

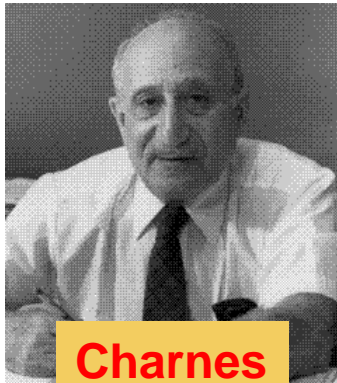
Conceitos Básicos da Análise Envoltória de Dados (DEA)

Enzo Barberio Mariano



Origem

- **Autores:** Abraham Charnes (1917-1992), William Cooper (1914-2012) e Edwardo L. Rhodes
- **Revista:** European Journal of Operational Research
- **Título:** Measuring the efficiency of the decision making units
- **Ano:** 1978;

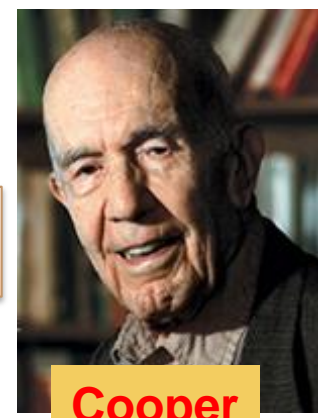


Charnes

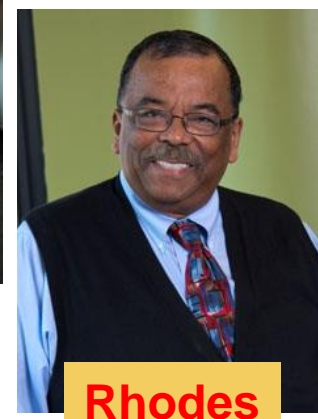
Citações no Google: 25161

Citações no Scopus : 9314

Citações no web of Science : 6344



Cooper



Rhodes



Tese de Rhodes

- **Queria analisar as atividade de um programa social chamado “Follow Through” ;**
 - Dedicado a garantir que os estudantes menos favorecidos terminem o ensino fundamental;
- **Tentou comparar o desempenho de escolas que haviam e não haviam aderido ao programa;**
- **Tentou todas as abordagens estatísticas possíveis;**
 - Problemas com múltiplas entradas e saídas;
 - As entradas e saídas não tinham preços de mercado;
 - Como avaliar a eficiência das escolas?



Trabalho de Farrel (1957)

- **Publicado por Michael J. Farrell em 1957:**
 - *Journal of the Royal Statistical Society*
- **Título:**
 - The measurement of productive efficiency
- Desenvolveu as principais bases teóricas para o cálculo da eficiência produtiva
- **Ficou esquecido por mais de 20 anos:**
 - Foi descoberto por Rodhes e serviu de base para criação da DEA

Características básicas

- **Técnica Não-paramétrica;**
 - Não permite inferência estatística;
 - Só vale para a amostra analisada;
- **Programação Matemática;**
 - Ferramenta básica utilizada na DEA;
- **Eficiência produtiva;**
 - É o principal resultado da DEA;
 - Pode ser adaptado a outras utilizações
- **Unidade Tomadora de Decisão (DMU).**
 - Podem ser referir a uma série de entidades;



Aplicações da DEA

Unidade Tomadora de Decisão (DMU)

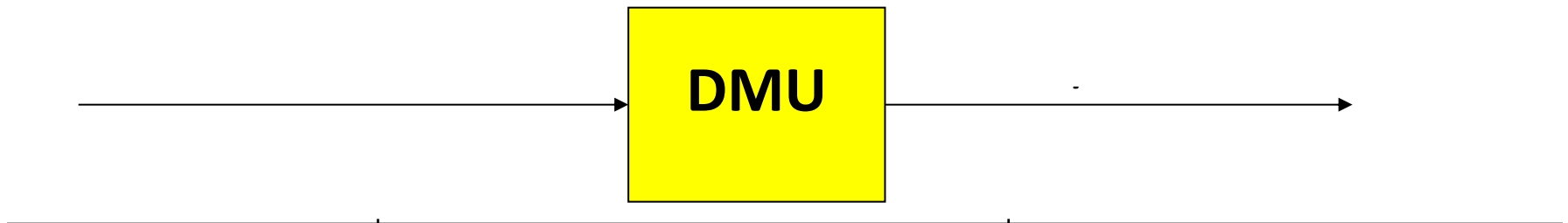
- Empresas, setores, ONGs, governos;
- Países, regiões, cidades;
- Veículos (carros, aviões);
- Pessoas
- Anos

Escopo de Utilizações

- Determinação de eficiência;
- Análise custo/benefício;
- Clusterização;
- Construção de índices;
- Análise Multicritério.

