de demanda para cada produto tende a induzir um incremento igual de produção. No intervalo  $t$ , o excesso de demanda é expresso por  $a_{11}x_{1,t} + a_{12}x_{2,t} + d_{1,t} - x_{1,t}$ , em que  $a_{11}x_{1,t} + a_{12}x_{2,t} + d_{1,t}$  represento a demanda nesse intervalo e  $x_{1,t}$  a oferta no mesmo período de tempo. Ocorre, portanto, um ajuste na produção,  $\Delta x_{1,t} = x_{1,t+1} - x_{1,t}$ , igual a esse excesso:  $\Delta x_{1,t} =$

$a_{11}x_{1,t} + a_{12}x_{2,t} + d_{1,t} - x_{1,t}$ . Cancelando-se  $-x_{1,t}$ , que aparece em ambos os membros,  $x_{1,t+1} = a_{11}x_{1,t} + a_{12}x_{2,t} + d_{1,t}$  que é igual à equação (37). Portanto, trata-se do mesmo modelo formal, mas com premissas econômicas diferentes.

### Caso para tempo contínuo

Como agora estamos no caso contínuo, iremos substituir a notação de tempo discreto,  $x_{i,t}$ , pela notação de tempo contínuo  $x_i(t)$ . No lugar da diferença  $\Delta x_{i,t}$ , escreve-se a derivada temporal  $x_i'(t)$  para o caso contínuo. O modelo com ajuste de produção fica, nesse caso,  $x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + d_1(t) - x_1(t)$  e  $x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + d_2(t) - x_2(t)$ . Neste contexto, a taxa de fluxo de produção, por unidade de tempo (dia, mês etc.), que prevalece em  $t = t_0$  é  $x_i(t_0)$ . A demanda final por “mês” em  $t_0$  é  $d_i(t_0)$ . Assim, do lado direito da equação tem-se o excesso de demanda por “mês” em  $t_0$ . Do lado esquerdo da equação, a taxa de ajuste da produção “mensal” exigida pelo excesso de demanda em  $t_0$ .

Esse ajuste erradicará o excesso de demanda em 1 “mês”, alcançando-se o equilíbrio, na hipótese de que o ajuste pelo excesso de demanda permaneça como um processo inalterado. Se o excesso de demanda varia com o tempo, e o ajuste de produção induzido, ocorre então um processo como a caçada do gato ao rato. A solução do sistema, a trajetória de  $x_i$ , é a história dessa caçada. Se a solução for convergente, o gato, isto é, o ajuste de produção, irá alcançar o rato, o excesso de demanda, quando  $t \rightarrow \infty$ .

O modelo para o caso contínuo é, portanto, representado no sistema de equações (45):

$$Ix' + (I - A)x = d \quad (45)$$

$$\text{No qual, } x' = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } d = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{bmatrix}.$$

Para a obtenção das funções complementares, emprega-se o mesmo método já visto para o caso discreto. As raízes características são obtidas da equação matricial,

$$|rI + (I - A)| = \begin{vmatrix} r + 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & r + 1 - a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

As soluções particulares dependem do termo. Dados  $d_1(t)$  e  $d_2(t)$ , introduzem-se modificações no método de solução dependendo deles.

### Exercício 36

Seja o vetor de demanda final no modelo com ajuste de produção para o caso contínuo

$d = \begin{bmatrix} \lambda_1 e^{\rho t} \\ \lambda_2 e^{\rho t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} e^{\rho t}$ , em que  $\lambda_i$  e  $\rho$  são constantes. Encontre as soluções particulares do correspondente modelo dinâmico  $Ix'(t) + (I - A)x = d$ .

Empregando-se o método dos coeficientes indeterminados,  $x_i(t) = \beta_i e^{\rho t}$  e  $x_i'(t) = \rho \beta_i e^{\rho t}$ . Na notação matricial,  $x = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} e^{\rho t}$ ,  $x' = \rho \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} e^{\rho t} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} e^{\rho t}$ ;

substituindo na equação do modelo, e já cancelando  $e^{\rho t}$ , chega-se a  $\begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ . Desenvolvendo-se,  $\begin{bmatrix} \rho + 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \rho + 1 - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ . Supomos que a matriz  $\begin{bmatrix} \rho + 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \rho + 1 - a_{22} \end{bmatrix}$  seja invertível, e pela regra de Cramer chega-se às soluções.  $\beta_1 = \frac{\lambda_1(\rho+1-a_{22})+\lambda_2 a_{12}}{\Delta}$  e  $\beta_2 = \frac{\lambda_2(\rho+1-a_{11})+\lambda_1 a_{21}}{\Delta}$ , onde  $\Delta = (\rho + 1 - a_{11})(\rho + 1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}$ . Agora, basta substituir na solução experimental:  $x_1(t) = \frac{\lambda_1(\rho+1-a_{22})+\lambda_2 a_{12}}{\Delta} e^{\rho t}$  e  $x_2(t) = \frac{\lambda_2(\rho+1-a_{11})+\lambda_1 a_{21}}{\Delta} e^{\rho t}$ .

