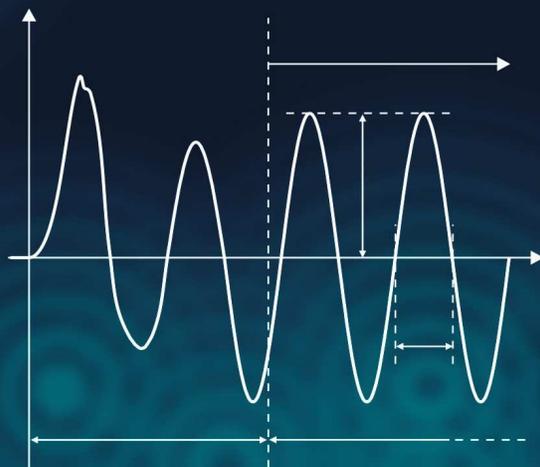
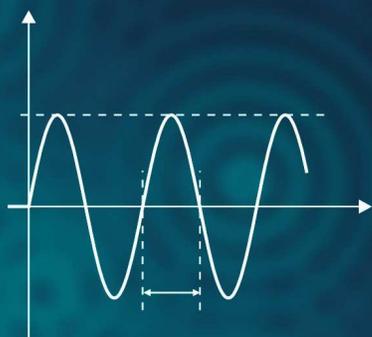


MODELAGEM DA DINÂMICA DE SISTEMAS E ESTUDO DA RESPOSTA

Segunda Edição



Luiz Carlos Felício

RiMa

MODELAGEM DA DINÂMICA DE SISTEMAS E ESTUDO DA RESPOSTA

Segunda Edição

Luiz Carlos Felício

RiMa

2010

© 2007, 2010 Luiz Carlos Felício

Direitos reservados desta edição

RiMa Editora

Editoração

RiMa Artes e Textos

F313m

Felício, Luiz Carlos

Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta / Luiz Carlos Felício – Segunda Edição – São Carlos: RiMa, 2010.

568 p.

ISBN – 978-85-7656-169-9

1. Modelagem dinâmica. 2. Respostas dinâmicas de sistemas. 3. Modelagem de sistemas. 4. Dinâmica de sistemas. I. Título. II. Autores.

CDD: 621

COMISSÃO EDITORIAL

Dirlene Ribeiro Martins

Paulo de Tarso Martins

Carlos Eduardo M. Bicudo (Instituto de Botânica - SP)

Evaldo L. G. Espíndola (USP - SP)

João Batista Martins (UEL - PR)

José Eduardo dos Santos (UFSCar - SP)

Michèle Sato (UFMT - MT)

RiMa
Editora

www.rimaeditora.com.br

Rua Virgílio Pozzi, 213 – Santa Paula

13564-040 – São Carlos, SP

Fone/Fax: (16) 3372-3238

*A minha esposa Antonieta
e aos meus filhos Junior, André e Fabiana*

*My special gratitude
to my former teacher
Prof. Ernest O. Doebelin*

PREFÁCIO

Procurando atender às demandas do mercado, por razões econômicas e de qualidade dos produtos, o desenvolvimento tecnológico tem avançado na busca de máquinas e equipamentos cada vez mais rápidos e eficientes. Estas condições de funcionamento intensificam os efeitos dinâmicos. Desta forma, o desempenho de máquinas de altas rotações, de carros nas curvas, de processos automatizados, entre outros, depende das respectivas propriedades dinâmicas.

A elaboração de um projeto que satisfaça as exigências de comportamento dinâmico previamente especificado somente se efetiva com a aplicação de conhecimentos técnicos de **Modelagem da Dinâmica de Sistemas**.

Assim, as grades curriculares dos cursos de Engenharia foram modificadas a fim de contemplar o estudo de modelagem dinâmica. No curso de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia de São Carlos, EESC-USP, por exemplo, as disciplinas com foco em Dinâmica de Sistemas foram introduzidas em 1977 na pós-graduação e em 1979 na graduação. Desde então, o apoio bibliográfico aos cursos é constituído por um conjunto de livros importados que não são facilmente encontrados no mercado. Além disso, sempre trouxe algum prejuízo ao aprendizado a falta de material didático objetivamente ordenado e organizado.

Dentro desse contexto surgiu a perspectiva de colaborar com o estudo da Dinâmica de Sistemas e, conseqüentemente, de elaborar este livro.

Esta obra tem por objetivo atender a cursos de graduação e cursos iniciais de pós-graduação cujos respectivos programas contemplem modelagem da Dinâmica de Sistemas. A técnica de modelagem é aqui ensinada utilizando uma metodologia especial que se resume na divisão das expressões matemáticas em dois grupos: equações e relações.

Complementando o escopo, foi acrescentado o **estudo da resposta**, assunto indispensável para compreender o comportamento dinâmico de sistemas, desenvolver bom senso e necessário na elaboração de projetos, análise e avaliação de sistemas.

O Capítulo 1, “Conceituação de Modelagem da Dinâmica de Sistemas”, apresenta os conceitos fundamentais para uma abordagem da dinâmica de sistema direcionada a problemas de Engenharia e conceitos de modelagem, de sistema, de entrada e saída. Discute o conceito de modelagem matemática, mostra uma classificação desses modelos considerando as complexidades analíticas, uma classificação para as

entradas reais e os tipos de problemas encontrados. Enfoca ainda o uso de computadores nesse processo.

O Capítulo 2, “Conceitos Básicos de Modelagem”, apresenta os fundamentos para obter modelos lineares. Explica a estrutura adotada para a modelagem, requisito importante na organização dos procedimentos e na formação de engenheiro especializado em Dinâmica de Sistemas. As quatro “partes” fundamentais consideradas são: Hipóteses, Aplicação de Leis, Relações entre as Variáveis e Validação do Modelo. No desenvolvimento desses quatro itens são apresentados enunciados simplificados das leis usadas no livro e são listadas as relações importantes.

O Capítulo 3, “Modelagens de Sistemas Simples”, desenvolve a organização e os procedimentos de modelagem. Apresenta detalhes e implicações decorrentes da definição da origem e escolha do sentido positivo das variações das grandezas. Introduce o conceito de função de transferência operacional. São desenvolvidas modelagens de sistemas elétricos (nove modelos), de sistemas mecânicos (seis modelos), de sistemas fluídicos com água (quatro modelos), de sistemas fluídicos com ar (dois modelos) e de sistemas térmicos (dois modelos). Cada modelagem constitui um corpo completo e pode ser estudada em seqüência diferente da aqui apresentada. Nas seções finais o capítulo discute os conceitos de ganho proporcional, derivativo e integral e três métodos para verificação de modelagem.

No Capítulo 4, “Transformada de Laplace”, a transformada é desenvolvida para aplicação em estudos da Dinâmica de Sistemas. O capítulo apresenta a definição da transformada e sua inversa, discussão de teoremas, detalhes na região próxima à origem, a diferença entre o operador derivativo D e a transformada de Laplace. Desenvolve a transformada de funções periódicas, da função degrau e da função impulso. Discute a conversão de um problema com condições iniciais diferentes de zero em um problema com condições iniciais iguais a zero, e um método para tratar condições iniciais. Apresenta o processo de inversão da transformada por meio de tabelas, o teorema da convolução, funções de transferência com Laplace, definindo pólos e zeros.

No Capítulo 5, “Respostas no Domínio do Tempo de Sistemas de Primeira e Segunda Ordem às Entradas do Tipo Degrau, Rampa e Impulso”, as respostas são encontradas resolvendo as respectivas equações diferenciais. São apresentados gráficos das respostas com eixos normalizados. É também realizado um estudo da resposta experimental à entrada degrau de sistema de primeira ordem e de sistemas de segunda ordem subamortecidos e superamortecidos.

O Capítulo 6, “Resposta em Freqüência”, explica o conceito de resposta em freqüência e define a função de transferência senoidal. Determina equações e gráficos da relação de amplitudes e fases para o ganho, integradores e derivadores, sistema de primeira ordem, sistema de segunda ordem e tempo morto, tanto para escalas

lineares como para escalas logarítmicas (gráfico de Bode). São discutidos os procedimentos para a confecção manual do gráfico que oferece os subsídios para elaboração de projetos, análises e avaliação de sistemas.

O Capítulo 7, “Estudo da Resposta Usando o Método da Transformada de Laplace”, avança no exame e considerações das respostas de um sistema em geral. Representa a base conceitual tanto para estudos teóricos aprofundados como para efetuar trabalhos práticos de medição, por exemplo, de vibrações, de som, de transientes e outros. É apresentada a interligação da Resposta em Frequência com as respostas do impulso, pulso e transientes. São feitas considerações básicas sobre sinais aleatórios e também é introduzido um dos conceitos mais importantes de dinâmica: a Densidade Espectral Média Quadrada (*Power Spectral Density*).

O Capítulo 8, “Técnicas para Tratamentos de Sistemas Não-Lineares”, apresenta uma síntese dos tipos de não-linearidades possíveis nos sistemas reais e seus efeitos nas respostas dos sistemas. Explica a técnica de linearização em torno de um ponto de operação (Análise de Perturbação), desenvolve o conceito de Resposta em Frequência para sistemas não-lineares (Função Descritiva) e introduz o uso de simulação digital como um método para implementar a resolução de sistemas não-lineares.

O Capítulo 9, “Modelagens de Sistemas – Exemplos”, representa um avanço nas modelagens, em termos de complexidade dos sistemas. As modelagens são desenvolvidas de maneira mais natural, não esquematizadas como no Capítulo 3. Em alguns exemplos são também estudados aspectos como a Densidade Espectral, Resposta em Frequência, Sensibilidade e Estabilidade. São apresentadas modelagens de Sistemas Mecânicos (três), de Sistemas Hidráulicos – Óleo (quatro) e de Sistemas Pneumáticos – Ar (três). Dentre os dez sistemas modelados, oito contêm partes mecânicas, portanto, a Lei de Newton é a mais empregada.

O Apêndice A, “Revisão Matemática”, apresenta um resumo dos conceitos matemáticos necessários para desenvolver os estudos de Dinâmica de Sistemas e traz as relações matemáticas importantes. Faz um breve estudo de determinantes e de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes pelo método clássico.

O Apêndice B, “Introdução ao MATLAB”, tem dois objetivos: estudar os conhecimentos básicos do MATLAB para uso imediato e motivar o usuário a passar para estudos aprofundados. Apresenta a linguagem MATLAB e discute pontos fundamentais como variáveis, linhas de comando e outros. Discute o uso do MATLAB em operações com matrizes e vetores, comparativas e lógicas, polinômios, gráficos, frações parciais e Resposta em Frequência.

O Apêndice C, “Introdução ao Simulink”, observa os fundamentos das simulações digitais no domínio do tempo, no ambiente Windows. Mostra como construir um diagrama

para simulação, como executá-lo e obter gráficos e como salvar o trabalho. Apresenta a descrição de blocos usuais, informações para manipulação e exemplos de simulação.

O Apêndice D, “Teoremas e Tabela da Transformada de Laplace”, contém duas tabelas, uma para os teoremas e outra contendo 37 pares de funções do tempo e suas respectivas transformadas. As funções do tempo e as suas transformadas foram selecionadas com base no uso em Dinâmica.

Enfim, na elaboração deste livro, os assuntos foram cuidadosamente selecionados e didaticamente desenvolvidos, com base na experiência de muitos anos de ensino de modelagem e no desempenho e sucesso de ex-alunos na área de Dinâmica de Sistemas.

O Autor

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – CONCEITUAÇÃO DE MODELAGEM DA DINÂMICA DE SISTEMAS	
1.1 – Introdução	1
1.2 – Significado de Modelo	3
1.3 – Significado de Dinâmica de Sistema	4
1.4 – Conceito de Entrada e Saída	6
1.5 – Classificação dos Tipos de Problemas	8
1.6 – Modelos de Entradas	9
1.7 – Classificação de Modelos de Sistemas	11
CAPÍTULO 2 – CONCEITOS BÁSICOS DE MODELAGEM	
2.1 – Introdução	18
2.2 – “Partes” de uma Modelagem	18
2.3 – Leis Básicas	21
2.3.1 – Segunda Lei de Newton	23
2.3.2 – Lei de Kirchhoff	24
2.3.3 – Lei da Conservação da Massa	25
2.3.4 – Lei da Conservação da Energia	27
2.4 – Relações Básicas Utilizadas	27
2.4.1 – Sistemas Mecânicos	27
2.4.2 – Sistemas Elétricos	34
2.4.3 – Sistemas Térmicos	38
2.4.4 – Sistemas Fluídicos	42
2.5 – Conclusão	50
CAPÍTULO 3 – MODELAGENS DE SISTEMAS SIMPLES	
3.1 – Considerações Iniciais	52
3.2 – Função de Transferência Operacional	55
3.3 – Sistemas Elétricos	58
3.3.1 – Modelagem do Circuito RC	58
3.3.2 – Modelagem do Circuito LRC	61
3.3.3 – Impedâncias Equivalentes	64
3.3.4 – Circuito com Impedâncias Equivalentes – Exemplo 1	66
3.3.5 – Circuito com Impedâncias Equivalentes – Exemplo 2	68
3.3.6 – Circuito com Gerador de Corrente – Exemplo 1	69
3.3.7 – Circuito com Gerador de Corrente – Exemplo 2	71
3.3.8 – Circuito com Amplificador Operacional – Exemplo 1	72
3.3.9 – Circuito com Amplificador Operacional – Exemplo 2	75
3.4 – Sistemas Mecânicos	76
3.4.1 – Sistema Massa–Mola–Amortecedor	77
3.4.2 – Sistema em Rotação: Inércia–Mola–Amortecedor	80
3.4.3 – Sismógrafo/Acelerômetro	83
3.4.4 – Pêndulo Simples	86
3.4.5 – Sistema com Massas em um Eixo	88
3.4.6 – Sistema com Duas Massas em Translação	92
3.5 – Sistemas Fluídicos – Água	97

3.5.1 – Sistema com um Tanque – Exemplo 1	97
3.5.2 – Sistema com um Tanque – Exemplo 2	99
3.5.3 – Sistema com um Tanque – Exemplo 3	102
3.5.4 – Sistema com Dois Tanques	105
3.6 – Sistemas Flúídicos – Ar	110
3.6.1 – Sistema Pneumático para Compensação pelo Método do Atraso de Fase	111
3.6.2 – Sistema com Controle de Pressão através de Válvula	114
3.7 – Sistemas Térmicos	118
3.7.1 – Sistema com uma Massa	118
3.7.2 – Sistemas com Duas Massas	121
3.8 – Ganhos de Funções de Transferências	123
3.8.1 – Definições	123
3.8.2 – Interpretação Física dos Ganhos K , K_D e K_I	125
3.8.3 – Ganho Paramétrico K	127
3.9 – Técnicas de Verificação de Modelagem	128
3.9.1 – Método de Routh	128
3.9.2 – Condição de Regime Permanente	131
3.9.3 – Análise Dimensional	131
3.10 – Exercícios Propostos	133

CAPÍTULO 4 – TRANSFORMADA DE LAPLACE

4.1 – Introdução	141
4.2 – Transformada de Laplace e Sua Inversa – Definições	142
4.2.1 – Definição da Transformada de Laplace	142
4.2.2 – Definição da Transformada Inversa de Laplace	145
4.3 – Teoremas da Transformada de Laplace	147
4.3.1 – Teorema da Integração	147
4.3.2 – Teorema da Derivação Real	150
4.3.3 – Teorema da Derivação Complexa	152
4.3.4 – Teorema do Defasamento no Tempo	153
4.3.5 – Teorema do Defasamento em s	154
4.3.6 – Teorema da Mudança de Escala no Tempo	155
4.3.7 – Teorema do Valor Final	155
4.3.8 – Teorema do Valor Inicial	156
4.4 – Diferença entre o Operador D e a Transformada de Laplace	157
4.5 – Transformada de Laplace de uma Função Periódica	160
4.6 – Função Degrau, Função Impulso e Suas Transformadas	163
4.6.1 – Função Degrau	163
4.6.2 – “Função” Impulso	166
4.7 – Condições Iniciais	175
4.7.1 – Introdução	175
4.7.2 – Conversão de um Problema com Condições Iniciais Diferentes de Zero a um com Condições Iniciais Iguais a Zero	176
4.7.3 – Método para Tratar Condições Iniciais	181
4.8 – Inversão da Transformada de Laplace	183
4.8.1 – Introdução	183
4.8.2 – Procedimento para Executar a Inversão Usando Tabelas	184
4.8.3 – Exemplos	185
4.8.4 – Inversão da T. L. Quando $D(s)$ Possui Raízes Complexas	188

4.9 – Integral de Convolução	192
4.9.1 – Teorema	192
4.9.2 – Prova do Teorema	193
4.9.3 – Comentários Sobre a Integral de Convolução	194
4.10 – Funções de Transferências com Laplace	195
4.10.1 – Funções de Transferência	195
4.10.2 – Pólos e Zeros de uma Função de Transferência	196
4.11 – Exercícios Resolvidos	198
4.12 – Exercícios Propostos	210

CAPÍTULO 5 – RESPOSTAS NO DOMÍNIO DO TEMPO DE SISTEMAS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM ÀS ENTRADAS DO TIPO DEGRAU, RAMPA E IMPULSO

5.1 – Introdução	213
5.2 – Sistema de Primeira Ordem	213
5.2.1 – Introdução	213
5.2.2 – Solução da Homogênea	214
5.2.3 – Resposta à Função Degrau	215
5.2.4 – Resposta à Função Rampa	218
5.2.5 – Resposta à Função Impulso	220
5.3 – Sistema de Segunda Ordem	222
5.3.1 – Introdução	222
5.3.2 – Solução da Homogênea	223
5.3.3 – Resposta à Função Degrau	225
5.3.4 – Resposta à Função Rampa	230
5.3.5 – Resposta à Função Impulso	233
5.4 – Estudo da Resposta Experimental à Entrada Degrau	236
5.4.1 – Introdução	236
5.4.2 – Sistema de Primeira Ordem – Determinação de τ	237
5.4.3 – Sistema de Segunda Ordem Subamortecido – Determinação de ω_n e ζ	240
5.4.4 – Sistema de Segunda Ordem Superamortecido – Determinação de τ_1 e τ_2	243
5.5 – Exercícios Propostos	249

CAPÍTULO 6 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

6.1 – Conceito de Resposta em Frequência	250
6.2 – Função de Transferência Senoidal	252
6.3 – Equações Para a Relação de Amplitudes e a Fase de Sistemas Básicos	253
6.3.1 – Relação de Amplitudes e Fase para o Ganho K	254
6.3.2 – Relação de Amplitudes e Fase para o Integrador $\frac{1}{s}$	255
6.3.3 – Relação de Amplitudes e Fase para o Sistema de 1ª ordem $\frac{1}{\tau s + 1}$	257
6.3.4 – Relação de Amplitudes e Fase para o Sistema de 2ª ordem $\frac{1}{\omega_n^2 s^2 + 2\zeta \omega_n s + 1}$	260
6.3.5 – Relação de Amplitudes e Fase para o Tempo Morto (<i>Dead Time</i>): e^{-sT_D}	263
6.4 – Resposta em Frequência em Mono-Log	264

6.4.1 – Introdução	264
6.4.2 – Gráfico em <i>db</i> do Ganho K	266
6.4.3 – Gráfico em <i>db</i> do Termo: s^N	267
6.4.4 – Gráfico em <i>db</i> do Termo: $(\tau s + I)^{\pm 1}$	269
6.4.5 – Gráfico em <i>db</i> do Termo: $\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + I\right)^{\pm 1}$	273
6.4.6 – Gráfico em <i>db</i> do Termo: $e^{-s\tau_{DT}}$	277
6.5 – Exercícios Resolvidos	278
6.6 – Exercícios Propostos	288

CAPÍTULO 7 – ESTUDO DA RESPOSTA USANDO O MÉTODO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

7.1 – Resposta à Entrada Impulso	292
7.2 – Resposta a uma Entrada Arbitrária	293
7.3 – Resposta do “Impulso Aproximado”	295
7.3.1 – Resposta do Impulso Perfeito com Área A_p	295
7.3.2 – Resposta do Impulso Aproximado com Área A_p	296
7.4 – Resposta em Frequência (RF)	299
7.5 – Relação entre a Resposta do Impulso e a Resposta em Frequência	301
7.5.1 – Determinação da RF Quando a Resposta do Impulso É Conhecida	301
7.5.2 – Determinação da Resposta do Impulso Quando a Resposta em Frequência É Conhecida	303
7.6 – Resposta da Entrada Periódica	305
7.6.1 – Série de Fourier	305
7.6.2 – Resposta em Regime Permanente Quando a Entrada É Periódica	308
7.7 – Respostas a Entradas Cujas Amplitudes São Moduladas	310
7.7.1 – Sinais Modulados	310
7.7.2 – Resposta do Sinal Modulado	311
7.8 – Determinação da Resposta Quando a Entrada É um Transiente Arbitrário e a Resposta em Frequência É Conhecida	312
7.9 – Requisitos a um “Impulso” Realizável para o Teste do Impulso	316
7.10 – Resposta de um Sistema Linear Quando a Entrada É um Sinal Aleatório	319
7.10.1 – Características de um Sinal Aleatório	319
7.10.2 – Caracterização da Magnitude do Sinal Aleatório	321
7.10.3 – Caracterização da “Rapidez” do Sinal Aleatório	324
7.10.4 – “White Noise”	330
7.10.5 – Densidade Espectral Cruzada	331
7.10.6 – Considerações Quando a Entrada do Sistema É um Sinal Aleatório	332
7.11 – Exercícios Propostos	333

CAPÍTULO 8 – TÉCNICAS PARA TRATAMENTO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

8.1 – Introdução	338
8.2 – Linearização ao Redor de um Ponto de Operação	345
8.3 – Função Descritiva	350
8.4 – Simulação Digital	356

CAPÍTULO 9 – MODELAGEM DE SISTEMAS – EXEMPLOS

9.1 – Sistemas Mecânicos	366
9.1.1 – Exemplo Nº 1: Sistema Mecânico com Entrada Deslocamento e Cálculo do Módulo da Densidade Espectral	366
9.1.2 – Exemplo Nº 2: Amortecedor Mais Realista	370
9.1.3 – Exemplo Nº 3: Sistema Mecânico com Acoplamento Fluídico	373
9.2 – Sistemas Hidráulicos – Óleo	383
9.2.1 – Considerações Gerais	383
9.2.2 – Hipóteses, Equações e Relações Específicas da Modelagem de Sistemas Hidráulicos	389
9.2.3 – Exemplo Nº 4: Tanque Pressurizado com Válvula, Orifícios e Pistão	397
9.2.4 – Exemplo Nº 5: Análise de um Sistema com Bomba Controlada e com Motor ..	408
9.2.5 – Exemplo Nº 6: Modelagem Dinâmica de um Cilindro Hidráulico Controlado por Válvula	414
9.2.6 – Exemplo Nº 7: Modelagem Dinâmica de uma Bomba Autocompensada por Pressão, Tipo Proporcional	423
9.3 – Sistemas Pneumáticos	435
9.3.1 – Exemplo Nº 8: Modelagem Dinâmica de um Transdutor de Deslocamento para Pressão	435
9.3.2 – Exemplo Nº 9: Modelagem Dinâmica de um Controlador Proporcional, Integral e Derivativo Pneumático	440
9.3.3 – Exemplo Nº 10: Modelagem de um Transdutor Eletropneumático	448
9.4 – Exercícios Propostos	457

APÊNDICE A – REVISÃO MATEMÁTICA

A.1 – Introdução	467
A.2 – Relações Importantes	467
A.2.1 – Números Complexos	467
A.2.2 – Funções Trigonométricas	468
A.2.3 – Derivadas	469
A.2.4 – Integrais	470
A.2.5 – Limites	471
A.2.6 – Série de Taylor	471
A.3 – Determinantes	472
A.3.1 – Introdução	472
A.3.2 – Propriedades dos Determinantes	472
A.3.3 – Cálculo de Determinantes Usando Co-fatores	473
A.3.4 – Regra de Cramer	475
A.4 – Equações Diferenciais	476
A.4.1 – Introdução	476
A.4.2 – Métodos para Resolver Equações Diferenciais	476
A.4.3 – Método Clássico para Resolver Equações Diferenciais Ordinárias Lineares com Coeficientes Constantes	476
A.4.4 – Princípio da Superposição	483
A.4.5 – Equações Diferenciais Simultâneas	483
A.5 – Exercícios Propostos	485

APÊNDICE B – INTRODUÇÃO AO MATLAB

B.1 – Introdução	488
------------------------	-----

B.2 – O Que É MATLAB	488
B.3 – Pontos Iniciais	490
B.3.1 – Variáveis	490
B.3.2 – Linhas de Comando	490
B.3.3 – Número e Matrizes Complexas	493
B.3.4 – Funções	495
B.3.5 – Formato de Saída	495
B.4 – Matrizes e Vetores	497
B.4.1 – Como Definir Matrizes e Vetores	497
B.4.2 – Operações com Matrizes	499
B.4.3 – Funções Matriciais	504
B.5 – Operações Comparativas e Lógicas	505
B.6 – Polinômios	506
B.6.1 – Representação de Polinômios no MATLAB	506
B.6.2 – Operações com Polinômios	506
B.7 – Gráficos	507
B.7.1 – Introdução aos Gráficos	507
B.7.2 – Construindo Gráficos	508
B.7.3 – Estilos de Linha, Marcadores e Cor	509
B.8 – Frações Parciais	510
B.9 – A Resposta em Frequência	513
B.10 – Exercícios Propostos	517

APÊNDICE C – INTRODUÇÃO AO SIMULINK

C.1 – Introdução	518
C.2 – Construindo um Diagrama	519
C.2.1 – Proposição	519
C.2.2 – Construção do Diagrama	519
C.2.3 – Simulação e Resultado	524
C.2.4 – Salvar o Sistema	525
C.3 – Descrição de Blocos Usuais	525
C.3.1 – Blocos Usuais do <i>Continuous</i>	526
C.3.2 – Blocos Usuais do <i>Discontinuities</i>	526
C.3.3 – Blocos Usuais do <i>Math Operations</i>	527
C.3.4 – Blocos Usuais do <i>Signal Routing</i>	528
C.3.5 – Blocos Usuais do <i>Sinks</i>	529
C.3.6 – Blocos Usuais do <i>Sources</i>	530
C.4 – Informações Para Manipulação	531
C.4.1 – Manipulação do Sistema	532
C.4.2 – Manipulação de Blocos	532
C.4.3 – Manipulação de Linhas	533
C.5 – Exercícios Resolvidos	533
C.6 – Exercícios Propostos	538

APÊNDICE D – TEOREMAS E TABELA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

D.1 – Teoremas da Transformada de Laplace	540
D.2 – Tabela da Transformada de Laplace	541

ÍNDICE ANALÍTICO	544
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	551

CONCEITUAÇÃO DE MODELAGEM DA DINÂMICA DE SISTEMAS

1.1 – INTRODUÇÃO

É importante iniciar o estudo de modelagem discutindo a sua filosofia.

