Métodos objetivos de desempate

Enzo Barberio Mariano

Perguntas

1. Quais são as três classificações de análises em relação a sua dimensão temporal? Para qual delas a DEA foi idealmente desenhada?
2. Quais são as formas possíveis para se lidar com dados em painel na DEA? Quais são suas vantagens e desvantagens?
3. Em que consiste a análise de janela?
4. Como determinar o número de janelas e a quantidade de DMUs em cada uma? Como esses valores foram propostos?
5. O que é o índice Malmquist? O que representam as parcelas AT e AE?
6. Como calcular o índice Malmquist e os seus componentes?

Problemas dos empates

- **Os modelos DEA tendem a produzir muitos empates entre DMUs eficientes;**
  - Devido a liberdade em atribuir os pesos mais vantajosos para cada unidade;
  - Pode atribuir pesos zero;
  - Pode atribuir pesos irreais;

- **Algumas considerações sobre empates:**
  - Modelos radias empatam mais que não radiais (falsos eficientes);
  - Modelos com retornos constantes empatam menos que os de retornos variáveis;

Exemplo – CCR orientado ao input

DMU	I1	I2	O	Eficiência
A	100	2	1	0,9999
B	97	3	1	0,90
C	80	5	1	1,00
D	92	3	1	0,95
E	87	4	1	0,96
F	85	6	1	0,93
G	84	4	1	0,99
H	90	2	1	1,00
I	88	5	1	0,92
J	78	6	1	1,00

Métodos de desempate

- **Subjetivos:** Depende de uma opinião externa para desempatar;
  - Restrições aos pesos;
  - Acréscimo de uma DMU fictícia; etc.

- **Objetivos:** São oriundos do próprio modelo matemático;
  - Supereficiência
  - Fronteira invertida/ índice composto
  - Avaliação cruzada;
  - Índice triplo;

- **Qualitativos:**
  - Verificar o número de vezes em que a unidade ser de referência para outras DMUs

Supereficiencia

- **Origem:**
  – Andersen e Petersen (1993)

- **Consiste em:**
  – Eliminar do modelo de programação linear a restrição que limita a eficiência da DMU em análise a 1;
  – O modelo passa a poder gerar um índice maior do que 1 (acima da fronteira formada pelas outras);
  – Quanto mais acima da fronteira mais eficiente**;**

Modelo de supereficiência CCR orientado aos *inputs na forma dos multiplicadores*

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot y_{i0}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot x_{j0} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i . y_{jk} - \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot x_{jk} \leq 0, \quad \text{para todo } k \neq 0$$

$$u_i \ \text{e} \ v_j \geq \varepsilon$$

Modelo de supereficiência CCR *input* orientado na forma do envelope

$$Min\,\theta$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1/k\neq 0}^{z} x_{jk} \cdot \lambda_k \leq \theta \cdot x_{j0}$$ para j = 1,2,3...m

$$\sum_{k=1/k\neq 0}^{z} y_{ik} \cdot \lambda_k \geq y_{i0}$$ para i = 1,2,3....n

θ e $\lambda_k \geq 0$

Vantagens e indicações

- **Vantagem:**
  - Mantém o ranking das DMUs ineficientes;
  - Discrimina DMUs eficientes;

- **Indicações:**
  - *Indicado para a identificação de outliers;*
    - Possíveis unidades com erros nos dados;
  - *Índice de estabilidade;*
    - **Ex:** Um índice de 1,42 significa que os inputs poderiam ser aumentados em 42% sem que a DMU deixe de ser eficiente;

Desvantagens e limitações

- **O índice obtido não pode ser considerado um índice de eficiência:**
  - No caso das eficientes é um índice difícil de ser interpretado;
  - Parte de parâmetros diferentes do DEA padrão;

- **Problemas matemáticos:**
  - Muitas vezes leva a inviabilidade do modelo de programação linear;
  - Mais comum que isso ocorra no modelo BCC

Exemplo

DMU	I1	I2	O	Eficiência
A	100	2	1	0,9999
B	97	3	1	0,90
C	80	5	1	**1,01**
D	92	3	1	0,95
E	87	4	1	0,96
F	85	6	1	0,93
G	84	4	1	0,99
H	90	2	1	**1,09**
I	88	5	1	0,92
J	78	6	1	**1,03**

Fronteira invertida

- **Origem:**
  - *Yamada (1992):* Propôs a ideia de fronteira invertida;
  - *Leta et al. (2005):* Propôs a ideia de índice composto;

- **Consiste em:**
  - Rodar o modelo com os inputs no lugar dos outputs e vice versa;

- **Justificativa:**
  - A unidade mais eficiente é aquela que está mais perto da fronteira dos melhores e mais longe da fronteira dos piores;
  - Consiste em uma média da eficiência obtida com os pesos mais e menos vantajosos;