Unidade Tomadora de Decisão

- Sistema que transforma um conjunto de entradas em um conjunto de saídas





Homogeneidade

- **Todas as unidades comparadas pela DEA devem:**
 - Estar sobre as mesmas condições de contorno;
- **Ressalvas:**
 - Não existe uma definição clara para definir a homogeneidade das DMUs;
 - Depende do tipo de análise pretendida;



Principais resultados da DEA

- Permite separar as DMUs entre eficientes e ineficientes;
- Fornece um índice de eficiência relativa para cada DMU:
 - Eficientes: 100%;
 - Ineficientes: Entre 0 e 100%;
- Fornece as metas para que as DMUs ineficientes se tornem eficientes;
- Fornece quais são os *benchmarks* para cada DMU;
- Fornece a contribuição relativa de cada input e cada output.



Eficiência e eficácia

- **Eficiência:**

- Compara com o valor máximo;
- Considera as condições de contorno;
- Nunca será maior que 1;

$$\text{Eficiência} = I/I_{\max}$$

- **Eficácia:**

- Desconsidera condições de contorno;
- Compara com uma meta;
- Pode ser maior que 1;

$$\text{Eficácia} = I/I_{\text{meta}}$$



Eficiência absoluta e relativa

- **Eficiência absoluta:**

- Quando é possível determinar o teoricamente o valor máximo de um indicador;
- Eficiência de uma máquina térmica;

- **Eficiência relativa:**

- Não é possível determinar o valor máximo do indicador;
- Parte-se do pressuposto que o valor máximo é o melhor desempenho observado;



Exemplo

- Notas de uma prova (indicador):

Meta = 6

Maior valor = 10

	João	José	Maria	Lucia	Juca
Nota	8	7	6	4	5
Eficácia	133%	117%	100%	67%	83%
Eficiência absoluta	80%	70%	60%	40%	50%



Eficiência Absoluta

- **Eficiência térmica:**

- A eficiência de uma máquina é medida em termos absolutos;

$$\text{Eficiência} = \frac{\text{Trabalho}}{\text{Energia}}$$

- **Trabalho:** indicador de desempenho;
- **Energia fornecida:** Máximo valor teórico para o trabalho



Eficiência relativa

- Notas de uma prova (indicador):

	João	José	Maria	Lucia	Juca
Nota	8	7	6	4	5
Nota Máxima	8	8	8	8	8
Eficiência relativa	100%	87,5%	75%	50%	62,5%