## Formação de capital

Apresentaremos, nesta seção, um modelo com acumulação de estoques que gera um sistema dinâmico insumo-produto. Antes, tínhamos a matriz de coeficientes técnicos de insumo-produto  $A = [a_{ij}]$ . Agora, introduz-se a matriz de *coeficientes de capital*  $C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ . Na qual  $c_{ij}$  representa o valor, em reais, da  $i$ -ésima mercadoria que a  $j$ -ésima indústria necessita como novo capital (equipamento ou estoque) resultante de um incremento da produção de 1 real nessa  $j$ -ésima indústria.

Suponha certa razão marginal *capital/produção*, para um só tipo de capital na produção da  $i$ -ésima mercadoria. Trabalha-se com coeficientes de capital fixos. A quantidade produzida de cada mercadoria satisfaz à demanda de necessidade de insumo, à demanda final e também à demanda de necessidade de capital.

No caso de tempo contínuo, o incremento de produção da mercadoria  $i$  é representado pela derivada  $x_i'(t)$ . Constrói-se o sistema de equações (46) para a produção de dois bens na economia.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + c_{11}x_1'(t) + c_{12}x_2'(t) + d_1(t) \\ x_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + c_{21}x_1'(t) + c_{22}x_2'(t) + d_2(t) \end{aligned} \quad (46)$$

Onde os termos  $a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)$  e  $a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)$  representam a necessidade de insumo na produção dos dois bens, os termos  $c_{11}x_1'(t) + c_{12}x_2'(t)$  e  $c_{21}x_1'(t) + c_{22}x_2'(t)$  associam-se à necessidade de capital no acréscimo de produção.  $d_1(t)$  e  $d_2(t)$  são as respectivas demandas finais.

O sistema (46) é agora representado em termos matriciais:  $Ix = Ax + Cx' + d$ , ou, isolando-se  $d$  no segundo membro:  $Cx' + (A - I)x = -d$ .

O mesmo modelo pode ser montado para o caso de tempo discreto. Nesse caso, no lugar da derivada escreve-se a variação discreta  $\Delta x_{i,t-1} = x_{i,t} - x_{i,t-1}$ . Então o sistema adquire a representação matricial dada por (47):

$$\begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t} - x_{1,t-1} \\ x_{2,t} - x_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{1,t} \\ d_{2,t} \end{bmatrix} \quad (47)$$

O produto de matrizes  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix}$  expressa a necessidade de insumos, e o produto  $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t} - x_{1,t-1} \\ x_{2,t} - x_{2,t-1} \end{bmatrix}$ , a necessidade de capital. O vetor  $\begin{bmatrix} d_{1,t} \\ d_{2,t} \end{bmatrix}$  associa-se à demanda final. Podemos sintetizar a representação matricial para  $Ix_t = Ax_t + C(x_t - x_{t-1}) + d_t$ , cujas matrizes  $I, x_t, A, C, d_t$  são facilmente identificadas.

Na última equação, iremos adiantar os índices de  $t$  e isolar o vetor de demanda no 2º membro:  $(I - A - C)x_{t+1} + Cx_t = d_{t+1}$ . Tem-se, portanto, uma equação a diferenças de 1ª ordem em que sabemos empregar o método de solução. Para o caso de  $n$  indústrias, apenas aumenta-se a ordem das matrizes na equação. Considerações semelhantes são feitas a modelos de equilíbrio geral.

### Modelo de Inflação-desemprego

Vejam agora equações dinâmicas simultâneas de um só setor, caso do modelo de inflação-desemprego. No caso contínuo, desenvolvemos as equações de (22) a (24) que escrevemos novamente:  $p = \omega - T = \alpha - T - \beta U + g\pi$ ;  $\frac{d\pi}{dt} = j(p - \pi)$ ,  $0 < j \leq 1$ , e  $\frac{dU}{dt} = -k(\mu - p)$ ,  $k > 0$ . Note que agora escrevemos  $\mu$  no lugar de  $m$ . Antes, condensamos o modelo em uma única equação de uma só variável. Chegamos a duas equações diferenciais simultâneas, uma para a inflação esperada  $\pi$  e outra para a taxa de desemprego  $U$ .

Representa-se agora a derivada de  $\pi$  pelo símbolo com linha,  $\frac{d\pi}{dt} = \pi'(t)$  e o mesmo para a variável desemprego  $U$ ,  $\frac{dU}{dt} = U'(t)$ . Substituindo-se as equações umas nas outras, tínhamos demonstrado que  $\pi'(t) = j(\alpha - T - \beta U) - j(1 - g)\pi$ , portanto,  $\pi'(t) + j(1 - g)\pi + j\beta U = j(\alpha - T)$ , uma equação diferencial para expectativa de inflação e taxa de desemprego. Outra equação diferencial para essas duas variáveis é deduzida assim:  $p = \frac{1}{j}(\pi' + j\pi)$ ,  $U' = -k(\mu - p) = -k(\mu - \frac{1}{j}(\pi' + j\pi))$ . Substituindo-se a expressão em  $\pi'(t)$  nessa equação:  $U' = -k(\mu - \frac{1}{j}(j(\alpha - T - \beta U) - j(1 - g)\pi + j\pi)) = -k\mu + \kappa(\alpha - T - \beta U) - k(1 - g)\pi + k\pi$ , portanto,  $U' = k(\alpha - T - \mu) - \kappa\beta U + kg\pi - k\pi + k\pi$ , e assim chega-se à segunda equação diferencial do modelo,  $U' - kg\pi + \kappa\beta U = k(\alpha - T - \mu)$ .