O primeiro ponto que devemos abordar refere-se à Engenharia em si, no que consiste o seu trabalho.

A discussão deste tema se faz necessária porque, quando as pessoas ingressam no curso de Engenharia e recebem pela primeira vez explicações sobre o que é Engenharia, estas ficam surpresas e até reagem demonstrando desconfiança e incredulidade. Esta atitude se deve muito ao mito popular que implanta a idéia de que Engenharia é uma ciência exata. Grave erro conceitual! Engenharia é a ciência que busca resolver problemas de forma aproximada. Aliás, é difícil compreender o que possa ser exato. Será que conseguiríamos determinar as grandezas envolvidas em Engenharia, como tensão, pressão, tempo, temperatura, velocidade, comprimento e outras, de maneira exata? A resposta é não, porque não há exatidão em Engenharia. Às vezes é até complexo compreender o que seria uma grandeza, como, por exemplo, o comprimento de uma barra. As faces têm rugosidade e não são absolutamente paralelas e planas, e o comprimento depende da temperatura. Portanto, nem sequer conseguimos obter o exato valor de uma grandeza simples como o comprimento de uma barra.

Apenas para ilustrar, se examinarmos a face de uma barra em um microscópio observaremos os detalhes da rugosidade com seus picos e vales, Figura 1.1. Essa figura evidencia uma das dificuldades para definir o que seria o comprimento exato da barra.

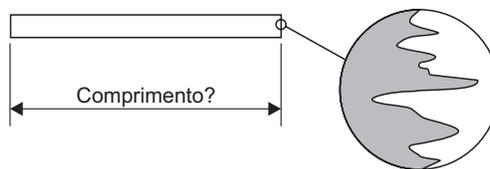


Figura 1.1 A rugosidade dificulta a definição do comprimento exato da barra.

Quando fazemos medições de grandezas de Engenharia, os dados obtidos sempre apresentam erros. Por mais esforços que venhamos a empregar, quer com cuidados especiais ou com instrumental sofisticado, a medição perfeita (exata) nunca será realizada.

É neste ponto que precisamos de bom senso. Apesar de não haver exatidão, mesmo assim a Engenharia consegue resolver, de forma aproximada, problemas e com isso atender às necessidades da sociedade. Por meio da aplicação de técnicas e procedimentos, o engenheiro executa projeto e construção de tudo o que o ser humano usa, como carros, tratores, aviões, foguetes, edifícios, estradas, computadores, robôs, aparelhos para medicina, odontologia, de comunicação, etc.

É dentro do contexto de “soluções aproximadas” que encontramos o significado de Modelagem, pois *Engenharia é um conjunto de modelos*.

Esse conjunto de modelos dá sustentação ao progresso tecnológico, pois desenvolver um produto ou um bem por meio de tentativas é inaceitável. Com certeza teríamos alto custo, enorme demanda de tempo, risco de perder vidas ou de ser inviável, como, por exemplo, a construção de aviões, pontes pênseis, etc. A quantidade de alternativas de modificações e de combinações das características pode implicar um número praticamente infinito de tentativas.

É importante reconhecer que o mundo real é muito complexo. Desta forma, para atingir nossos objetivos, entre eles a análise e o projeto de bens, equipamentos e componentes, precisamos ser capazes de descrever esses processos complexos de maneira inteligível. Isso significa descrever alguns aspectos do mundo real de forma abstrata, Figura 1.2.



Figura 1.2 O material teórico de Engenharia procura retratar o mundo real.

Sabemos que é praticamente impossível descrever todos os aspectos de determinado processo do mundo real. Por isso, temos de decidir quais características considerar e quais ignorar. Esta é a essência da *arte de modelar* – saber selecionar somente as características, dentre muitas disponíveis, que são necessárias e suficientes para descrever o processo com precisão satisfatória.

O engenheiro tem de se preparar para essa tarefa. A obtenção de um modelo válido requer o conhecimento do *processo* sob estudo e também das *técnicas de modelagem*. Este livro trata desses itens, mas com intensidades diferentes.

Os processos de Engenharia constituem um campo extenso e amplo, impossível de ser tratado em um só livro. Aqui, alguns processos são discutidos de forma elementar, com o objetivo de formar uma base para que o engenheiro possa posteriormente se desenvolver com proficiência em sua área específica.

Quanto à discussão das técnicas de modelagem, se comparada com o estudo dos processos, esta avança um pouco mais. Contudo, ainda poderia ser classificada como um conjunto de conhecimentos fundamentais, evidentemente indispensáveis para formar o alicerce do engenheiro de dinâmica de sistema.

Adicionalmente, com objetivo de proporcionar ao engenheiro uma visão conceitual do comportamento dinâmico, este livro tem boa parte dedicada ao *estudo da resposta* dos sistemas, muito importante para projetar, analisar e definir as características de desempenho dos sistemas.

1.2 – SIGNIFICADO DE MODELO

Em estudos de Engenharia, a palavra modelo possui mais de um significado, sendo um deles associado a *modelos físicos* e o outro a *modelos matemáticos*.

Modelo físico é um arranjo de peças e mecanismos reais. É construído de acordo com regras de escala e deve se comportar de maneira similar a como se comporta o sistema de tamanho natural. Os modelos físicos em escala representam importante metodologia para algumas áreas da Engenharia. Este tipo de modelo é muito usado em projetos de veículos, perfis aerodinâmicos, estruturas e outros.

O segundo tipo, o modelo matemático, envolve a aplicação criteriosa de leis físicas e julgamento de Engenharia para a obtenção de um conjunto de equações que irão (dentro de certa aproximação) descrever adequadamente o comportamento do sistema. Os modelos matemáticos, na grande maioria das vezes, são tratados dentro do assunto *dinâmica de sistemas*. Portanto, entendemos por *modelagem o processo de obtenção das equações matemáticas* e chamamos de modelo matemático o conjunto das equações. Mesmo se tratando de modelos matemáticos, a fabricação de peças pode vir a ser necessária quando desejamos determinar valores numéricos reais para os coeficientes do modelo.

Outros modelos usados em Engenharia são os modelos computacionais, por exemplo, sistema biela–manivela, mecanismo de quatro barras, vazamento e solidificação de corpos em fundição, etc. Hoje temos computadores comuns com

capacidade de mostrar na tela corpos de três dimensões em movimento, gradientes de temperatura, o trabalho da suspensão de um carro, um sistema hidráulico em funcionamento e outros. Em certas situações, esses modelos substituem os construídos em escala, pois é muito mais fácil mudar os parâmetros ou as características no computador do que fabricar e instalar novos componentes. Por exemplo, alterar o comprimento de uma barra de um mecanismo no computador é uma tarefa rápida, enquanto no modelo em escala temos demanda de tempo, custos de fabricação e montagem.

Sob um ponto de vista mais rigoroso, esse tipo de modelo computacional se encaixa na classificação de modelos matemáticos, com interfaces gráficas para permitir que a determinação do modelo seja mais amigável. Os modelos computacionais geram suas equações automaticamente.

Em outras áreas, fora do contexto de Engenharia, há outros tipos de modelos, como os chamados verbais, que são usados em sociologia e psicologia.

1.3 – SIGNIFICADO DE DINÂMICA DE SISTEMA

Os estudos dos comportamentos de mecanismos, motores, máquinas, circuitos elétricos e outros equipamentos são geralmente apresentados dentro de uma divisão didática de livros ou revistas com o nome *Dinâmica de Sistemas* (System Dynamics). Ao observarmos tal denominação, sempre indagamos qual campo de problemas ou assuntos que são tratados nessa área. A resposta direta a esta indagação não é tão importante, mas sim a clara conscientização que pode ser conseguida pelo entendimento do próprio sentido das palavras *sistema* e *dinâmica*.

Um sistema é um conjunto de peças ou componentes, sem limitação de quantidade, que se encontra dentro de uma fronteira imaginária escolhida convenientemente pelo analista. Um sistema pode ser de qualquer tamanho. Por exemplo, o sistema elétrico de uma casa e o sistema elétrico de um país possuem dimensões completamente diferentes.

Uma importante decisão para a obtenção dos modelos é a definição da fronteira do sistema. A fronteira determina quais elementos do mundo real e do processo serão estudados. Todos os demais componentes não pertencentes ao sistema são chamados de *meio externo*.

A escolha da fronteira do sistema pode se tornar fator crítico para a modelagem. Se for muito ampla, a modelagem pode se tornar difícil, complexa e envolver muitos detalhes irrelevantes. Se for muito restrita, pode deixar de incluir aspectos importantes e isso proporcionará resultados insatisfatórios.

A definição da fronteira está também ligada ao detalhamento do estudo pretendido. Por exemplo, quando a fronteira engloba um sistema hidráulico completo, contendo tanque, motor elétrico, bomba, válvulas e cilindro, a vazão de uma válvula é considerada função das propriedades do óleo, da abertura da válvula e das pressões envolvidas. Nenhum detalhe do escoamento interno é considerado. Contudo, se o objetivo for o projeto do carretel, então a fronteira ficará restrita à válvula e todo esforço recairá na obtenção do modelo do escoamento interno, Figura 1.3.

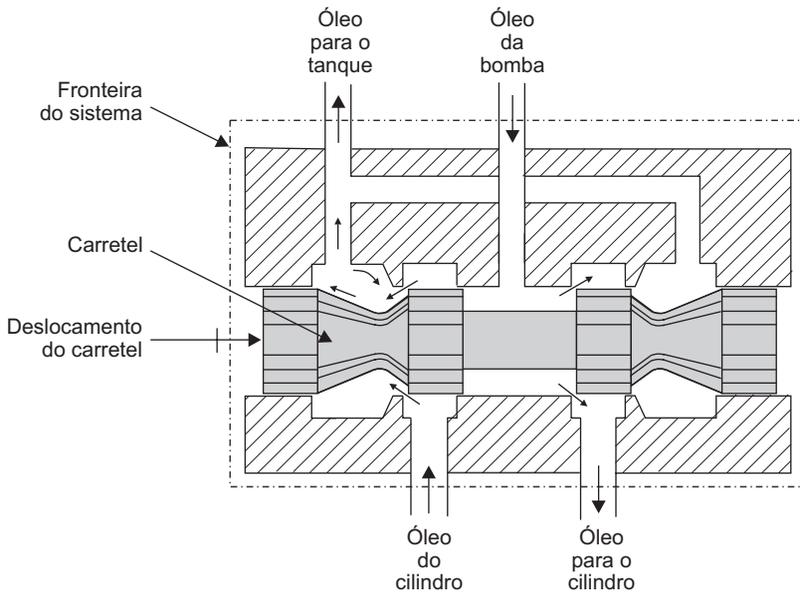


Figura 1.3 Para o projeto do carretel, a fronteira engloba somente a válvula.

Agora, voltando à interpretação de *Dinâmica de Sistemas*, vamos observar o significado de Dinâmica.

Em Engenharia, a palavra dinâmica refere-se à situação que é função do tempo. Assim, em Dinâmica estudamos o comportamento de variáveis em função do tempo. Mesmo uma grandeza que não sofre mudanças em função do tempo está dentro do campo de estudo da Dinâmica, pois uma constante também é uma função do tempo.

Dessa maneira, concluímos que o estudo da Dinâmica de Sistemas pode ser entendido como o estudo do comportamento, em função do tempo, de grandezas que estão relacionadas com parte do universo que foi imaginariamente separada para este fim.

Sob o ponto de vista acadêmico, a área de estudo de Dinâmica de Sistemas se caracteriza como uma das mais volumosas e tem importância ímpar. Ela pode ser

dividida em quatro subáreas, em que cada uma em si representa um campo da Engenharia, contendo seu próprio material de estudo e contemplando muitos casos de aplicação. Estas subáreas são:

(i) **Vibrações**

Exemplos: vibração da estrutura de um avião, máquina operatriz, etc.

(ii) **Sistemas de Controle (Automação)**

Exemplos: robôs, direção hidráulica de carro, etc.

(iii) **Sistema de Medidas**

Exemplos: medidores de som (ruído), de tensão e deformação, etc.

(iv) **Modelos Específicos**

Exemplos: comportamento dinâmico de uma usina nuclear, dinâmica de veículos, etc.

O material apresentado neste livro tem por objetivo formar um corpo que constitui a base do estudo da Dinâmica de Sistemas, conseqüentemente, aplicável às quatro subáreas.

1.4 – CONCEITO DE ENTRADA E SAÍDA

Dada uma fronteira imaginária que caracteriza o sistema, temos então as *entradas* e as *saídas*, Figura 1.4.

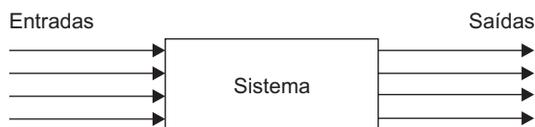


Figura 1.4 Representação geral de entrada/sistema/saída.

Uma entrada é qualquer grandeza que pode modificar, de forma significativa ou não, o estado do sistema. Em Dinâmica, o comportamento de uma entrada é considerado independente do sistema, ou seja, ela não sofre influência do sistema.

Uma saída é qualquer grandeza do sistema que caracteriza o seu estado. Não significa um fluxo que sai do sistema, mas uma informação. Por exemplo, o valor de uma pressão dentro do sistema. As saídas podem corresponder às mudanças de valores das variáveis físicas do sistema ou mesmo às variações dos parâmetros usados para descrevê-lo.

É importante evidenciar que não há unicidade entre saída e entrada, ou seja, há várias saídas em função de uma entrada. Isso quer dizer que, dada uma entrada,

a saída deve ser escolhida de acordo com os interesses do estudo, da pesquisa ou do projeto. Por exemplo, seja o sistema mecânico massa–mola–amortecedor da Figura 1.5, em que consideramos apenas uma entrada, a força $f(t)$ sobre a massa. A saída pode ser escolhida entre diversas variáveis, como:

- posição da massa M ;
- força da mola sobre o solo;
- temperatura da mola;
- variação das propriedades mecânicas do material da mola;
- temperatura do óleo do amortecedor;
- viscosidade do óleo do amortecedor, etc.

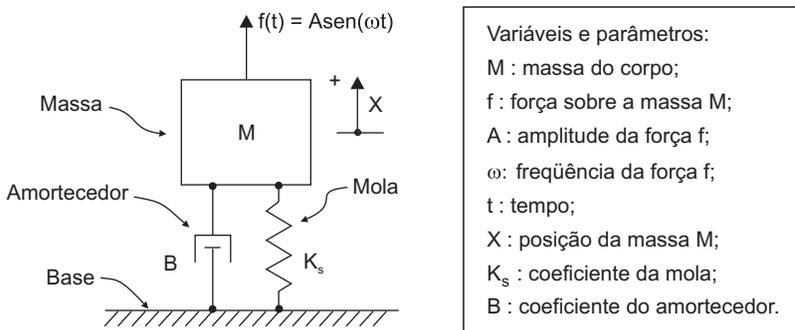


Figura 1.5 Sistema mecânico massa-mola-amortecedor com uma só entrada, $f(t) = A \text{ sen}(\omega t)$.

O sistema poderia ter mais de uma entrada, como a temperatura ambiente, a vibração da base e outras, além da própria força $f(t)$.

As entradas são consideradas independentes do sistema, ou seja, elas não sofrem influência do sistema. Assim como as entradas independem do sistema, as saídas independem do meio externo, pois estas dependem apenas do sistema e das entradas. Se alguma grandeza do meio externo causa mudança em uma saída, esta deve ser considerada como entrada.

As saídas geralmente sofrem influência quando fazemos montagens de sistemas em cascata. Muitas vezes equipamentos são conectados e o sistema posterior interfere no sistema em questão, que passa a ter comportamento bem diferente do previsto. Neste caso, a modelagem existente perde todo significado em razão do efeito de carga causado pela conexão, e uma nova modelagem tem de ser feita.

Em dinâmica é muito comum estudarmos o comportamento de um sistema observando uma única resposta (uma saída) em função de uma única entrada. Quando realizamos este estudo, todas as demais entradas têm de ser obrigatoriamente mantidas constantes.

Quando na análise de determinado sistema real, considerado **linear**,¹ temos mais de uma entrada variando, o estudo da resposta é feito considerando uma entrada de cada vez. A resposta total é obtida aplicando o princípio da superposição, somando todas as respostas individuais.

Quando o sistema é não-linear, com somente uma entrada ou com múltiplas entradas, não é possível estabelecer regras gerais e o seu estudo envolve maior complexidade.

1.5 – CLASSIFICAÇÃO DOS TIPOS DE PROBLEMAS

Observando a Figura 1.6 podemos dizer que há três tipos de entes envolvidos: *entrada* (E), *sistema* (Si) e *saída* (S). Dentro deste enfoque, os problemas tratados em Dinâmica de Sistemas podem ser classificados em três tipos: *análise*, *síntese* e *medidas*. Cada um destes tipos compreende problemas baseados nas considerações descritas a seguir.



Figura 1.6 Representação genérica de entrada (E), sistema (Si) e saída (S).

(i) **Análise:**

Os problemas de análise são aqueles em que procuramos determinar a saída S , Figura 1.6, quando a entrada E e o sistema Si são conhecidos.

(ii) **Síntese:**

Entendemos por síntese ou projeto aqueles problemas em que procuramos determinar o sistema Si , Figura 1.6, sendo a entrada E e a saída S conhecidas.

iii) **Medidas:**

Suponha que Si seja um sistema de medida escolhido para medir E e o faz de forma imperfeita. O problema de medidas resume-se então à determinação de E , sendo conhecidos S (dados com distorções) e Si (as características do sistema de medida).

Sob o ponto de vista de modelos, o problema de análise corresponde à busca de soluções para as equações diferenciais. As soluções (respostas) podem ser obtidas na forma analítica para a maioria dos sistemas lineares, mas para um número muito

1. São lineares se representados por uma ou um conjunto de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes.

pequeno de sistemas não-lineares. Neste caso, o uso de computadores é o caminho indicado. O processo de resolução numérica por meio de computador é conveniente tanto para sistemas lineares como para não-lineares; a diferença é que para não-lineares, geralmente, o uso é imperativo.

O problema de síntese significa a busca de um modelo que traz a identificação e a determinação da influência de cada componente na resposta. Esses detalhes são fundamentais no desenvolvimento dos projetos dos sistemas, como, por exemplo, nas áreas de vibração mecânica, filtros dinâmicos, controle e automação, dinâmica de veículos, otimização de suspensões e outras.

O problema de medida está presente em todo trabalho de investigação experimental.

Em muitas situações reais, o trabalho envolve, em conjunto, os três tipos de problemas. Este fato ocorre quando o sistema real existe e desejamos ter o seu modelo ou quando o objetivo é o desenvolvimento de sistemas tecnicamente avançados.

No caso da modelagem de um sistema real existente, usamos sistemas de medidas para as medições das entradas e saídas (problema tipo 3) para, posteriormente, chegarmos ao modelo (tipo 2).

No caso do desenvolvimento de projetos mais avançados, temos sempre a construção de protótipos, assim, temos análise, síntese e medições. Portanto, os três tipos.

Conforme pudemos observar, a modelagem está sempre envolvida nos três tipos de problemas, o que torna seu estudo importante.

1.6 – MODELOS DE ENTRADAS

As entradas que ocorrem no mundo real e que atuam nos sistemas sempre contêm, em certo grau, alguma complexidade. Entretanto, o estudo da Dinâmica de Sistemas pode ser feito por meio de algumas entradas matematicamente simples. Essas entradas são escolhidas de maneira tal que suas respostas revelem as características dinâmicas dos sistemas modelados.

A importância dos modelos de entradas engloba também o objetivo de organizar os métodos e os problemas da Dinâmica de Sistemas.

Na Figura 1.7 observamos que a excitação de um sistema pode ser de duas formas: pela **energia armazenada** no sistema antes do instante considerado como inicial e pela **ação externa** a partir desse instante.

Há uma terceira forma de excitação do sistema físico, não mostrada na Figura 1.7, que ocorre pela variação de algum parâmetro do sistema. Por exemplo, se em um circuito elétrico temos uma resistência (parâmetro) variando, este fato

possivelmente causará modificações na saída do circuito. O tratamento desta forma de excitação, denominada *excitação paramétrica*, está fora dos objetivos deste texto.

No sistema massa–mola–amortecedor da Figura 1.5, por exemplo, a energia armazenada inicial existiria se a massa M fosse deslocada da posição de equilíbrio estático, proporcionando armazenamento de energia potencial na mola. Dessa posição, se a massa for solta, esta responderá oscilando de maneira especial, relacionada àquela entrada.

A excitação de um sistema por meio da energia cinética e/ou potencial inicial leva à análise dinâmica de sistemas ditos *livres*. Em sistemas mecânicos, as oscilações são chamadas de *vibrações livres*. Por outro lado, a excitação por meio de ação externa leva à análise de sistemas ditos *forçados*.

Os agentes de atuação externa são quantidades físicas que passam do meio externo para o sistema por intermédio de uma interface imaginária. Conforme já foi dito, elas são consideradas independentes do sistema, ou seja, a existência e o comportamento delas não dependem do que ocorre no sistema.

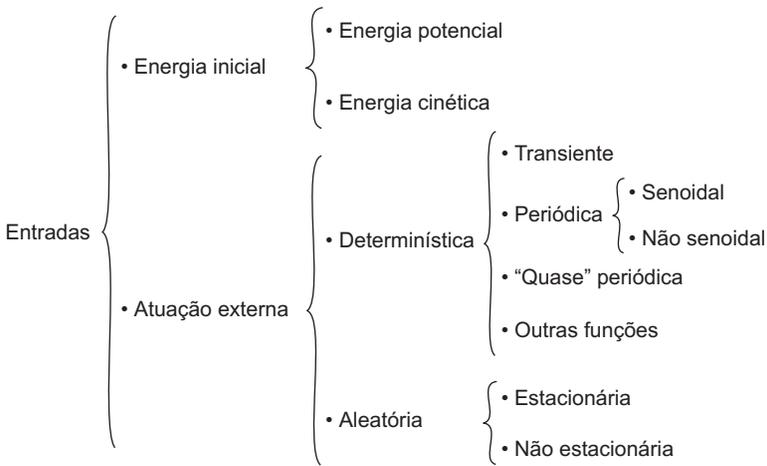


Figura 1.7 Classificação dos tipos de entradas.