Tipos de eficiência

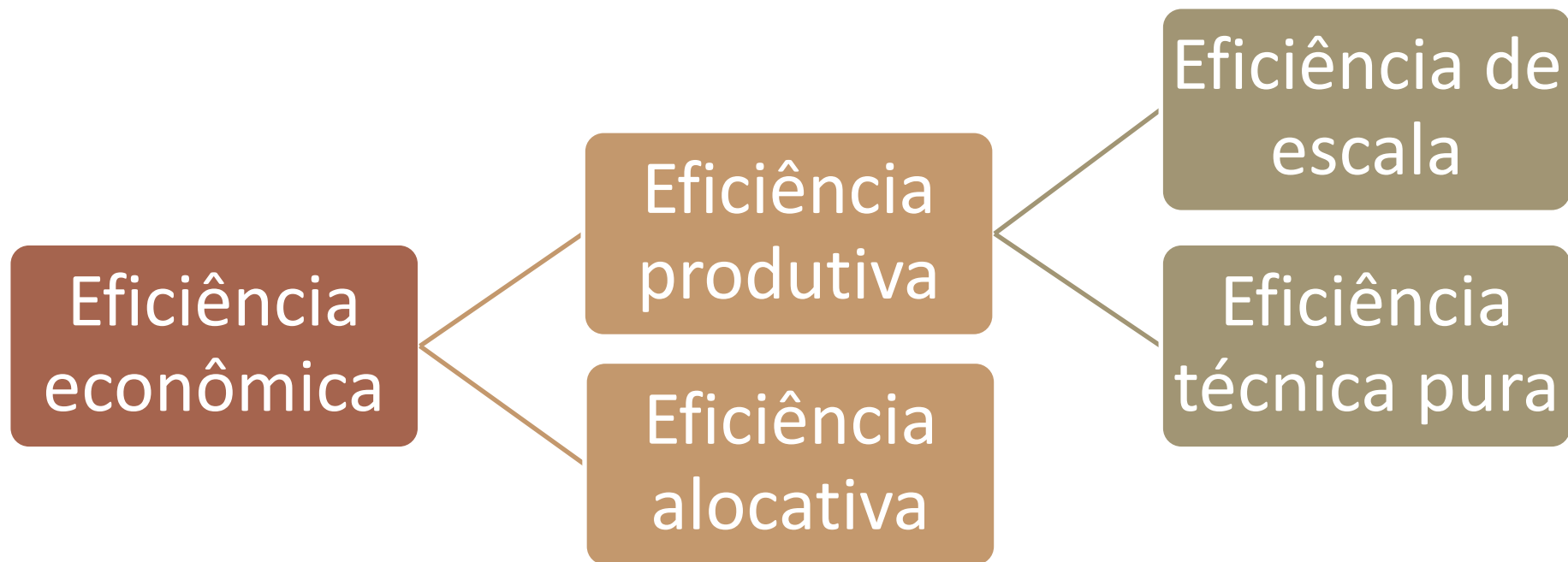
- **Eficiência econômica:**
 - Quando se garante o rendimento máximo de um recurso
- **Eficiência produtiva**
 - Produzir ao máximo com um dado nível de recursos;
- **Eficiência alocativa:**
 - Produzir os produtos que garantam a máxima lucratividade

Tipos de eficiência

- **Eficiência técnica pura**
 - Aproveitar ao máximo os insumos produtivos para uma dada escala de produção
- **Eficiência de escala:**
 - Operar na escala ótima de produção

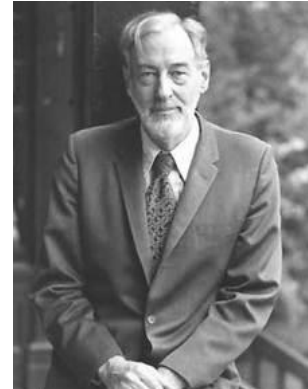


Tipos de eficiência



Definição de eficiência produtiva de Pareto–Koopmans

- Vilfredo Pareto (1848-1923) e Tjalling Koopmans (1910-1985)
- **Uma unidade possui eficiência produtiva se e somente se:**
 - Nenhum input puder ser reduzido sem reduzir também os outputs;
 - Nenhum output puder ser aumentado sem aumentar também os inputs;





Cálculo da eficiência Produtiva

- Divisão da produtividade de uma DMU pela máxima produtividade que ela pode alcançar:

$$\text{Eficiência} = P / P_{\max}$$

Em que:

P: Produtividade atual da DMU

P_{\max} : Produtividade máxima que pode ser alcançada por essa DMU.



Produtividade

- **Relação entre as entradas (inputs) e saídas (outputs) de uma DMU;**
 - Produtividade parcial dos fatores (PPF)
 - Produtividade total dos fatores (PTF)
- **Produtividade Parcial dos Fatores (PPF)**
 - Relação entre 1 input e 1 output;
 - **Medidas:** quantidade por hora; quantidade por funcionário; quantidade por capital investido etc.



Produtividade Total dos Fatores (PTF)

- Para DMUs com múltiplos *inputs* e múltiplos *outputs*:

$$\text{Produtividade} = \frac{u_1 \cdot y_1 + u_2 \cdot y_2 + u_3 \cdot y_3 \dots}{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3 \cdot x_3 \dots} = O_v / I_v$$

Em que:

u_i : Utilidade (peso) do *output* i ;

y_i : Quantidade do *output* i ;

v_j : Utilidade (peso) do *input* j ;

x_j : Quantidade do *input* j ;

O_v : *Output* virtual;

I_v : *Input* virtual

Problema dos pesos

- Quais devem ser os pesos de cada input e de cada output;
- **Solução 1:** Preços de mercado;
 - Nem todos os outputs e inputs tem preços definidos pelo mercado;
 - Os preços de mercado tem distorções;
- **Solução 2:** Pesos arbitrários ou por consenso:
 - Pode ser difícil entrar em acordo para definir esses pesos;
 - Ex: Pesos do IDH (iguais)