Iremos reunir essas duas equações e tratar o sistema de equações na forma matricial, obtendo a equação matricial (48):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi' \\ U' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j(1 - g) & j\beta \\ -kg & \kappa\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j(\alpha - T) \\ k(\alpha - T - \mu) \end{bmatrix} \quad (48)$$

Resolvendo-se a equação matricial, as trajetórias temporais da expectativa da inflação  $\pi$  e da taxa de desemprego são encontradas simultaneamente. A equação do modelo  $p = \alpha - T - \beta U + g\pi$  é empregada a fim de se obter a trajetória da inflação.

## Trajétórias de solução

Vimos anteriormente que o modelo de Phillips leva a trajetórias das variáveis expectativa de inflação e desemprego com equilíbrio estacionário no longo prazo, isto é, essas variáveis mantidas em um nível constante ao longo do tempo. Portanto,  $\pi$  e  $U$  são constantes e as derivadas temporais se anulam:  $\pi' = U' = 0$ . As soluções particulares são representadas por constantes.

Aplicando-se a regra de Cramer ao problema, vimos também que o equilíbrio estacionário da expectativa de inflação  $\bar{\pi}$  é a taxa de crescimento nominal da moeda,  $\bar{\pi} = \mu$ . Já o equilíbrio estacionário da taxa de desemprego é a solução particular da equação a diferenças de 2ª ordem (40), e já vimos  $\bar{U} = \frac{c}{1+a_1+a_2} = \frac{kj(\alpha-T-m)+kgjm}{\beta kj} = \frac{1}{\beta}[(\alpha - T - m) + gm]$ . Para  $m = \mu$ ,  $\bar{U} = \frac{1}{\beta}[(\alpha - T - \mu) + g\mu] = \frac{1}{\beta}[\alpha - T - (1 - g)\mu]$ .

Vejam agora as funções complementares, a solução geral da equação homogênea associada. Para tanto, comecemos escrevendo a equação (48) na notação sintética  $Iu + kv = d$ , onde  $u = \begin{bmatrix} \pi' \\ U' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $k = \begin{bmatrix} j(1-g) & j\beta \\ -kg & \kappa\beta \end{bmatrix}$ ,  $v = \begin{bmatrix} \pi \\ U \end{bmatrix}$  e  $d = \begin{bmatrix} j(\alpha - T) \\ k(\alpha - T - \mu) \end{bmatrix}$ . A homogênea associada é  $Iu + kv = 0$ . As soluções experimentais desta são  $me^{rt}$  e  $ne^{rt}$ . Substituindo-se na equação sintética e cancelando-se  $e^{rt}$ , tem-se a equação  $[rI + k] \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = 0$ , ou seja,  $\begin{bmatrix} r + j(1-g) & j\beta \\ -kg & r + \kappa\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Para soluções não triviais, o determinante da matriz de coeficientes  $\begin{vmatrix} r + j(1-g) & j\beta \\ -kg & r + \kappa\beta \end{vmatrix}$  deve anular-se. Ou seja,  $\begin{vmatrix} r + j(1-g) & j\beta \\ -kg & r + \kappa\beta \end{vmatrix} = r^2 + rk\beta + j(1-g)r + j(1-g)k\beta + jk\beta g = r^2 + [k\beta + j(1-g)]r + k\beta j = 0$ .

Note que essa é a equação característica associada à equação homogênea de 2ª ordem associada à equação dinâmica (25) que gera a trajetória da expectativa de inflação  $\pi$ .<sup>18</sup> Já discutimos a solução daquela. A equação característica de 2º grau têm dois coeficientes:  $a_1 = k\beta + j(1-g)$ ,  $a_2 = k\beta j$ . As raízes características são  $r_1, r_2 = \frac{1}{2}(-a_1 \mp \sqrt{a_1^2 - 4a_2})$ . Note que  $a_1^2 \geq 4a_2$ . De modo que todos os três casos podem surgir. Note ainda que  $a_2 = \beta kj > 0$ . Em todos os casos, conforme vimos, o equilíbrio intertemporal revelará ser dinamicamente estável, pois, no caso 1, em que  $a_1^2 > 4a_2$ ,  $\sqrt{a_1^2 - 4a_2} < \sqrt{a_1^2} = |a_1|$  e, portanto,  $r_1, r_2 < 0$ , pois predomina o sinal negativo do primeiro termo na expressão entre parênteses. No caso 2,  $a_1^2 = 4a_2$ ,  $r_1, r_2 = -\frac{a_1}{2} < 0$ . No caso 3,  $h = -\frac{a_1}{2} < 0$ . Em todos os três casos, portanto, a parte real das raízes características é negativa, a trajetória é sempre convergente.

### Exercício 37

Considere o modelo de inflação e desemprego do exercício 11, relativo às equações:

$$p = \frac{1}{6} - 3U + \pi$$

<sup>18</sup> Lembrando:  $\frac{d^2\pi}{dt^2} + [\beta k + j(1-g)]\frac{d\pi}{dt} + j\beta k\pi = j\beta km$ .

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{3}{4}(p - \pi)$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{2}(\mu - p)$$

Veja que agora substituímos  $m$  por  $\mu$ . Ou seja, supomos que  $\alpha - T = \frac{1}{6}$ ,  $\beta = 3$ ,  $g = 1$ ,  $j = \frac{3}{4}$  e  $k = \frac{1}{2}$ . Determine a trajetória temporal de  $\pi$  e  $U$ .