Seguindo o esquema da Figura 1.7 observamos que os agentes de atuação externa estão classificados em *determinísticos* e *aleatórios*. Uma entrada é determinística quando ela pode ser expressa matematicamente como uma função do tempo. Como toda entrada real possui forma complexa com certo grau de “aleatoriedade” ou “imprevisibilidade”, considerar uma entrada como determinística é sempre uma simplificação da realidade. As entradas determinísticas podem ser classificadas em: *transientes* (ocorrem uma vez e depois desaparecem), *periódicas* (se repetem em um ciclo definido e idealmente sem parar no tempo), *quase periódicas* (funções que parecem ser periódicas – exemplo: amplitude modulada) e *outras funções* (funções

bem definidas matematicamente – exemplo: rampa, parábola, etc.). Por sua vez, uma entrada é *aleatória* quando sua história em relação ao tempo não pode ser prevista antes de a entrada realmente ocorrer. Portanto, quando trabalhamos com entradas aleatórias, não há a menor possibilidade de calcular a história específica em relação ao tempo antes de a entrada ocorrer de fato. Somente previsões estatísticas podem ser feitas, as quais são de grande utilidade na prática. É com base em suas propriedades estatísticas que uma entrada aleatória é classificada, pois, se as propriedades permanecerem constantes em função do tempo, temos uma entrada aleatória *estacionária*, caso contrário, é denominada *não estacionária*. Quando for possível considerar as propriedades estatísticas como invariáveis no tempo (sinal aleatório estacionário), podemos empregar tratamento matemático mais acessível.

1.7 – CLASSIFICAÇÃO DE MODELOS DE SISTEMAS

Em Engenharia, os resultados obtidos por meio da descrição matemática (modelos) dos sistemas reais sempre são diferentes daqueles obtidos por meio de cuidadosos ensaios experimentais. Isto ocorre devido às aproximações e hipóteses utilizadas no desenvolvimento do modelo. Assim, é claro que não há um único modelo matemático para o sistema real, mas vários, cada um com diferente grau de aproximação. O modelo depende até do ponto de vista do engenheiro. Por exemplo, para uma usina de açúcar, o engenheiro estrutural produzirá um modelo com equações de resistência dos materiais; o investidor de capital, equações de economia; o engenheiro químico, equações estequiométricas; e assim por diante.

Nos estágios iniciais de uma análise ou projeto, geralmente procuramos escolher modelos mais simples a fim de entender os fatores primordiais do sistema, sem esforço analítico excessivo. Isso significa fazer hipóteses simplificadoras. Sabemos que modelos mais simples produzem resultados menos precisos, entretanto, a imprecisão relativa desses modelos é aceita por conta da contrapartida desejável, que é a obtenção rápida da visualização dos aspectos importantes do sistema. À medida que os modelos mais simples, com suas limitações, se mostram inadequados, torna-se necessária a adição de efeitos e aspectos mais complicados à modelagem, com o objetivo de melhorar e aproximar os resultados ao comportamento real. Esse aumento planejado e gradual de complexidade dos modelos tem sido admitido como um método lógico e sistemático de tratar problemas complexos.

O fato de existirem vários modelos implica a necessidade de organizar para melhor visualizar as modelagens. É evidente que não há uma única maneira de classificar os modelos. A apresentada aqui deve ser considerada como um ponto de partida.

O primeiro passo é separar os modelos em dois grupos: os *analíticos* e os *computacionais*.

Modelos computacionais representam ferramentas avançadas, capazes de tratar não-linearidades; corpos de formas complexas, misturando variações discretas e contínuas das propriedades; e ainda funções do tempo e do espaço; portanto, produzem resultados bem próximos dos obtidos experimentalmente nos sistemas reais.

Os equipamentos e bens otimizados de alta tecnologia e de alto desempenho são projetados com o emprego desses modelos. Eles se configuram como um estágio avançado do desenvolvimento de projeto.

O objetivo deste livro está voltado aos fundamentos da Dinâmica de Sistemas, portanto, o foco aqui são os modelos analíticos básicos, com exceção do método de simulação digital apresentado no Apêndice C. Entendemos que, para formar um projetista, o aprendizado dos modelos analíticos deva ocorrer antes do emprego de modelos computacionais. Por isso, observaremos a classificação dos modelos analíticos.

A discussão dos tipos de modelos analíticos está fundamentada no exame dos tipos de equações, pois a diferença entre os tipos de modelos baseia-se na natureza das equações diferenciais.

Com o objetivo de estabelecer uma classificação de modelos analíticos com utilidade prática, adotamos o ponto de vista de engenharia em vez de matemático. Devemos também restringir o escopo e os detalhes, ou seja, incluir somente as classes importantes das equações normalmente utilizadas em aplicações práticas dentro da *Dinâmica de Sistemas*. Portanto, a ênfase aqui recai sobre as equações diferenciais *ordinárias*, assim como as *parciais*.

A classificação dos tipos de modelos analíticos apresentada na Tabela 1.1 baseia-se em hipóteses relativas à *natureza do meio* e na *variação, em função do tempo, dos parâmetros dos sistemas*. A apresentação em quadro facilita a comparação e a compreensão dos tipos de modelos. Os primeiros 24 tipos de modelos referem-se aos expressos por equações diferenciais parciais, enquanto os do 25 ao 30 são modelos expressos por equações diferenciais ordinárias.

A Tabela 1.1 mostra que *precisão e facilidade* têm direções opostas. A dificuldade na resolução das equações depende essencialmente das hipóteses simplificadoras adotadas pelo analista na dedução e obtenção do modelo matemático. Assim, modelos que reproduzem com grande aproximação o comportamento real envolvem poucas hipóteses simplificadoras. Por isso, esses modelos são matematicamente bastante complexos e exigem em suas resoluções a aplicação de técnicas matemáticas sofisticadas, quando for de fato possível resolvê-los.

Repetimos que a Tabela 1.1 refere-se à classificação de modelos analíticos porque os computacionais não seguem a mesma sistemática. Às vezes, para determinado problema, é muito mais fácil chegar à solução usando um modelo computacional com características do modelo tipo 20 do que resolver analiticamente as equações diferenciais do seu modelo tipo 30.

Tabela 1.1 Classificação dos tipos de modelos analíticos.*

Modelo tipo	Natureza do meio, conforme modelado								Variação dos parâmetros em função do tempo			
	Cont	Disc	Anis	Isot	N H	Hom	N L	Lin	Alea	Deter	Const	
1	x		x		x		x		x			
2	x		x		x		x			x		
3	x		x		x		x				x	
4	x		x		x			x	x			
5	x		x		x			x		x		
6	x		x		x			x			x	
7	x		x			x	x		x			
8	x		x			x	x			x		
9	x		x			x	x				x	
10	x		x			x		x	x			
11	x		x			x		x		x		
12	x		x			x		x			x	
13	x			x	x		x		x			
14	x			x	x		x			x		
15	x			x	x		x				x	
16	x			x	x			x	x			
17	x			x	x			x		x		
18	x			x	x			x			x	
19	x			x		x	x		x			
20	x			x		x	x			x		
21	x			x		x	x				x	
22	x			x		x		x	x			
23	x			x		x		x		x		
24	x			x		x		x			x	
25		x					x		x			
26		x					x			x		
27		x					x				x	
28		x						x	x			
29		x						x		x		
30		x						x			x	

↑
MAIS REALISTA
MAIS DIFÍCIL DE RESOLVER

↓
MENOS REALISTA
MAIS FÁCIL DE RESOLVER

Legenda:			
Cont = Contínuo Disc = Discreto Anis = Anisotrópico	Isot = Isotrópico N H = Não-Homogêneo Hom = Homogêneo	N L = Não-Linear Lin = Linear Alea = Aleatório	Deter = Determinístico Const = Constante

* Esta tabela não inclui a classificação de modelos computacionais, como, por exemplo, elementos finitos.

Os corpos físicos reais ocupam espaço tridimensional, assim, se o estudo inclui a resposta dinâmica, tornando o tempo uma variável independente, as incógnitas (saídas) dependerão de quatro variáveis independentes. Por exemplo, o movimento vibratório de uma estrutura depende da localização do ponto observado (coordenadas

x, y, z) e do instante em que é observado (variável tempo t). Áreas de Engenharia que no curso de graduação realizam modelagens “mais exatas” de problemas, como transferência de calor, mecânica dos fluidos e vibração, consideram o meio como contínuo. Para tais sistemas, as leis fundamentais consideram a matéria e a energia distribuídas continuamente em todo o espaço do sistema. Aplicando as leis físicas próprias ao problema e mantendo essa conceituação do meio contínuo, o modelo matemático resultante é expresso por equações diferenciais parciais, pois as saídas dependem das quatro variáveis independentes (x, y, z, t). Estes tipos de modelos são chamados modelos de campo ou modelos de parâmetros distribuídos, ou, ainda, modelos de sistemas contínuos. Na Tabela 1.1 eles estão numerados do 1 ao 24.

Os modelos matemáticos de sistemas contínuos podem ser classificados de acordo com hipóteses que levam em conta a *direcionalidade* das propriedades do meio, a *uniformidade* e a *linearidade*. Além das considerações quanto ao meio, os parâmetros podem variar ou ser constantes no tempo.

Quanto à *direcionalidade*, esta significa observar as propriedades do material nas diferentes direções de um ponto do corpo. Por exemplo, um ponto de um material fibroso pode apresentar as propriedades na direção das fibras diferentes daquelas na direção perpendicular às fibras. Neste caso, o material é chamado de *anisotrópico*, e quando possuem propriedades independentes da direção, de *isotrópicos*.

A *uniformidade* refere-se às propriedades de um ponto para outro. Por exemplo, a densidade pode variar de um ponto para outro e neste caso o material é chamado de *não homogêneo*. Quando uma propriedade não varia de ponto para ponto, o meio é chamado *homogêneo*, em relação àquela propriedade. Cabe ressaltar que um material pode ser homogêneo em um aspecto (por exemplo, densidade) e não homogêneo em outro (por exemplo, resistência à tração). Outro detalhe a ser destacado é que um material pode ser anisotrópico e homogêneo. Por exemplo, o material fibroso mencionado anteriormente. Se as propriedades se repetirem de ponto para ponto, ele é homogêneo.

A *linearidade* da natureza do meio refere-se ao tipo de relação matemática entre as variáveis, por exemplo, a relação entre a deformação de uma mola e a força aplicada sobre ela.

Quanto à variação em função do tempo dos parâmetros do sistema, temos três tipos: a variação *aleatória*, a *determinística* e a *constante*. Essa classificação significa que, além de os parâmetros variarem em função da direção e localização, eles podem também variar com o tempo.

No mundo real todos os parâmetros de um sistema variam de forma aleatória com o tempo em razão da influência das flutuações do meio ambiente (como, por exemplo, temperatura, umidade, pressão, etc.) ou de outros fatores. Felizmente, muitas

vezes as variações aleatórias dos parâmetros são bastante pequenas quando comparadas com as variações previsíveis (determinísticas) ou com um valor constante médio.

Quando desejamos modelagens mais simples (tipo 25 a 30), freqüentemente admitimos que as saídas não dependem da posição (coordenadas x, y, z) dentro da fronteira de uma parte (aqui chamada de elemento) ou mesmo de todo o sistema. Dessa forma, por hipótese, dentro de cada elemento não haverá variações, em relação à posição, das grandezas correspondentes às saídas, mas apenas em relação ao tempo. Portanto, podemos escolher apenas um ponto para a representação de cada elemento. O sistema fica, assim, representado por um número finito de elementos em relação à posição, isto é, sistemas discretos. Exemplificando, para os modelos do tipo 25 a 30, uma mola é um elemento discreto e nenhum efeito interno em função de coordenadas x, y e z é considerado.

Os modelos de sistemas discretos podem ser tomados como não-lineares (números 25 a 27) ou, por hipótese, como lineares (números 28 a 30). Os modelos matemáticos lineares são mais simples e podem apresentar, em muitas situações, resultados satisfatórios, se a não-linearidade do sistema real for relativamente “fraca”. Caso contrário, os modelos não-lineares devem ser utilizados e, quando não for possível obter soluções analíticas, métodos numéricos e simulações computacionais são ferramentas muito úteis.

Para ilustrar a utilização da Tabela 1.1 são dados dois exemplos dos tipos mais comuns.

(i) A equação de Euler para estudo de vibrações transversais de vigas:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m_x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (1.1)$$

em que:²

$E \triangleq$ módulo de elasticidade do material da viga;

$I \triangleq$ momento de inércia de área da seção transversal da viga;

$x \triangleq$ coordenada na direção do eixo longitudinal da viga;

$t \triangleq$ tempo;

$y \triangleq y(x, t) \triangleq$ deslocamento lateral (transversal) de um ponto da viga, na direção do eixo de coordenada y ;

2. O símbolo \triangleq significa por definição.

$m_x \triangleq$ massa da viga por unidade de comprimento;

$p \triangleq p(x,t) \triangleq$ carga distribuída sobre a viga, na direção de y , função de x e t .

Essa equação diferencial parcial foi obtida considerando os parâmetros geométricos constantes e as propriedades do material isotrópico, homogêneo e constante em relação ao tempo. Além disto, foram adotadas leis e relações lineares. A classificação desse modelo, segundo a Tabela 1.1, corresponde ao número 24.

(ii) Uma equação bastante conhecida e apresentada em inúmeros livros de Dinâmica é o modelo matemático do sistema massa–mola–amortecedor, equação 1.2. O esquema e as definições das grandezas estão na Figura 1.5.

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + K_s x = f \quad (1.2)$$

Neste modelo todos os elementos do sistema são considerados ideais. Isso quer dizer que a massa é rígida; a mola não possui massa e sua força é proporcional (linear) ao deslocamento; e o amortecedor também não possui massa e sua força é proporcional (linear) à velocidade. Como temos: (1) uma equação diferencial ordinária, (2) as relações entre as grandezas lineares e (3) todos os parâmetros constantes em função do tempo, o modelo dado pela equação 1.2 é do tipo número 30.

Voltando à discussão da Tabela 1.1, cabe observar um aspecto prático em relação aos modelos de números 1 a 24. Apesar de os modelos de equações diferenciais parciais geralmente serem mais precisos, eles têm sido analiticamente resolvidos somente para limitado número de casos, principalmente os da categoria 24, e para geometrias, entradas e condições de contorno simples. Por isso, muitas vezes, quando pretendemos resolver um problema prático, o método do meio contínuo é abandonado e a discretização é utilizada. Mesmo para modelagem discreta, muitas vezes não é possível encontrar solução analítica em razão das particularidades e não-linearidades da equação diferencial ordinária.

Como comentário final a respeito da Tabela 1.1, podemos dizer que o fundamento teórico atualmente existente da maioria das *análises* recai (e provavelmente sempre recairá) nas equações diferenciais parciais do tipo 24 e nas equações diferenciais ordinárias, lineares, com coeficientes constantes do tipo 30. Essas equações, particularmente as ordinárias, são as únicas com complexidade que podem ser estendidas para o tratamento de sistemas grandes, para os quais conseguimos prever analiticamente seus comportamentos de maneira sistemática e rotineira. É evidente que, para obter soluções específicas de problemas específicos (ao contrário de desenvolver uma teoria unificada fundamental), podemos sempre esperar progresso contínuo nas resoluções numéricas por computador. Esses métodos podem ser aplicados a todas as classes de modelos da Tabela 1.1, reduzindo todos os problemas aos modelos do

tipo discreto. Computadores grandes e rápidos juntos com métodos de discretização cada vez mais sofisticados podem produzir resultados extremamente precisos. Contudo, ter a capacidade para realizar tais análises não significa que elas devam ser automaticamente utilizadas. O julgamento prático será sempre indispensável na decisão de quão preciso um resultado se faz realmente necessário, se a demanda de tempo é possível e se o custo da metodologia pode ser economicamente justificado.

CONCEITOS BÁSICOS DE MODELAGEM

2.1 – INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta uma explicação sobre a estrutura básica de modelagem matemática, tendo por objetivo caracterizar a organização dos procedimentos fundamentais de modelagem.

É comum o iniciante sentir-se confuso nos primeiros estudos sobre o desenvolvimento e a obtenção de modelos. Em decorrência da falta de informação sobre a estrutura da modelagem, geralmente ele procura memorizar os passos e as passagens matemáticas. Adotando essa atitude errada, fica difícil aprender a fazer modelagem.

Quando observamos uma modelagem, o importante é assimilar a essência dos procedimentos, pois o encaminhamento das passagens matemáticas, de uma forma ou outra, sempre chega ao resultado. Com essa estratégia, um estudante ou engenheiro cada vez mais vai captando a estrutura dos procedimentos, adquirindo confiança e iniciativa para realizar sua própria modelagem.

A metodologia de estudo adotada aqui é: APRENDE-SE A MODELAR MODELANDO. Esta é a idéia que este capítulo pretende atender. Apresentar de imediato o esqueleto mínimo de modelagem para no Capítulo 3 iniciar a elaboração e obtenção dos modelos. Salientamos que o objetivo é mostrar a estrutura para o desenvolvimento de modelos do tipo 30 (vide Tabela 1.1).

2.2 – “PARTES” DE UMA MODELAGEM

As modelagens possuem fundamentalmente quatro “partes”:

- (i) hipóteses;
- (ii) aplicação de leis básicas do conhecimento científico;
- (iii) relações entre as variáveis;
- (iv) validação do modelo.

Na maioria das vezes as três primeiras “partes” não se apresentam separadas, mas sim mescladas. Contudo, uma modelagem sempre se inicia pela primeira “parte”, as hipóteses.

O conjunto de *hipóteses* é uma “parte” muito importante da modelagem. Geralmente as hipóteses são utilizadas para simplificar as soluções matemáticas. Em

certas situações elas também são declaradas para que a modelagem resulte em modelos padronizados. Alguns sistemas são chamados de padronizados porque já foram intensamente estudados e seus comportamentos são bem conhecidos.

Em geral, hipóteses simplificadoras permitem obter resultados, embora menos precisos, em menor tempo.

O analista deve enunciar as hipóteses com bastante critério, com bom embasamento científico e de acordo com os interesses do estudo do sistema. O modelo e sua resposta dependem das hipóteses. Com hipóteses que significam aproximações grosseiras, a resposta advinda da modelagem será completamente distinta do comportamento do sistema real, tornando a modelagem sem serventia.

Na maioria das vezes, experiências passadas auxiliam de forma bastante significativa a entender e a ter melhor visão das considerações para que as hipóteses sejam estabelecidas. Devemos lembrar que o tipo de modelo depende das hipóteses, conforme citado no Capítulo 1, seção 1.5.

As duas “partes” seguintes, aqui separadas, usualmente são desenvolvidas em conjunto, como sendo única. Neste texto a idéia é modificar o procedimento comum e adotar uma estrutura um pouco diferente.

A metodologia tradicional usa o raciocínio de que um modelo é caracterizado por determinado número de variáveis e para ter solução matemática definida deverá ser montado igual número de equações, o que vai exigir o emprego das leis básicas em número suficiente para montar todas as equações, portanto, um modelo tem tantas equações quantas forem as variáveis.

Entendemos que a estrutura da modelagem torna-se mais compreensível quando dividida em duas “partes”: em aplicação de leis básicas e relações.

Assim, a “segunda parte” caracteriza-se pela *aplicação de leis básicas* e é responsável pela geração das equações do modelo. Um modelo tem tantas equações quantas vezes forem aplicadas as Leis. Por exemplo, se a Segunda Lei de Newton for aplicada duas vezes e a Conservação da Massa, uma vez, então, o modelo desse sistema tem três equações.

Na estrutura da modelagem aqui adotada classificamos as expressões matemáticas em *equações* e *relações*. As equações são geradas pelas Leis e todas as demais expressões que estabelecem funções entre as grandezas são chamadas de relações.

Exemplificando, no sistema massa–mola–amortecedor da Figura 1.5, considerando a massa M rígida e a mola e o amortecedor com massas desprezíveis, aplicamos a Lei de Newton uma só vez; portanto, o modelo tem uma só equação. As demais expressões matemáticas são relações. Temos uma relação para a mola, que estabelece o valor da força sobre o corpo em função do deslocamento da massa M ,

e uma outra relação para o amortecedor, que fornece o valor da força sobre o corpo em função da velocidade de M .

É exatamente neste ponto que o aprendizado e o acompanhamento da modelagem podem se tornar confusos, quando a metodologia tradicional é adotada. A mistura das equações com as relações, proporcionada pelo tratamento equitativo de ambos os grupos, pode causar a perda do domínio da modelagem e da orientação do manuseio matemático.

É necessário observar a organização da modelagem sob outro ponto de vista. Um modelo matemático do tipo **30** é sempre formado por dois conjuntos de expressões matemáticas: (i) o conjunto de equações advindas das aplicações das Leis; e (ii) o conjunto de relações. Inserindo as relações nas equações, por manuseio matemático, o sistema de equações é ajustado para ter a quantidade de incógnitas igual ao número de equações. Nesta situação o sistema de equações pode ser resolvido. A Figura 2.1 mostra um fluxograma para ilustrar esse processo.

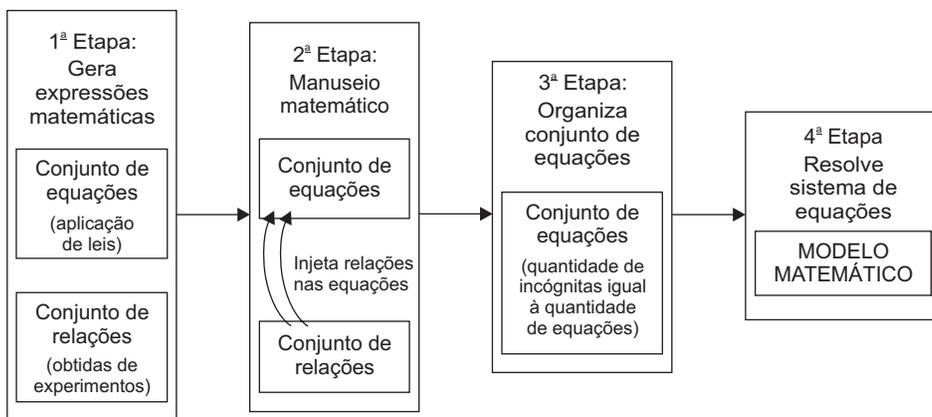


Figura 2.1 Fluxograma da organização do trabalho com as expressões matemáticas para obter um modelo do tipo **30**.

Após o trabalho de obtenção do modelo entramos na quarta “parte”, que é a *validação*, processo em que a modelagem é verificada por comparação com o comportamento do sistema real modelado, usando processo experimental. Uma modelagem realmente só termina após a verificação experimental.

Muitas vezes não é viável a realização de medições em sistemas reais (pode ser que ele nem exista), então a construção de bancadas experimentais torna-se necessária. De qualquer forma, quer façamos medições no sistema real, quer em bancadas, a validação pode implicar altos custos decorrentes da compra de equipamentos e da demanda de tempo de pessoas especializadas em experimentos.

A resposta teórica do modelo sempre será uma aproximação do comportamento do sistema real, assim, a tarefa de validação compreende a comparação dos resultados e o julgamento se as discordâncias são aceitáveis.

Dependendo da aplicação prática ou do estágio do desenvolvimento do projeto, podemos admitir tolerância maior ou menor das diferenças. Diante dessa constatação, temos de admitir que cada caso representa uma situação particular, não sendo possível generalizar a tolerância do erro para estabelecer, a priori, o que é aceitável ou não.

Agora vamos voltar ao contexto geral que se refere ao conjunto das quatro “partes” de uma modelagem. Geralmente, elas aparecem organizadas de forma seqüencial (não necessariamente rigorosa) em relatórios técnicos, artigos científicos e materiais didáticos. Na maioria das vezes as modelagens reportadas têm seu desenvolvimento com base em um modelo físico esquemático.

Se a modelagem for de um sistema real, o trabalho é muito mais amplo e outras partes e operações acabam sendo envolvidas. A própria tarefa de passar do sistema real para o modelo físico esquemático pode representar trabalho árduo e complexo. Por exemplo, o vínculo de uma simples barra soldada a uma viga pode ser interpretado como um **engastamento fixo** ou como uma barra ligada à viga por meio de uma mola com coeficiente correspondente à elasticidade da solda. Essas duas interpretações proporcionam esquemas físicos diferentes.

Outra característica do processo de modelagem de sistemas reais refere-se à existência de realimentações. Constantemente voltamos ao laboratório ou a campo para novos experimentos e também a estágios anteriores do desenvolvimento analítico ou computacional.