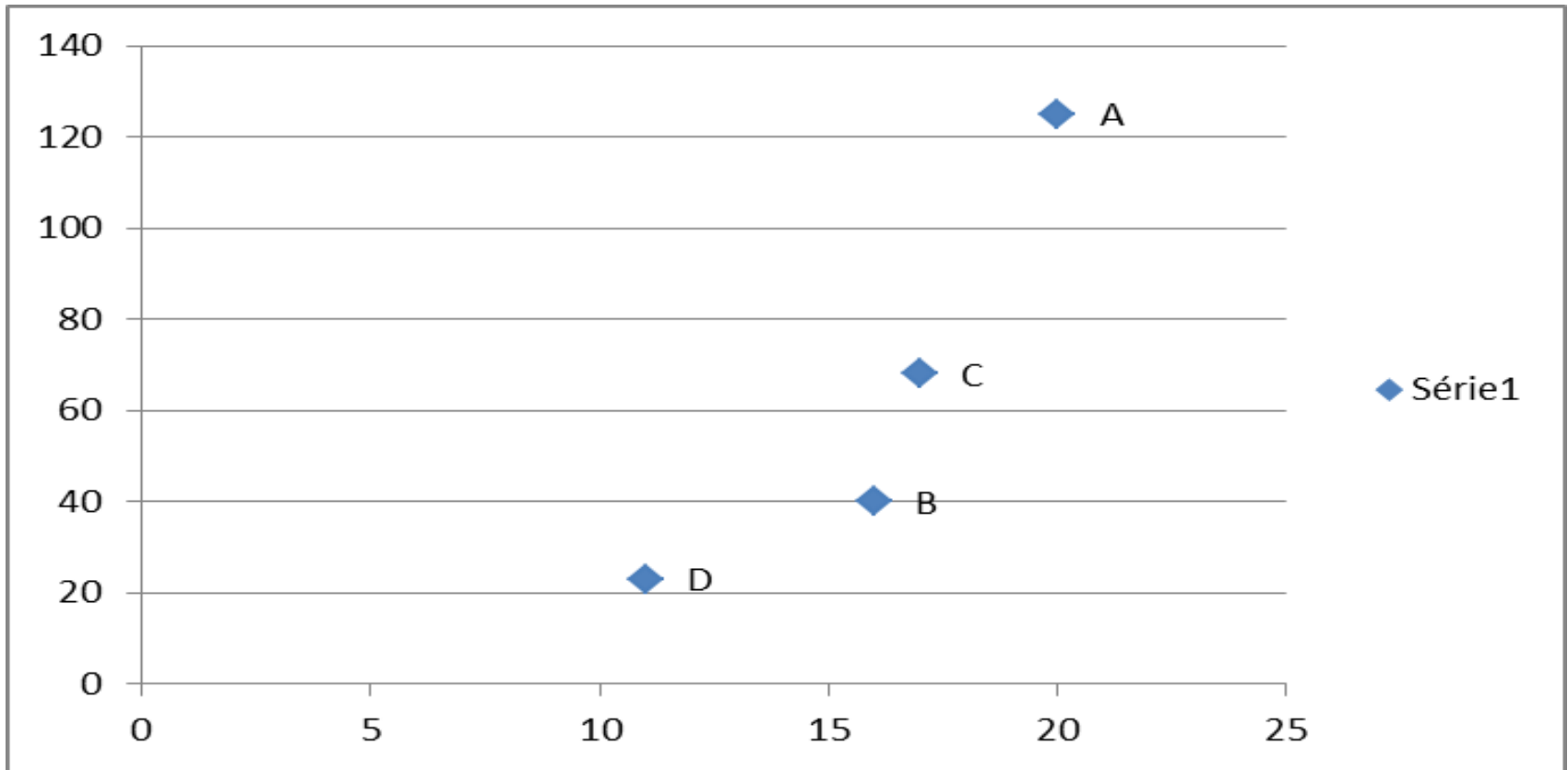
Modelo agência bancária: 1 input e 1 output