Fronteira clássica e invertida

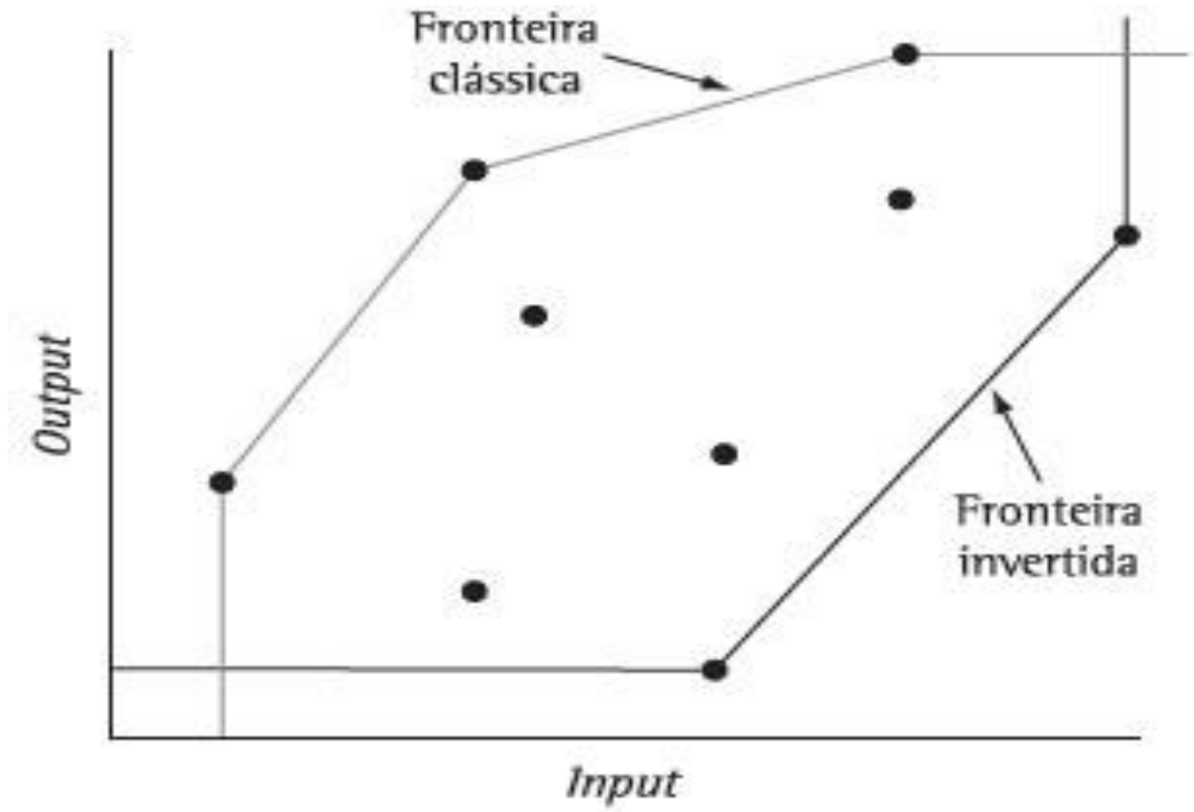

Figura 1. Fronteira DEA BCC clássica e invertida.

Método ainda relativamente pouco utilizado

Mais usado no Brasil

Índice Composto

$$IC = \alpha * E_{padrão} + (1-\alpha) * (1 - E_{invertido})$$

- $E_{padrão}$: Eficiência DEA normal (pesos mais vantajosos)
- $E_{invertida}$: Eficiência com inputs e outputs trocados (pesos menos vantajosos);
- α: Peso dado para cada critério;

Geralmente se adota α = 0,5

Após se calcular todos os ICs deve-se fazer uma normalização

Exercício

DMU	Eficiência padrão	Fronteira invertida	IC (sem normalização)	IC normalizado
A	1	1	0,5	0,77
B	0,88	0,8	0,54	0,83
C	0,5	1	0,25	0,38
D	1	0,7	0,65	1
E	0,4	0,7	0,35	0,54
F	0,9	0,6	0,65	1
G	0,7	0,6	0,55	0,85
H	0,9	0,9	0,5	0,77
I	1,0	0,8	0,6	0,92

DMU	Eficiência padrão	Eficiência invertida	Índice Composto	Índice composto normalizado
A	0,99999	1,00	0,50	0,91
B	0,90	1,00	0,45	0,83
C	1,00	0,92	0,54	0,99
D	0,95	0,95	0,50	0,91
E	0,96	0,94	0,51	0,93
F	0,93	1,00	0,46	0,85
G	0,99	0,92	0,54	0,98
H	1,00	0,91	0,55	1,00
I	0,92	0,99	0,47	0,85
J	1,00	1,00	0,50	0,91