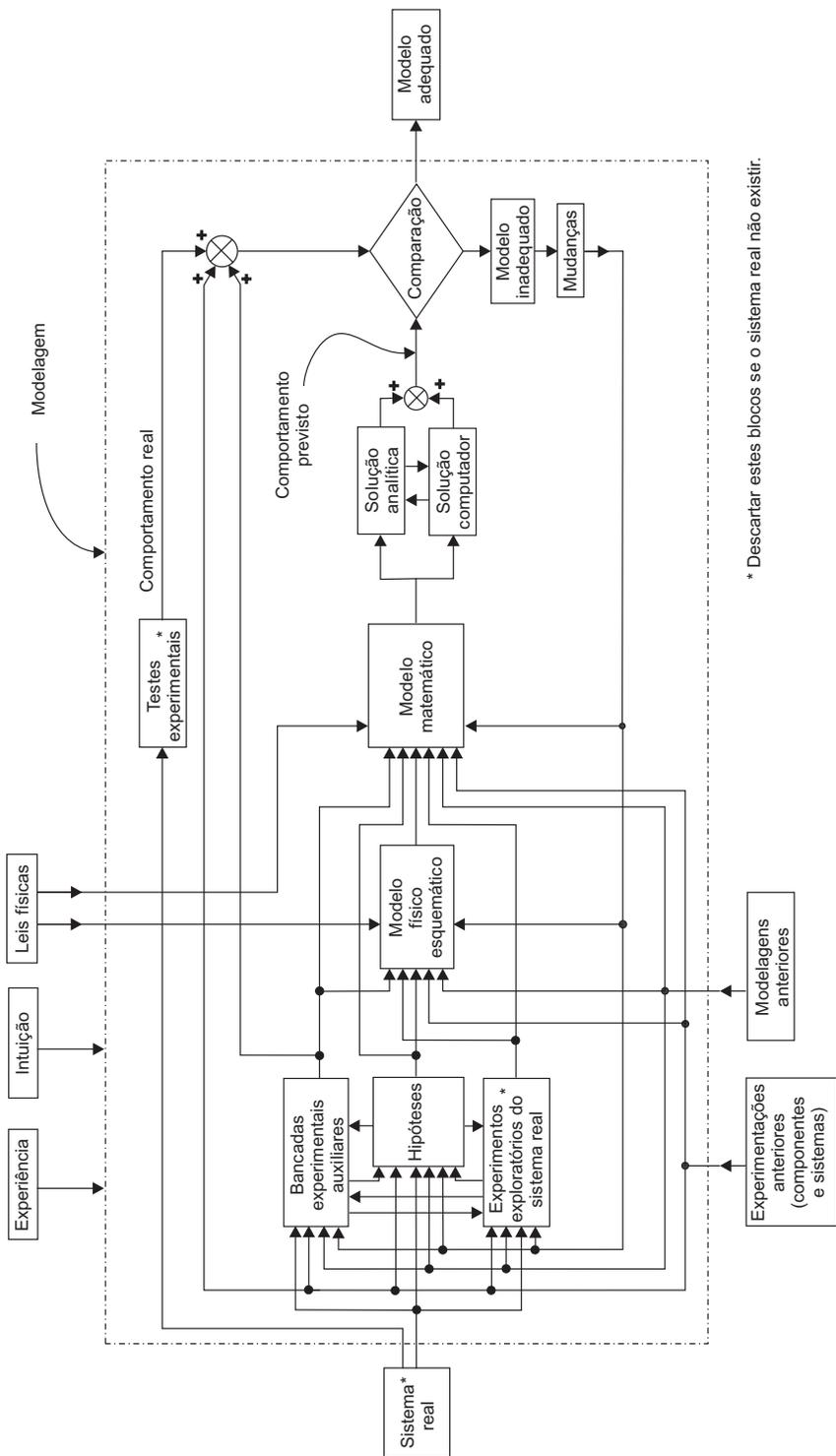
Na Figura 2.2 são retratadas, de maneira geral, as partes e tarefas da modelagem de um sistema real ou, se este não existir, as tarefas encontradas na modelagem de um novo sistema.

As seções seguintes discutem a primeira, a segunda e a terceira “parte” da modelagem. Exemplos ilustrando modelagens com aplicações das Hipóteses, Leis e Relações Básicas são apresentados nos capítulos seguintes.

2.3 – LEIS BÁSICAS

Para o desenvolvimento dos modelos dinâmicos utilizaremos quatro leis:

- Lei de Newton;
- Lei de Kirchhoff;
- Lei da Conservação da Massa; e
- Lei da Conservação da Energia.



* Descartar estes blocos se o sistema real não existir.

Figura 2.2 Fluxograma ilustrando as etapas do processo geral de uma modelagem de um sistema real/projeto.

Como o objetivo é a obtenção de modelos do tipo **30**, as leis básicas podem receber simplificações apropriadas e seus enunciados ficam conforme apresentados a seguir.

2.3.1 – SEGUNDA LEI DE NEWTON

A Segunda Lei de Newton é aplicada a cada massa rígida do sistema.

A Lei de Newton aqui enunciada está restrita a uma só coordenada linear e uma só angular. Portanto, na translação o corpo terá movimento em uma só direção e na rotação, ao redor de um só eixo. Estamos supondo que estas condições foram estabelecidas pelos vínculos que prendem o corpo, construídos adequadamente para permitir somente tais movimentos.

Assim, para um *ponto* ou um *corpo rígido* de massa m em translação temos:

$$\sum F = m\ddot{x} \quad (2.1)$$

em que:

$\sum F \triangleq$ somatória das forças externas que atuam sobre o corpo, na direção x ;

$x \triangleq$ deslocamento do corpo na direção x ;

$\ddot{x} \triangleq \frac{d^2x}{dt^2} \triangleq$ aceleração do corpo na direção x .

A equação 2.1 incorpora uma convenção de sinais intrínseca e preestabelecida. Essa convenção é universalmente aceita e adotada por todos do meio científico, portanto, é aqui recomendada. Ela considera que o **sentido positivo** escolhido para o **deslocamento** seja igual ao **sentido positivo** adotado para as **forças** que atuam **sobre** o ponto. Muitas vezes, ocorre de as pessoas usarem a Lei de Newton durante anos e nunca perceberem este detalhe, pois ele é implícito. Em modelagem a situação é diferente, pois os sentidos positivos são adotados.

A aceleração, a velocidade e o deslocamento estão relacionados por derivações, que são operações que não invertem o sentido de referência. Se a velocidade for positiva, isso significa que o deslocamento é crescente no sentido positivo. Idem para a aceleração; se esta for positiva, a velocidade é crescente no sentido positivo. Se a aceleração, a velocidade e o deslocamentos estão presos ao mesmo sentido positivo de referência, a força também tem de estar. De acordo com a equação 2.1, em que a massa é positiva, se a aceleração for positiva, matematicamente a força resultante tem de ser positiva. Por outro lado, em modelagem os sentidos podem ser adotados arbitrariamente no início dos trabalhos. Por isso, devemos estar atentos e adotar os

sentidos do deslocamento e da força concordantes para que tenhamos força positiva gerando aceleração positiva.

Agora, considerando outro tipo de movimento, se o corpo tem movimento de rotação em torno de um *eixo* e se I for o momento de inércia do corpo em relação a este eixo de rotação, então a Lei de Newton (Newton-Euler) fica:

$$\sum M = I\ddot{\theta} \quad (2.2)$$

em que:

$\sum M \triangleq$ somatória dos momentos externos que atuam sobre o corpo, calculado em relação ao eixo de rotação;

$\theta \triangleq$ deslocamento angular do corpo;

$\ddot{\theta} \triangleq \frac{d^2\theta}{dt^2} \triangleq$ aceleração angular do corpo.

A convenção de sinal estabelecida para a equação 2.2 segue critério análogo ao do movimento linear. O sentido positivo escolhido para o deslocamento angular deve ser exatamente o mesmo sentido positivo para os momentos que atuam sobre o corpo.

2.3.2 – LEI DE KIRCHHOFF

Na verdade há duas Leis de Kirchhoff, as quais são aplicadas aos circuitos elétricos, denominadas:

- Lei das Malhas; e
- Lei dos Nós.

A Lei das Malhas e a Lei dos Nós são também chamadas de Lei das Tensões e Lei das Correntes, respectivamente.

A aplicação de uma ou ambas as leis depende das características do circuito elétrico. Geralmente aplicamos a Lei dos Nós quando o circuito tem fontes de corrente ou um elemento ativo, como, por exemplo, um amplificador operacional. Em muitos circuitos utilizamos a Lei das Malhas.

Seguem abaixo as descrições dessas leis.

a) Lei das Malhas

Esta Lei de Kirchhoff é aplicada a cada malha do circuito sob análise. Ela pode ser expressa da seguinte forma:

“Em qualquer instante de tempo, a somatória das quedas de tensões ao redor de uma malha deve ser zero”.

A convenção de sinal geralmente adotada considera que as *quedas de tensões* têm sinais *positivos* e os *aumentos de tensões*, sinais *negativos*. A queda de tensão ocorre quando vamos de uma extremidade a outra de um elemento passivo (por exemplo, uma resistência) no sentido que coincide com o sentido previamente adotado como positivo para a corrente elétrica que passa por este respectivo elemento. Se em determinado elemento passivo o percurso for no sentido contrário ao sentido positivo da corrente, temos então aumento de tensão e este tem sinal negativo. O mesmo critério é aplicado quando temos fontes de tensão. Se, no percurso, de uma extremidade a outra há aumento de tensão, este também tem o sinal negativo. Assim, conforme percorremos os ramos da malha, vamos computando as quedas e aumentos das tensões até retornarmos ao ponto inicial. Como saímos de um ponto e retornamos ao mesmo ponto, é evidente que a *somatória* dos aumentos e das quedas de tensões será nula.

b) Lei dos Nós

Esta Lei de Kirchhoff é aplicada a cada nó do circuito sob análise. Seu enunciado é:

“Em qualquer instante de tempo, a somatória algébrica das correntes que entram e saem de um nó é zero”.

As correntes que entram em um nó são consideradas positivas e as que saem, negativas.

2.3.3 – LEI DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

A Lei da Conservação da Massa é muitas vezes chamada de “Balanço de Massa” ou “Equação da Continuidade”. A lei é enunciada usando o conceito de *volume de controle*, que é uma região do espaço estabelecida por uma fronteira imaginária chamada de *superfície de controle*, com forma e tamanho arbitrários. Um sistema pode ter inúmeros volumes de controle, por exemplo, um circuito hidráulico.

Segundo a Lei da Conservação da Massa, em um intervalo de tempo, a massa que entra no volume de controle menos a massa que sai é igual à massa que fica acumulada no volume de controle. Tecnicamente esta pode ser expressa conforme abaixo, tal que em “taxa líquida” a palavra *líquida* não se refere ao estado da matéria, mas a balanço. Assim:

$$\left[\begin{array}{l} \text{A taxa líquida de massa} \\ \text{transportada para dentro do} \\ \text{volume de controle, no instante } t \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{A taxa de variação de massa dentro} \\ \text{do volume de controle, no instante } t \end{array} \right]$$

Matematicamente, em termos de *descarga* (massa por unidade de tempo) podemos escrever:

$$\sum_{j=1}^n (\dot{m}_i)_j - \sum_{r=1}^k (\dot{m}_o)_r = \frac{dm_s}{dt} \quad (2.3)$$

em que:

$\dot{m}_i \triangleq$ descarga que entra no volume de controle;

$j \triangleq$ numeração de uma descarga que entra no volume de controle;

$\sum_{j=1}^n (\dot{m}_i)_j \triangleq$ somatória de todas as n descargas que entram no volume de controle;

$\dot{m}_o \triangleq$ descarga que sai do volume de controle;

$r \triangleq$ numeração de uma descarga que sai do volume de controle;

$\sum_{r=1}^k (\dot{m}_o)_r \triangleq$ somatória de todas as k descargas que saem do volume de controle;

$\frac{dm_s}{dt} \triangleq$ variação, em função do tempo, da massa acumulada no volume de controle.

Em sistemas que utilizam fluido (geralmente líquido), em que é possível considerar a hipótese de que a variação da massa específica é desprezível (fluido incompressível), a conservação da *massa* pode ser descrita matematicamente em função do *volume*. Desta forma, a equação 2.3 fica:

$$\sum_{j=1}^n (Q_i)_j - \sum_{r=1}^k (Q_o)_r = \frac{dV_s}{dt} \quad (2.4)$$

em que:

$Q_i \triangleq$ vazão que entra no volume de controle;

$Q_o \triangleq$ vazão que sai do volume de controle;

$\frac{dV_s}{dt} \triangleq$ variação, em função do tempo, do volume de fluido acumulado no volume de controle.

A equação 2.4 é facilmente obtida pela equação 2.3. A relação entre Descarga e Vazão, assim como entre Massa e Volume, é a massa específica (ρ). Como existe a hipótese de que a massa específica é praticamente constante, a divisão de todos os termos da equação 2.3 pela massa específica ρ fornece a equação 2.4.

Considerações mais avançadas relativas à equação 2.4 serão discutidas no estudo de sistemas hidráulicos (óleo) apresentado no Capítulo 9. O aprofundamento torna-se necessário principalmente por dois fatores: a compressibilidade do óleo e a possível variação de volume, como, por exemplo, o volume da câmara de um cilindro com a haste em movimento.

2.3.4 – LEI DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

A Lei da Conservação da Energia é diretamente ligada às Leis da Termodinâmica e envolve grandezas como energia interna, entalpia, trabalho, etc.

Nas modelagens básicas, como as aqui desenvolvidas, consideramos sistemas em condições mais simples, ou seja, aqueles que não trocam trabalho, não sofrem mudanças de fase nem reações químicas e não apresentam movimentação de massa de fluido, entrando ou saindo. De certa forma, a Lei da Conservação da Energia fica aqui restrita à transferência de calor e às variações de temperatura de um sistema com massa fixa.

Diante das considerações simplificadoras, a Lei da Conservação da Energia pode ser expressa conforme segue. Repetimos que em “taxa líquida” a palavra *líquida* refere-se a balanço. Assim:

$$\left[\begin{array}{l} \text{A taxa líquida de energia} \\ \text{transportada para dentro do} \\ \text{volume de controle, no instante } t \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{A taxa de variação de energia dentro} \\ \text{do volume de controle, no instante } t \end{array} \right]$$

A Lei da Conservação da Energia assim considerada refere-se à taxa de transferência de calor que significa energia por unidade de tempo, portanto, tem unidade de potência.

2.4 – RELAÇÕES BÁSICAS UTILIZADAS

2.4.1 – SISTEMAS MECÂNICOS

a) Mola Linear

A denominação “mola linear” significa que a relação entre a força da mola e sua deformação é linear.

Em muitas modelagens consideramos *ideais* as molas que são lineares, sem massa e sem nenhum efeito de perda de energia. É evidente que as molas reais têm massa, não são completamente lineares e também dissipam energia. As curvas de

algumas molas estão longe de ser uma reta, por exemplo, uma mola de prato,¹ cuja curva típica da força contra deformação está na Figura 2.3.

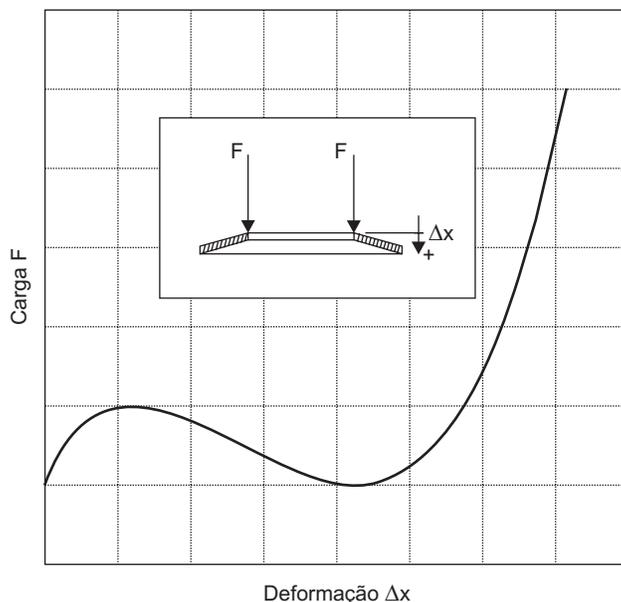


Figura 2.3 A mola de prato tem uma curva não linear que relaciona a Força contra a sua Deformação.

Muitas molas têm comportamento bastante próximo da mola ideal. Contudo, mesmo para estas o seu modelo será adequado somente dentro de certo intervalo de valores de força e deslocamento (deformação). Sob o ponto de vista exclusivamente matemático, o modelo não tem limitações de força nem de deslocamento, mas no mundo real sim. Por exemplo, um alto valor da força de compressão pode acabar esmagando a mola. Cabe ao analista a responsabilidade de observar o intervalo de validade do modelo, inclusive verificar se a massa é desprezível.

Os modelos do tipo 30 utilizam dois tipos de molas: *molas de translação* e *molas de rotação*.

As molas de translação têm suas extremidades efetuando deslocamentos lineares, enquanto nas de rotação as extremidades realizam deslocamentos angulares. Estas denominações não são de uso comum na prática, pois as molas de translação são simplesmente chamadas de *molas* e as de rotação, de *molas torcionais*.

Para uma mola linear ideal, conforme ilustrada na Figura 2.4, o modelo é dado pelas expressões:

1. Na literatura americana esta mola é chamada de *Belleville Spring*.

$$F_1 = -K_s(x_1 - x_2) \quad (2.5)$$

$$F_2 = -K_s(x_2 - x_1) \quad (2.6)$$

em que:

x_1 e $x_2 \triangleq$ deslocamentos lineares, respectivamente, das extremidades 1 e 2 da mola, ambos com o mesmo sentido positivo. A diferença $(x_2 - x_1)$ é a deflexão da mola.

$K_s \triangleq$ coeficiente da mola, considerado constante;

$F_1 \triangleq$ força da mola sobre o corpo que está acoplado na extremidade 1 da mola. O sentido da força F_1 é positivo no mesmo sentido positivo dos deslocamentos x_1 e x_2 ;

$F_2 \triangleq$ força da mola sobre o corpo que está acoplado na extremidade 2 da mola. O sentido da força F_2 é positivo no mesmo sentido positivo dos deslocamentos x_1 e x_2 .

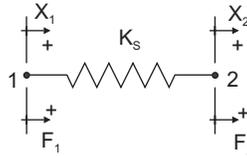


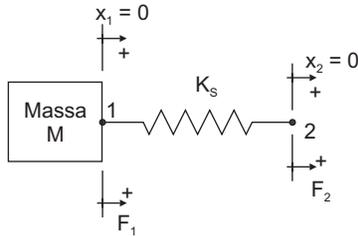
Figura 2.4 Representação esquemática de uma mola cujas extremidades têm movimentos de translação.

Há padronização nas expressões da modelagem da mola, equações 2.5 e 2.6. As relações seguem o mesmo formato tanto para a força na extremidade 1 como para a força na extremidade 2. Se queremos a força da mola sobre o corpo conectado na extremidade 1, força F_1 , o deslocamento daquela respectiva extremidade vem primeiro, isto é, escrevemos a diferença: $x_1 - x_2$. No caso da força F_2 , que ocorre na extremidade 2, temos a diferença: $x_2 - x_1$.

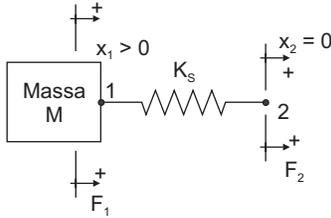
É importante observar se o modelo de fato funciona de acordo com o mundo real. Isso pode ser verificado por meio de interpretações de situações simuladas.

Vamos supor a situação dada na Figura 2.5b, em que temos a condição: $x_1 > 0$ e $x_2 = 0$.

Lembrando do funcionamento real de uma mola, sabemos que, ao ser comprimida, conforme a Figura 2.5b, sua força sobre a massa M será para a esquerda. No mundo real, se a força for para a esquerda, a aceleração decorrente dessa força também será para a esquerda.



a) Condição inicial em repouso com F_1 e F_2 nulas.



b) Neste instante, o ponto 1 está deslocado para a direita.

Figura 2.5 Esquema ilustrando a condição: $x_1 > 0$ e $x_2 = 0$.

Agora vamos observar o modelo. Consideramos os sentidos de F_1 , x_1 , \dot{x}_1 e \ddot{x}_1 positivos para a direita, Figura 2.5. Se temos a deformação x_1 positiva, a aceleração calculada teoricamente pelo modelo precisa resultar em valor negativo para ficar de acordo com o funcionamento real da mola. Matematicamente isto se verifica, pois:

$$\sum F = M \ddot{x}_1 \quad (2.7)$$

E como temos somente uma força, então:

$$\sum F = F_1 \quad (2.8)$$

Do modelo da mola vem:

$$F_1 = -K_s x_1 \quad (2.9)$$

Combinando (2.8) e (2.9) e substituindo em (2.7) obtemos:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{K_s}{M} x_1 \quad (2.10)$$

Como K_s e M são positivos e na situação da Figura 2.5b temos $x_1 > 0$, então, $\ddot{x}_1 < 0$, o que retrata o comportamento real da mola.

Também podemos fazer o teste para outros casos, como: ($x_1 < 0$; $x_2 = 0$), ($x_1 = 0$; $x_2 > 0$) e ($x_1 = 0$; $x_2 < 0$).

Se os testes forem realizados veremos que os modelos funcionam tanto para F_1 como para F_2 . Logo, os sinais negativos das equações 2.5 e 2.6 estão de acordo com o comportamento que ocorre no mundo real. Em outras palavras, se a força tiver determinado sentido, a aceleração decorrente daquela força ocorre naquele mesmo sentido.

Vamos agora considerar a mola torcional, conforme ilustra a Figura 2.6.

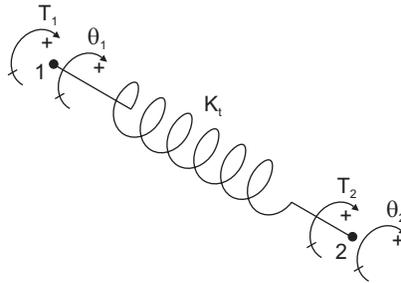


Figura 2.6 Representação esquemática de uma mola torcional cujas extremidades têm deslocamentos angulares.

Para essa mola, seu modelo é dado pelas expressões:

$$T_1 = -K_t(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.11)$$

$$T_2 = -K_t(\theta_2 - \theta_1) \quad (2.12)$$

em que:

θ_1 e $\theta_2 \triangleq$ deslocamentos angulares, respectivamente, das extremidades 1 e 2 da mola, ambos com o mesmo sentido positivo. A diferença $(\theta_2 - \theta_1)$ é a deflexão angular da mola;

$K_t \triangleq$ coeficiente da mola torcional, considerado constante;

$T_1 \triangleq$ torque da mola sobre o corpo que está acoplado na extremidade 1 da mola. O sentido do torque T_1 é positivo no mesmo sentido positivo dos deslocamentos angulares θ_1 e θ_2 ;

$T_2 \triangleq$ torque da mola sobre o corpo que está acoplado na extremidade 2 da mola. O sentido do torque T_2 é positivo no mesmo sentido positivo dos deslocamentos angulares θ_1 e θ_2 .

A padronização das expressões da modelagem dessa mola segue o mesmo raciocínio da mola de translação.

O funcionamento do modelo da mola de acordo com o mundo real também se verifica, com base nas definições dos sentidos positivos dos torques e dos

deslocamentos angulares. Isto é, torques positivos causarão acelerações angulares positivas.

b) Amortecedor Linear

É aquele que tem sua força proporcional à diferença das velocidades das suas extremidades.

Nas modelagens desenvolvidas para modelos tipo **30** consideraremos amortecedores lineares, sem massa e sem nenhum efeito de elasticidade (mola), portanto, amortecedores *ideais*.

De maneira similar às molas, os amortecedores podem ser de dois tipos: de translação e de rotação (torcional).

Para um amortecedor linear de translação, conforme o esquema da Figura 2.7, seu modelo é:

$$F_1 = -B (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (2.13)$$

$$F_2 = -B (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (2.14)$$

em que:

\dot{x}_1 e $\dot{x}_2 \triangleq$ velocidades, respectivamente, das extremidades *1* e *2* do amortecedor, ambas com o mesmo sentido positivo;

$B \triangleq$ coeficiente do amortecedor, considerado constante;

$F_1 \triangleq$ força do amortecedor sobre o corpo que está acoplado na extremidade *1* do amortecedor. O sentido da força F_1 é positivo no mesmo sentido positivo das velocidades \dot{x}_1 e \dot{x}_2 ;

$F_2 \triangleq$ força do amortecedor sobre o corpo que está acoplado na extremidade *2* do amortecedor. O sentido da força F_2 é positivo no mesmo sentido positivo das velocidades \dot{x}_1 e \dot{x}_2 .

