

LOM3206 – ELETRÔNICA

AULA 2

Prof. Dr. Emerson G. Melo

- ❑ Capacitor;
- ❑ Indutor;
- ❑ Senoides;
- ❑ Números Complexos;
- ❑ Fasor;
- ❑ Impedância e Admitância;
- ❑ Circuitos de Primeira Ordem;
- ❑ Resposta em Frequência;
- ❑ Ressonância;
- ❑ Filtros.

Capacitor: Corrente e Tensão

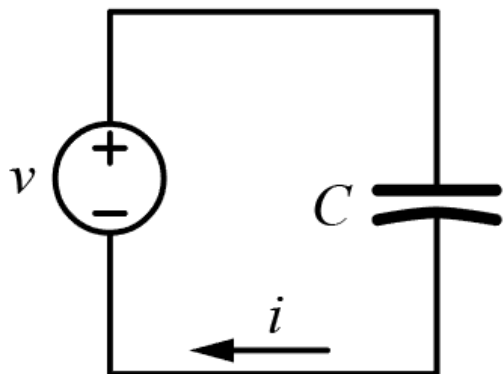
❑ O capacitor apresenta oposição às variações de tensão.

Corrente através do capacitor

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

$$Q = vC$$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$



Tensão sobre o capacitor

$$dv = \frac{1}{C} i dt \quad \int dv = \frac{1}{C} \int i dt$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + v(0)$$

i) Apenas circula corrente através do capacitor quando ocorrem variações de tensão, ou seja, ele se comporta como um circuito aberto para fontes de tensão contínuas.

ii) A corrente pode variar de forma instantânea através do capacitor.

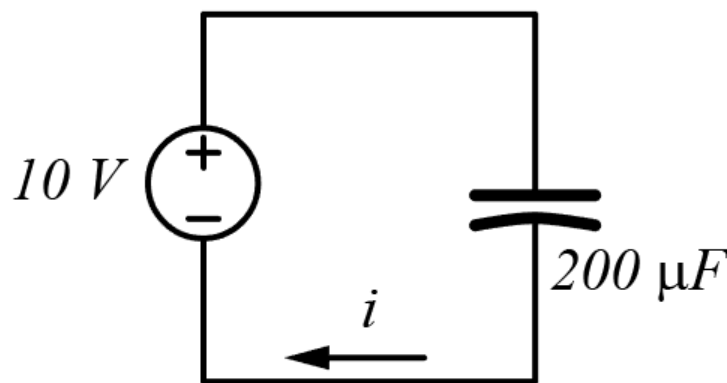
i) A tensão no capacitor é acumulada a partir de um instante inicial;

ii) Não ocorrem variações bruscas de tensão sobre o capacitor.

Capacitor: Potência

- Um capacitor ideal não dissipa potência em forma de calor, apenas armazena energia.

$$w = \frac{1}{2} C v^2$$



$$i = 0 A$$

$$v = 10 V$$

$$C = 200 \mu F$$

Na condição de equilíbrio não há cargas em movimento; sem efeito Joule

$$w = \frac{1}{2} 200 \times 10^{-6} \times 10^2$$

$$w = 100 \times 10^{-4}$$

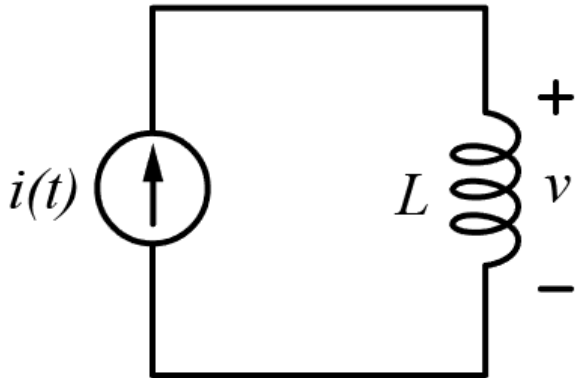
$$w = 10^{-2} J$$

$$w = 10 mJ$$

Energia armazenada

Indutor: Corrente e Tensão

❑ O indutor apresenta oposição às variações de corrente.



Tensão sobre o indutor

$$v = L \frac{di}{dt}$$

Corrente através do indutor

$$di = \frac{1}{L} v dt \quad \int di = \frac{1}{L} \int v dt$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt + i(0)$$

i) A diferença de potencial é nula sobre o indutor quando não existem variações de corrente, ou seja, ele se comporta como um curto-circuito para fontes de corrente contínua.

ii) A tensão pode variar de forma instantânea através do indutor.

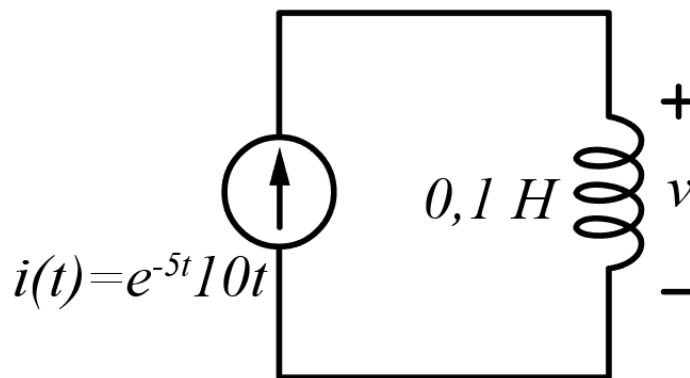
i) A corrente no indutor é acumulada a partir de um instante inicial;

ii) Não ocorrem variações bruscas de corrente no indutor.

Indutor: Potência

- Um indutor ideal não dissipa potência em forma de calor, apenas armazena energia.

$$w = \frac{1}{2} Li^2$$



$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$v(t) = L \frac{d}{dt} (e^{-5t} 10t)$$

$$v(t) = L(-5e^{-5t} 10t + e^{-5t} 10)$$

$$v(t) = L 10 e^{-5t} (1 - 5t)$$

$$L = 0,1 H$$

$$v(t) = 0,1 \times 10 e^{-5t} (1 - 5t)$$

$$v(t) = e^{-5t} (1 - 5t) [V]$$

A tensão tende à zero quando t tende ao infinito

$$w = \frac{1}{2} 0,1 \times (e^{-5t} 10t)^2$$

$$w = \frac{1}{2} 0,1 \times e^{-10t} 100t^2$$

$$w = 5t^2 e^{-10t} [J] \quad \text{Energia armazenada}$$

Senoides

❑ Senoides são funções periódicas, pois satisfazem a equação $f(t) = f(t + nT)$, para todo t e valores inteiros de n .

$$v(t) = V_m \sen \omega t$$

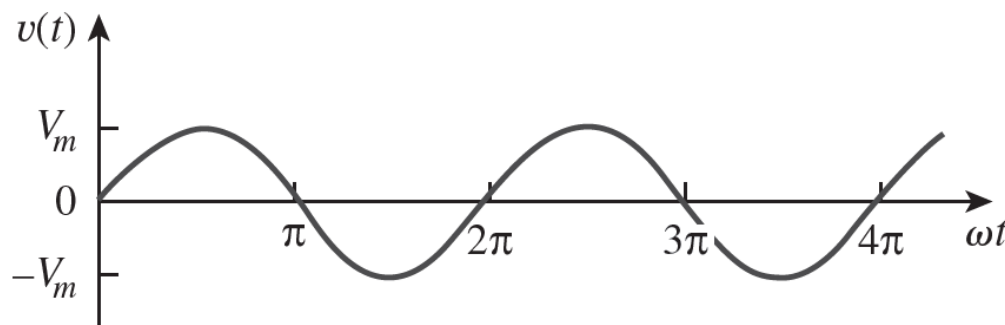
V_m – Amplitude

ω – Frequência angular (rad/s)

ωt – Argumento (rad)

f – Frequência (Hz)

T – Período (s)



$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Números Complexos

- ❑ Conjunto numérico ($\mathbb{C}$) mais abrangente que o dos números Reais ($\mathbb{R}$).
- ❑ Compreendem valores compostos por uma parte REAL e uma parte IMAGINÁRIA que representa raízes de números negativos: $i = \sqrt{-1}$.