Na solução do exercício 11, vimos que a solução particular para a equação diferencial de expectativa de inflação é  $\pi_p = \bar{\pi} = \mu$ , o equilíbrio dinâmico da expectativa de inflação é a taxa de crescimento da moeda. Da equação (22),  $p = \alpha - T - \beta U + g\pi$ , fazendo-se, no equilíbrio estacionário,  $p = \pi = \bar{p} = \bar{\pi} = \mu$ , temos o valor estacionário da taxa de desemprego de longo prazo,  $\bar{U} = \frac{1}{\beta}[\alpha - T - (1 - g)\mu]$ . O último termo se anula em  $g = 1$  e, portanto,  $\bar{U} = \frac{1}{\beta}(\alpha - T) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{18}$ .

Vejam a função complementar. Dada a equação diferencial de 2ª ordem (25), que rege a expectativa de inflação, a homogênea associada é  $\frac{d^2\pi}{dt^2} + [\beta k + j(1 - g)]\frac{d\pi}{dt} + j\beta k\pi = 0$ , e assim a equação característica fica  $r^2 + [\beta k + j(1 - g)]r + j\beta k = 0$ . Substituindo-se os valores do exercício,  $r^2 + \left[\frac{3}{2}\right]r + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = r^2 + \frac{3}{2}r + \frac{9}{8} = 0$ . As raízes características são  $r_1, r_2 = \frac{1}{2}(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2}}\right) = -\frac{3}{4} \pm \frac{3}{4}i$ . Complexos conjugados em que  $h = -\frac{3}{4}$  e  $v = \frac{3}{4}$ .

Conhecidas as raízes característica, iremos substituí-las na equação matricial vista para a solução homogênea de (48), ou seja,  $\begin{bmatrix} r + j(1 - g) & j\beta \\ -kg & r + \kappa\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Para  $r_1 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i = -\frac{3}{4}(1 - i)$ ,  $r_2 = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}i = -\frac{3}{4}(1 + i)$  e associando-se cada raiz a um conjunto particular  $m_i, n_i$ , temos então  $\begin{bmatrix} -\frac{3}{4}(1 - i) & \frac{9}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4}(1 + i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} -\frac{3}{4}(1 + i) & \frac{9}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4}(1 - i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , nas quais as matrizes pré-multiplicativas devem ser singulares, com determinantes nulos a fim de se evitar as soluções triviais.

Sendo assim, para  $r_1 = -\frac{3}{4}(1 - i)$ ,  $-\frac{3}{4}(1 - i)m_1 + \frac{9}{4}n_1 = 0$ ,  $3(1 - i)m_1 = 9n_1$ ,  $\frac{1}{3}(1 - i)m_1 = n_1$ , e para  $r_2 = -\frac{3}{4}(1 + i)$ ,  $-\frac{3}{4}(1 + i)m_2 + \frac{9}{4}n_2 = 0$ ,  $\frac{1}{3}(1 + i)m_2 = n_2$ . E, portanto, as funções complementares são expressas por  $\begin{bmatrix} \pi_c \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 e^{r_1 t} + m_2 e^{r_2 t} \\ n_1 e^{r_1 t} + n_2 e^{r_2 t} \end{bmatrix} = e^{ht} \begin{bmatrix} m_1 e^{vit} + m_2 e^{-vit} \\ n_1 e^{vit} + n_2 e^{-vit} \end{bmatrix} = e^{ht} \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) \cos vt + (m_1 - m_2) i \sin vt \\ (n_1 + n_2) \cos vt + (n_1 - n_2) i \sin vt \end{bmatrix}$ .

Podemos simplificar a expressão rebatizando as constantes com novas constantes:  $A_5 \equiv m_1 + m_2$  e  $A_6 \equiv (m_1 - m_2)i$ . E, portanto,  $n_1 + n_2 = \frac{1}{3}(1 - i)m_1 + \frac{1}{3}(1 + i)m_2 = \frac{1}{3}[(m_1 + m_2) - (m_1 - m_2)i] = \frac{1}{3}(A_5 - A_6)$ . E ainda,  $(n_1 - n_2)i = \left[\frac{1}{3}(1 - i)m_1 - \frac{1}{3}(1 + i)m_2\right]i = \frac{1}{3}[(m_1 - m_2) - (m_1 + m_2)i]i = \frac{1}{3}[(m_1 i - m_2 i) + (m_1 + m_2)] = \frac{1}{3}[(m_1 - m_2)i +$

$(m_1 + m_2)] = \frac{1}{3}(A_6 + A_5)$ . A solução da equação homogênea em termos de duas constantes arbitrárias fica: 
$$\begin{bmatrix} \pi_c \\ U_c \end{bmatrix} = e^{-\frac{3}{4}t} \begin{bmatrix} A_5 \cos \frac{3}{4}t + A_6 \sin \frac{3}{4}t \\ \frac{1}{3}(A_5 - A_6) \cos \frac{3}{4}t + \frac{1}{3}(A_5 + A_6) \sin \frac{3}{4}t \end{bmatrix}.$$

Para a determinação das trajetórias de  $\pi$  e  $U$ , combinam-se as soluções particulares com as respectivas funções complementares. Note que são as mesmas trajetórias já vistas quando se calculou cada trajetória isoladamente, sem o tratamento matricial.