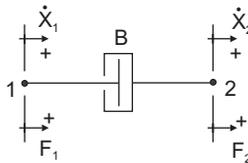


Figura 2.7 Representação esquemática de um amortecedor linear cujas extremidades têm movimentos de translação.

Se o amortecedor for torcional linear, temos um esquema conforme a Figura 2.8.

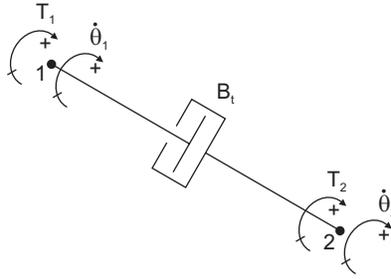


Figura 2.8 Representação esquemática de um amortecedor torcional cujas extremidades têm deslocamentos angulares.

Neste caso, seu modelo é dado pelas expressões:

$$T_1 = -B_t (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \quad (2.15)$$

$$T_2 = -B_t (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \quad (2.16)$$

em que:

$\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2 \triangleq$ velocidades angulares, respectivamente, das extremidades *1* e *2* do amortecedor, ambos com o mesmo sentido positivo;

$B_t \triangleq$ coeficiente do amortecedor torcional, considerado constante;

$T_1 \triangleq$ torque do amortecedor sobre o corpo que está acoplado na extremidade *1* do amortecedor. O sentido do torque T_1 é positivo no mesmo sentido positivo das velocidades angulares $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$;

$T_2 \triangleq$ torque do amortecedor sobre o corpo que está acoplado na extremidade *2* do amortecedor. O sentido do torque T_2 é positivo no mesmo sentido positivo das velocidades angulares $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$;

A padronização das expressões matemáticas dos modelos dos amortecedores de translação e torcional segue o mesmo critério utilizado para as molas. Temos o sinal negativo na relação e o primeiro termo da subtração é a velocidade (linear ou angular) da extremidade considerada. Os sinais negativos presentes nos modelos são necessários para concordar com o que verificamos na prática, seguindo as definições dos sentidos positivos das forças e das velocidades lineares e dos torques e das velocidades angulares. Em outras palavras, forças e torques positivos causarão acelerações lineares e angulares positivas, respectivamente.

Um aspecto importante refere-se ao comportamento real das molas e dos amortecedores. No mundo real, a grande maioria das molas tem comportamento

bem próximo do linear, enquanto para amortecedores é comum o comportamento não-linear, podendo a força ou torque do amortecedor ser uma função polinomial da velocidade.

2.4.2 – SISTEMAS ELÉTRICOS

a) Resistência Linear

Quando uma corrente elétrica passa através de um elemento, sempre aparecem efeitos resistivos, capacitivos e indutivos. Esses efeitos se apresentam com diferentes intensidades, dependendo das circunstâncias, dos materiais e dos detalhes construtivos. Se ambos os efeitos capacitivos e indutivos forem desprezíveis, então temos o que chamamos de *resistência pura*.

Resistência pura linear (ideal) é um elemento cuja queda de tensão elétrica de uma extremidade a outra é proporcional à corrente elétrica. Na prática esta denominação (resistência pura linear) não é usada, mas somente a palavra “resistência”. Ficam implícitas as características de considerarmos somente o efeito resistivo e também a linearidade.

Para a resistência esquematizada na Figura 2.9, seu modelo é:

$$e = R i \quad (2.17)$$

em que:

$e \triangleq$ queda de tensão quando vamos de uma extremidade a outra do resistor, no sentido positivo da corrente (neste caso, do ponto 1 ao ponto 2). É o potencial elétrico do ponto 1 menos o potencial elétrico do ponto 2;

$R \triangleq$ coeficiente da resistência elétrica, considerado constante;

$i \triangleq$ corrente elétrica. Considerada positiva se ela ocorrer no mesmo sentido previamente adotado como positivo, indicado pela seta, Figura 2.9.

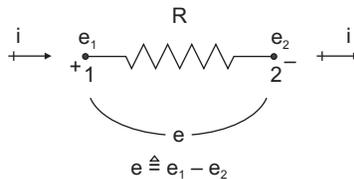


Figura 2.9 Representação esquemática de um resistor elétrico.

Sabemos que a resistência elétrica varia com a temperatura e também com sua deformação mecânica. Essas duas características são até utilizadas em sistemas de medidas, a primeira para medir temperatura e a segunda (extensômetro elétrico) para medir deslocamentos e deformações mecânicas de peças.

Felizmente, em muitos circuitos a variação de R é desprezível, e nessas situações a hipótese de considerá-la constante resultará em boa aproximação.

b) Capacitor Puro

Quando dois condutores estão separados e entre eles há um material não condutor (isolante ou dielétrico), temos a configuração de um capacitor.

Entendemos por capacitor puro aquele elemento que possui somente efeito capacitivo, sendo sua resistência e indutância nulas. Sua representação está ilustrada na Figura 2.10.

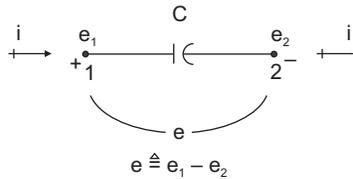


Figura 2.10 Representação esquemática de um capacitor puro.

O modelo do capacitor puro linear (ideal) é dado pela expressão:

$$e = \frac{1}{CD} i \quad (2.18)$$

em que:

$e \triangleq$ queda de tensão quando vamos de uma extremidade a outra do capacitor, no sentido positivo da corrente (neste caso, do ponto 1 ao ponto 2);

$C \triangleq$ capacitância, considerada constante;

$i \triangleq$ corrente elétrica. Considerada positiva se ela ocorrer no mesmo sentido previamente adotado como positivo, indicado pela seta, Figura 2.10;

$D \triangleq \frac{d}{dt} \triangleq$ operador derivador (note que $\frac{1}{D}$ é integrador).

O operador D é uma transformação linear que leva uma função à sua derivada. Se for elevado a um expoente n ($n > 0$), significa a n -ésima derivada. No caso do expoente ser negativo igual a $-m$ ($m > 0$), temos integrações. Matematicamente escrevemos:

$$D^n f(t) \triangleq \frac{d^n f(t)}{dt^n}, \text{ para } n > 0; \text{ e}$$

$$D^{-m} g(t) \triangleq \int \int \dots g(t) dt^m, \text{ para } m > 0.$$

O modelo do capacitor dado pela equação 2.18 deve ser considerado se e somente se a carga elétrica inicial do capacitor for nula. Demonstramos essa afirmativa da seguinte forma:

A capacitância C do capacitor com uma carga q é definida como:

$$C = \frac{q}{e} \quad (2.19)$$

Por outro lado, sabemos que a corrente elétrica i é:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (2.20)$$

Diferenciando (2.19) e combinando com (2.20) obtemos:

$$de = \frac{1}{C} dq = \frac{1}{C} idt \quad (2.21)$$

Integrando essa equação temos:

$$\int_0^t de = \frac{1}{C} \int_0^t idt \quad (2.22)$$

ou

$$e - e_0 = \frac{1}{C} \int_0^t idt \quad (2.23)$$

em que e_0 é o valor inicial de e , quando $t = 0$ (zero). Se e_0 for zero (capacitor inicialmente descarregado), então:

$$e = \frac{1}{C} \int_0^t idt \quad (2.24)$$

que corresponde ao modelo dado pela equação 2.18.

É muito difícil construir um capacitor sem o efeito resistivo. Em muitas situações o valor da resistência elétrica entre as placas é elevadíssimo, mas não é infinito. Por exemplo, em um capacitor cujo meio entre as placas é um cristal de quartzo (acelerômetros piezoelétricos) a resistência entre as placas é da ordem de 10^{11} ohms.

Essa observação nos leva a entender que, se carregarmos um capacitor e deixarmos seus terminais abertos, mais cedo ou mais tarde ele acabará perdendo a sua carga. Felizmente este fenômeno é extremamente lento quando comparado às frequências de variações de voltagem usadas nos circuitos elétricos. Assim, essa perda pode ser desprezada e o capacitor pode ser considerado puro.

Uma das características do capacitor puro é que ele armazena toda a energia elétrica fornecida quando está sendo carregado e, posteriormente, quando é descarregado, devolve toda essa energia. Essa energia pode ser recuperada conectando o capacitor carregado a um sistema, por exemplo, uma resistência, e permitindo que toda sua carga escoe através do sistema.

É importante assinalar o que acontece com a corrente que “passa através do capacitor”. Na verdade, fisicamente ela não ocorre dessa forma. A corrente não passa através do material dielétrico entre as placas, mas, sim, as cargas escoam descarregando o capacitor através do circuito externo. Na prática é usual considerar como se a corrente passasse pelo material entre as placas, conforme ilustra a Figura 2.10. Sob o ponto de vista de modelagem, tal consideração funciona, mas é bom lembrar que isso não ocorre fisicamente.

c) Indutor Puro

Sempre que há corrente em um circuito temos a geração de um campo magnético que atravessa esse circuito e varia quando a corrente varia. Ou seja, em qualquer circuito cuja corrente varie, ocorre indução de uma força eletromotriz (voltagem) decorrente da variação de seu próprio campo magnético. Essa voltagem é chamada de *força eletromotriz de auto-indução*. O campo magnético é mais intenso quando temos uma bobina. A Figura 2.11 representa uma bobina com espiras.

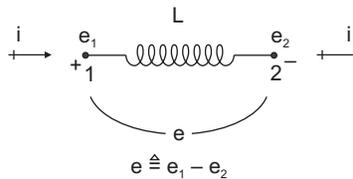


Figura 2.11 Representação esquemática de um indutor.

A auto-indução de um elemento depende de seu tamanho, forma, número de espiras, etc. Depende também das propriedades magnéticas dos materiais no campo magnético. Se não houver materiais ferromagnéticos, a taxa de variação do fluxo magnético é proporcional à taxa de variação da corrente elétrica que está produzindo o campo magnético. A presença de material ferromagnético aumenta consideravelmente a auto-indução, porém esta passa a variar com a corrente e com características não-lineares significativas.

Considerando um indutor puro e linear (ideal) em que não haja efeitos resistivos nem capacitivos, sem a presença de material ferromagnético, então o modelo da auto-indução é dado pela expressão:

$$e = LDi \tag{2.25}$$

em que:

$e \triangleq$ queda de tensão quando vamos de uma extremidade à outra do indutor, no sentido positivo da corrente (neste caso, do ponto 1 ao ponto 2);

$L \triangleq$ indutância, considerada constante;

$i \triangleq$ corrente elétrica. Considerada positiva se ela ocorrer no mesmo sentido previamente adotado como positivo, indicado pela seta, Figura 2.11.

Devemos observar que é muito difícil (quase impossível) construir um indutor puro. Enquanto resistores e capacitores podem ser fabricados com propriedades bem próximas do modelo ideal, indutores reais sempre apresentam resistência considerável. Aliás, se a corrente for contínua ou alternada com baixíssima frequência, a bobina se comporta muito mais como um resistor do que como um indutor.

Outro aspecto da indução refere-se à *indução mútua*. Neste caso, o campo magnético de um elemento causa efeitos em outro circuito. Se este outro circuito (um condutor ou uma bobina) encontra-se no campo magnético do elemento, e este campo varia com o tempo, uma voltagem (força eletromotriz) é induzida ao circuito. A discussão da indução mútua não será efetuada neste texto.

2.4.3 – SISTEMAS TÉRMICOS

a) Resistência Térmica Pura

Uma das características do nosso meio é a ocorrência de transferência de calor de um ponto a certa temperatura para outro ponto com temperatura inferior. A intensidade da transferência de calor depende do caminho entre os dois pontos, da distância e das características do meio. Essa dificuldade que o meio (caminho) proporciona à transferência de calor é chamada de *resistência térmica*.

A natureza e a intensidade da resistência térmica dependem do modo pelo qual ocorre a transferência de calor: por condução, por convecção ou por radiação.

A Figura 2.12 mostra o símbolo usado para representar uma resistência térmica, similar ao da resistência elétrica por tratar-se de uma analogia elétrica da transferência de calor.

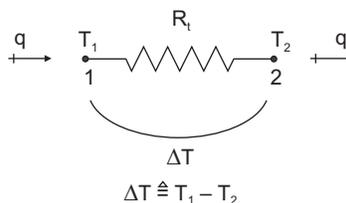


Figura 2.12 Representação esquemática de uma resistência térmica.

Seu modelo é dado por:

$$\Delta T = R_t q \quad (2.26)$$

em que:

$\Delta T \triangleq T_1 - T_2 \triangleq$ diferença das temperaturas dos pontos *1* e *2*;

$R_t \triangleq$ resistência térmica entre os referidos pontos *1* e *2*;

$q \triangleq$ taxa de transferência de calor (energia por unidade de tempo) entre os pontos *1* e *2*. Será positiva se ocorrer no mesmo sentido previamente adotado como positivo, indicado pela seta, Figura 2.12.

As definições dos sentidos positivos de ΔT e q devem estar em harmonia, pois, quando ΔT for positivo, q também deverá ser positivo.

O modelo estabelecido pela equação 2.26 é mais adequado para as aplicações de transferências de calor pelos mecanismos de condução e convecção, podendo ter restrições no caso da convecção. A convecção pode envolver fenômenos mais complexos, e este modelo pode deixar de ser uma boa aproximação.

Se a transferência de calor ocorrer por condução, a resistência térmica pode ser calculada pelo seguinte modelo:

$$R_t = \frac{L}{kA_l} \quad (2.27)$$

em que:

$L \triangleq$ distância entre os pontos *1* e *2*, ou comprimento do corpo;

$k \triangleq$ coeficiente de condutividade térmica do material;

$A_l \triangleq$ área da seção transversal na direção em que ocorre a transferência de calor por condução.

Para o caso da convecção, a resistência térmica é dada por:

$$R_t = \frac{1}{hA_2} \quad (2.28)$$

em que:

$h \triangleq$ coeficiente de transferência de calor por convecção;

$A_2 \triangleq$ área superficial do corpo onde ocorre a troca de calor por convecção.

Se a transferência de calor for por radiação, o modelo de resistência térmica fica prejudicado pelo fato de a transferência de calor ser uma função não-linear. Isto é, para dada configuração, materiais e propriedades superficiais (emissividade e fatores geométricos) temos:

$$q = C_R (T_1^4 - T_2^4) \quad (2.29)$$

em que:

$C_R \triangleq$ coeficiente de transferência de calor por radiação que inclui todos os fatores excetuando as temperaturas;

T_1 e $T_2 \triangleq$ *temperaturas absolutas* dos corpos 1 e 2, respectivamente.

No caso da radiação, a resistência térmica linear pode ser obtida por meio da linearização da função para a realização de análise aproximada, contanto que as temperaturas tenham pequenas variações ao redor de um ponto de operação. O estudo do método de linearização ao redor de um ponto de operação está desenvolvido no Capítulo 8, na seção 8.2.

É importante salientar que o valor de C_R (equação 2.29) é muito pequeno, resultando em alto valor da resistência térmica, quando comparado com os valores típicos para a condução e convecção. Em muitas situações, para baixas e médias diferenças de temperaturas, a radiação representa pequena parcela da transferência total de calor e pode ser desprezada na modelagem. Quando temos altas diferenças de temperaturas, a contribuição da radiação é considerável e também, em certos casos, exclusiva, como, por exemplo, em satélites em órbita.

b) Capacitância Térmica Pura

Quando ocorre transferência de calor para um corpo sólido, líquido ou gasoso, esta energia térmica pode se manifestar de diversas formas, como a realização de trabalho mecânico, ou nas propriedades do corpo, como a variação de energia cinética e variação de energia interna. Se restringirmos nosso estudo às situações em que as realizações de trabalho mecânico e as variações de energia cinética não são significativas e, ainda, não ocorre mudança de fase, a transferência de calor causará variação da temperatura. Se considerarmos uma capacitância térmica ideal, o aumento de temperatura é diretamente proporcional à quantidade total de energia térmica transferida, isto é:

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{1}{C_t} \int_0^t q dt \quad (2.30)$$

em que:

$\Delta T \triangleq$ variação de temperatura do corpo;

$T \triangleq$ temperatura do corpo no instante de tempo t ;

$T_0 \triangleq$ temperatura do corpo no instante de tempo $t = 0$ (*zero*);

$C_i \triangleq$ capacitância térmica, considerada constante;

$q \triangleq$ taxa de transferência de calor (energia por unidade de tempo). Será positiva se ocorrer no sentido de o corpo receber energia, Figura 2.13.

Observe que nessa definição mencionamos uma temperatura para o corpo e não para um ponto. Implicitamente estamos admitindo que a temperatura seja uniforme. Isso pode ser razoável para gases e líquidos se tivermos misturadores eficientes instalados. Para o caso de corpos sólidos, a temperatura seria uniforme somente se a condutividade térmica k fosse infinita. Como nenhum material tem k infinito, sempre haverá uma não uniformidade de temperatura durante o regime transitório de mudanças de temperatura. Contudo, há certas situações em que a temperatura pode ser considerada uniforme. Nas aplicações práticas que envolvem um corpo sólido mergulhado em um fluido, é definido um parâmetro adimensional denominado de *Número de Biot*, N_B , dado por:

$$N_B \triangleq \frac{h(DC)}{k} \quad (2.31)$$

em que:

$h \triangleq$ coeficiente de convecção da superfície;

$(DC) \triangleq \frac{V}{A} \triangleq$ dimensão característica do corpo sólido;

$V \triangleq$ volume do corpo sólido;

$A \triangleq$ área da superfície do corpo sólido;

$k \triangleq$ coeficiente de condutividade do material do corpo sólido.

Se N_B for menor que um décimo ($N_B < 0,1$), a hipótese de temperatura uniforme é razoável.

Agora, voltando à equação 2.30, se a temperatura inicial T_0 for *zero*, então temos:

$$T = \frac{I}{C_i D} q \quad (2.32)$$

que é uma relação utilizada em modelagem.

A Figura 2.13 ilustra a representação gráfica da capacitância térmica.



Figura 2.13 Representação esquemática de uma capacitância térmica.

A determinação da capacitância térmica C_t pode ser realizada por meio da equação 2.32 ou pela equação escrita em termos do calor específico do corpo. Da Termodinâmica sabemos que:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Calor total} \\ \text{adicionado} \end{array} \right] = \int_0^t q dt = M C \Delta T \quad (2.33)$$

em que:

$M \triangleq$ massa do corpo;

$C \triangleq$ calor específico do corpo. Para gases definimos dois calores específicos, a pressão e volume constante, em virtude de sua compressibilidade. Em fluidos incompressíveis ou sólidos, ambos os valores específicos coincidem.

$\Delta T \triangleq$ variação de temperatura do corpo.

Combinando as equações 2.30 e 2.33 obtemos

$$C_t = M C \quad (2.34)$$

2.4.4 – SISTEMAS FLUÍDICOS

No Capítulo 9 ampliaremos a discussão das relações de sistemas fluídicos.

Aqui temos as definições de Resistência, Capacitância e Inertância Fluídicas.

a) Resistência Fluídica Linear

Suponha uma tubulação, Figura 2.14, na qual passa uma vazão Q constante (escoamento em regime permanente) e as pressões estáticas P_1 e P_2 são medidas nas seções 1 e 2.

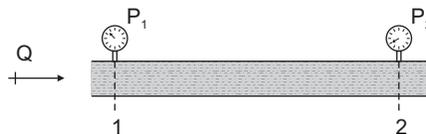


Figura 2.14 Tubulação com escoamento em regime permanente.

Experimentalmente constatamos que a queda de pressão é função da vazão Q . Assim, definimos como Resistência Fluídica Linear, Figura 2.15, a relação:

$$\Delta P = R_f Q \quad (2.35)$$

em que:

$\Delta P \triangleq P_1 - P_2 \triangleq$ diferença das pressões estáticas das seções 1 e 2 ;

$R_f \triangleq$ coeficiente da resistência fluídica entre as referidas seções 1 e 2 , considerado constante;

$Q \triangleq$ vazão média de fluido, na condição de regime permanente. Será positiva se ocorrer no sentido igual ao sentido previamente adotado como positivo, Figura 2.15.

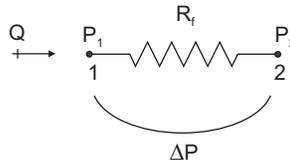


Figura 2.15 Representação esquemática de uma resistência fluídica.

As definições dos sentidos positivos de ΔP e Q devem estar em harmonia, pois quando ΔP for positivo, Q também deverá ser positivo.

Em muitas modelagens dinâmicas de sistemas fluídicos, apesar de o escoamento não estar em regime permanente, o conceito de resistência fluídica ainda é usado.

O modelo linear dado pela equação 2.35 tem boa relação com dados experimentais relacionando ΔP e Q quando o escoamento é laminar. Para regime turbulento, a relação entre ΔP e Q é não-linear e o conceito de resistência fluídica linear pode continuar sendo usado se for realizada a linearização da função, considerando pequenas perturbações ao redor de um ponto de operação. A discussão sobre linearização está apresentada no Capítulo 8.

Um escoamento ocorre no regime laminar quando tem velocidades relativamente baixas e é caracterizado por movimento do fluido em camadas (lâminas), uma camada escorregando sobre a adjacente. Qualquer tendência de turbulência é amortecida por forças viscosas que dificultam o movimento das partículas entre as camadas adjacentes. Portanto, o movimento do fluido é governado pelos efeitos viscosos e não pelos efeitos de inércia.

O regime turbulento ocorre quando as velocidades são relativamente altas. Neste, as partículas do fluido apresentam pequenos movimentos aleatórios em todas as direções adicionados ao movimento da direção predominante.

Na condição de regime permanente podemos prever o tipo de escoamento por meio de um parâmetro adimensional chamado de *Número de Reynolds*, N_R , que é a relação entre as forças de inércia e as forças viscosas.

Em escoamento com “baixo” N_R o regime é laminar. Aumentando N_R vamos encontrar uma situação que chamamos de Região de Transição, em que não fica bem caracterizado o tipo de escoamento. Acima da região de transição temos escoamentos com “grandes” N_R , que são turbulentos.

Para escoamentos em regime permanente que ocorrem dentro de tubos de paredes lisas, seção circular, o Número de Reynolds é dado por:

$$N_R \triangleq \frac{\rho D_T \bar{V}}{\mu} \quad (2.36)$$

em que:

$\rho \triangleq$ massa específica do fluido;

$D_T \triangleq$ diâmetro do tubo;

$\bar{V} \triangleq$ velocidade média do escoamento;

$\mu \triangleq$ viscosidade do fluido.

Aplicando (2.36) em escoamentos de gases ou líquidos, sob condições em que não ocorrem cuidados extraordinários, se:

$N_R \leq 2000 \rightarrow$ Regime Laminar;

$2000 < N_R < 4000 \rightarrow$ Região de Transição;

$N_R \geq 4000 \rightarrow$ Regime Turbulento.

Quando os escoamentos ocorrem em dutos de seções não circulares ou em canais abertos, o Número de Reynolds tem definições apropriadas e os valores de N_R que caracterizam os regimes laminares e turbulentos são específicos para cada caso. Por isso, se na modelagem for necessário se aprofundar nesse assunto, entendemos que a consulta a materiais de Mecânica dos Fluidos torna-se indispensável.

b) Capacitância Fluídica Pura

A capacitância fluídica relaciona a variação de pressão em um recipiente (ou volume de controle) com o “balanço de vazão”.

Suponha um recipiente conforme a Figura 2.16a.

Definindo a variável Q como:

$$Q \triangleq Q_1 - Q_2 \quad (2.37)$$

e se os valores da massa específica do fluido nas seções 1 e 2 forem aproximadamente iguais, então o esquema da Figura 16a pode ser representado pelo da Figura 2.16b).