Forma retangular

$$z = x + jy$$

Forma polar

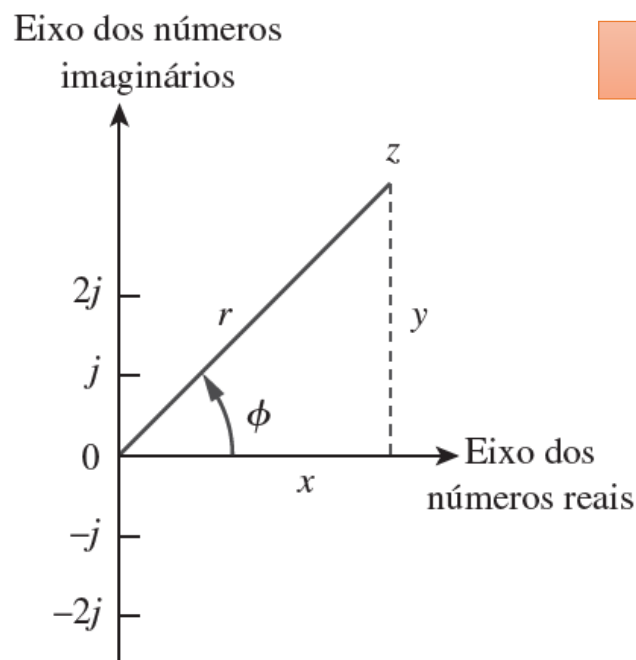
$$z = r \angle \phi$$

Forma exponencial

$$z = re^{j\phi}$$

Relação de Euler

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$$



Relações entre formas retangular, polar e exponencial

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$z = x + jy = r(\cos \phi + j \sin \phi) = re^{j\phi}$$

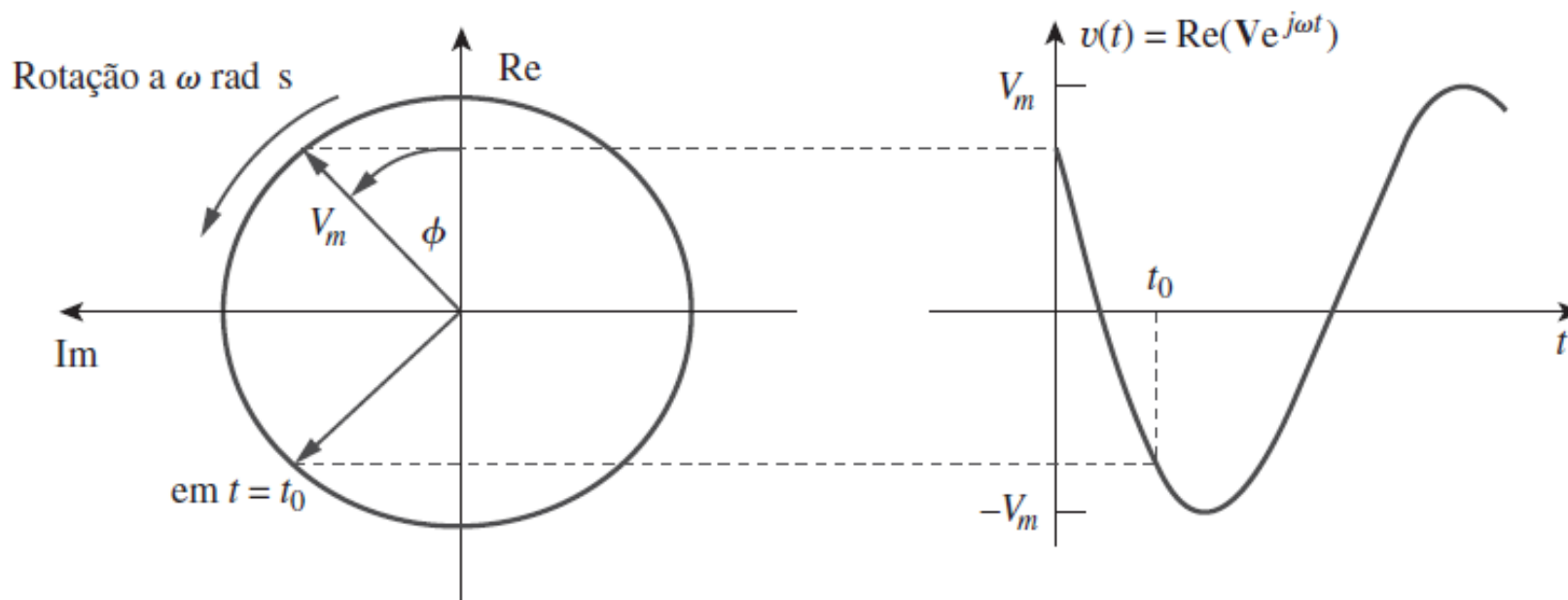
$$\cos \phi = \text{Re}\{e^{j\phi}\} \quad \sin \phi = \text{Im}\{e^{j\phi}\}$$

□ Fasor é uma representação complexa de uma senoide.

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}(V_m e^{j(\omega t + \phi)}) = \text{Re}(V_m e^{j\phi} e^{j\omega t})$$

$$\mathbb{V} = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi$$

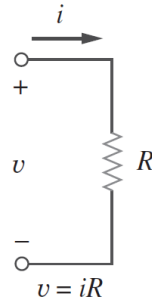
$$v(t) = \text{Re}(\mathbb{V} e^{j\omega t})$$



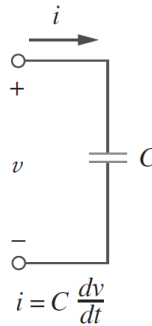
Fasores e Elementos de Circuito

Domínio do Tempo

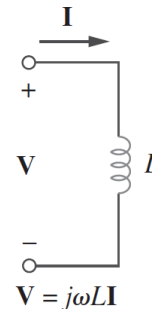
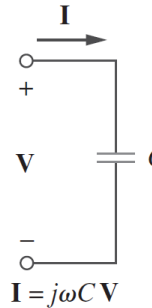
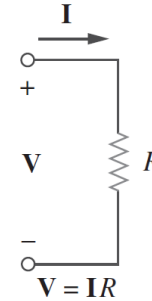
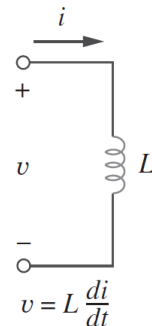
$$v(t) = Ri(t)$$



$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$



Domínio da Frequência

$$V = RI$$

$$V = \frac{I}{j\omega C}$$

$$V = j\omega LI$$

Exemplo de Aplicação

- Determine a corrente em regime estacionário sobre um indutor de 0,1 H quando submetido a uma tensão $v(t) = 12 \cos(60t + 45^\circ) \text{ V}$.

$$\omega = 60 \text{ rad/s}$$

$$\mathbb{V} = 12 \angle 45^\circ$$

$$\mathbb{V} = j\omega L \mathbb{I}$$

$$\mathbb{I} = \frac{\mathbb{V}}{j\omega L}$$

$$\mathbb{I} = \frac{12 \angle 45^\circ}{j60 \times 0,1} = \frac{12 \angle 45^\circ}{6 \angle 90^\circ} = 2 \angle -45^\circ \text{ A}$$

$$i(t) = 2 \cos(60t - 45^\circ) \text{ A}$$

Impedância

- Impedância ($\mathbf{Z}$) é a relação entre a tensão fasorial e a corrente fasorial de um circuito medida em Ω ;
- A impedância depende da frequência.



$$\mathbf{Z}_R = R$$

$$\mathbb{V} = R\mathbb{I}$$



$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\mathbb{V} = \frac{\mathbb{I}}{j\omega C}$$

$$\mathbb{V} = \mathbf{Z}\mathbb{I}$$



$$\mathbf{Z}_L = j\omega L$$

$$\mathbb{V} = j\omega L\mathbb{I}$$

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| \angle \emptyset$$

$$\mathbf{Z} = R + jX$$

$$R = \text{Re}\{\mathbf{Z}\} = \text{Resistência}$$

$$X = \text{Im}\{\mathbf{Z}\} = \text{Reatância}$$

$$\mathbf{Z} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\emptyset = \tan^{-1} \frac{X}{R}$$

$$R = |\mathbf{Z}| \cos \emptyset \quad X = |\mathbf{Z}| \sin \emptyset$$

$$\text{CC: } \omega \rightarrow 0$$

$$\text{CA: } \omega \rightarrow \infty$$

$$\mathbf{Z}_R = R$$

$$\mathbf{Z}_R = R$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow \infty$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow 0$$

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L \rightarrow 0$$

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L \rightarrow \infty$$

□ Admitância ($\mathbf{Y}$) é o inverso da impedância, medida em Siemens (S);