### Modelo inflação-desemprego em equações a diferenças simultâneas

A formulação do modelo de Phillips no caso de tempo discreto é uma adaptação do modelo em tempo contínuo na qual se substituem as derivadas por diferenças e se trabalha com subíndices. O sistema de equações (49) representa o modelo em tempo discreto:

$$\begin{aligned} p_t &= \alpha - T - \beta U_t + g\pi_t \\ \pi_{t+1} - \pi_t &= j(p_t - \pi_t), 0 < j \leq 1 \\ U_{t+1} - U_t &= -k(\mu - p_{t+1}) \end{aligned} \quad (49)$$

Eliminando-se  $p$ , o sistema fica  $\pi_{t+1} - \pi_t = j(\alpha - T - \beta U_t + g\pi_t - \pi_t)$ ,  $\pi_{t+1} - (1 - j + jg)\pi_t + j\beta U_t = j(\alpha - T)$ . E para a taxa de desemprego,  $U_{t+1} - U_t = -k(\mu - \alpha + T + \beta U_{t+1} - g\pi_{t+1})$ ,  $-kg\pi_{t+1} + k\beta U_{t+1} + U_{t+1} - U_t = k(\alpha - T - \mu)$ . Tais equações nas variáveis dependentes  $\pi_t$  e  $U_t$  podem ser sintetizadas na equação matricial (50).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -kg & 1 + \beta k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{t+1} \\ U_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(1 - j + jg) & j\beta \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_t \\ U_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j(\alpha - T) \\ k(\alpha - T - \mu) \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\text{Chamemos de } J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -kg & 1 + \beta k \end{bmatrix}, k = \begin{bmatrix} -(1 - j + jg) & j\beta \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } d = \begin{bmatrix} j(\alpha - T) \\ k(\alpha - T - \mu) \end{bmatrix}.$$

#### Trajelórias de solução

Também no caso discreto, o equilíbrio intertemporal corresponde à solução estacionária em que  $\bar{\pi} = \pi_t = \pi_{t+1}$  e  $\bar{U} = U_t = U_{t+1}$ . Tal solução estacionária do modelo de Phillips para o caso discreto é análoga ao caso contínuo, e assim sendo  $\bar{\pi} = \mu$  e  $\bar{U} = \frac{1}{\beta}[\alpha - T - (1 - g)\mu]$ .

A função complementar é obtida na solução da equação matricial já vista  $(bJ + k) \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} b - (1 - j + jg) & j\beta \\ -bkg & b(1 + \beta k) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Soluções não triviais são encontradas impondo-se que a matriz seja singular, de determinante nulo. Ou seja, a equação característica é  $|bJ + k| = (1 + \beta k)b^2 - b - (1 - j + jg)(1 + \beta k)b + (1 - j + jg) +$

$bkgj\beta = (1 + \beta k)b^2 - [1 + gj + (1 - j)(1 + \beta k)]b + (1 - j + jg) = 0$ . Portanto, a equação característica fica  $b^2 - \frac{[1+gj+(1-j)(1+\beta k)]}{(1+\beta k)}b + \frac{(1-j+jg)}{(1+\beta k)} = 0$ .

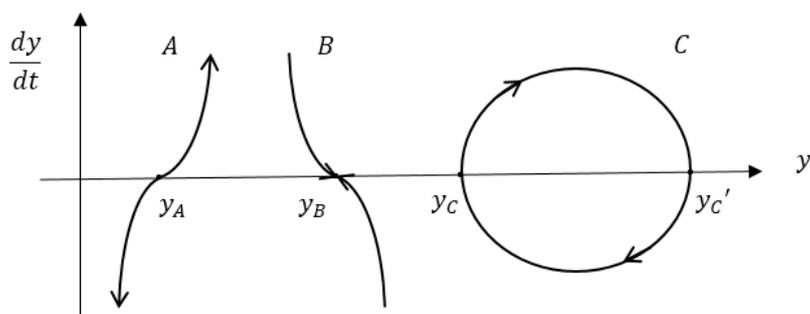
Trata-se do mesmo resultado visto anteriormente para o caso de tempo contínuo, com as mesmas trajetórias de expectativa de inflação e taxa de desemprego, só que agora interpretada para variáveis discretas. Vide a análise anterior para os três casos dependendo do tipo de raiz característica.

Obtidas as raízes características, substitua em  $\begin{bmatrix} b - (1 - j + jg) & j\beta \\ -bkg & b(1 + \beta k) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  para obter-se a relação entre  $m_i$  e  $n_i$  que liga as soluções de  $U$  às soluções de  $\pi$ . A equação com a solução completa da trajetória de  $U$  e  $\pi$  obtém-se combinando as soluções particulares com as funções complementares.

### Diagramas de fase de duas variáveis

Vimos como se constroem os diagramas de fase quando se tem apenas uma variável dependente, como a representação gráfica da derivada  $\frac{dy}{dt} = f(y)$ . Em que a variável tempo  $t$  não aparece como argumento, ou seja, quando se trata de uma equação diferencial autônoma. O gráfico abaixo, visto anteriormente, representa três tipos de linhas de fase. Quando a curva cruza o eixo real de  $y$  temos  $\frac{dy}{dt} = 0$ .