Agência	Empregados	Transações
A	20	125
B	16	40
C	17	68
D	11	23

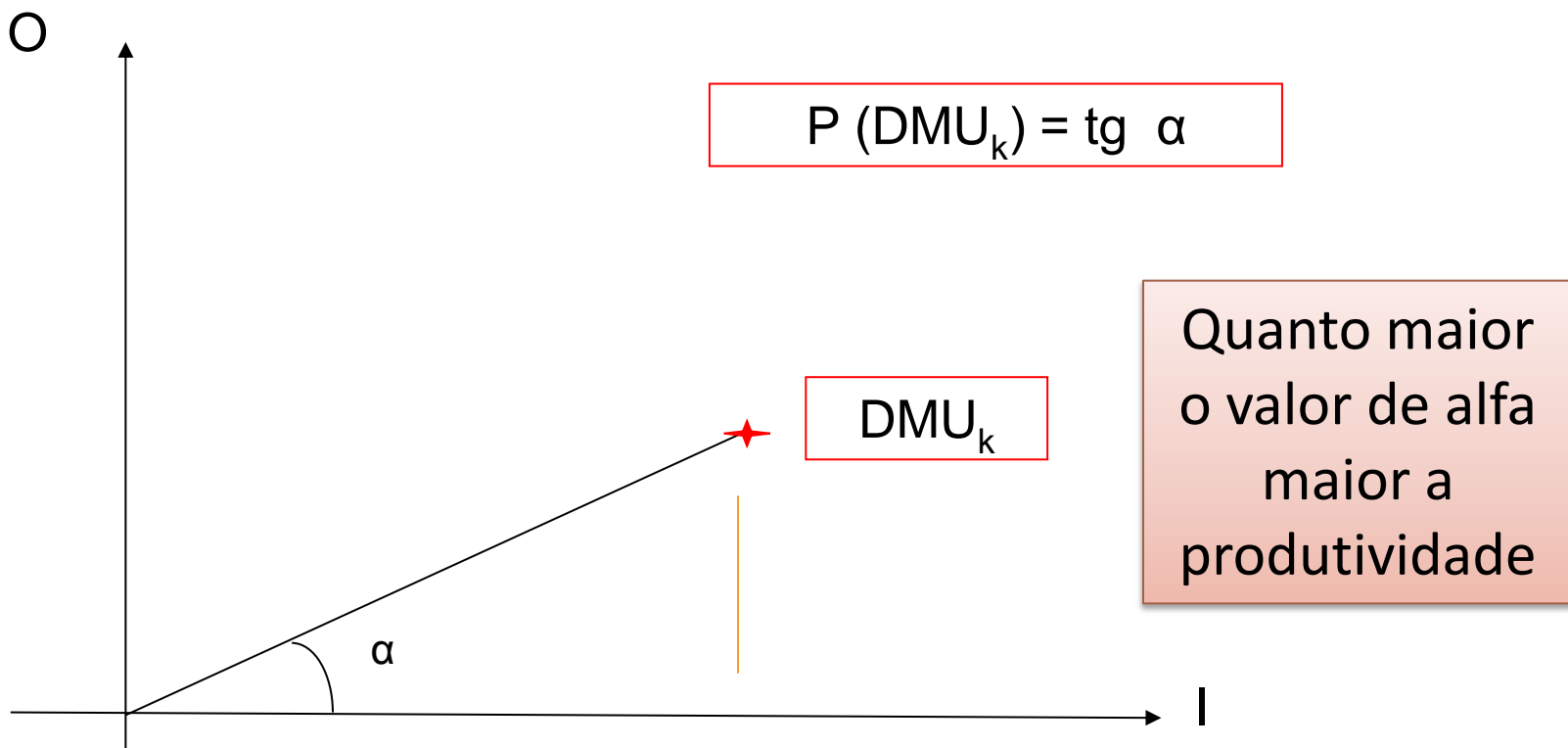
Não preciso me preocupar com os pesos



Gráfico das agências

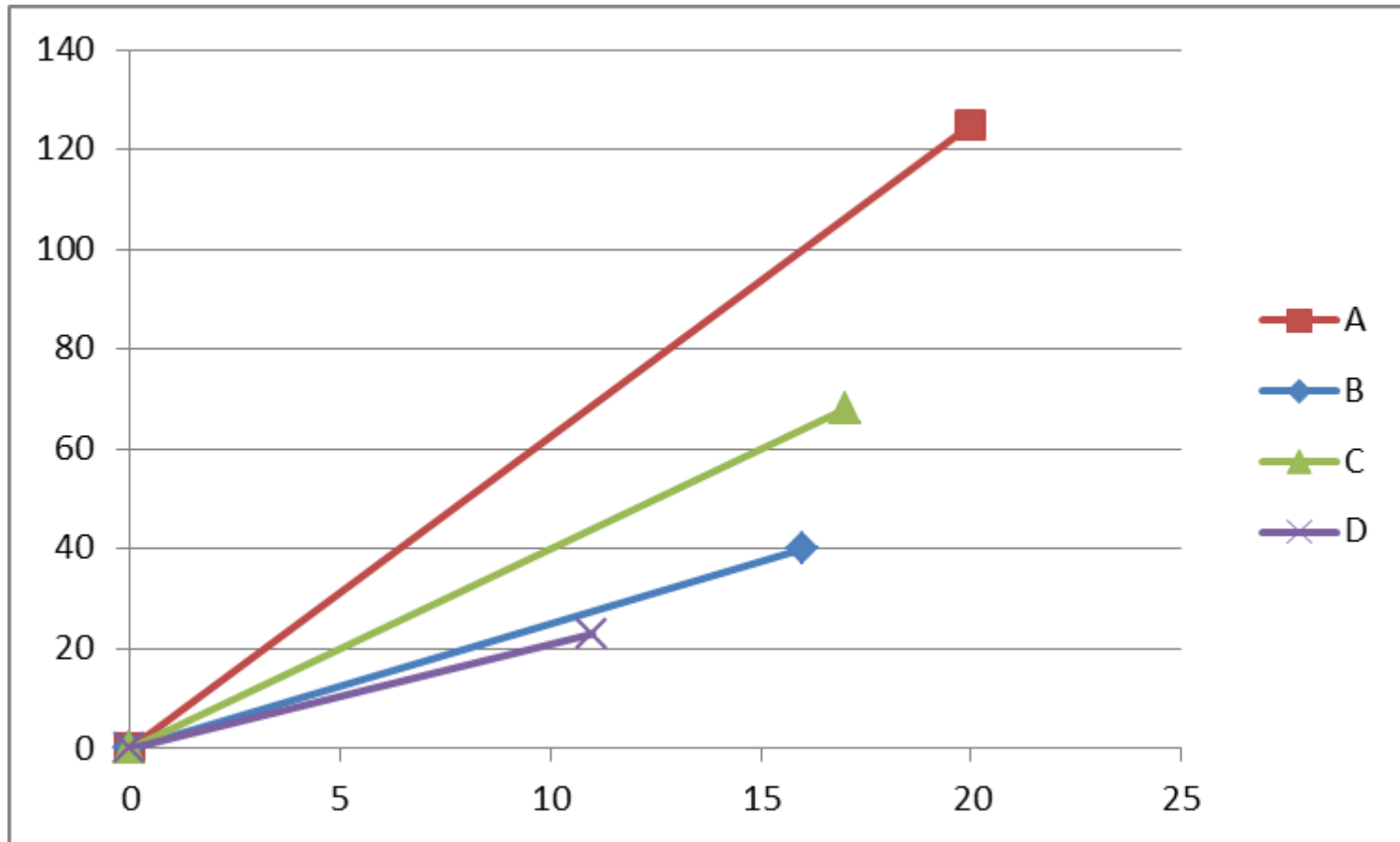


Produtividade



Cálculo da produtividade de uma DMU

Gráfico das agências





Modelo agência bancária: 1 input e 1 output

Agência	Empregados	Transações	Produtividade
A	20	125	6,25
B	16	40	2,5
C	17	68	4
D	11	23	2,09