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}}$$

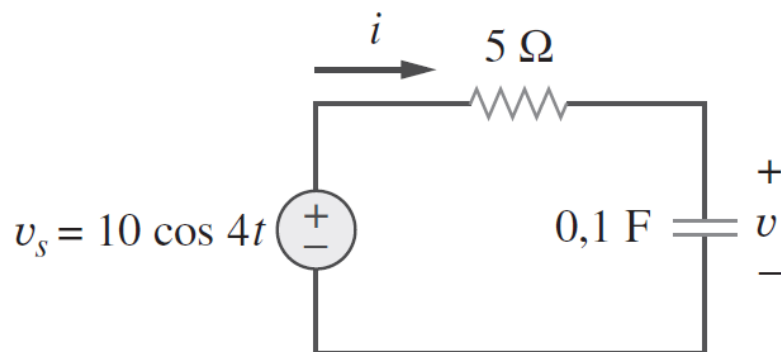
$$\mathbf{Y} = G + jB$$

$$G = \text{Re}\{\mathbf{Y}\} = \textit{Condutância}$$

$$B = \text{Im}\{\mathbf{Y}\} = \textit{Susceptância}$$

Exemplo de Aplicação

❑ Calcular $\mathbf{Z}$, $v(t)$ e $i(t)$ no circuito abaixo.



$$\omega = 4 \text{ rad/s}$$

$$\mathbb{V}_S = 10 \angle 0^\circ$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_C = R + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\mathbf{Z} = 5 + \frac{1}{j4 \times 0,1} = 5 + \frac{1}{j0,4}$$

$$\mathbf{Z} = 5 - j2,5 \Omega$$

$$\mathbb{I} = \frac{\mathbb{V}_S}{\mathbf{Z}} = \frac{10 \angle 0^\circ}{5 - j2,5} = \frac{10 \angle 0^\circ}{5,59 \angle -26,57^\circ}$$

$$\mathbb{I} = 1,789 \angle 26,57^\circ \text{ A}$$

$$\mathbb{V} = \mathbb{I} \mathbf{Z}_C = \frac{1,789 \angle 26,57^\circ}{j4 \times 0,1} = \frac{1,789 \angle 26,57^\circ}{0,4 \angle 90^\circ}$$

$$\mathbb{V} = 4,47 \angle -63,43^\circ$$

$$i(t) = 1,789 \cos(4t + 26,57^\circ) \text{ A}$$

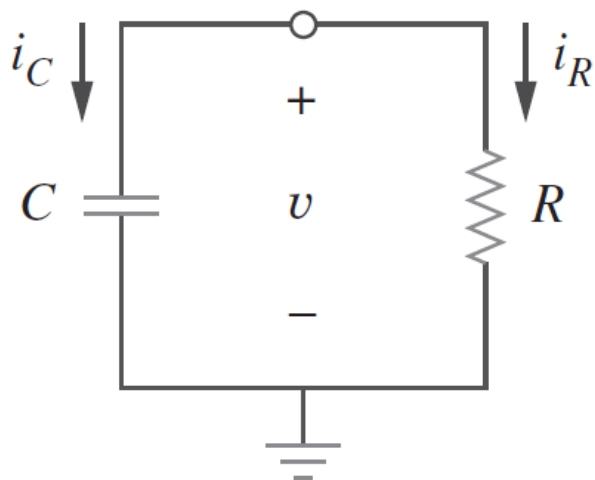
$$v(t) = 4,47 \cos(4t - 63,43^\circ) \text{ V}$$

A tensão no capacitor está atrasada em 90°

- São circuitos formados pela associação entre um elemento resistivo e um elemento reativo (capacitor ou indutor).

Circuito RC: Resposta Natural

- A constante de tempo (τ) de um circuito é o tempo necessário para a resposta decair à um fator de $1/e$ ou 36,8% de seu valor inicial.



$$v(t) = V_0 e^{\frac{-t}{RC}}$$

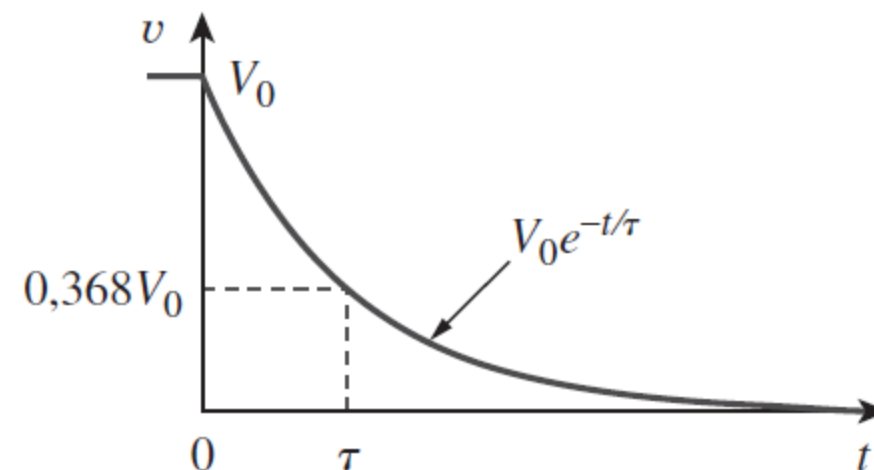
Constante de tempo

$$\tau = RC$$

$$v(t) = V_0 e^{\frac{-t}{\tau}}$$

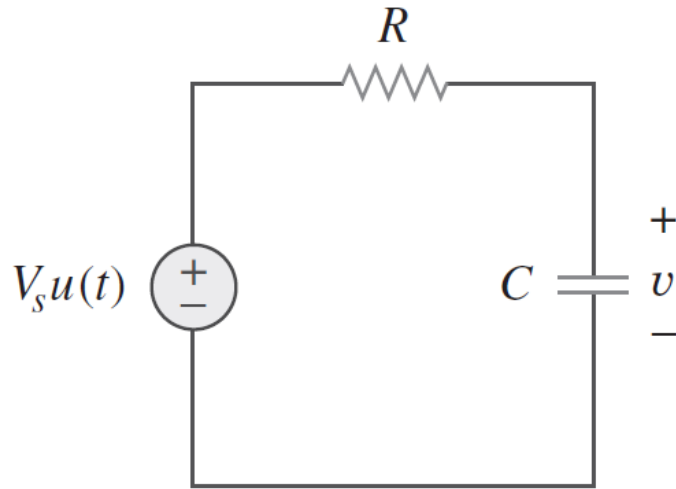
$$v(\tau) = V_0 e^{\frac{-\tau}{RC}} = V_0 e^{-1} = 0,368V_0$$

Após $t = 5\tau$ a tensão no capacitor cai à menos de 1%. Ou seja o circuito leva 5τ para entrar em regime estacionário: capacitor totalmente carregado ou descarregado.

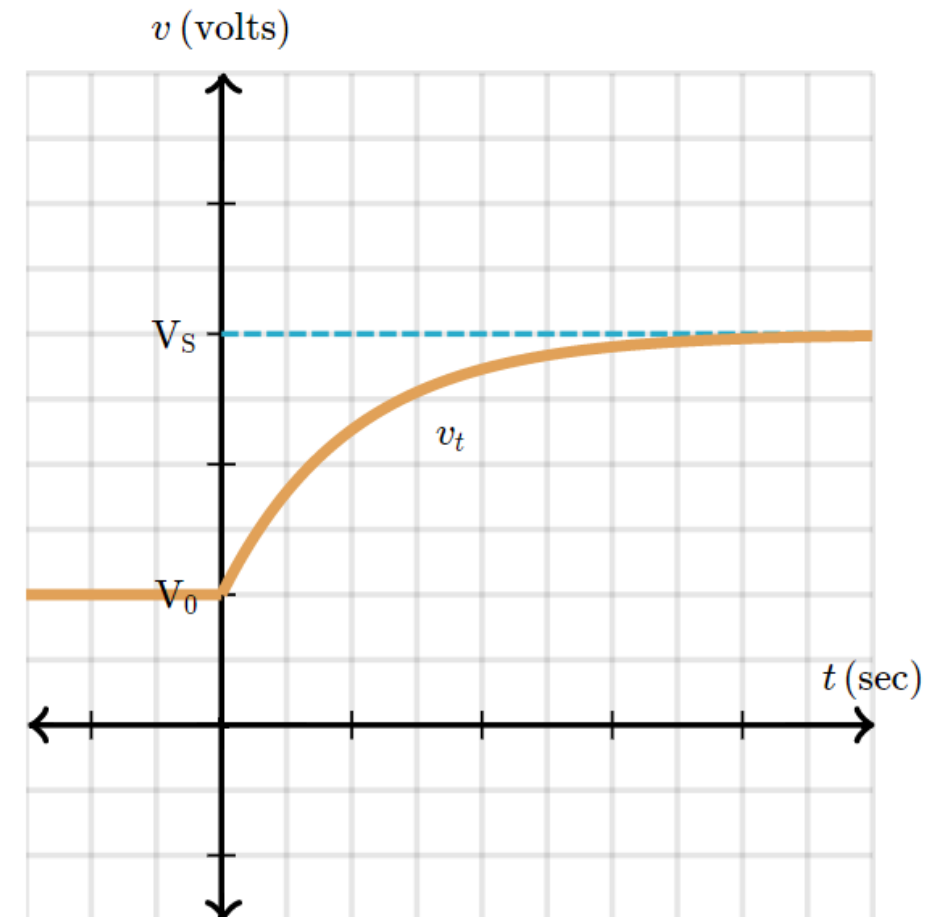


Circuito RC: Resposta à Função Degrau Unitário

□ Resposta total (v).