Avaliação cruzada

- **Origem:**
  - Sexton et al. (1986) e Doyle e Green (1994)
  - Primeiro e mais utilizado método objetivo de desempate;
- **Consiste em:**
  - Construir uma matriz de cruzamento entre pesos e unidades;
  - Calcular a média entre as eficiências calculadas por cada peso;
- **Justificativa:**
  - A DMU mais eficiente se mantém estável com vários pesos;
  - Penaliza DMUs que adotam pesos muito irreais;

Resultado da DEA multiplicadores

DMU	I1	I2	O	Eficiência	v1	v2	u1
A	100	2	1	0,9999	0,0000	0,5000	1,0000
B	97	3	1	0,90	0,0093	0,0312	0,9034
C	80	5	1	1,00	0,0111	0,0222	1,0000
D	92	3	1	0,95	0,0098	0,0327	0,9477
E	87	4	1	0,96	0,0100	0,0332	0,9635
F	85	6	1	0,93	0,0103	0,0206	0,9278
G	84	4	1	0,99	0,0103	0,0342	0,9932
H	90	2	1	1,00	0,0103	0,0345	1,0000
I	88	5	1	0,92	0,0096	0,0318	0,9236
J	78	6	1	1,00	0,0128	0,0000	1,0000

Cálculo da eficiência cruzada

$$E_{k0} = \frac{\sum_{i=1}^{m} u_{ik} \cdot y_{i0}}{\sum_{j=1}^{n} v_{jk} \cdot x_{j0}}$$

Ek0 : Eficiência da DMU o com os pesos da DMU k

Matriz de avaliação cruzada

DMU	Pesos										Média
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
A	0,99	0,91	0,87	0,91	0,91	0,87	0,91	0,91	0,91	0,78	0,89
B	0,67	0,90	0,87	0,90	0,90	0,87	0,90	0,90	0,90	0,80	0,86
C	0,40	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	0,94
D	0,67	0,95	0,92	0,95	0,95	0,92	0,95	0,95	0,95	0,85	0,90
E	0,50	0,96	0,95	0,96	0,96	0,95	0,96	0,96	0,96	0,90	0,91
F	0,33	0,92	0,93	0,92	0,92	0,93	0,92	0,92	0,92	0,92	0,86
G	0,50	0,99	0,98	0,99	0,99	0,98	0,99	0,99	0,99	0,93	0,93
H	1,00	1,00	0,96	1,00	1,00	0,96	1,00	1,00	1,00	0,87	0,98
I	0,40	0,92	0,92	0,92	0,92	0,92	0,92	0,92	0,92	0,89	0,87
J	0,33	0,99	1,00	0,99	0,99	1,00	0,99	0,99	0,99	1,00	0,93

Problema dos múltiplos pesos

- **Problema:**
  - Podem existir múltiplas soluções de pesos que garantem uma solução ótima;
  - Isso impede a replicação do método;

- **É necessário aplicar um segundo modelo de programação linear (2º estágio):**
  - Modelos benevolentes (maximiza a eficiência média);
  - Modelos agressivos: (minimiza a eficiência média)

Modelo Agressivo

- **Consiste em achar o conjunto de pesos que:**
  - minimiza a eficiência média das outras DMUs
  - Mantendo a eficiência da DMU em análise encontrada no primeiro estágio;

- **Primeiro passo:** Determinar um conjunto de variáveis auxiliares:
  - $\boldsymbol{X_{j0}}: \sum_{k \neq 0} x_{jk}, \, para\ todo\ j$
  - $\boldsymbol{Y_{i0}}: \sum_{k \neq 0} y_{ik}, \, para\ todo\ i$

Modelo agressivo (CCR ao input)

$$Min \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot Y_{i0}$$

$Sujeito\ a$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot X_{j0} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \cdot y_{ik} - \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot x_{jk} \leq 0, \qquad for\ \forall k \neq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \cdot y_{i0} - \theta \cdot \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot x_{j0} = 0$$

$$\delta, v_j\ e\ u_i\ \geq \varepsilon$$

Resultado pesos otimizados

DMU	I1	I2	O	Eficiência	v1	v2	u1
A	100	2	1	0,9999	0,00000	0,02631	0,05264
B	97	3	1	0,90	0,00110	0,00367	0,10654
C	80	5	1	1,00	0,00115	0,00230	0,10333
D	92	3	1	0,95	0,00110	0,00365	0,10596
E	87	4	1	0,96	0,00109	0,00365	0,10576
F	85	6	1	0,93	0,00116	0,00231	0,10417
G	84	4	1	0,99	0,00109	0,00364	0,10542
H	90	2	1	1,00	0,00000	0,02631	0,05264
I	88	5	1	0,92	0,00110	0,00366	0,10627
J	78	6	1	1,00	0,00125	0,00000	0,09714

