



Modelo CCR – forma dos multiplicadores

Enzo Barberio Mariano

Questões - revisão

1. Qual a diferença entre eficiência e eficácia?
2. Qual a diferença entre eficiência absoluta e relativa?
3. O que é produtividade? Como se determina a produtividade parcial (PPF) e a produtividade total dos fatores (PTF)?
4. Como se determina a eficiência produtiva?
5. Qual a diferença entre fronteira de eficiência e função produção?
6. O que é a orientação de um modelo DEA e qual são as duas mais comuns?

Revisão

- **Produtividade:**

$$\text{Produtividade} = \frac{u_1 \cdot y_1 + u_2 \cdot y_2 + u_3 \cdot y_3 \dots}{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3 \cdot x_3 \dots} = O_v / I_v$$

- **Eficiência Produtiva:**

$$\text{Eficiência} = P / P_{\max}$$

Exemplo 2

Agência	Empregados	Transações	Serviços bancários
A	20	125	50
B	16	40	20
C	17	68	55
D	11	23	12



Produtividade parcial dos fatores

Agência	Produtividade (transações)	Produtividade (serviços)
A	6,25	2,50
B	2,50	1,25
C	4,00	3,24
D	2,09	1,09

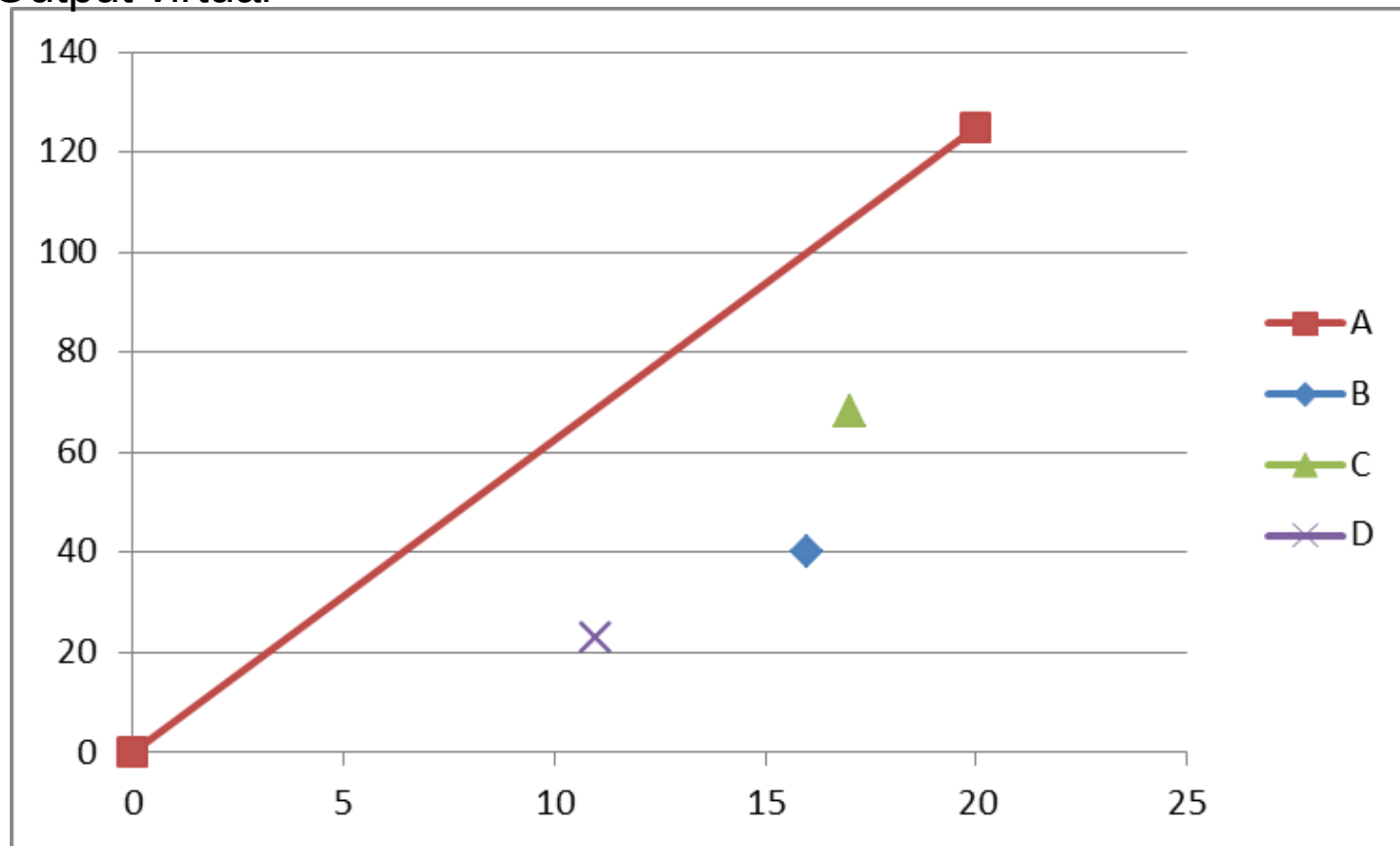


Modelo CCR ou CRS

- **Desenvolvido no trabalho original de Charnes, Cooper e Rhodes (1978):**
 - *CCR*: Charnes; Cooper; Rhodes
 - *CRS*: Constant Returns to Scale
- **Pressuposto de retornos constantes de escala;**
 - *O outputs* crescem com os inputs na mesma proporção;
 - A fronteira tem formato linear centrado na origem;
- **Modelo radial**
 - **Admite duas orientações:** Ao input e ao output;

Fronteira CRS

Output virtual



Dado um aumento no input virtual o output sempre cresce na mesma proporção

Se o I_v dobra o O_v dobra

Modelos radiais

- O CCR é um exemplo de um modelo radial;
 - **Outros modelos radiais:** BCC, FDH, IRS, DRS
- Trata todos os inputs e todos os outputs como se fossem um só;
 - Todos terão o mesmo comportamento;
- A eficiência pode representar:
 - a) A diminuição equiproporcional de todos os inputs para a DMU atingir a fronteira, mantendo os outputs constantes