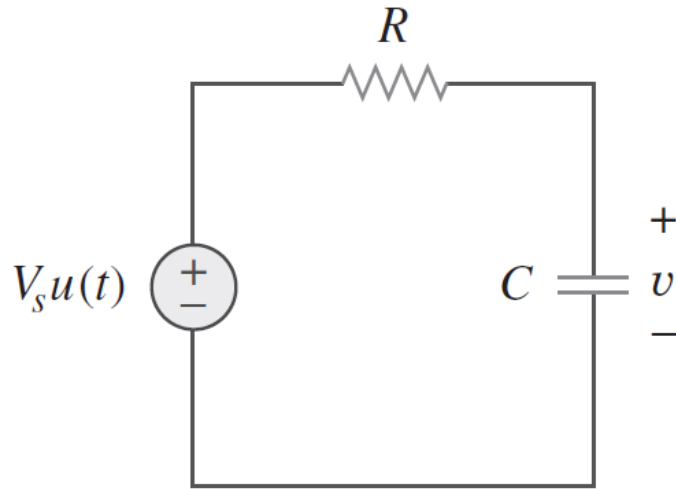


$$v(t) = \begin{cases} V_0, & t < 0 \\ V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/RC}, & t > 0 \end{cases}$$



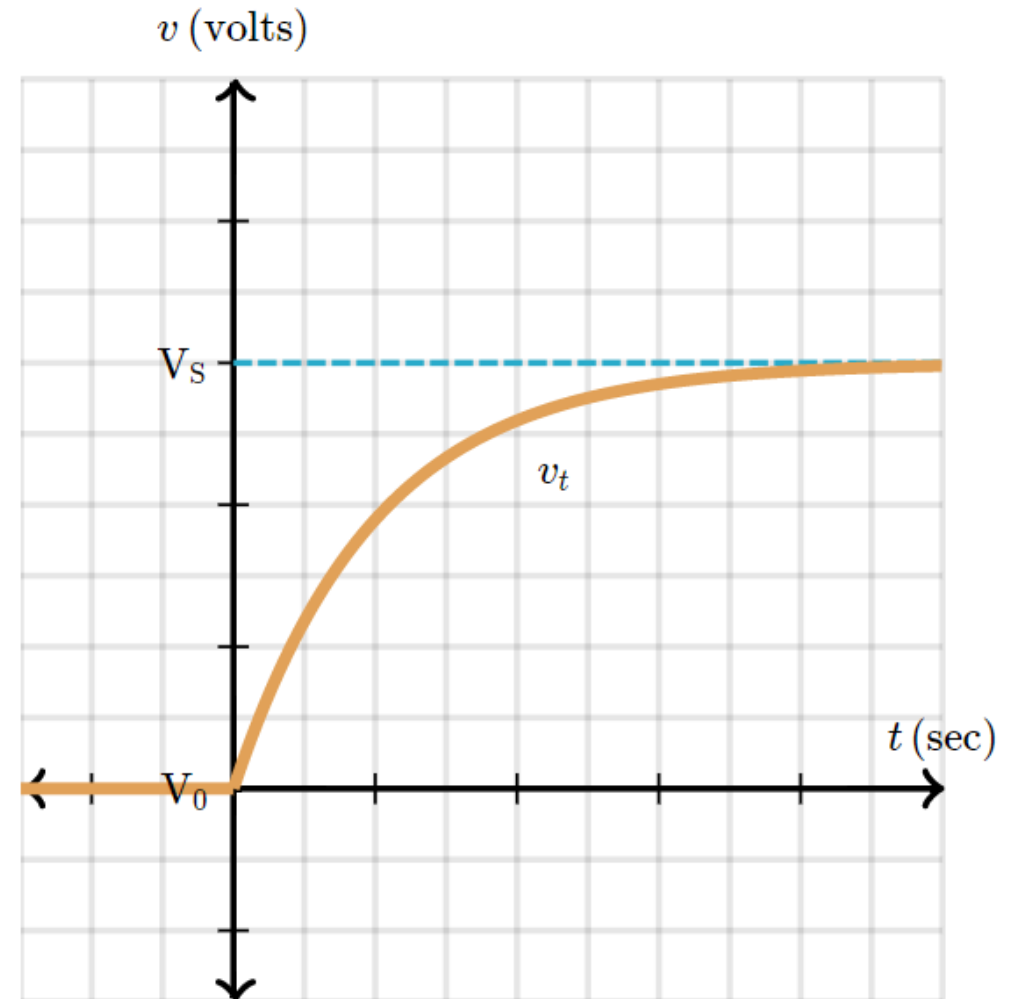
Circuito RC: Resposta à Função Degrau Unitário

□ Resposta total (v).



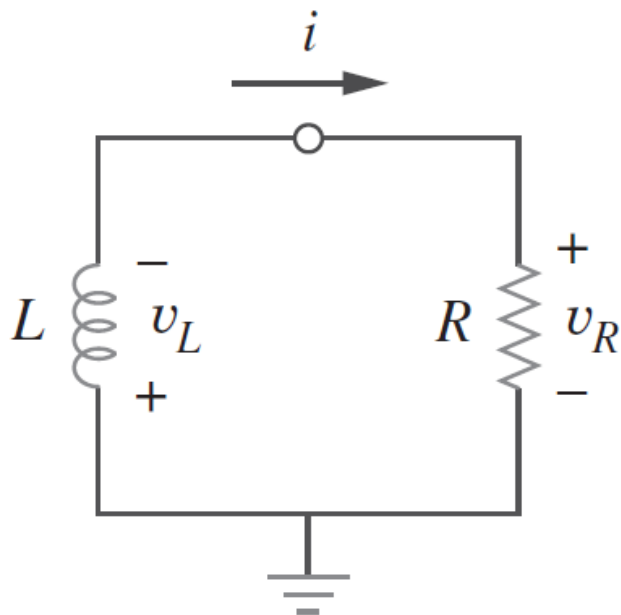
$$V_0 = 0 \text{ V}$$

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ V_s(1 - e^{-t/RC}), & t > 0 \end{cases}$$



Circuito RL: Resposta Natural

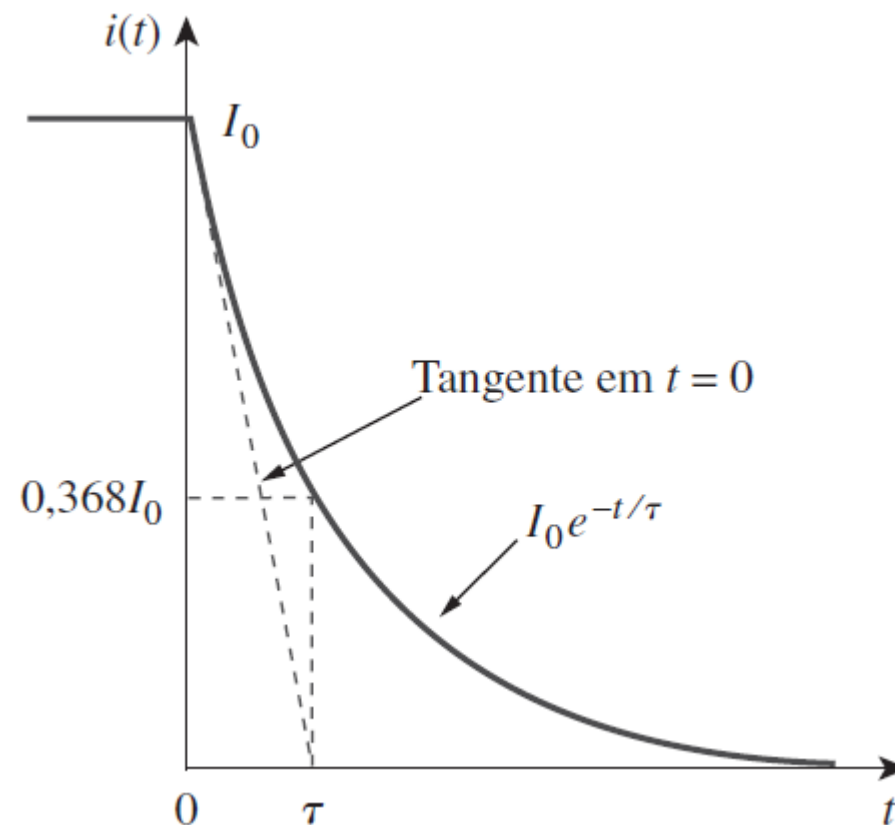
- Resposta de um circuito RL sem fonte, considerando o indutor inicialmente energizado e com corrente inicial I_0 .