**Gráfico 41:** diagramas de fase para três casos.



Agora, veremos diagramas de fase para sistemas de equações diferenciais, que podem ser lineares ou não. Para tanto, supomos inicialmente duas equações diferenciais de 1ª ordem:  $x'(t) = f(x, y)$  e  $y'(t) = g(x, y)$ . Também neste caso, a variável independente  $t$  não entra como argumento, o sistema é autônomo.

Busca-se então obter o *espaço de fase*, e com base nele avaliar qualitativamente a direção do movimento das variáveis dependentes com as mudanças em  $t$ . Nesse espaço, identificam-se as linhas de demarcação, cada qual associada à condição respectiva  $\frac{dx}{dt} = 0$  e  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Evidenciam-se duas regiões no espaço de fase, delimitadas pelas condições  $\frac{dx}{dt} \left( \text{ou } \frac{dy}{dt} \right) > 0$  e  $\frac{dx}{dt} \left( \text{ou } \frac{dy}{dt} \right) < 0$ , e pela reta real, para cada variável  $x$  e  $y$ .

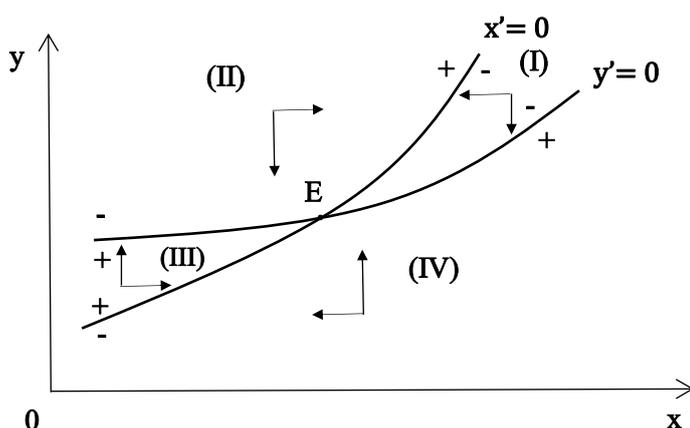
O eixo vertical do caso simples, anterior, não mais é necessário. A ênfase da análise recai em identificar-se regiões nas quais  $\frac{dx}{dt}$  (ou  $\frac{dy}{dt}$ )  $>< 0$ , assinaladas com os sinais respectivos + e -. No caso de sistemas com somente duas variáveis dependentes, sua dinâmica pode ser representada no espaço bidimensional.

Sejam as equações diferenciais  $x'(t) = f(x, y)$  e  $y'(t) = g(x, y)$ . As *curvas de demarcação* são os gráficos dessas equações na condição em que elas se anulam, isto é, os gráficos de  $f(x, y) = 0$  e  $g(x, y) = 0$ , que determinam as correspondentes curvas  $x'(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$ . Façamos uso da regra da função implícita. A inclinação da curva  $x'(t) = 0$  é obtida com  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x'=0} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{f_x}{f_y}$ . Na qual os sinais de  $f_x$  e  $f_y$  são conhecidos,  $f_y \neq 0$ .

Por outro lado, sabe-se a inclinação da curva  $y'(t) = 0$  pela expressão  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y'=0} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = -\frac{g_x}{g_y}$ ,  $g_y \neq 0$ .

Vamos a um exemplo: sejam as desigualdades  $f_x < 0$ ,  $f_y > 0$ ,  $g_x > 0$  e  $g_y < 0$ , nas quais as derivadas das funções tem sinais contrários nas duas variáveis, e sinais contrários em relação a  $g$  e  $f$ . Neste caso,  $x'(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$  ambas têm inclinação positiva. Outra hipótese é que  $-\frac{f_x}{f_y} > -\frac{g_x}{g_y}$ , ou seja, que  $x'(t) = 0$  seja mais inclinada que  $y'(t) = 0$ . Esse exemplo é representado no gráfico (42) que oferece linhas de demarcação com a indicação de sinais e dos vetores nas direções  $x$  e  $y$  que condicionam a trajetória das variáveis. Nele identificam-se quatro regiões de I a IV.

**Gráfico 42:** linhas de demarcação e dinâmica das variáveis dependentes  $x$  e  $y$ .



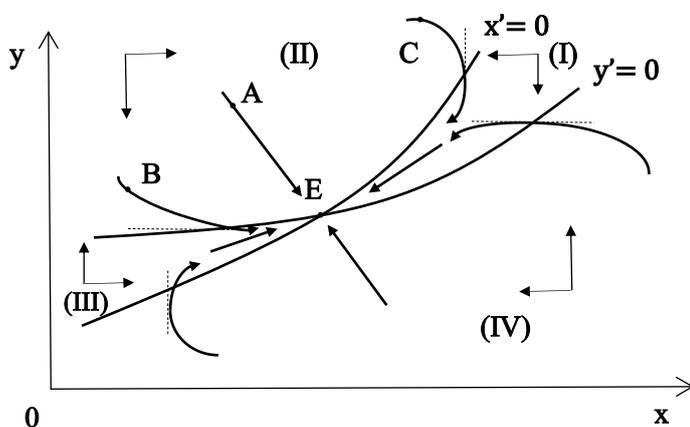
Note que o ponto  $E$  indica o equilíbrio intertemporal do sistema, quando  $x'(t) = y'(t) = 0$ . Já que  $\frac{\partial x'}{\partial x} = f_x < 0$ , por hipótese, à esquerda de  $x'(t) = 0$  temos que  $x'(t) > 0$ , pois, com a diminuição de  $x$ ,  $x'(t)$ , partindo de 0, deve crescer, o que no gráfico é indicado com o sinal +. Temos ainda que, à direita de  $x'(t) = 0$ ,  $x'(t) < 0$ , pois, com o aumento de  $x$ ,  $x'(t)$ , partindo de 0, deve decrescer, o que no gráfico é indicado com o sinal -.