Problemas do cálculo da eficiência produtiva

1. Determinar a produtividade máxima que uma DMU pode alcançar;

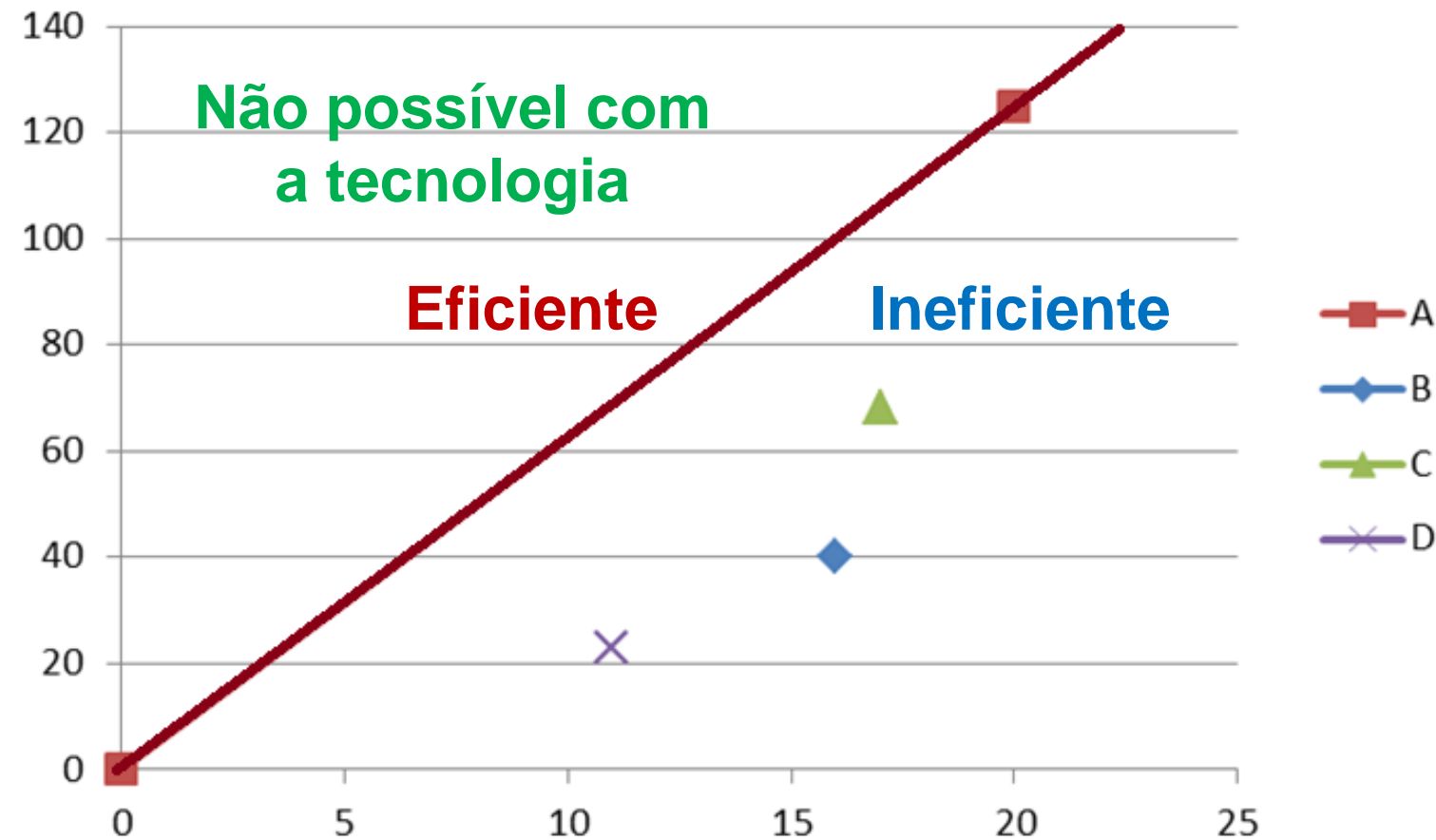
Solução DEA:

- Adotar a maior produtividade dentre as DMUs analisadas;
- Isso equivale a calcular uma eficiência relativa;