$$i(t) = I_0 e^{-tR/L}$$

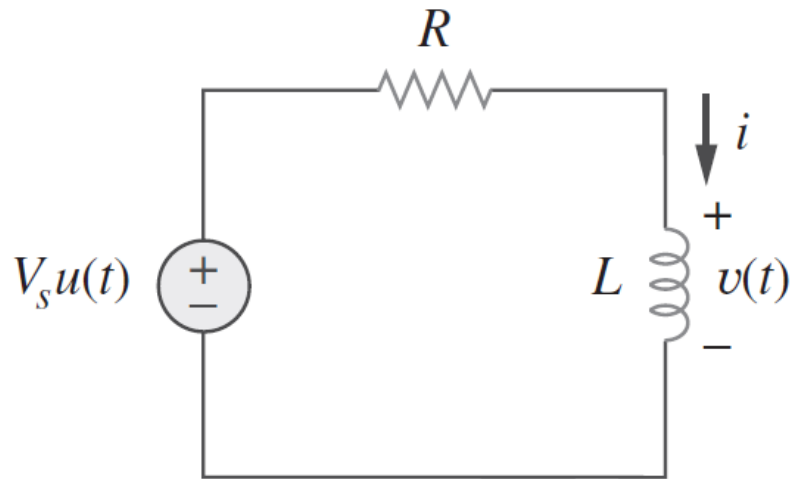
$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

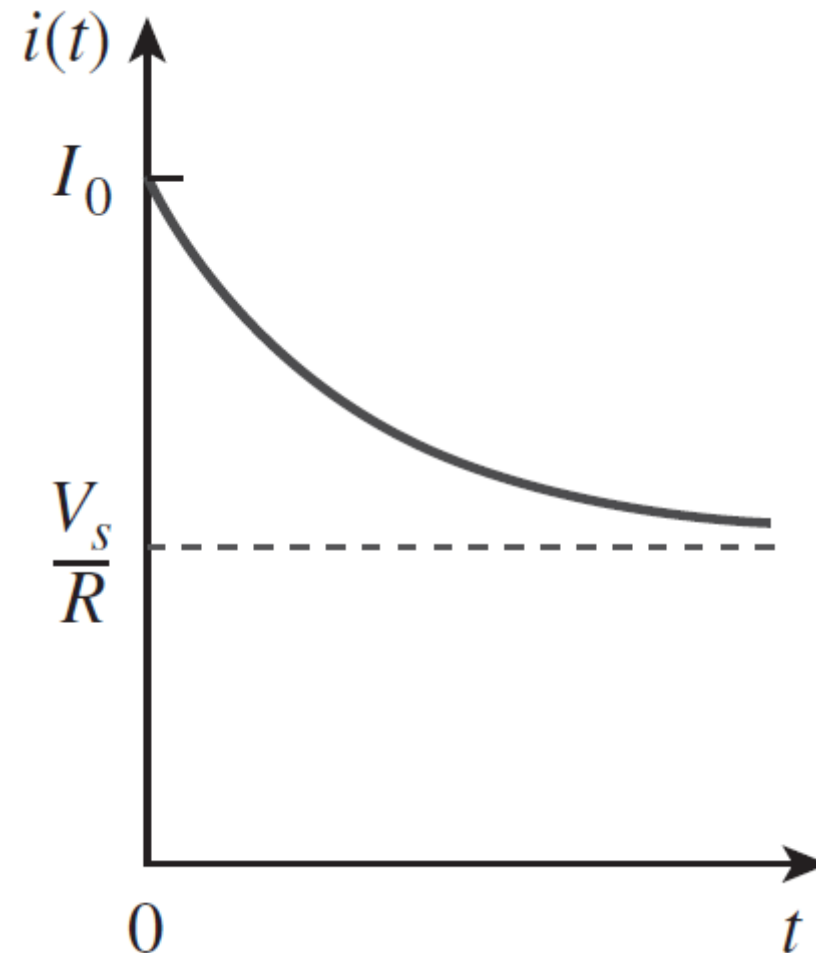


Circuito RL: Resposta à Função Degrau Unitário

□ Resposta total $i(t)$.

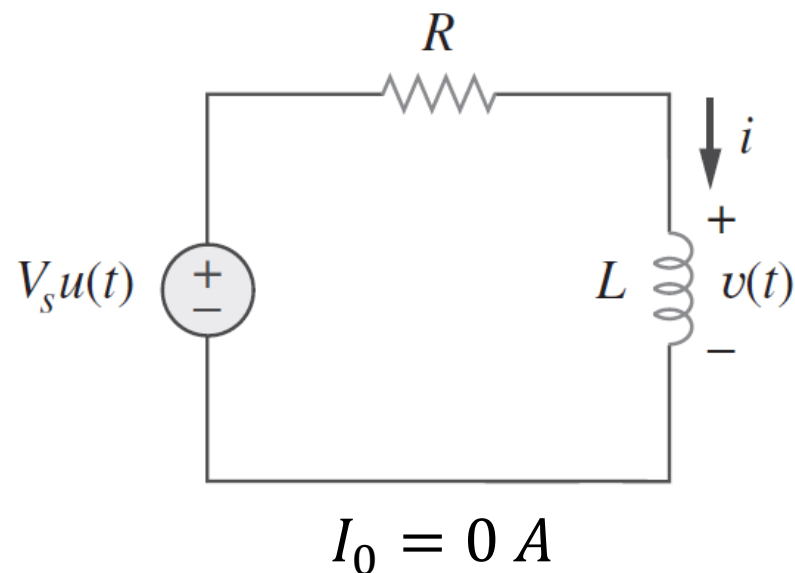


$$i(t) = \begin{cases} I_0, & t < 0 \\ \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R}\right) e^{-tR/L}, & t > 0 \end{cases}$$

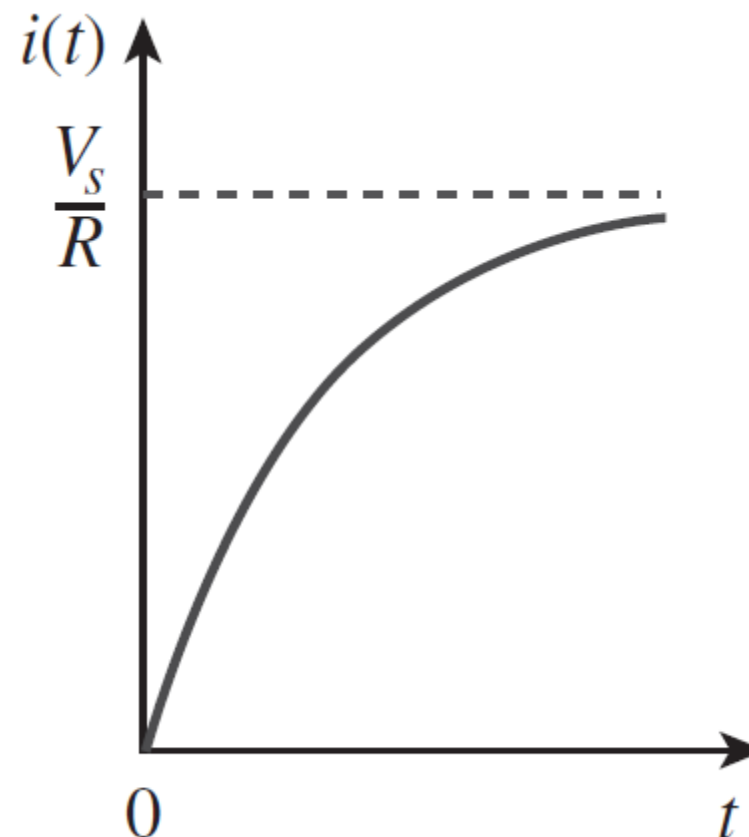


Circuito RL: Resposta à Função Degrau Unitário

□ Resposta total $i(t)$.