No caso da curva  $y'(t) = 0$ , já que  $\frac{\partial y'}{\partial x} = g_x > 0$ , por hipótese, à esquerda de  $y'(t) = 0$  temos que  $y'(t) < 0$ , pois, com a diminuição de  $x$ ,  $y'(t)$ , partindo de 0, deve decrescer, o que no gráfico é indicado com o sinal  $-$ . À direita de  $y'(t) = 0$ ,  $y'(t) > 0$ , pois, com o aumento de  $x$ ,  $y'(t)$ , partindo de 0, deve crescer, o que no gráfico é indicado com o sinal  $+$ . Pensando agora nas quatro regiões do gráfico, as setas direcionais indicam o movimento temporal de  $x$  e  $y$  em cada uma delas.

### Linhas de fluxo

As linhas de fluxo são os caminhos ou trajetórias de fase que descrevem a dinâmica específica do movimento das variáveis do sistema. O gráfico (43) indica as linhas de fluxos do exemplo anterior:

**Gráfico 43:** linhas de fluxo das variáveis dependentes  $x$  e  $y$ .



O ponto  $E$  é ponto de equilíbrio intertemporal globalmente estável. A linha que passa por  $A$  fica sempre na região II em que já se encontra. Já as linhas que passam em  $B$  e  $C$ , por exemplo, cruzam de uma região a outra, a de  $B$  para a região III a de  $C$  caminha à região I. Quando a linha de fluxo que passa em  $C$  cruza a linha de demarcação  $x'(t) = 0$ , neste ponto ela tem inclinação vertical. Quando a linha de fluxo que passa em  $B$  cruza a linha de demarcação  $y'(t) = 0$  aquela tem, neste ponto, inclinação zero. Em suma, as linhas de fase atravessam a linha de demarcação  $x'(t) = 0$  com inclinação vertical e a linha de demarcação  $y'(t) = 0$  com inclinação nula.

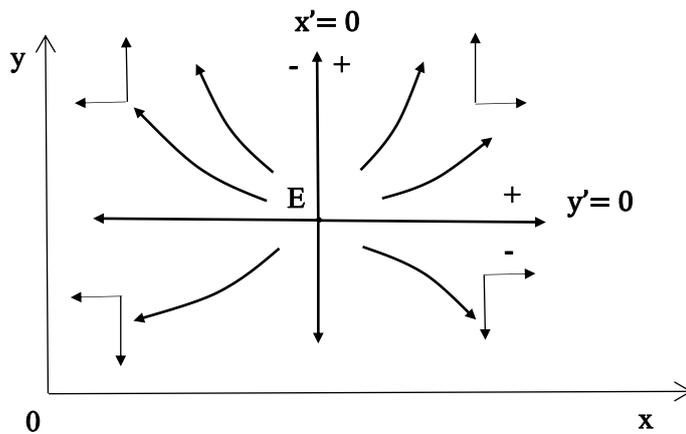
As linhas de fluxo não indicam velocidade ou aceleração, só indicam a direção e o sentido na trajetória das variáveis dependentes do sistema. São trajetórias de fase. As únicas informações de velocidade que fornecem é que em  $x'(t) = 0$  a velocidade em  $x$  é zero, e em  $y'(t) = 0$ , a velocidade em  $y$  é nula. Pois, nesses pontos ocorre mudança de direção na trajetória da variável cuja velocidade é zero.

## Tipos de equilíbrio

Nesta seção, iremos examinar quatro tipos de equilíbrio: nós, pontos de sela, equilíbrio do tipo “foco” e vórtices ou centros de equilíbrio.

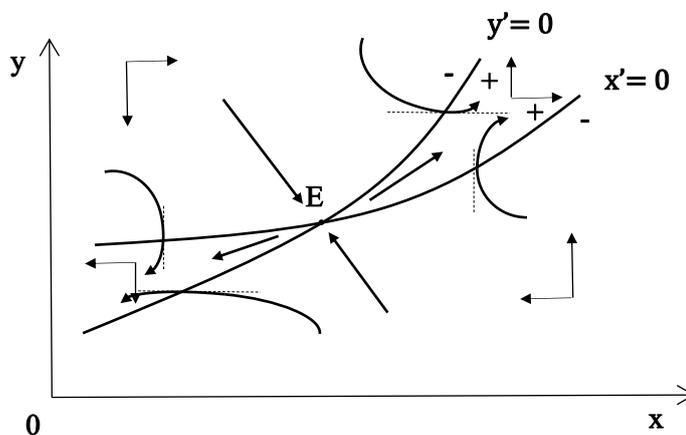
Nos *nós*, todas as linhas de fluxo fluem de modo não-cíclico em direção a um ponto, o nó em questão, quanto são nós estáveis. Ou então todas as linhas de fluxo fluem de modo não cíclico afastando-se dele, no caso de nós instáveis. O gráfico (44) mostra um padrão de linhas de fluxo do tipo nó divergente.