 - b) O aumento equiproporcional de todos os outputs para que a DMU atinja a fronteira mantendo os inputs constantes;

Para o modelo CCR o resultado das duas orientações sempre será igual devido a fronteira ser linear

Exemplo de eficiência radial

Uma DMU com 3 inputs e 2 outputs teve uma eficiência pelo modelo CCR de 80%

Para as duas orientações, determine a projeção dessa DMU na fronteira:

- $I_1 = 1200$
- $I_2 = 14,37$
- $I_3 = 0,005$
- $O_1 = 18,00$
- $O_2 = 12.345.618,00$

$$\text{Projeção (I)} = E * I$$

$$\text{Projeção (O)} = O/E$$

Resposta

	Valores	Orientação ao input	Orientação ao output
I1	1200	960	1200
I2	14,37	11,97	14,37
I3	0,005	0,004	0,005
O1	18	18	22,5
O2	12.345.618	12.345.618	15.432.022,5

Programação matemática

- **Variáveis de decisão:**

- São as variáveis que o modelo vai fornecer como resultado;

No caso da DEA são os pesos dos inputs e outputs

- **Função objetivo:**

- É uma função que deve ser maximizada ou minimizada;
- O objetivo da programação é otimizar essa função;

- **Restrições:**

- Conjunto de inequações que limitam os valores que a FO pode assumir;

Notação – índices das variáveis

- **0**
 - Representa a DMU em análise;
 - Todas as DMUs da amostra uma hora serão a DMU_0
- **$k \rightarrow$ de 1 a z (número de DMUs)**
 - Indica a DMU ao qual está se referindo no momento
 - A DMU_0 continua tendo mantendo o seu índice k nas restrições;
- **$i \rightarrow$ de 1 até n (número de outputs):**
 - Refere-se ao output de número i
- **$j \rightarrow$ de 1 até m (número de inputs)**
 - Refere-se ao input de número j



Notação das variáveis

- **Variáveis de decisão:**
 - v_j : peso do input j ;
 - u_i : peso do output i ;
- **Parâmetros do modelo**
 - y_{i0} : Output i da DMU em análise;
 - x_{j0} : Input j da DMU em análise;
 - y_{ik} : Output i da DMU k ;
 - x_{jk} : Input j da DMU k .



Modelagem Fracionária

- É a formulação original dos modelos DEA;
- É um modelo de programação matemática que possui infinitas soluções ;
- Não possui aplicações práticas, apenas didáticas.