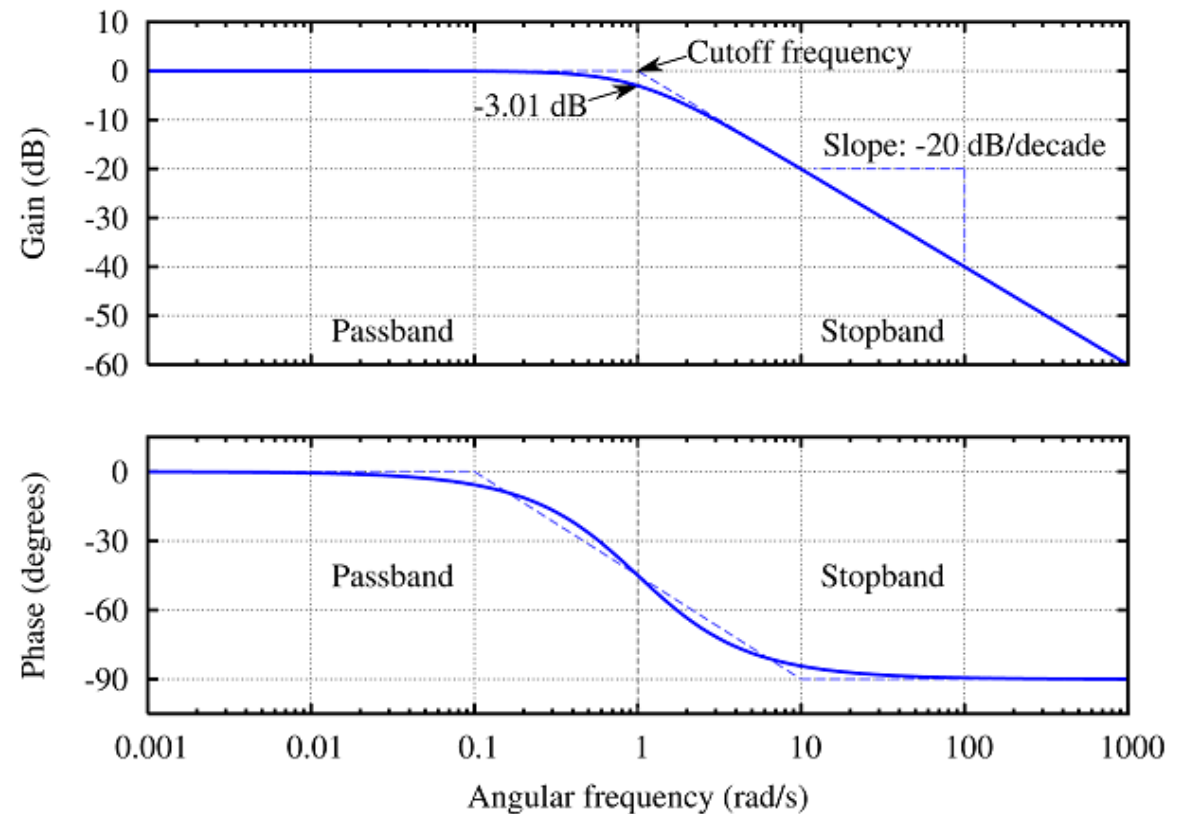
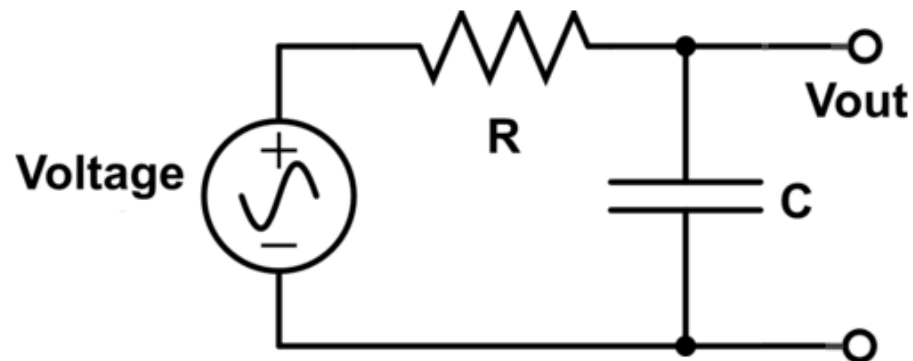


$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{V_s}{R} (1 - e^{-tR/L}), & t > 0 \end{cases}$$



Resposta em Frequência

- ❑ A resposta em frequência de um circuito descreve suas alterações de comportamento em função da mudança da frequência de operação.
- ❑ Geralmente é definida em termos de amplitude (Ganho) e fase.



- ❑ Ressonância é um fenômeno característico de qualquer sistema onde ocorra transferência de energia entre dois ou mais elementos.
- ❑ Em um circuito RLC a condição de ressonância é caracterizada pela igualdade, em módulo, entre a reatâncias capacitiva e indutiva.
- ❑ Circuitos ressonantes são muito úteis em circuitos elétricos, principalmente em sistemas de comunicação onde é necessário selecionar uma faixa específica de frequências ou fazer a separação entre sinais multiplexados.

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C$$

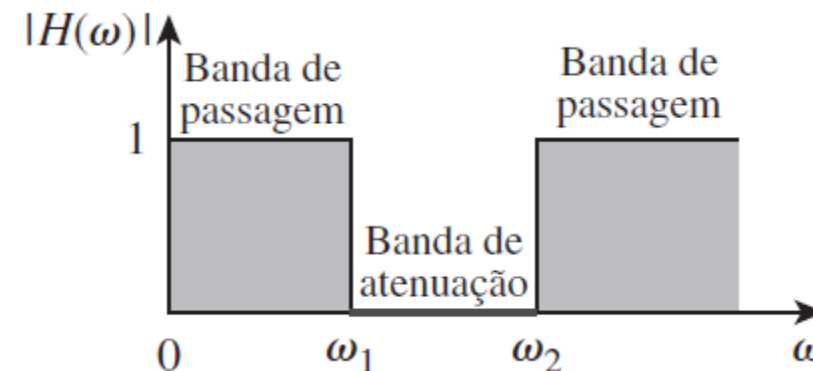
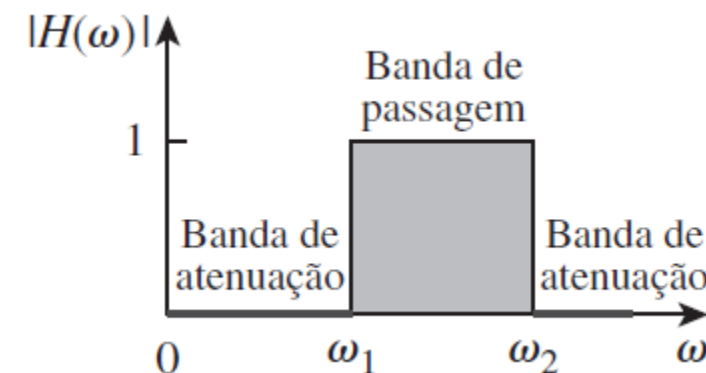
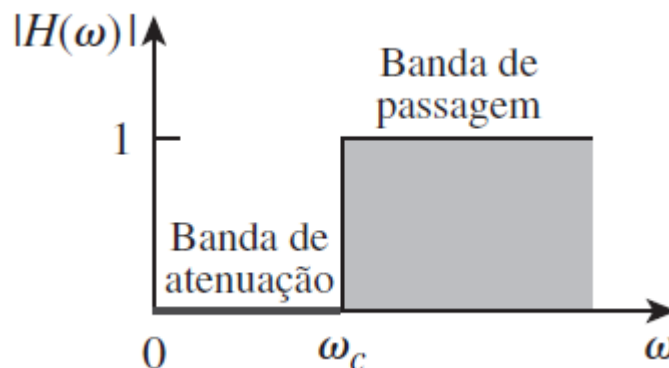
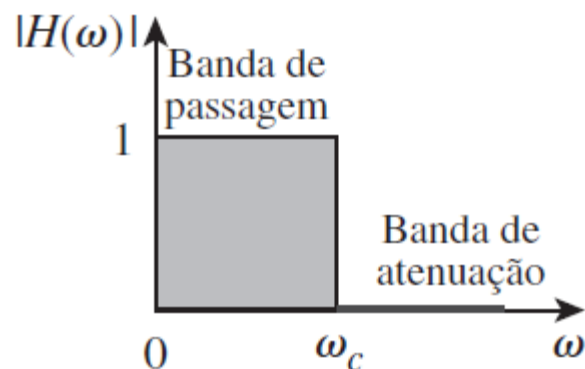
$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = jX_L$$