**Gráfico 44:** linhas de fluxo do tipo nó divergente.



No equilíbrio caracterizado como *ponto de sela*, ele é estável em algumas direções e instável em outras. Identificam-se então ramos estáveis e ramos instáveis no padrão ponto de sela. Ramos estáveis aproximam-se e ramos instáveis afastam-se do equilíbrio em *E*. No gráfico 45, representa-se a situação de um ponto de sela em que o equilíbrio é estável vindo-se de noroeste a sudeste, ou em sentido contrário, e instável quando se caminha de sudoeste a nordeste, ou o contrário. Outras trajetórias em que ocorrem deflexão nas linhas de fluxo estão representadas na figura.

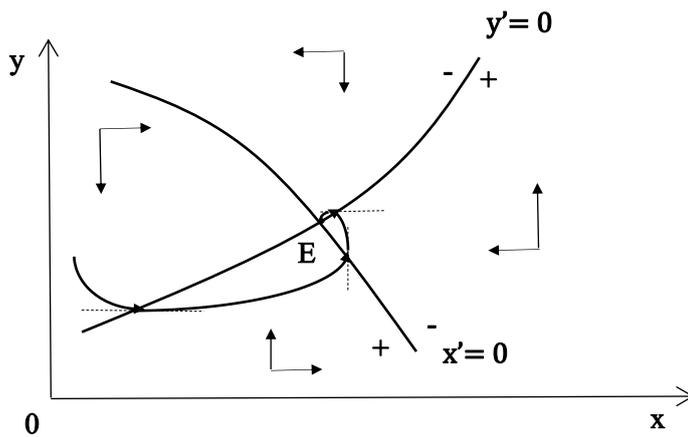
**Gráfico 45:** linhas de fluxo do tipo ponto de sela.



No equilíbrio tipo *foco*, as trajetórias são giratórias. No caso de foco estável, fluem em ciclos em direção ao ponto de equilíbrio  $E$ . No foco instável, fluem em ciclos afastando-se desse ponto. As linhas de fluxo cruzam de uma região a outra descrevendo uma trajetória espiral. No gráfico 46, ilustra-se uma trajetória espiralada e convergente.

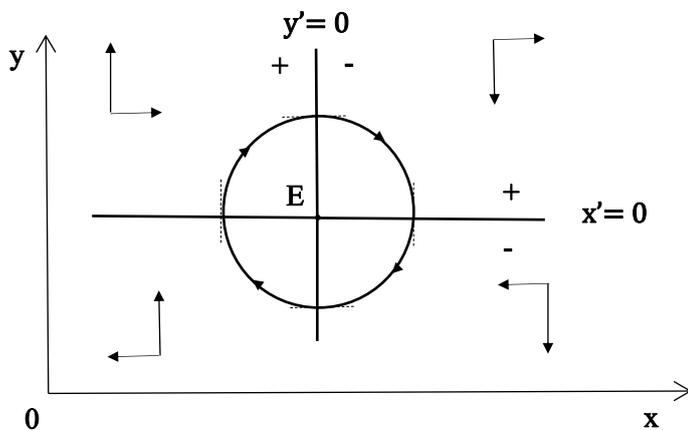
Há, de fato, vários outros tipos de linhas de fase. Finalizaremos essa discussão, apresentando as linhas de fluxo que descrevem um *vórtice*, em que a trajetória é fechada.

**Gráfico 46:** linhas de fluxo do tipo *foco*.



No equilíbrio no padrão *vórtice*, as trajetórias formam um circuito completo. Fluem em círculos ou ovais. Orbitam ao redor do equilíbrio em movimento perpétuo. O equilíbrio  $E$  é sempre instável. As linhas de fluxo cruzam de uma região a outra descrevendo uma trajetória fechada. No gráfico 47, ilustra-se uma trajetória circular que se desloca no sentido horário.

**Gráfico 47:** linhas de fluxo do tipo *vórtice*.



Note que em todos os exemplos vistos as duas curvas de demarcação interceptam-se apenas uma vez no ponto  $E$ . Em um caso mais geral, as curvas podem se cruzarem mais de uma vez, formando equilíbrios múltiplos.

## **Biografia.**

CHIANG, A.; WAINWRIGHT, K. *Matemática para economistas*. 4ª ed. Rio de Janeiro: Campus, 2006.

HOY, M.; LIVERNOIS, J.; MCKENNA, C.; REES, R.; STENGOS, T. *Mathematics for economics*. 2ª ed. Cambridge: MIT Press, 2001

HUNT, Brian R., LIPSMAN, Ronald L.; ROSEMBERG, Jonathan M., *A Guide to MATLAB for Beginners and Experienced Users*. Cambridge University Press. Third Edition.  
<[http://assets.cambridge.org/97811076/62223/frontmatter/9781107662223\\_frontmatter.pdf](http://assets.cambridge.org/97811076/62223/frontmatter/9781107662223_frontmatter.pdf)>

SIMON, C. P.; BLUME, L., *Matemática para Economistas*. Porto Alegre: Bookman, 2006.