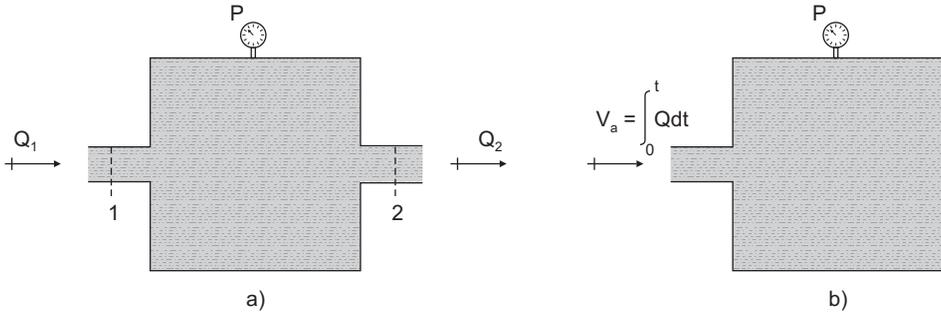


Figura 2.16 Recipientes ilustrando a relação da variação de pressão com o “balanço de volume”.

Assim, podemos definir a capacitância fluídica C_f da seguinte forma:

$$C_f \triangleq \frac{\Delta V}{\Delta P} \quad (2.38)$$

em que:

$C_f \triangleq$ capacitância fluídica, considerada constante;

$\Delta V \triangleq V_a \triangleq$ variação de volume do fluido dentro do recipiente, em intervalo de tempo t ;

$\Delta P \triangleq$ variação da pressão do fluido dentro do recipiente, causado pelo armazenamento ou saída de material, dependendo do sinal de V_a .

Da equação 2.38 e da definição de V_a podemos escrever:

$$P - P_0 = \frac{1}{C_f} \int_0^t Q dt \quad (2.39)$$

em que P é a pressão no instante t e P_0 é a pressão inicial, no instante $t = 0$ (zero).

Considerando que no instante $t = 0$ (zero) temos P_0 igual a zero (P_0 é pressão relativa), então:

$$P = \frac{1}{C_f D} Q \quad (2.40)$$

A representação da capacitância fluídica está ilustrada na Figura 2.17.

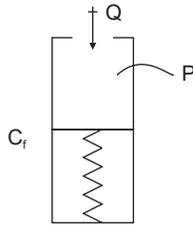


Figura 2.17 Representação esquemática da capacitância fluidica.

Discussão mais ampla sobre capacitância fluidica é apresentada no Capítulo 9, em que inclusive são considerados os efeitos da compressibilidade do líquido.

c) Inertância Fluidica Pura

O conceito de inertância tem ligação com a Lei de Newton. Assim como a massa é um parâmetro que relaciona força com aceleração (derivada da velocidade), a Inertância relaciona a pressão com a derivada da vazão. Desta forma:

$$\Delta P = I_f DQ \quad (2.41)$$

em que:

$I_f \triangleq$ inertância fluidica, considerada constante;

$\Delta P \triangleq$ diferença de pressão aplicada à “inércia” do fluido.

A equação 2.41 não é obtida da aplicação direta e simples da Lei de Newton, como se a massa fosse igual à massa total em um trecho da tubulação e a força igual à pressão estática sobre a área. A inertância não depende somente da massa do fluido, mas também do perfil de velocidade do escoamento. Portanto, para o mesmo fluido, temos uma inertância se o regime for laminar e outra se o regime for turbulento.

O símbolo da inertância é semelhante ao usado para bobinas elétricas, Figura 2.18.

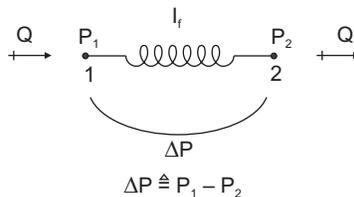


Figura 2.18 Representação esquemática da inertância fluidica.

d) Equação do Fluido

d.1) Equação de estado para gases

Dados experimentais mostram que o comportamento da pressão, do volume e da temperatura dos gases, sob condição de baixa densidade, é dado com boa aproximação pela equação de estado:

$$P V = m R T \quad (2.42)$$

em que:

$V \triangleq$ volume do gás;

$P \triangleq$ *pressão absoluta* do gás;

$m \triangleq$ massa total do gás;

$R \triangleq$ constante do respectivo gás em particular. É a relação da Constante Universal dos Gases $\bar{R} = 8,314 \text{ kJ}/(\text{kg mol K})$ pela massa molecular M do gás particular, isto é, $R = (\bar{R}/M)$;

$T \triangleq$ *temperatura absoluta* do gás.

A Tabela 2.1 mostra valores de R para alguns gases.

Tabela 2.1 Constante R e massa molecular para alguns gases a 25°C e 100 kPa.

Gás	Fórmula química	Massa molecular kg/kg mol	R kJ/kg K
Ar	–	28,97	0,287
Dióxido de carbono	CO ₂	44,01	0,188992
Hidrogênio	H ₂	2,016	4,12418
Nitrogênio	N ₂	28,013	0,29680
Oxigênio	O ₂	31,999	0,25983

É comum chamarmos a equação 2.42 de *equação dos gases perfeitos*. Para baixas densidades, todos os gases e vapores têm comportamento próximo dos gases perfeitos e esta relação P - V - T representa um modelo muito satisfatório. Para densidades mais altas, o comportamento pode desviar substancialmente da equação do gás perfeito.

É muito conveniente nas modelagens o uso da equação de estado dos gases perfeitos em razão de sua simplicidade. Entretanto, é imperativo levantarmos duas questões:

- O que define baixa densidade? Ou: Sobre qual faixa de densidade podemos aplicar a equação dos gases perfeitos com precisão satisfatória?
- Quanto um gás real, sob dada pressão e temperatura, se desvia do comportamento de um gás perfeito?

Para responder a essas importantes questões, introduzimos o conceito de *fator de compressibilidade* Z , que é definido da seguinte forma:

$$Z \triangleq (PV)/(mRT) \quad (2.43)$$

Assim, a equação de estado fica:

$$PV = Z m R T \quad (2.44)$$

A equação 2.42 mostra que, para o gás perfeito, temos $Z = 1$. Adicionalmente, notamos que o desvio de Z da unidade é uma maneira de ponderar quanto a relação real se desvia da equação de estado dos gases perfeitos.

Na prática, observamos por meio de estudos experimentais que no limite, quando P tende a *zero*, Z sempre tende à unidade.

No caso do nitrogênio, por exemplo, para a temperatura de $300K$ ou acima (praticamente igual à temperatura ambiente ou acima), o fator de compressibilidade é muito próximo da unidade até a pressão de 1000 psi . Isso significa que a equação dos gases perfeitos pode ser usada para o nitrogênio (e também para o ar), nesta faixa, com considerável precisão.

Ainda para o nitrogênio, se a temperatura for reduzida de $300K$ para $200K$ (de $+27^\circ C$ para $-73^\circ C$), então Z é bem próximo de 1 até a pressão de 100 psi .

Sob o ponto de vista prático para a resolução de problemas, devemos lembrar dois aspectos importantes:

- Para pressões muito baixas, podemos sempre adotar o comportamento do gás perfeito com boa precisão, independentemente da temperatura.
- Para temperaturas maiores que o dobro da **Temperatura Crítica** do gás (para o nitrogênio, acima de $252K$, pois a temperatura crítica é $126K$ ou $-147^\circ C$), podemos adotar o comportamento de gás perfeito até a pressão de pelo menos 1000 psi . Quando a temperatura for menor que duas vezes a temperatura crítica e a pressão acima de um valor bastante baixo, digamos pressão atmosférica, então o desvio dos gases perfeitos pode ser considerável.

d.2) Coeficiente de “rigidez” e compressibilidade para o líquido

Em muitas modelagens dinâmicas de sistemas fluídicos podemos considerar os líquidos como incompressíveis. Essa hipótese é feita em situações em que as variações de pressão são pequenas e estas proporcionam variações de volume desprezíveis.

Em sistemas com altas variações de pressão ou com acúmulo de massa em recipiente em que o fluido encontra-se aprisionado, o líquido tem de ser considerado compressível.

Uma maneira de medir a “rigidez” do líquido é por meio de um coeficiente denominado *Bulk Modulus* (inverso da compressibilidade), que também poderia ser chamado de *Coefficiente de Rigidez Volumétrico*, cuja definição é dada por:

$$\beta \triangleq -V \frac{dP}{dV} \quad (2.45)$$

em que:

$\beta \triangleq$ *Bulk Modulus* ou Coeficiente de Rigidez Volumétrico;

$V \triangleq$ volume inicial do fluido;

$\frac{dP}{dV} \triangleq$ derivada da pressão em relação ao volume. Poderia ser $\frac{\Delta P}{\Delta V}$, variação da pressão em função da variação do volume.

A equação 2.45 representa uma expressão simplificada do *bulk modulus*. Essa propriedade dos fluidos não é tão simples, e às vezes uma expressão mais complexa pode vir a ser necessária para aumentarmos a precisão dos resultados da modelagem. Por exemplo, β pode ser uma função polinomial da pressão e da temperatura.

O *Bulk Modulus* é entendido como a variação da pressão em função da variação do volume, multiplicada pelo valor do volume inicial V do fluido.

O sinal negativo da equação 2.45 é propositadamente inserido na expressão para tornar β positivo, pois a derivada $\frac{dP}{dV}$ é negativa. Em outras palavras, para um dado volume inicial de fluido, quando a pressão aumenta, o volume do fluido diminui.

Chamamos o *Bulk Modulus* β de Coeficiente de Rigidez Volumétrico pelo fato de sua equação ser semelhante à equação do Módulo de Resistência ou Módulo de Rigidez Linear dado pela Resistência dos Materiais (Lei de Hooke), para um corpo sólido sob tração:

$$E \triangleq L \frac{\Delta \sigma}{\Delta L} \quad (2.46)$$

em que:

$E \triangleq$ Módulo de Resistência do corpo;

$L \triangleq$ comprimento inicial do corpo;

$\frac{\Delta\sigma}{\Delta L} \triangleq$ relação da variação da tensão σ em função da variação do comprimento.

O *Bulk Modulus* será usado no Capítulo 9, em que são desenvolvidos alguns exemplos de modelagem de sistemas hidráulicos de óleo.

2.5 – CONCLUSÃO

Apresentamos neste capítulo os fundamentos básicos para a realização de modelagem matemática com o objetivo de obter modelos do tipo **30**, isto é, modelos lineares caracterizados por equações diferenciais lineares, ordinárias, com coeficientes constantes, cuja variável independente é o tempo.

No início do capítulo foi explicada resumidamente a estrutura básica aqui adotada para a modelagem matemática, muito importante para a organização dos procedimentos de modelagem e também para o desenvolvimento e formação de um engenheiro especializado em Dinâmica de Sistemas.

Em seguida foram discutidas as quatro “partes” fundamentais de uma modelagem, que são: Hipóteses; Aplicação de Leis; Relações entre as Variáveis; e Validação do Modelo.

Foi destacado que o conjunto de *Hipóteses* é uma “parte” importante da modelagem.

Quanto à *Aplicação de Leis*, foram mencionadas quatro leis: Lei de Newton; Lei de Kirchhoff; Lei da Conservação da Massa; e Lei da Conservação da Energia. Todas enunciadas para situações relativamente simples.

As *Relações entre as Variáveis* têm como base as relações usadas para sistemas elétricos, como: Resistência, Capacitância e Indutância. A Tabela 2.2 mostra a organização das expressões para ajudar a memorização.

Um aspecto importante quanto às relações é o envolvimento de variáveis de dois tipos: uma de “potencial” e outra de “fluxo”, com exceção das relações para o sistema térmico. Esclarecendo, para o caso de sistemas elétricos, temos voltagem e corrente; para o mecânico, força e velocidade; e para o fluídico, pressão e vazão. Para qualquer um destes sistemas, o produto entre as duas variáveis (potencial e fluxo) resulta em potência (energia por unidade de tempo). Contudo, esse raciocínio não é válido para o caso de sistemas térmicos, pois a taxa de transmissão de calor q , por si só, já é energia por unidade de tempo.

Tabela 2.2 Resumo das expressões matemáticas para as Relações entre as Variáveis, com a inclusão da Lei de Newton.

Sistema	Resistência	Capacitância	Indutância
Elétrico	$e = Ri$	$e = \frac{I}{CD} i$	$e = LDi$
Mecânico	$F = -B\dot{x}$	$F = -\frac{K_s}{D}\dot{x}$	$F = MD\dot{x}$
Fluídico	$\Delta P = R_f Q$	$\Delta P = \frac{I}{C_f D} Q$	$\Delta P = I_f D Q$
Térmico	$\Delta T = R_t q$	$\Delta T = \frac{I}{C_t D} q$	-
As variáveis e os parâmetros foram definidos ao longo do capítulo			

Quanto à quarta parte, a *Validação do Modelo*, deixamos claro que uma modelagem realmente termina somente após sua verificação experimental.

O conteúdo deste capítulo representa o conhecimento mínimo necessário para dar início à elaboração e obtenção dos modelos matemáticos.

MODELAGENS DE SISTEMAS SIMPLES

3.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo apresentamos modelagens de sistemas simples, uma importante etapa do aprendizado, com a visualização e a aplicação dos procedimentos de modelagem.

Cada modelagem aqui desenvolvida contém um corpo próprio, completa por si só. Isso significa que certos detalhes aparecem repetidos em diversas modelagens, como, por exemplo, as hipóteses gerais aplicáveis a um tipo de sistema. Contudo, com o objetivo de não ficar reescrevendo a listagem, conjuntos de hipóteses comuns são organizados em quadros numerados no início de cada subseção deste capítulo. Entendemos que a generalização de detalhes e hipóteses espalhados pelo texto quebra o corpo da modelagem, comprometendo sua completa compreensão. Adicionalmente, o fato de cada modelagem ser completa por si só pode permitir o estudo em seqüência diferente da aqui apresentada.

Vimos no Capítulo 2, seção 2.2, que, em se tratando da modelagem de um sistema real ou do projeto de um novo sistema, uma das primeiras tarefas é a elaboração do *modelo físico esquemático*, conforme ilustra o fluxograma da Figura 2.2. Nessa construção, as hipóteses representam o alicerce e são declaradas pelo analista com base nos seus conhecimentos científicos, informações de modelagens anteriores e de dados medidos, sua experiência técnica e seu bom senso e intuição. As qualificações do analista são necessárias porque essa elaboração se posiciona como atividade avançada dentro do desenvolvimento técnico de modelagem e é específica para cada situação prática. Por isso, entendemos que ela ultrapassa o escopo deste texto, que tem por objetivo o aprendizado básico. Assim, todas as modelagens aqui apresentadas têm início considerando os modelos físicos esquemáticos prontos.

Partindo do esquema pronto, o primeiro passo da modelagem é estabelecer os zeros das grandezas (as origens) e para que “lado” (o sentido) suas variações são positivas.

Os zeros e os sentidos positivos podem ser definidos arbitrariamente, porém, dependendo da escolha, a modelagem ficará harmoniosa ou confusa. Por exemplo, em um problema mecânico, se para o deslocamento horizontal de uma massa for adotado o sentido positivo para a direita e se o sentido da força positiva for adotado para a esquerda, a Lei de Newton, para este caso, deve ser escrita como $F = -m\ddot{x}$. Pois é assim que se comporta o mundo real, isto é, uma força para a direita (neste caso, negativa) causa uma aceleração para a direita (neste caso, aceleração positiva).

Não temos dúvidas de que essa adoção arbitrária dos sentidos acaba resultando em uma modelagem confusa. Por isso recomendamos muito cuidado na definição dos sentidos positivos. Estes devem ser adotados de maneira *harmoniosa e correspondente*. Por exemplo, se considerarmos o sentido horário como positivo para a corrente elétrica de uma malha, recomendamos que este sentido positivo seja repetido para todas as demais malhas do circuito. Isso produz uma modelagem harmoniosa.

Para exemplificar o significado de sentidos correspondentes mencionamos o caso de um corpo que executa pequenos movimentos angulares em torno de um eixo, Figura 3.1. Nesta situação os movimentos dos pontos *A* e *B* são aproximadamente lineares.

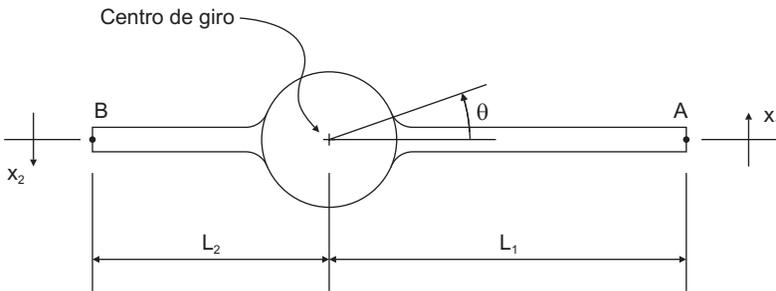


Figura 3.1 Sentidos correspondentes dos deslocamentos lineares e angular, para pequenos ângulos.

Se as definições dos sentidos positivos forem feitas conforme a Figura 3.1, quando temos o ângulo θ positivo, temos x_1 e x_2 também positivos. Isso significa que há correspondência entre as variáveis, ou seja, quando uma aumenta, a outra também aumenta.

Muitos sistemas têm grandezas interligadas e a preocupação da correspondência entre os sentidos deve sempre estar presente. A existência de correspondência não é necessária, mas é recomendável.

Para mais um exemplo de harmonia e correspondência dos sentidos vamos observar o potenciômetro dado na Figura 3.2.

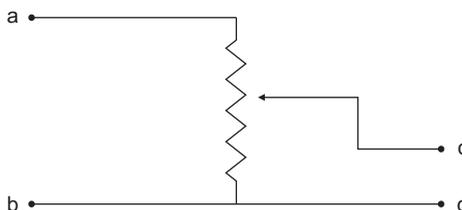


Figura 3.2 Modelo físico esquemático de um potenciômetro.

Para dar início à modelagem, o esquema da Figura 3.2 deve ficar conforme a Figura 3.3, com as grandezas e os sentidos definidos.

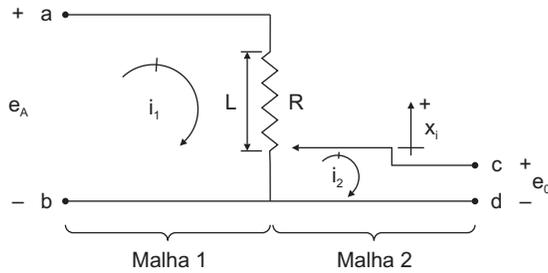


Figura 3.3 Potenciômetro com o esquema pronto para a sua modelagem.

É sempre necessário definir as grandezas de forma explícita, ou seja:

$e_A \triangleq$ voltagem de alimentação;

$R \triangleq$ resistência total do potenciômetro;

$x_i \triangleq$ deslocamento linear do potenciômetro. A origem de x_i corresponde ao ponto inicial de R ;

$L \triangleq$ comprimento total da resistência R ;

$e_0 \triangleq$ voltagem na saída do potenciômetro;

$i_1 \triangleq$ corrente elétrica da malha 1;

$i_2 \triangleq$ corrente elétrica da malha 2.

Observe que na Figura 3.3 há sinais para e_A e e_0 . Os sinais *mais* (+) e *menos* (–) de e_A e e_0 não significam que os terminais sempre possuem aquelas polaridades mostradas. Esses sinais simplesmente significam que, em determinado instante de tempo, se as voltagens e_A e e_0 possuírem as polaridades mostradas, então a elas são atribuídos valores numéricos positivos. Se elas tiverem polaridades opostas, seus valores numéricos serão negativos. Analogamente, as “setas” das correntes i_1 e i_2 não significam que as correntes têm sempre aqueles sentidos, elas simplesmente indicam que, se as correntes tiverem aqueles sentidos, elas são positivas.

As convenções de sinais da Figura 3.3 foram adotadas de forma criteriosa e conveniente, pois há correspondências entre as variáveis. Se e_A for positiva constante, i_1 será positiva. Quando x_i aumenta, e_0 também aumenta, e, se x_i for máximo (igual a L), $e_0 = e_A$, ou seja, $+e_0 = +e_A$.

Agora, voltando às modelagens deste capítulo, devemos esclarecer que nos esquemas dos sistemas propostos as definições dos sentidos positivos já estão prontas.

As modelagens aqui desenvolvidas têm por objetivo obter funções de transferência. Na próxima seção é apresentado o conceito de função de transferência operacional.

3.2 – FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA OPERACIONAL

Na seção 2.2 do Capítulo 2 foi explicada a diferença entre *equações* e *relações* dentro do contexto de organização aqui proposto para a modelagem. As equações são oriundas das aplicações de leis e as relações entre as variáveis advêm de correlações levantadas experimentalmente. Foram também apresentadas as etapas usuais do manuseio analítico com as expressões matemáticas para a obtenção de modelo do tipo **30**, vide Figura 2.1. Observamos na Figura 2.1 que a *terceira* etapa corresponde à obtenção de um conjunto de equações cuja quantidade de incógnitas é igual à quantidade de equações. Como exemplo ilustrativo dos passos seguintes, vamos supor que temos um conjunto de 3 equações, com 3 variáveis:

$$(A_1) X_1 + (A_2) X_2 + (A_3) X_3 = I_1 \quad (3.1)$$

$$(B_1) X_1 + (B_2) X_2 + (B_3) X_3 = I_2 \quad (3.2)$$

$$(C_1) X_1 + (C_2) X_2 + (C_3) X_3 = I_3 \quad (3.3)$$

em que:

$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2$ e $C_3 \triangleq$ polinômios, com coeficientes constantes, em termos do operador D ($D \triangleq$ operador derivador). Por exemplo, A_1 poderia ser: $A_1 = 5 D^3 + 20 D^2 + 7 D + 8$;

X_1, X_2 e $X_3 \triangleq$ variáveis do sistema escolhidas com saídas (outputs);

I_1, I_2 e $I_3 \triangleq$ entradas do sistema (inputs).

Organizando (3.1), (3.2) e (3.3) em forma de matriz, obtemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz do Sistema}} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}}_{\text{Vetor das Saídas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}}_{\text{Vetor das Entradas}} \quad (3.4)$$

Modelos lineares do tipo 30 podem ser representados sempre na forma da equação 3.4. A *Matriz do Sistema* “multiplicada” pelo *Vetor das Saídas* (correspondente às grandezas escolhidas como saídas do sistema) é igual ao *Vetor das Entradas*. A matriz do sistema é uma matriz quadrada formada por elementos que são polinômios em termos do operador D . Os coeficientes dos polinômios são formados pelos parâmetros que caracterizam o sistema. Por exemplo, coeficientes de molas, valores de massas, diâmetros de tanques, resistências elétricas, capacitâncias térmicas e outros parâmetros formam os coeficientes dos polinômios. Como os parâmetros são constantes (sistema linear), a matriz do sistema é constante.

Agora, voltando à equação 3.4, podemos definir *Função de Transferência Operacional*.

Função de Transferência Operacional é a relação, na forma operacional, entre uma única saída e uma única entrada, considerando simultaneamente três condições:

- todas as demais entradas iguais a zero (ou constantes, depende inclusive da definição do zero);
- todas as condições iniciais de todas as entradas iguais a zero; e
- todas as demais condições constantes.

Na prática, a Função de Transferência Operacional é chamada apenas de Função de Transferência.

Se para o exemplo em discussão queremos a função de transferência $\frac{X_3}{I_1}(D)$, então, aplicando a Regra de Cramer¹ à equação 3.4 vem:

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & I_1 \\ B_1 & B_2 & 0 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}} \quad (3.5)$$

1. Vide Regra de Cramer no Apêndice A.

Resolvendo os determinantes obtemos:

$$X_3 = \frac{(B_1 C_2 - B_2 C_1) I_1}{A_1 B_2 C_3 + A_2 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_2 - A_1 B_3 C_2 - A_2 B_1 C_3 - A_3 B_2 C_1} \quad (3.6)$$

Logo,

$$\frac{X_3}{I_1}(D) = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 C_3 + A_2 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_2 - A_1 B_3 C_2 - A_2 B_1 C_3 - A_3 B_2 C_1} \quad (3.7)$$

A equação 3.7 indica que há relação dinâmica entre a saída X_3 e a entrada I_1 e é por este motivo que a chamamos de Função de Transferência Operacional $\frac{X_3}{I_1}(D)$.

Genericamente, sendo q_i a entrada e q_0 a saída, podemos escrever:

$$\frac{q_0}{q_i}(D) = \frac{b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_0}{a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_0} \quad (3.8)$$

em que $b_m, b_{m-1}, \dots, b_0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ são constantes.

É importante observar que a função de transferência não é escrita como uma simples divisão da saída pela entrada $\frac{q_0}{q_i}$, mas sim $\frac{q_0}{q_i}(D)$. Isso é feito para enfatizar que a função de transferência não é uma relação instantânea entre as duas grandezas, mas sim um símbolo representando uma relação dinâmica em termos dos parâmetros do sistema e do operador D .