Orientações

- **Orientação ao input:**

- Maximizar:

$$P/P_{\max}$$

- **Orientação ao output**

- Minimizar

$$P_{\max}/P$$

O resultado da eficiência sai invertido

CCR ao input fracionário

$$\text{FO: Max } E_0 = P_0 / P_{\max}$$

Sujeito a:

- a) $P_k \leq 1$, para todo k
- b) v_j e $u_i \geq \varepsilon$, para todo i e j

Sempre será 1

ε : Número não-arquimediano (muito próximo de zero)

CCR ao *Input* Fracionário

$$\text{Max} \quad PO = \frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0}}$$

Sujeito a:

$$\frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk}} \leq 1, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z$$

$$u_i \text{ e } v_j \geq 0 \text{ ou } = 0$$

Exemplo 2

Agência	Empregados	Transações	Serviços
A	20	125	50
B	16	40	20
C	17	68	55
D	11	23	12

Monte o modelo CCR fracionário orientado aos inputs para as DMUs A e C

Para a agência A

$$\text{FO: Max } \frac{125*u_1 + 50*u_2}{20*v_1}$$

Sujeito a:

$$a) \frac{125*u_1 + 50*u_2}{20*v_1} \leq 1$$

$$b) \frac{40*u_1 + 20*u_2}{16*v_1} \leq 1$$

$$c) \frac{68*u_1 + 55*u_2}{17*v_1} \leq 1$$

$$d) \frac{23*u_1 + 12*u_2}{11*v_1} \leq 1$$

$$e) u_1, u_2, v_1 \geq \varepsilon$$

Para a agência C

$$\text{FO: Max } \frac{68*u_1 + 55*u_2}{17*v_1}$$

Sujeito a:

$$a) \frac{125*u_1 + 50*u_2}{20*v_1} \leq 1$$

$$b) \frac{40*u_1 + 20*u_2}{16*v_1} \leq 1$$

$$c) \frac{68*u_1 + 55*u_2}{17*v_1} \leq 1$$

$$d) \frac{23*u_1 + 12*u_2}{11*v_1} \leq 1$$

$$e) u_1, u_2, v_1 \geq \varepsilon$$

Linearização do modelo

- Procedimento desenvolvido por Charnes e Cooper em um artigo de 1962;
 - Charnes, A.; Cooper, W.W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly* 9, 67–88.
- É acrescentada uma restrição adicional limitando o denominador da FO:

$$\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0} = 1$$

CCR orientado aos *inputs* na forma dos multiplicadores

$$\text{MAX} \quad \sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0} = 1$$

$$\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{jk} - \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk} \leq 0, \text{ para } k = 1, 2, \dots, z$$

$$u_i \text{ e } v_j \geq \varepsilon$$

Para a agência A

$$F0: \text{Max } 125 * u_1 + 50 * u_2$$

Sujeito a:

$$a) 20 * v_1 = 1$$

$$b) 125 * u_1 + 50 * u_2 - 20 * v_1 \leq 0$$

$$c) 40 * u_1 + 20 * u_2 - 16 * v_1 \leq 0$$

$$d) 68 * u_1 + 55 * u_2 - 17 * v_1 \leq 0$$

$$e) 23 * u_1 + 12 * u_2 - 11 * v_1 \leq 0$$

$$f) u_1, u_2, v_1 \geq \varepsilon$$

Para a agência C

$$\text{FO: Max } 68 * u_1 + 55 * u_2$$

Sujeito a:

$$a) 17 * v_1 = 1$$

$$b) 125 * u_1 + 50 * u_2 - 20 * v_1 \leq 0$$

$$c) 40 * u_1 + 20 * u_2 - 16 * v_1 \leq 0$$

$$d) 68 * u_1 + 55 * u_2 - 17 * v_1 \leq 0$$

$$e) 23 * u_1 + 12 * u_2 - 11 * v_1 \leq 0$$

$$f) u_1, u_2, v_1 \geq \varepsilon$$

Resultados do exemplo

Agência	Eficiência	Peso Empregados (v1)	Peso Transações (u1)	Peso Serviços (u2)
A	100%	0,050	0,008	0
B	45,5%	0,0625	0,0045	0,0137
C	100%	0,059	0,0043	0,0129
D	39,06%	0,091	0,0065	0,022

Projeção radial na fronteira – orientação ao input

Agência	Empregados	Transações	Serviços
A	20	125	50
B	7,28	44	20
C	17	80	55
D	4,29	23	12



Modelo orientado ao output

- Parte de uma lógica diferente do modelo orientado ao *output*;
- **Ao invés de maximizar a eficiência da DMU em análise busca-se:**
 - Minimizar o inverso da eficiência da DMU em análise;
- O resultado final da função objetivo é inverso da eficiência;