Condição de Ressonância de Circuito RLC

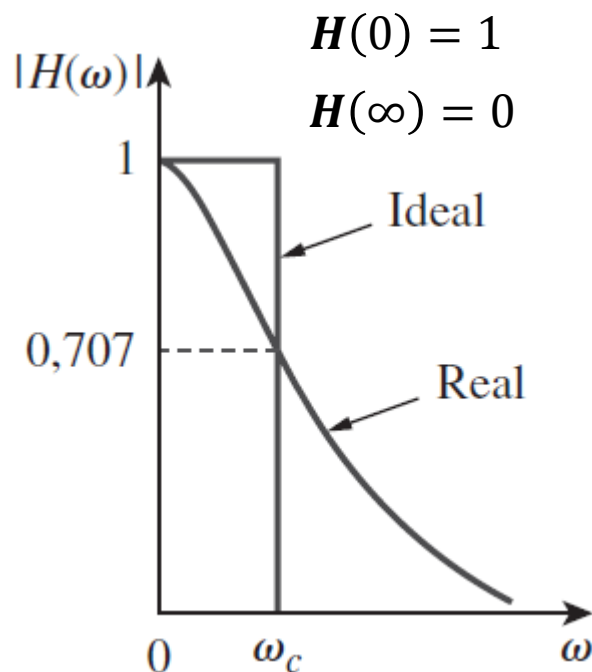
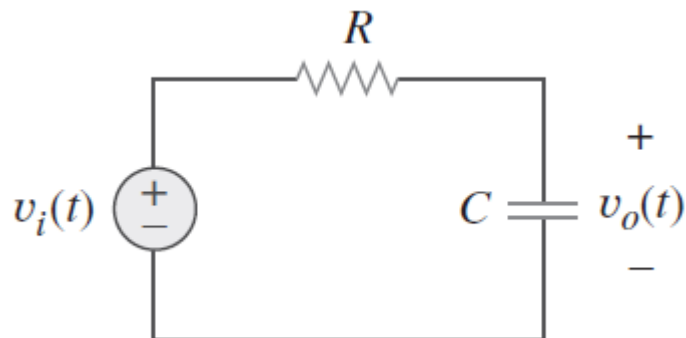
$$X_C = X_L$$

□ São circuitos projetados para selecionar faixa específicas de frequências, rejeitar ou atenuar outras. Podem ser formados por circuitos passivos ou ativos. De acordo com sua construção e finalidade, recebem as seguintes classificações:

- Filtro Passa-Baixas;
- Filtro Passa-Altas;
- Filtro Passa-Faixa (Banda);
- Filtro Rejeita-Faixa (Banda).



Filtro Passa-Baixas



$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1 \angle 0}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2} \angle \phi}$$
$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}} \angle -\phi = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}} e^{-j\phi} = H e^{-j\phi}$$

$$|H(\omega)| = \sqrt{H(\omega)H(\omega)^*} = \sqrt{H e^{j-\theta} H e^{j\theta}} = \sqrt{HH} = H = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Frequência de corte (ω_c)

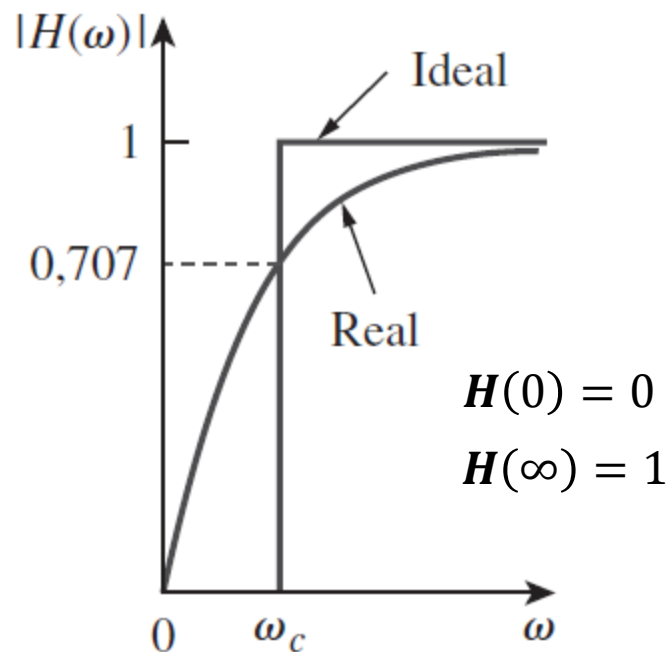
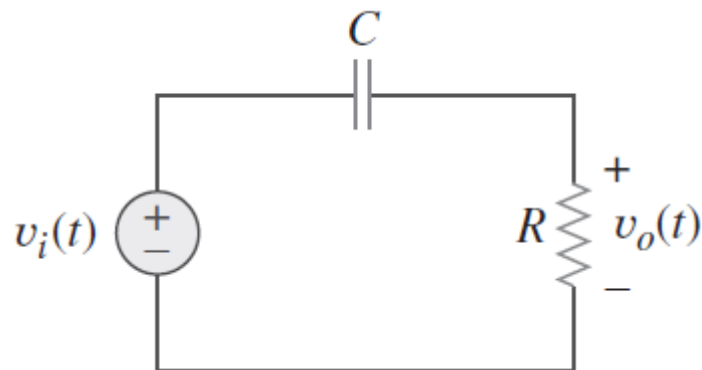
Obtida no ponto de meia potência, quando: $|H(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_c RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 1^2 = \frac{1 + (\omega_c RC)^2}{2} \quad 2 - 1 = (\omega_c RC)^2$$

$$\sqrt{1} = \omega_c RC$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

Filtro Passa-Altas



$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{\omega RC \angle 90^\circ}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2} \angle \theta}$$

$$H(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}} \angle \phi = \frac{\omega RC}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}} e^{j\phi} = H e^{j\phi}$$

$$|H(\omega)| = \sqrt{H(\omega)H(\omega)^*} = \sqrt{H e^{j\phi} H e^{-j\phi}} = \sqrt{HH} = H = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

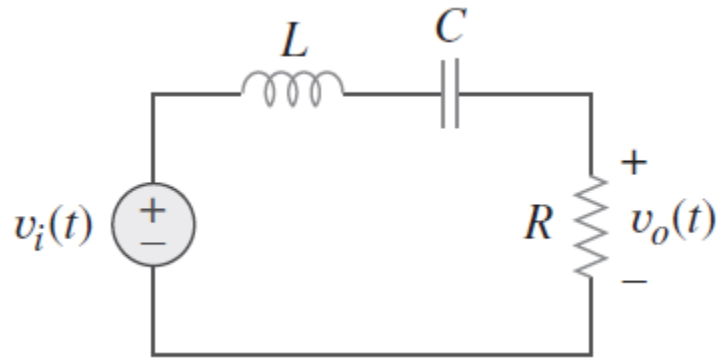
Frequência de corte (ω_c)

Obtida no ponto de meia potência, quando: $|H(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\omega_c RC}{\sqrt{1^2 + (\omega_c RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\omega_c RC)^2 = \frac{1 + (\omega_c RC)^2}{2} \quad 2(\omega_c RC)^2 = 1 + (\omega_c RC)^2$$

$$2 = \frac{1 + (\omega_c RC)^2}{(\omega_c RC)^2} = \frac{1}{(\omega_c RC)^2} + 1 \quad (\omega_c RC)^2 = 1 \quad \sqrt{1} = \omega_c RC \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

Filtro Passa-Faixa (Banda)



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Função de Transferência

$$I = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

$$V_i = I \left[\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \right]$$

$$|H(\omega_c)| = \frac{V_o}{V_i} = \frac{IR}{I \left[\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \right]} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

Frequências de Meia Potência

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_0 \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} - \frac{\omega_0}{2Q}$$

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_0 \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} + \frac{\omega_0}{2Q}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