A função de transferência tem inúmeras aplicações, dentre as quais podemos citar o emprego de Diagramas de Blocos. Um bloco é desenhado conforme a Figura 3.4.



Figura 3.4 Representação em forma de Diagrama de Bloco de um Sistema, Entrada e Saída.

Há implicitamente uma operação matemática quando fazemos um bloco. Da equação 3.8, podemos escrever:

$$q_0(D) = \left[\frac{b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_0}{a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_0} \right] q_i \quad (3.9)$$

Assim, o bloco fica conforme a Figura 3.5.

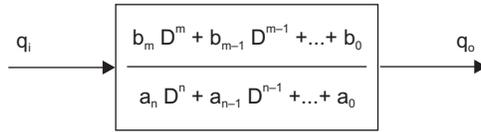


Figura 3.5 Representação do sistema e da função de transferência na forma de Diagrama de Blocos.

Há duas importantes vantagens ao utilizarmos os Diagramas de Blocos. A primeira é poder substituir as peças e/ou partes do sistema (engrenagens, motores, pistões, etc.) pelos respectivos blocos, evitando desenhos complicados; e a segunda é a configuração mostrando explicitamente a interligação e o relacionamento de dependência entre os componentes, subsistemas e os modelos destes.

Na seqüência estão desenvolvidas modelagens de sistemas simples, considerando sistemas elétricos, mecânicos, fluídicos com água, fluídicos com ar, e térmicos.

3.3 – SISTEMAS ELÉTRICOS

Para as modelagens dos Sistemas Elétricos desenvolvidas neste capítulo temos um conjunto de hipóteses gerais, listadas no Quadro 3.1.

Quadro 3.1 Hipóteses Gerais de Sistemas Elétricos (usadas neste capítulo).

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1 – Os resistores são puros e lineares, com capacitância e indutância nulas. Os valores das suas respectivas resistências são constantes. 2 – Os capacitores são puros e lineares, com resistência e indutância nulas. Os valores das suas respectivas capacitâncias são constantes. 3 – Os indutores são puros e lineares, com resistência e capacitância nulas. Os valores das suas respectivas indutâncias são constantes. 4 – Os fios que conectam os elementos são condutores perfeitos, com resistência, capacitância e indutância nulas. 5 – Todas as condições iniciais são nulas. 6 – As variações das grandezas do sistema são relativamente pequenas a fim de manter o comportamento do sistema praticamente linear. |
|--|

A seguir estão apresentadas as modelagens.

3.3.1 – MODELAGEM DO CIRCUITO RC

Para o sistema da Figura 3.6, obter a função de transferência $\frac{e_o}{e_i}(D)$.

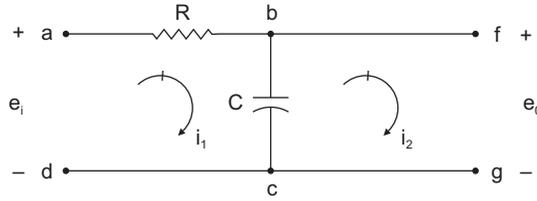


Figura 3.6 Circuito RC.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.1.
- (2) Os terminais f e g , Figura 3.6, estão abertos, portanto, $i_2 = 0$.
- (3) A fonte externa que gera e_i não possui nenhuma impedância interna em sua saída.

b) Aplicação de leis e relações:

O sistema possui duas malhas, portanto, a Lei de Kirchhoff será aplicada duas vezes.

b.1) Lei de Kirchhoff para a primeira malha:

Na aplicação da Lei das Malhas de Kirchhoff, queda de voltagem terá sinal positivo, conforme já foi dito no Capítulo 2. Assim, fazendo o percurso pela primeira malha, no sentido positivo da corrente, iniciando em d e terminando em d , obtemos:

$$-e_i + Ri_1 + \frac{1}{CD}(i_1 - i_2) = 0 \quad (3.10)$$

em que:

$D \triangleq$ operador derivador.

Como, por hipótese, $i_2 = 0$, então:

$$\frac{RCDi_1 + i_1}{CD} = e_i \quad (3.11)$$

b.2) Lei de Kirchhoff para segunda malha (início em f):

$$+e_0 + \frac{1}{CD}(i_2 - i_1) = 0 \quad (3.12)$$

Como $i_2 = 0$, então:

$$-i_1 + CD e_0 = 0 \quad (3.13)$$

c) Equações na forma de matriz:

Reescrevendo (3.11) e (3.13) obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} R C D + 1 & \\ & C D \end{array} \right] i_l + [0] e_0 = e_i \\ [-1] i_l + [C D] e_0 = 0 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

ou, na forma de matriz:

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{R C D + 1}{C D} & 0 \\ -1 & C D \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_l \\ e_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

d) Função de transferência:

Aplicando a Regra de Cramer para calcular e_0 , da equação (3.15), obtemos:

$$e_0(D) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{R C D + 1}{C D} & e_i \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{R C D + 1}{C D} & 0 \\ -1 & C D \end{vmatrix}} = \frac{e_i}{(R C D + 1)} \quad (3.16)$$

Portanto, a função de transferência $\frac{e_0}{e_i}(D)$ fica:

$$\frac{e_0}{e_i}(D) = \frac{1}{\tau D + 1} \quad (3.17)$$

em que:

$\tau \triangleq R C \triangleq$ constante de tempo.

Nota: A equação 3.17 é uma função de transferência de um sistema de I^a ordem com ganho $K = I$. A forma-padrão do sistema de I^a ordem é:

$$\frac{q_0}{q_i}(D) = \frac{K}{\tau D + I} \quad (3.18)$$

em que:

$q_0 \triangleq$ saída (output);

$q_i \triangleq$ entrada (input);

$K \triangleq$ ganho da função de transferência. Tem unidade = (unidade de q_0)/(unidade de q_i);

$\tau \triangleq$ constante de tempo. Tem unidade = unidade de tempo, isto é: segundos;

$D \triangleq$ operador derivador. Tem unidade = (1/unidade de tempo), isto é: (1/segundo).

3.3.2 – MODELAGEM DO CIRCUITO LRC

Para o sistema da Figura 3.7, determinar a função de transferência $\frac{e_0}{e_i}(D)$.

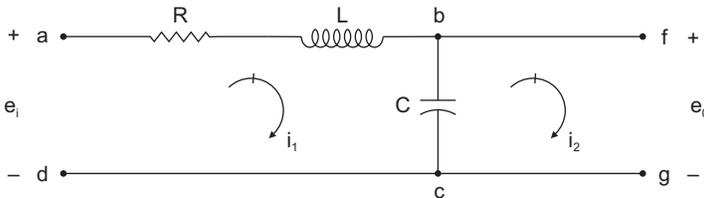


Figura 3.7 Circuito LRC.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.1.
- (2) Os terminais f e g , Figura 3.7, estão abertos, portanto, $i_2 = 0$.
- (3) A fonte externa que gera e_i não possui nenhuma impedância interna em sua saída.

b) Aplicação de leis e relações:

b.1) Lei de Kirchhoff para a primeira malha:

Fazendo o percurso pela malha I , iniciando em d e terminando em d , então:

$$-e_i + R i_1 + L D i_1 + \frac{1}{C D} (i_1 - i_2) = 0 \quad (3.19)$$

Como $i_2 = 0$, então

$$\left[\frac{L C D^2 + R C D + 1}{C D} \right] i_1 = e_i \quad (3.20)$$

b.2) Lei de Kirchhoff para 2ª malha (início em f):

$$+e_0 + \frac{1}{C D} (i_2 - i_1) = 0 \quad (3.21)$$

Como $i_2 = 0$, então

$$-i_1 + C D e_0 = 0 \quad (3.22)$$

c) Equações na forma de matriz:

Reescrevendo (3.20) e (3.22) obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{L C D^2 + R C D + 1}{C D} \right] i_1 + [0] e_0 = e_i \\ [-1] i_1 + [C D] e_0 = 0 \end{array} \right. \quad (3.23)$$

ou, na forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} \frac{L C D^2 + R C D + 1}{C D} & 0 \\ -1 & C D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ e_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

d) Função de transferência:

Aplicando a Regra de Cramer para calcular e_0 , da equação 3.24, obtemos:

$$e_o(D) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{LCD^2 + RCD + 1}{CD} & e_i \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{LCD^2 + RCD + 1}{CD} & 0 \\ -1 & CD \end{vmatrix}} = \frac{+e_i}{LCD^2 + RCD + 1} \quad (3.25)$$

Logo, a função de transferência $\frac{e_o}{e_i}(D)$ resulta:

$$\frac{e_o}{e_i}(D) = \frac{1}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}D + 1} \quad (3.26)$$

em que:

$$\omega_n \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \triangleq \text{freqüência natural não-amortecida; e}$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} \triangleq RC, \text{ ou: } \zeta \triangleq \frac{RC}{2\sqrt{LC}} \triangleq \text{fator de amortecimento.}$$

Nota: A equação 3.26 é uma função de transferência de um sistema de 2^a ordem com ganho $K = 1$. A forma-padrão do sistema de 2^a ordem é:

$$\frac{q_o}{q_i}(D) = \frac{K}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}D + 1} \quad (3.27)$$

em que:

$$q_o \triangleq \text{saída (output);}$$

$$q_i \triangleq \text{entrada (input);}$$

$K \triangleq$ ganho da função de transferência. Tem unidade = (unidade de q_0)/(unidade de q_i);

$\omega_n \triangleq$ frequência natural não-amortecida. Tem unidade = (radianos/segundo);

$\zeta \triangleq$ fator de amortecimento. Não tem unidades (é adimensional).

3.3.3 – IMPEDÂNCIAS EQUIVALENTES

a) Hipóteses:

(1) Para qualquer combinação, em série ou em paralelo, consideramos todas as hipóteses do Quadro 3.1.

b) Elementos em série:

Vamos considerar os elementos em série conforme mostra a Figura 3.8.

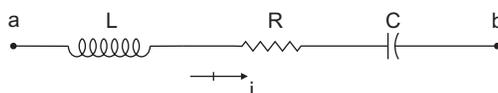


Figura 3.8 Elementos indutivo, resistivo e capacitivo em série.

Se os elementos estão em série, a queda de voltagem total e_{ab} é a soma das quedas das voltagens individuais que ocorrem através de cada elemento. Assim:

$$e_{ab} = L D i + R i + \frac{1}{C D} i \quad (3.28)$$

ou

$$e_{ab} = \left(L D + R + \frac{1}{C D} \right) i \quad (3.29)$$

Definindo Impedância Equivalente Z_e como:

$$Z_e \triangleq \frac{e_{ab}}{i} \quad (3.30)$$

então, para o caso do circuito da Figura 3.8, temos:

$$Z_e = \left(L D + R + \frac{1}{C D} \right) \quad (3.31)$$

Em palavras, a equação 3.31 pode ser expressa da seguinte forma: se os elementos estão em série, a impedância equivalente é igual à soma das impedâncias individuais de cada elemento.

c) Elementos em paralelo:

Temos o circuito da Figura 3.9a e queremos a impedância equivalente Z_e , conforme o circuito da Figura 3.9b, que segue o modelo dado pela equação 3.32 .

$$e_{ab} = Z_e i \quad (3.32)$$

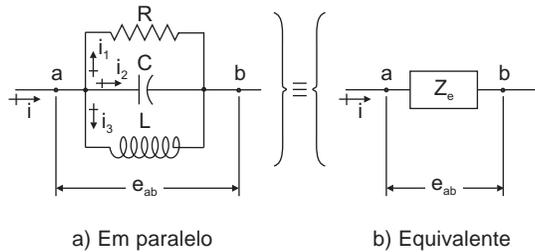


Figura 3.9 Elementos indutivo, resistivo e capacitivo em paralelo.

Do circuito da Figura 3.9a temos:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \quad (3.33)$$

Sendo:

$$e_{ab} = R i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{1}{R} e_{ab} \quad (3.34)$$

$$e_{ab} = \frac{1}{CD} i_2 \Rightarrow i_2 = CD e_{ab} \quad (3.35)$$

$$e_{ab} = LD i_3 \Rightarrow i_3 = \frac{1}{LD} e_{ab} \quad (3.36)$$

Substituindo (3.34), (3.35) e (3.36) em (3.33), vem:

$$i = \left(\frac{1}{R} + CD + \frac{1}{LD} \right) e_{ab} \quad (3.37)$$

ou

$$e_{ab} = \left[\frac{1}{\frac{1}{R} + CD + \frac{1}{LD}} \right] i \quad (3.38)$$

Das equações 3.32 e 3.38, obtemos:

$$Z_e = \frac{I}{\frac{I}{R} + C D + \frac{I}{L D}} \quad (3.39)$$

Em palavras, a equação 3.39 pode ser expressa da seguinte forma: se os elementos estão em paralelo, a impedância equivalente é igual a I sobre a soma do inverso das impedâncias individuais de cada elemento. Exemplificando, para o circuito da Figura 3.10, Z_e fica:

$$Z_e = \frac{I}{\frac{I}{L_1 D} + \frac{I}{L_2 D} + \frac{I}{R_1} + \frac{I}{R_2} + C_1 D + C_2 D} \quad (3.40)$$

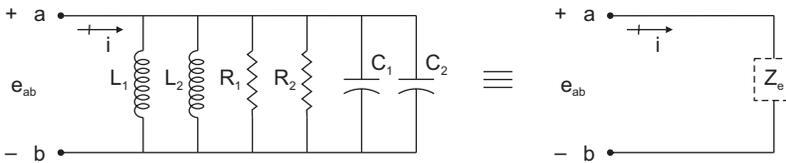


Figura 3.10 Exemplo de um circuito com elementos em paralelo.

3.3.4 – CIRCUITO COM IMPEDÂNCIAS EQUIVALENTES – EXEMPLO 1

Para o circuito da Figura 3.11, determinar $\frac{e_0}{e_i}(D)$, em que Z_1 e Z_2 são impedâncias equivalentes.

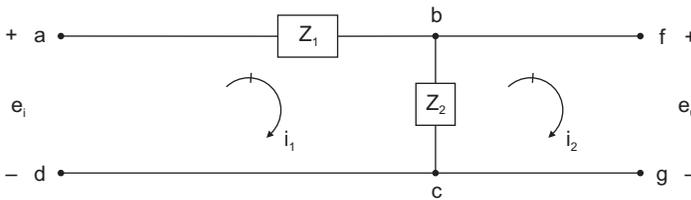


Figura 3.11 Circuito com impedâncias equivalentes, exemplo 1.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.1.
- (2) Os terminais f e g , Figura 3.11, estão abertos, portanto, $i_2 = 0$.
- (3) A fonte externa que gera e_i não possui nenhuma impedância interna em sua saída.

b) **Modelagem:**

Aplicando a Lei de Kirchhoff nas malhas 1 e 2 obtemos:

$$-e_i + (Z_1 + Z_2) i_1 = 0 \quad (3.41)$$

$$e_0 - Z_2 i_1 = 0 \quad (3.42)$$

Da equação 3.42 vem:

$$i_1 = \frac{e_0}{Z_2} \quad (3.43)$$

Substituindo (3.43) em (3.41) resulta:

$$(Z_1 + Z_2) \frac{e_0}{Z_2} = e_i \quad (3.44)$$

Portanto,

$$\frac{e_0}{e_i}(D) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (3.45)$$

Para exemplificar, vamos aplicar a equação 3.45 ao circuito da Figura 3.12.

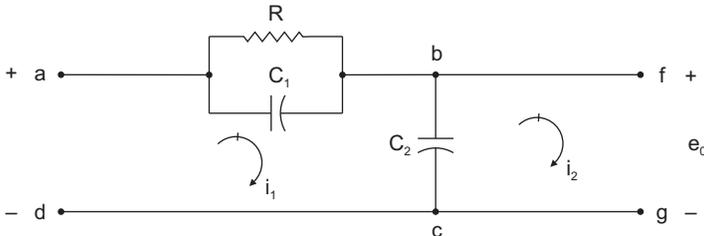


Figura 3.12 Circuito exemplo do caso dado na Figura 3.11, para aplicação da equação 3.45.

Da Figura 3.12 observamos que R e C_1 estão em paralelo, assim, a impedância equivalente Z_1 (vide Figura 3.11) fica:

$$Z_1 = \frac{1}{\frac{1}{R} + C_1 D} = \frac{R}{1 + R C_1 D} \quad (3.46)$$

e, determinando a impedância Z_2 , Obtemos:

$$Z_2 = \frac{1}{C_2 D} \quad (3.47)$$

Logo, substituindo Z_1 e Z_2 na equação 3.45 resulta:

$$\frac{e_0}{e_i}(D) = \frac{\frac{1}{C_2 D}}{\frac{R}{1 + R C_1 D} + \frac{1}{C_2 D}} = \frac{1}{\frac{R C_2 D}{1 + R C_1 D} + 1} \quad (3.48)$$

ou

$$\frac{e_0}{e_i}(D) = \frac{R C_1 D + 1}{(R C_2 + R C_1) D + 1} \quad (3.49)$$

Definindo:

$\tau_1 \triangleq R C_1 \triangleq$ constante de tempo 1;

$\tau_2 \triangleq R C_2 \triangleq$ constante de tempo 2.

então,

$$\frac{e_0}{e_i}(D) = \frac{\tau_1 D + 1}{(\tau_1 + \tau_2) D + 1} \quad (3.50)$$

3.3.5 – CIRCUITO COM IMPEDÂNCIAS EQUIVALENTES – EXEMPLO 2

Para o circuito da Figura 3.13, determinar $\frac{e_0}{e_i}(D)$.

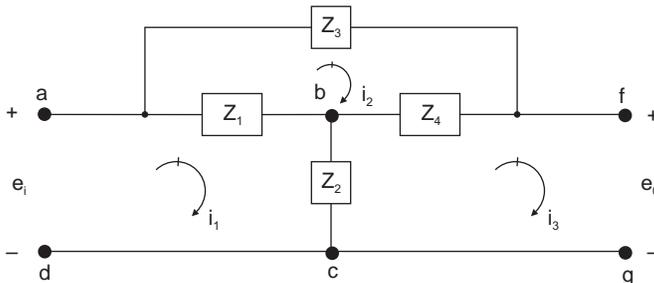


Figura 3.13 Circuito com impedâncias equivalentes, exemplo 2.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.1.
- (2) Os terminais f e g , Figura 3.13, estão abertos, portanto, $i_3 = 0$.
- (3) A fonte externa que gera e_i não possui nenhuma impedância interna em sua saída.

b) Modelagem:

Aplicando a Lei de Kirchhoff às malhas obtemos:

$$-e_i + (Z_1 + Z_2) i_1 - Z_1 i_2 - Z_2 i_3 = 0 \quad (3.51)$$

$$-Z_1 i_1 + (Z_1 + Z_3 + Z_4) i_2 - Z_4 i_3 = 0 \quad (3.52)$$

$$+e_0 - Z_2 i_1 - Z_4 i_2 + (Z_2 + Z_4) i_3 = 0 \quad (3.53)$$

Sendo $i_3 = 0$, as equações 3.51, 3.52 e 3.53 organizadas na forma de matriz ficam:

$$\begin{bmatrix} (Z_1 + Z_2) & -Z_1 & 0 \\ -Z_1 & (Z_1 + Z_3 + Z_4) & 0 \\ -Z_2 & -Z_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ e_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

e aplicando Cramer para obtermos a função de transferência:

$$e_0 = \frac{\begin{vmatrix} (Z_1 + Z_2) & -Z_1 & e_i \\ -Z_1 & (Z_1 + Z_3 + Z_4) & 0 \\ -Z_2 & -Z_4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (Z_1 + Z_2) & -Z_1 & 0 \\ -Z_1 & (Z_1 + Z_3 + Z_4) & 0 \\ -Z_2 & -Z_4 & 1 \end{vmatrix}} \quad (3.55)$$

ou

$$e_0 = \frac{[Z_1 Z_4 + Z_2 (Z_1 + Z_3 + Z_4)] e_i}{(Z_1 + Z_2)(Z_1 + Z_3 + Z_4) - Z_1^2} \quad (3.56)$$

logo

$$\frac{e_0}{e_i}(D) = \frac{[Z_1 Z_4 + Z_2 (Z_1 + Z_3 + Z_4)]}{Z_2 (Z_1 + Z_3 + Z_4) + Z_1 (Z_3 + Z_4)} \quad (3.57)$$

3.3.6 – CIRCUITO COM GERADOR DE CORRENTE – EXEMPLO 1

Para o circuito da Figura 3.14, obter a função de transferência $\frac{i_0}{i_i}(D)$.

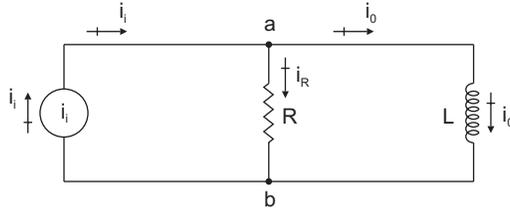


Figura 3.14 Circuito com gerador de corrente, exemplo 1.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.1.
- (2) A fonte geradora de corrente não possui nenhuma impedância interna.

b) Modelagem:

Aplicando a Lei dos Nós de Kirchoff ao nó *a* obtemos:

$$i_i = i_o + i_R \quad (3.58)$$

Da Figura 3.14 temos:

$$e_{ab} = R i_R \quad (3.59)$$

$$e_{ab} = L D i_o \quad (3.60)$$

Igualando as equações 3.59 e 3.60 obtemos:

$$i_R = \frac{L}{R} D i_o \quad (3.61)$$

Substituindo (3.61) em (3.58) vem:

$$i_i = \left(1 + \frac{L}{R} D \right) i_o \quad (3.62)$$

Logo:

$$\frac{i_o}{i_i}(D) = \frac{1}{\frac{L}{R} D + 1} \quad (3.63)$$

ou

$$\frac{i_o}{i_i}(D) = \frac{1}{\tau D + 1} \quad (3.64)$$

em que:

$$\tau \triangleq \frac{L}{R} \triangleq \text{constante de tempo.}$$

3.3.7 – CIRCUITO COM GERADOR DE CORRENTE – EXEMPLO 2

Para o circuito da Figura 3.15, obter a função de transferência $\frac{e_0}{i_i}(D)$.

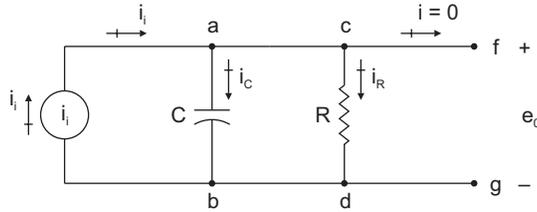


Figura 3.15 Circuito com gerador de corrente, exemplo 2.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.1.
- (2) Os terminais f e g , Figura 3.15, estão abertos, portanto, $i = 0$.
- (3) A fonte geradora de corrente não possui nenhuma impedância interna.

b) Modelagem:

Aplicando a Lei dos Nós ao nó a , vem:

$$i_i = i_c + i_R \quad (3.65)$$

Da Figura 3.15 temos:

$$e_0 = \frac{1}{CD} i_c \Rightarrow i_c = CD e_0 \quad (3.66)$$

$$e_0 = R i_R \Rightarrow i_R = \frac{e_0}{R} \quad (3.67)$$

Substituindo (3.66) e (3.67) na (3.65) obtemos:

$$i_i = CD e_0 + \frac{e_0}{R} = \left(\frac{RCD + 1}{R} \right) e_0 \quad (3.68)$$

Logo

$$\frac{e_0}{i_i}(D) = \frac{R}{RCD + 1} \quad (3.69)$$

ou

$$\frac{e_0}{i_i}(D) = \frac{K}{\tau D + 1} \quad (3.70)$$

em que:

$K \triangleq R \triangleq$ ganho da função de transferência;

$\tau \triangleq RC \triangleq$ constante de tempo.

3.3.8 – CIRCUITO COM AMPLIFICADOR OPERACIONAL – EXEMPLO 1

Para o circuito da Figura 3.16, determinar a função de transferência $\frac{e_o}{e_i}(D)$.

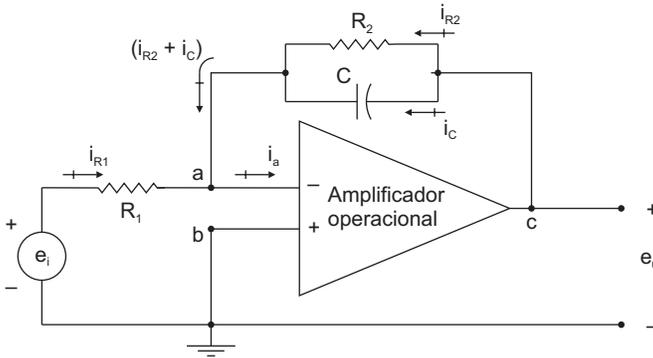


Figura 3.16 Circuito contendo um amplificador operacional, exemplo 1.

a) Hipóteses:

(1) Todas as hipóteses do Quadro 3.1.

b) Modelagem:

Entre os elementos da Figura 3.16 existe um *Amplificador Operacional* (amp-op), que é um elemento ativo. O símbolo utilizado para um amplificador operacional está ilustrado na Figura 3.17.