Modelo agência bancária: 1 input e 1 output

Agência	Produtividade	Eficiência
A	6,25	100%
B	2,5	40%
C	4	64%
D	2,09	33,44%

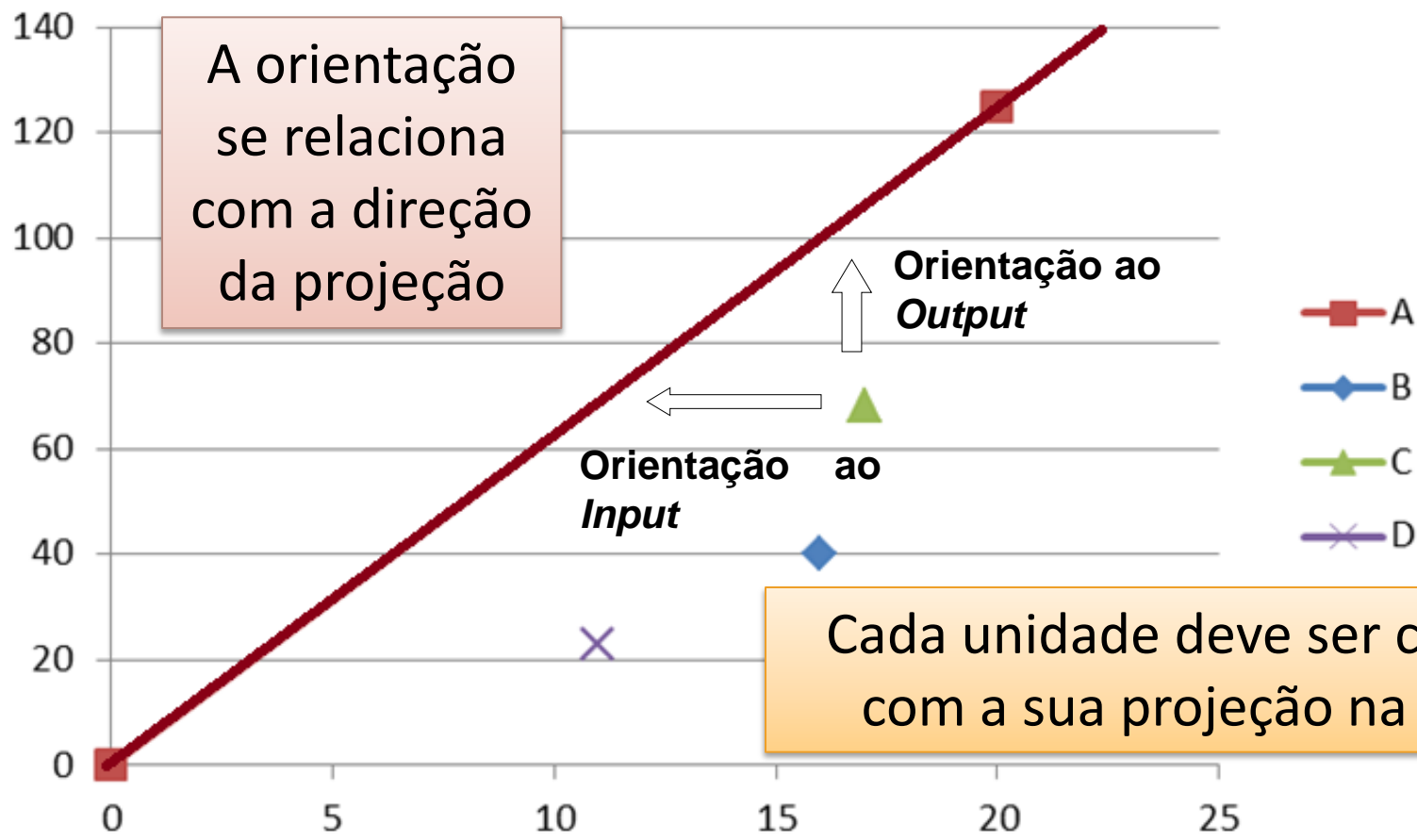
Fronteira de eficiência



Comparar cada unidade com a unidade "A" equivale a comparar com qualquer ponto da fronteira



Orientações aos *inputs* e aos *outputs*



Cada unidade deve ser comparada com a sua projeção na fronteira



Modelo agência bancária

Tgα (fronteira) = 6,25

Agência	Atual		Projeção ao input		Projeção ao output	
	Emp.	Trans.	Emp.	Trans.	Emp.	Trans.
A	20	125	20	125	20	125
B	16	40	6,4	40	16	100
C	17	68	10,88	68	17	106,25
D	11	23	3,68	23	11	68,75



Modelo agência bancária

Agência	Orientação ao input			Orientação ao output		
	Atual	Proj.	Efic.	Atual	Proj.	Efic.
A	20	20	100%	125	125	100%
B	16	6,4	40%	40	100	40%
C	17	10,88	64%	68	106,25	64%
D	11	3,68	33,45%	23	68,75	33,45%



Fronteira de eficiência x Função produção

- **Função produção**

- Função matemática que relaciona os *inputs* com o máximo de *outputs* que eles podem produzir;
- A função produção depende da **tecnologia**;
- **Técnicas paramétricas**: Fronteira estocástica (SFA)

- **Fronteira de eficiência**

- Lugar geométrico ocupado pelas DMUs eficientes
- **Técnicas não-paramétricas**: DEA

Problemas do cálculo da eficiência produtiva

2. Determinar os pesos de cada input e de cada output no cálculo da produtividade;

Solução DEA:

- Determinar o conjunto de pesos que maximizam a eficiência da DMU;
- As DMUs seriam comparadas considerando os pesos mais vantajosos para elas mesmas;