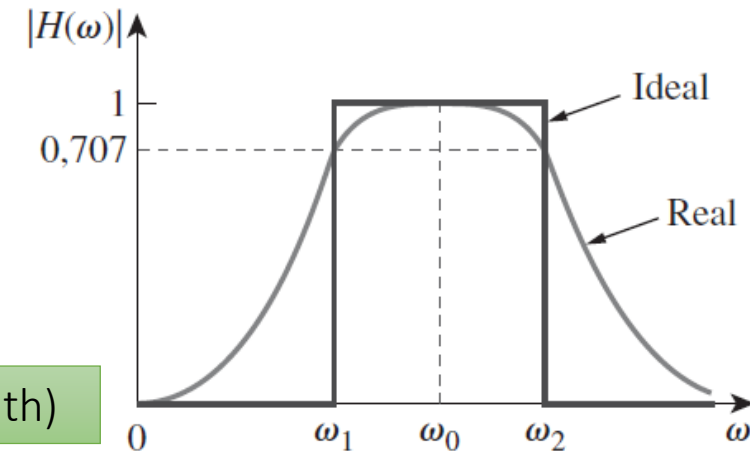
Fator de Qualidade (Q)

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}$$

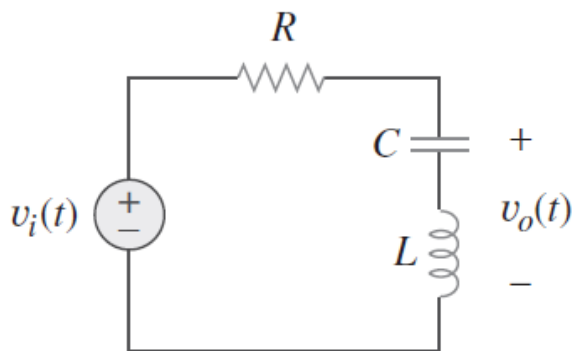
Largura de banda (Bandwidth)

$$B = \omega_2 - \omega_1$$

$$B = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$$



Filtro Rejeita-Faixa (Banda)



Função de Transferência

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j(\omega L - 1/\omega C)}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{1}{1 - jR/(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{1 \angle 0}{\sqrt{1^2 + [R/(\omega L - 1/\omega C)]^2} \angle \phi}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + [R/(\omega L - 1/\omega C)]^2}} \angle -\phi = \frac{1}{\sqrt{1^2 + [R/(\omega L - 1/\omega C)]^2}} e^{-j\phi} = H e^{-j\phi}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$|H(\omega_c)| = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{\sqrt{1 + [R/(\omega L - 1/\omega C)]^2}}$$

Frequências de Meia Potência

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_0 \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} - \frac{\omega_0}{2Q}$$

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_0 \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} + \frac{\omega_0}{2Q}$$

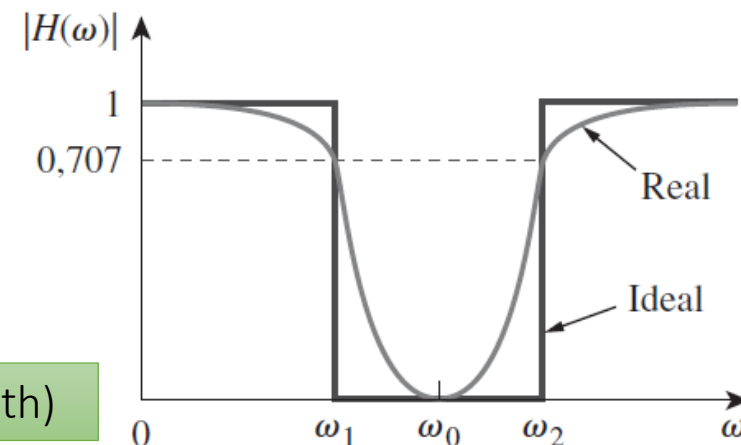
Fator de Qualidade (Q)

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}$$

Largura de banda (Bandwidth)

$$B = \omega_2 - \omega_1$$

$$B = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$$



1 – Represente com notação fasorial.

(a) $v(t) = 7 \cos(2t + 40^\circ) \text{ V}$

(b) $i(t) = -4 \sin(10t + 10^\circ) \text{ A}$

Respostas:

(a) $V = 5 \angle 40^\circ \text{ V}$

(b) $I = 4 \angle 100^\circ \text{ A}$

2 – Determine as senoides representadas pelos seguintes fasores:

(a) $V = -25 \angle 40^\circ V$

(b) $I = j(12 - j5) A$

Respostas:

(a) $v(t) = 25 \cos(\omega t - 140^\circ) V$

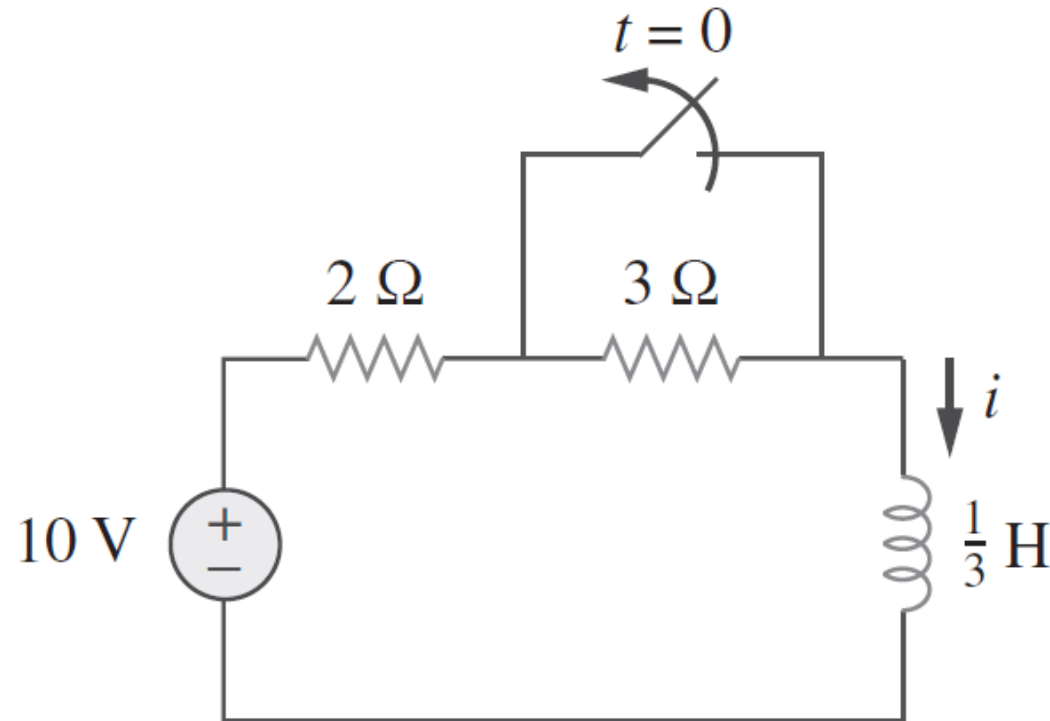
(b) $i(t) = 13 \cos(\omega t + 67,38^\circ) A$

- 3 – Determine a corrente em regime estacionário sobre um capacitor de $50 \mu F$ quando submetido a uma tensão $v(t) = 10 \cos(100t + 30^\circ) V$.

Resposta: $i(t) = 50 \cos(100t + 120^\circ) A$

Exercícios Propostos

- 4 – Determine $i(t)$ no circuito abaixo para $t > 0$ supondo que a chave tenha permanecido fechada por um longo tempo quando $t < 0$.



$$i(t) = 2 + 3e^{-15t} \text{ A}$$

□5 – Um filtro passa-faixa RLC Série possui $R = 4\Omega$ e $L = 25\text{ mH}$. (a) Calcule o valor de C que produzirá um fator de qualidade $Q = 75$; (b) Determine ω_1 , ω_2 e B ;

$$\omega_0 = 12000\text{ rad/s}$$

$$C = 0,277\text{ }\mu\text{F}$$

$$\omega_1 = 11920\text{ rad/s} \quad \omega_2 = 12080\text{ rad/s} \quad B = 160\text{ rad/s}$$

- ❑ J. W. Nilsson, e S. A. Riedel, “Electric Circuits”, 9 ed., New York, Prentice Hall (2011).
- ❑ W. H. Hyat, J. E. Kemmerly, e S. M Durbin, “Análise de Circuitos em Engenharia”, 7 ed., São Paulo, McGraw-Hill (2008).
- ❑ C. K. Alexander, e M. N. O. Sadiku, “Fundamentos de Circuitos Elétricos”, 5 ed., Porto Alegre, AMGH (2013).
- ❑ M. N. O. Sadiku, “Elementos de Eletromagnetismo”, 3 ed., Porto Alegre, Bookman (2004).