Matriz de avaliação cruzada

DMU	Pesos										Média
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
A	0,99	0,91	0,87	0,91	0,91	0,87	0,91	1,00	0,91	0,78	0,90
B	0,67	0,90	0,87	0,90	0,90	0,87	0,90	0,67	0,90	0,80	0,84
C	0,40	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,40	1,00	0,98	0,88
D	0,67	0,95	0,92	0,95	0,95	0,92	0,95	0,67	0,95	0,85	0,88
E	0,50	0,96	0,95	0,96	0,96	0,95	0,96	0,50	0,96	0,90	0,86
F	0,33	0,92	0,93	0,92	0,92	0,93	0,92	0,33	0,92	0,92	0,80
G	0,50	0,99	0,98	0,99	0,99	0,98	0,99	0,50	0,99	0,93	0,89
H	1,00	1,00	0,96	1,00	1,00	0,96	1,00	1,00	1,00	0,87	0,98
I	0,40	0,92	0,92	0,92	0,92	0,92	0,92	0,40	0,92	0,89	0,81
J	0,33	0,99	1,00	0,99	0,99	1,00	0,99	0,33	0,99	1,00	0,86

Índice Maverick

$$M_k = \frac{(E_{kk} - e_k)}{e_k}$$

- E_{kk} = Eficiência padrão;
- e_k = Avaliação cruzada;

- Quanto maior for o índice Maverick, maior a chance dos pesos atribuídos pela DEA terem sido irreais;

Índice Maverick

DMU	
A	0,11
B	0,08
C	0,14
D	0,08
E	0,12
F	0,15
G	0,12
H	0,02
I	0,13
J	0,16

Limitações da avaliação cruzada

- **É um método trabalhoso;**

- **Dependendo do método utilizado no segundo estágio os resultados mudam**:
  - É difícil decidir por qual método utilizar
  - Wang et al. (2012) fez uma revisão de modelos;

- **Problema da eficiência negativa:**
  - Pode aparecer em modelos BCC orientados ao input;
  - Identificado por Soares de Mello et al. (2013)

Índice triplo

- **Proposto por:**
  - Mariano e Rebelatto (2014)
- **Consiste em:**
  - Construir um índice baseado em três dimensões de análise;
- **Justificativa:**
  - Uma DMU deve ser avaliada com base em múltiplas dimensões :

Pesos mais vantajosos

Pesos menos vantajosos

Os pesos mais vantajosos das outras unidades;

  - Utilizar média geométrica tem vantagens;

Índice padrão e índice invertido

- **Índice padrão:**
  - Resultado da DEA

- **Índice invertido:**
  - Inverso do resultado da fronteira invertida normalizado

Diferença do índice composto: uso do inverso ao invés de 1 menos;
Possibilita a normalização e o cálculo de um índice (não tem índice 0)

Índice multiplicativo cruzado

- **Semelhante a avaliação cruzada com as seguintes diferenças:**
  - Uso de média geométrica;
  - Exclui-se da média os pesos da unidade em análise (diagonal principal);
  - As médias obtidas são normalizadas para se obter um índice entre 0 e 1;

$$E_k^{MCross} = \frac{\sqrt[h-1]{\prod_{\forall l \neq k} E_{lk}}}{\max\limits_{k}\left\{\sqrt[h-1]{\prod_{\forall l \neq k} E_{lk}}\right\}}$$

Índice Triplo

$$E_k^{Triple} = \frac{(E_{kk})^{\alpha} \times (E_k^{MCross})^{\beta} \times (E_k^{Inv})^{\gamma}}{\max_k\{(E_{kk})^{\alpha} \times (E_k^{MCross})^{\beta} \times (E_k^{Inv})^{\gamma}\}}$$

- **Média geométrica ponderada normalizada dos três índices calculados:**
  - Índice Padrão (E_{kk});
  - Índice Invertido (E_k^{MCross});
  - Índice Multiplicativo Cruzado (E_k^{Inv});

- **α, β, e ϒ:** são os pesos de cada índice (soma igual a 1);

Desafios do índice triplo

- Pode ser um índice complexo demais para problemas simples;
- Investigar melhor os impactos da média geométrica sobre os índices;
- Investigar os melhor as possibilidades de pesos para cada índice;

	Índice padrão	Índice Multiplicativo cruzado	Índice invertido	Índice triplo (sem normalização)
A	0,9999	0,91	0,91	0,94
B	0,90	0,85	0,91	0,89
C	1,00	0,83	0,99	0,94
D	0,95	0,88	0,95	0,93
E	0,96	0,84	0,96	0,92
F	0,93	0,75	0,91	0,86
G	0,99	0,87	0,99	0,95
H	1,00	1,00	1,00	1,00
I	0,92	0,78	0,91	0,87
J	1,00	0,80	0,91	0,90