CCR ao output fracionário

$$\text{FO: Min } 1/E_0 = P_{\max}/P_0$$

Sujeito a:

$$P_k \leq 1, \text{ para todo } k$$

$$v_j \text{ e } u_i \geq \varepsilon: , \text{ para todo } i \text{ e } j$$

Sempre será 1

CCR ao *Output* Fracionário

$$\text{Min } 1 / PO = \frac{\sum_{j=1}^m v_j \cdot x_{j0}}{\sum_{i=1}^n u_i \cdot y_{i0}}$$

Sujeito a:

$$\frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk}} \leq 1, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z$$

$$u_i \text{ e } v_j \geq \varepsilon$$

Modelo CCR orientado aos *outputs na forma dos multiplicadores*

$$\text{MIN} \quad \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0} = 1$$

$$\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{jk} - \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk} \leq 0, \text{ para } k = 1, 2, \dots, z$$

$$u_i \text{ e } v_j \geq \varepsilon$$

Para a agência A

$$\text{FO: } \text{Min } 20 * v_1$$

Sujeito a:

$$a) 125 * u_1 + 50 * u_2 = 1$$

$$b) 125 * u_1 + 50 * u_2 - 20 * v_1 \leq 0$$

$$c) 40 * u_1 + 20 * u_2 - 16 * v_1 \leq 0$$

$$d) 68 * u_1 + 55 * u_2 - 17 * v_1 \leq 0$$

$$e) 23 * u_1 + 12 * u_2 - 11 * v_1 \leq 0$$

$$f) u_1, u_2, v_1 \geq \varepsilon$$

Para a agência C

$$\text{FO: Min } 17 * v_1$$

Sujeito a:

$$a) 68 * u_1 + 55 * u_2 = 1$$

$$b) 125 * u_1 + 50 * u_2 - 20 * v_1 \leq 0$$

$$c) 40 * u_1 + 20 * u_2 - 16 * v_1 \leq 0$$

$$d) 68 * u_1 + 55 * u_2 - 17 * v_1 \leq 0$$

$$e) 23 * u_1 + 12 * u_2 - 11 * v_1 \leq 0$$

$$f) u_1, u_2, v_1 \geq \varepsilon$$

Resultados do exemplo

Agência	Resultado da FO (1/E)	Peso Empregados (v1)	Peso Transações (u1)	Peso Serviços (u2)
A	1	0,050	0,008	0
B	2,19	0,14	0,0098	0,030
C	1	0,059	0,004	0,012
D	2,56	0,233	0,017	0,051

Projeção radial na fronteira

Agência	Empregados	Transações	Serviços
A	20	125	50
B	16	87,90	43,95
C	17	68	55
D	11	58,88	30,72



Pesos do CCR na forma dos multiplicadores

- **Os pesos trazem duas informações:**
 - Estimativa do nível de importância da variável dada pela DEA;
 - Compensação pelo fato de os inputs e outputs terem ordens de grandeza diversa;

- **Limitações:**
 - Determina os pesos matematicamente (pesos mais vantajosos);
 - Não leva em conta nenhuma informação de mercado;
 - Pode levar a pesos irrealistas (necessidade de restrições adicionais);
 - Múltiplos conjuntos de pesos ótimos para as DMUs eficientes



Contribuição relativa de um input ou output

- Contribuição relativa de um input:

$$\text{Contribuição} = \frac{v_i * x_i}{I_v}$$

- Contribuição relativa de um output:

$$\text{Contribuição} = \frac{u_i * y_i}{O_v}$$

A contribuição relativa elimina a influência da ordem de grandeza

Contribuição relativa – orientação aos inputs

Agência	Iv	Ov	CR(v1)	CR (u1)	CR(u2)
A	1	1	100%	100%	0%
B	1	0,455	100%	40%	60%
C	1	1	100%	29%	71%
D	1	0,39	100%	39%	61%

Contribuição relativa – orientação aos outputs

Agência	Iv	Ov	CR(v1)	CR (u1)	CR(u2)
A	1	1	100%	100%	0%
B	0,455	1	100%	40%	60%
C	1	1	100%	29%	71%
D	0,39	1	100%	39%	61%



Limitações do modelo CCR

- **A maior parte dos processos produtivos tem um comportamento de retornos variáveis de escala;**
 - A relação entre inputs e outputs não é linear;
- **O critério de maximizar os pesos:**
 - Pode conduzir a resultados irreais;
 - Pode conduzir a um número elevado de DMUs eficientes (empates);