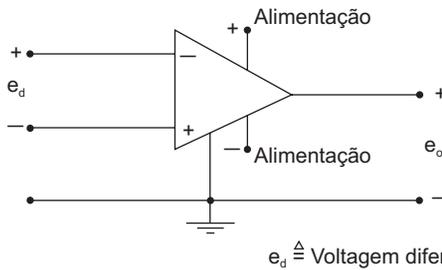


Figura 3.17 Simbologia de um amplificador operacional.

A conexão indicada com sinal negativo (-) é a *entrada inversora* e a indicada com o sinal positivo (+) é a *não-inversora*. As conexões de alimentação do amplificador geralmente não são mostradas.

Uma importante propriedade dos amps-ops se refere a seu ganho, da ordem de 10^6 ou maior.

Em decorrência de seu alto ganho, deve haver realimentação para estabilizá-lo. O circuito de realimentação é implementado conectando o terminal de saída ao terminal da entrada inversora. Fazendo esta ligação, temos realimentação negativa, portanto estabilizadora. No caso da Figura 3.16, a realimentação é realizada por meio do capacitor C em paralelo com a resistência R_2 , do ponto c ao ponto a .

Em face de seu alto ganho e sua realimentação estabilizadora, o amplificador operacional gera em sua saída uma voltagem e_0 , tal que resulta em sua entrada uma voltagem e_{ab} ínfima ($e_{ab} \approx 0$). O nó a então funciona como se estivesse aterrado e a corrente i_a é aproximadamente *zero* ($i_a \approx 0$). Desta forma, podemos considerar a soma das correntes no nó a como sendo:

$$i_{R1} + i_{R2} + i_c = 0 \quad (3.71)$$

Logo:

$$\frac{e_i}{R_1} + \frac{e_0}{R_2} + \frac{e_0}{\left(\frac{1}{CD}\right)} = 0 \quad (3.72)$$

ou

$$\frac{e_i}{R_1} + \left(\frac{1}{R_2} + CD\right)e_0 = 0 \quad (3.73)$$

Assim, da equação 3.73 vem:

$$-\frac{e_i}{R_1} = \left(\frac{R_2 CD + 1}{R_2}\right)e_0 \quad (3.74)$$

Portanto:

$$\frac{e_0}{e_i}(D) = \frac{-\left(R_2/R_1\right)}{R_2 CD + 1} \quad (3.75)$$

Definindo:

$K \triangleq \frac{R_2}{R_1} \triangleq$ ganho (observe que $K > 0$); e

$\tau \triangleq R_2 C \triangleq$ constante de tempo.

Então:

$$\frac{e_o}{e_i}(D) = \frac{-K}{\tau D + 1} \quad (3.76)$$

que é a função de transferência do circuito dado na Figura 3.16.

Agora, modificando o esquema da Figura 3.16, vamos retirar R_2 do circuito, ficando somente com o capacitor no ramo da realimentação. Nessa nova configuração a corrente i_{R_2} não existe. Assim, adaptando (3.71), (3.72) e (3.73) para essa condição obtemos:

$$\frac{e_i}{R_1} = -C D e_o \quad (3.77)$$

ou

$$\frac{e_o}{e_i}(D) = -\frac{1/R_1 C}{D} \quad (3.78)$$

Definindo:

$$K \triangleq \frac{1}{R_1 C} \triangleq \text{ganho } (K > 0).$$

Então:

$$\frac{e_o}{e_i}(D) = -\frac{K}{D} \quad (3.79)$$

que é um inversor de ganho K combinado com um integrador. Colocando essa função de transferência na forma de diagrama de blocos obtemos a Figura 3.18.

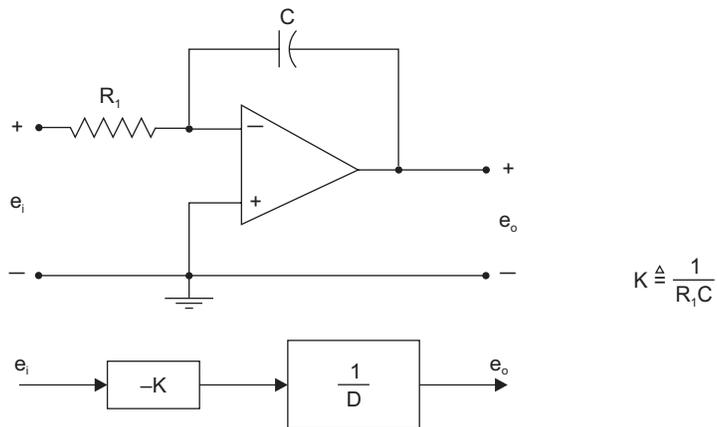


Figura 3.18 Diagrama de blocos de um amp-op montado como integrador.

Se a voltagem $e_i(t)$ for igual à função degrau unitário² $u(t)$, a voltagem saída $e_o(t)$ é uma rampa negativa de coeficiente angular igual a $-K$, Figura 3.19.

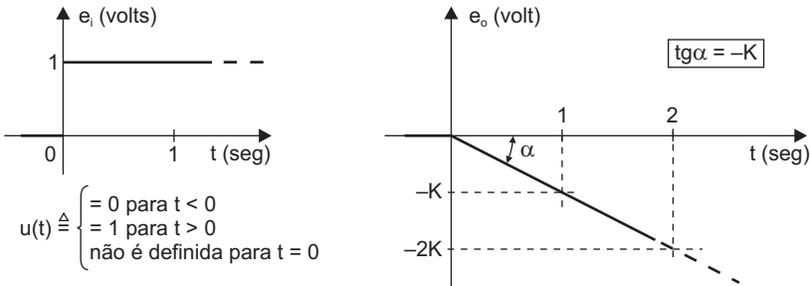


Figura 3.19 Gráfico da saída do integrador da Figura 3.18 quando a entrada é o degrau unitário (com condições iniciais iguais a zero).

3.3.9 – CIRCUITO COM AMPLIFICADOR OPERACIONAL – EXEMPLO 2

Para o circuito da Figura 3.20, determinar as funções de transferência $\frac{e_o}{e_i}(D)$ e $\frac{e_o}{i_i}(D)$.

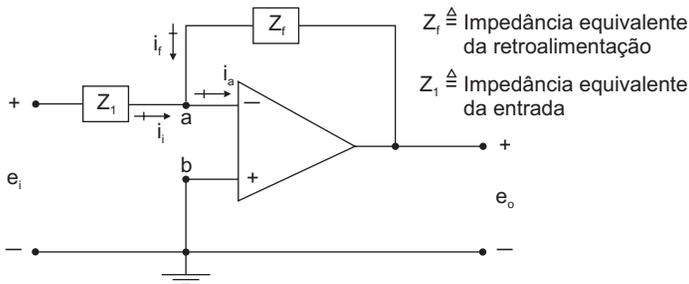


Figura 3.20 Circuito contendo um amplificador operacional, exemplo 2.

a) Hipóteses:

(1) Todas as hipóteses do Quadro 3.1.

b) Modelagem:

Sabendo que $i_a = 0$, então a somatória das correntes no nó a fica:

$$i_i + i_f = 0 \tag{3.80}$$

2. Vide Capítulo 4, seção 4.6, para detalhes da função degrau unitário.

Da Figura 3.20 temos:

$$i_f = \frac{e_0}{Z_f} \quad (3.81)$$

Substituindo (3.81) em (3.80) vem:

$$i_i = -\frac{e_0}{Z_f} \quad (3.82)$$

Logo:

$$\frac{e_0}{i_i}(D) = -Z_f \quad (3.83)$$

A equação 3.83 é a primeira função de transferência pedida.

Agora, sabendo que Z_l é a impedância equivalente que relaciona e_i e i_i , então:

$$i_i = \frac{e_i}{Z_l} \quad (3.84)$$

que, substituindo em (3.83), resulta:

$$\frac{e_0}{\left(\frac{e_i}{Z_l}\right)}(D) = -Z_f \quad (3.85)$$

Logo:

$$\frac{e_0}{e_i}(D) = -\frac{Z_f}{Z_l} \quad (3.86)$$

que é a segunda função de transferência pedida.

3.4 – SISTEMAS MECÂNICOS

Para as modelagens dos Sistemas Mecânicos desenvolvidas neste capítulo temos um conjunto de hipóteses gerais listadas no Quadro 3.2.

Quadro 3.2 Hipóteses Gerais de Sistemas Mecânicos (usadas neste capítulo).

- 1 – Todas as massas são rígidas e têm valores constantes.
- 2 – As molas são puras e lineares. Não têm perda de energia e não possuem massa. Os seus respectivos coeficientes são constantes.
- 3 – Os amortecedores são puros e lineares. Não têm efeito de mola e não possuem massa. Os seus respectivos coeficientes são constantes.
- 4 – Quando a massa pode transladar, o seu movimento é em uma só direção.
- 5 – Quando a massa pode girar, a sua rotação é em torno de um só eixo.
- 6 – Todas as condições iniciais são nulas.
- 7 – Superfícies em contato têm atrito nulo (planos, mancais, etc.).
- 8 – As variações das grandezas do sistema são relativamente pequenas, a fim de manter o comportamento do sistema praticamente linear.

3.4.1 – SISTEMA MASSA–MOLA–AMORTECEDOR

Para o sistema da Figura 3.21, obter a função de transferência $\frac{x_o}{f_i}(D)$.

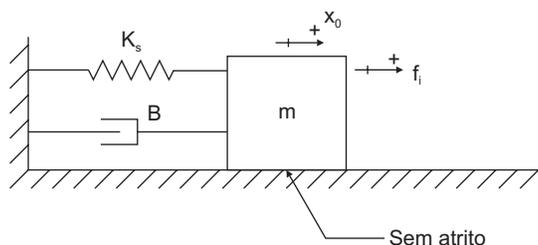


Figura 3.21 Sistema massa–mola–amortecedor.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.2.
- (2) A origem de x_o é no ponto em que a massa se encontra em repouso.
- (3) Com exceção das forças da mola, do amortecedor e f_p , todas as demais forças que podem atuar sobre a massa são nulas.

b) Aplicações de leis:

O sistema possui uma massa, portanto, a Lei de Newton será aplicada uma só vez.

Da Figura 3.21 podemos fazer o diagrama de corpo livre da massa m , Figura 3.22.

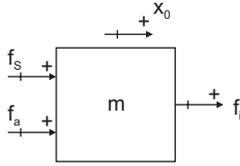


Figura 3.22 Diagrama de corpo livre da massa m .

Aplicando a Lei de Newton à massa m escrevemos:

$$\Sigma F = m D^2 x_o \quad (3.87)$$

Do diagrama de corpo livre vemos que:

$$\Sigma F = f_i + f_s + f_a \quad (3.88)$$

em que:

$\Sigma F \triangleq$ somatória das forças que atuam na massa m ;

$f_i \triangleq$ força externa sobre a massa m (entrada);

$x_o \triangleq$ deslocamento da massa m (saída);

$f_s \triangleq$ força da mola sobre a massa m ;

$f_a \triangleq$ força do amortecedor sobre a massa m .

Combinando (3.87) e (3.88) vem:

$$f_i + f_s + f_a = m D^2 x_o \quad (3.89)$$

que é a equação obtida da aplicação da Lei de Newton.

c) Obtenção das relações:

Como a mola e o amortecedor são ideais (lineares e puros), as relações são, respectivamente:

$$f_s = -K_s x_o \quad (3.90)$$

$$f_a = -B D x_o \quad (3.91)$$

d) Obtenção do modelo:

Substituindo (3.90) e (3.91) em (3.89) vem:

$$f_i - K_s x_o - B D x_o = m D^2 x_o \quad (3.92)$$

ou

$$(m D^2 + B D + K_s) x_o = f_i \quad (3.93)$$

Assim, da (3.93) podemos obter a função de transferência desejada:

$$\frac{x_o}{f_i}(D) = \frac{I}{m D^2 + B D + K_s} \quad (3.94)$$

Dividindo todos os termos da fração por K_s e definindo:

$K \triangleq \left(\frac{I}{K_s} \right)$, ganho da função de transferência;

$\omega_n \triangleq \sqrt{\frac{K_s}{m}}$, frequência natural não-amortecida;

$\frac{2\zeta}{\omega_n} \triangleq \frac{B}{K_s}$, ou: $\zeta \triangleq \frac{B}{2\sqrt{K_s m}}$, fator de amortecimento.

Então, a equação 3.94 fica:

$$\frac{x_o}{f_i}(D) = \frac{K}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} D + 1} \quad (3.95)$$

que é a função de transferência desejada, na forma-padrão do sistema de 2ª ordem.

É importante observar que o sistema massa–mola–amortecedor ilustrado na Figura 3.21 encontra-se na horizontal. Isso significa que a força peso não foi computada no equacionamento (vide equação 3.88). Na verdade, mesmo com o sistema na vertical, a força peso acaba não fazendo parte da função de transferência em razão da escolha criteriosa da origem da variável deslocamento x_o . A origem de x_o deve ser escolhida no ponto em que a massa se encontra em repouso, para qualquer situação, horizontal ou vertical. Com esta escolha, forças constantes, como o peso, não influem no comportamento dinâmico do sistema.

Apenas para ilustrar, vamos considerar o sistema na vertical. Nesta condição, a equação 3.92 fica:

$$f_i - K_s x_o + \overline{F_{ss}} - B D x_o - mg = m D^2 x_o \quad (3.96)$$

em que:

$\overline{F_{ss}} \triangleq$ força estática da mola sobre o corpo decorrente da deflexão da mola causada pelo peso da massa m .

É evidente que a força total da mola F_{mt} é a soma de sua força estática com a força decorrente da deflexão em torno do ponto de repouso, isto é: $F_{mt} = -K_s x_o + \overline{F_{ss}}$.

Por outro lado, sabemos que na condição do repouso as grandezas f_p , x_o , Dx_o e D^2x_o são todas iguais a *zero*. Assim, da equação 3.96, na condição de repouso, obtemos:

$$\overline{F_{ss}} - mg = 0 \quad (3.97)$$

Logo, combinando (3.96) e (3.97) obtemos:

$$f_i - K_s x_o - B Dx_o = m D^2 x_o \quad (3.98)$$

que é exatamente igual à equação 3.92. Portanto, se a origem do deslocamento for na posição em que a massa se encontra em repouso, a função de transferência será a mesma, independentemente de o sistema estar na horizontal, na vertical ou inclinado. É claro que a direção da variável x_o deve acompanhar a direção do possível movimento da massa m , ficando o sentido a critério do projetista.

3.4.2 – SISTEMA EM ROTAÇÃO: INÉRCIA–MOLA–AMORTECEDOR

Para o sistema da Figura 3.23, determinar a função de transferência $\frac{\theta_o}{M_i}(D)$.

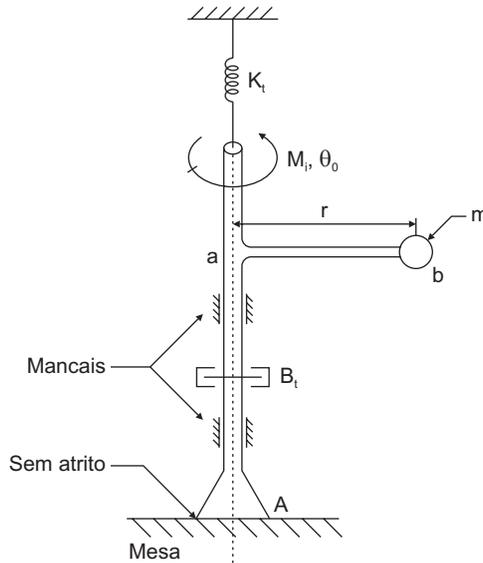


Figura 3.23 Sistema em rotação contendo uma massa pontual.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.2.
- (2) A massa m é pontual.

- (3) O eixo e o braço \overline{ab} são rígidos e têm massas desprezíveis.
- (4) Os mancais são rígidos e sem folgas.
- (5) A origem de θ_0 é no ponto em que o eixo se encontra em repouso (torque da mola igual a zero).
- (6) Nenhum momento atua sobre o sistema, com exceção de M_i , do momento da mola e do momento do amortecedor.

b) Aplicação de leis:

Como o sistema possui apenas uma inércia que gira em torno de um eixo, aplicaremos a Lei de Newton uma só vez.

Assim, da Figura 3.23 temos:

$$M_i + M_{st} + M_{at} = J D^2 \theta_o \quad (3.99)$$

em que:

M_i , M_{st} e M_{at} \triangleq são, respectivamente, os momentos de entrada (“input”), da mola torcional e do amortecedor torcional, sobre o eixo;

J \triangleq momento de inércia do sistema em relação ao eixo;

θ_o \triangleq deslocamento angular do eixo. Sua origem é no ponto em que o eixo se encontra em repouso.

A partir de estudos efetuados em cursos básicos de Mecânica Geral sabemos que o momento de inércia de uma massa pontual em relação a um eixo é dado por:

$$J = r^2 m \quad (3.100)$$

em que:

r \triangleq distância da massa pontual ao eixo (raio), Figura 3.23.

Substituindo (3.100) em (3.99) obtemos:

$$M_i + M_{st} + M_{at} = mr^2 D^2 \theta_o \quad (3.101)$$

c) Relações:

Os momentos da mola e do amortecedor torcionais são dados, respectivamente, por:

$$M_{st} = -K_t \theta_o \quad (3.102)$$

$$M_{at} = -B_t D \theta_o \quad (3.103)$$

em que:

K_t \triangleq coeficiente da mola torcional, considerado constante;

$B_t \triangleq$ coeficiente do amortecedor torcional, considerado constante.

d) Obtenção do modelo:

Substituindo (3.102) e (3.103) em (3.101), obtemos:

$$m r^2 D^2 \theta_0 + B_t D \theta_0 + K_t \theta_0 = M_i \quad (3.104)$$

ou

$$(m r^2 D^2 + B_t D + K_t) \theta_0 = M_i \quad (3.105)$$

Da equação 3.105 escrevemos:

$$\frac{\theta_0}{M_i}(D) = \frac{1}{m r^2 D^2 + B_t D + K_t} \quad (3.106)$$

Agora, trabalhando para deixar (3.106) na forma-padrão do sistema de segunda ordem, dividimos o numerador e o denominador por K_t , então:

$$\frac{\theta_0}{M_i}(D) = \frac{1/K_t}{\frac{m r^2}{K_t} D^2 + \frac{B_t}{K_t} D + 1} \quad (3.107)$$

Definindo:

$K \triangleq \frac{1}{K_t}$, ganho da função de transferência (unidade \equiv rad/unidade de torque = 1/unidade de torque).

$\omega_n \triangleq \sqrt{\frac{K_t}{m r^2}}$, frequência natural não-amortecida (unidade = *rad/seg*);

$\frac{2 \zeta}{\omega_n} \triangleq \frac{B_t}{K_t}$, ou: $\zeta \triangleq \frac{B_t}{2 \sqrt{K_t m r^2}}$, fator de amortecimento (sem unidades).

Então, obtemos:

$$\frac{\theta_0}{M_i}(D) = \frac{K}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2 \zeta}{\omega_n} D + 1} \quad (3.108)$$

3.4.3 – SISMÓGRAFO/ACELERÔMETRO

Para o sistema da Figura 3.24, determinar $\frac{x_o}{x_i}(D)$ e $\frac{\ddot{x}_o}{\ddot{x}_i}(D)$.

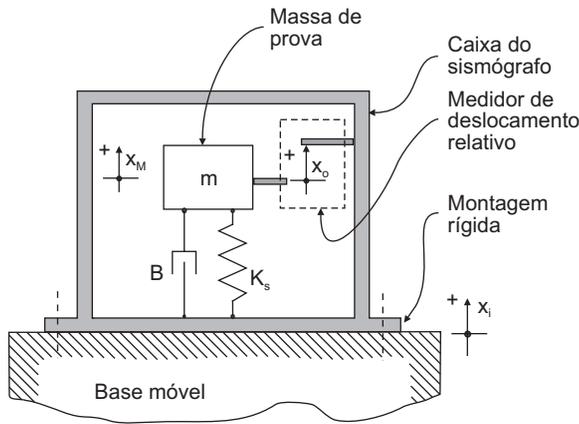


Figura 3.24 Esquema de um sismógrafo/acelerômetro.

A Figura 3.24 representa o esquema de dois tipos de instrumentos de medida, o sismógrafo e o acelerômetro, que são utilizados para medir, respectivamente, deslocamento absoluto e aceleração absoluta.

Uma das maneiras de medirmos a vibração de um ponto, por exemplo, do ponto *A* da Figura 3.25, seria usar uma referência estática para fixar o instrumento.

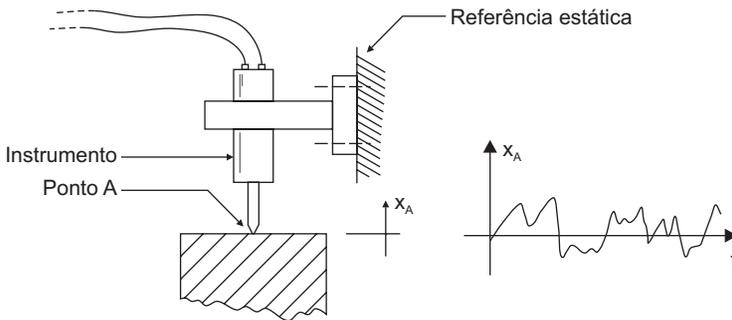


Figura 3.25 Medição da vibração de um ponto usando um instrumento e uma referência estática.

Muitas vezes, a existência de uma referência estática não é possível, como, por exemplo, no caso de medições de vibrações em veículos, terremotos, etc., mas mesmo assim desejamos medir a vibração absoluta do deslocamento (ou aceleração) de um ponto. Em certas situações, apesar de a referência estática ser perfeitamente possível, não é utilizada por conta de inconvenientes. Na prática, muitos especialistas preferem

usar o sismógrafo ou acelerômetro para tais medições, o que prova a enorme importância destes instrumentos.

Iniciando a modelagem, vamos considerar as hipóteses.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.2.
- (2) Todos os componentes são montados de maneira “rígida”, isto é, supomos que não há nem folgas nem elasticidade nas conexões.
- (3) Com exceção das forças da mola e do amortecedor, todas as demais forças que podem atuar sobre a massa são nulas.
- (4) As origens de x_o , x_M e x_i são estabelecidas com o sistema em repouso, isto é, quando o sistema está em repouso, seus valores são nulos.

b) Aplicações de leis:

O sistema possui uma massa, portanto, a Lei de Newton será aplicada uma só vez.

Da Figura 3.24 podemos elaborar o diagrama de corpo livre, Figura 3.26.

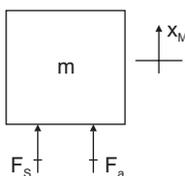


Figura 3.26 Diagrama do corpo livre da massa m (vide Figura 3.24).

Aplicando a Lei de Newton à massa m obtemos:

$$F_s + F_a = m \ddot{x}_M \tag{3.109}$$

em que:

$m \triangleq$ massa do corpo;

F_s e $F_a \triangleq$ forças da mola e do amortecedor, respectivamente, sobre a massa;

$x_M \triangleq$ deslocamento absoluto da massa m .

c) Relações:

Da Figura 3.24 vemos que

$$x_o = x_i - x_M \tag{3.110}$$

ou

$$x_M = x_i - x_o \tag{3.111}$$

em que:

$x_i \triangleq$ deslocamento absoluto da base móvel;

$x_o \triangleq$ deslocamento da massa m em relação à base (deslocamento relativo), medido no sentido indicado pela Figura 3.24.

Agora, voltando às forças da mola e do amortecedor, temos que:

$$F_s = -K_s (x_M - x_i) \quad (3.112)$$

$$F_a = -B(Dx_M - Dx_i) \quad (3.113)$$

Substituindo (3.110) nas equações 3.112 e 3.113 temos:

$$F_s = +K_s x_o \quad (3.114)$$

$$F_a = +BDx_o \quad (3.115)$$

d) Obtenção do modelo:

Substituindo (3.111), (3.114) e (3.115) em (3.109), obtemos:

$$+K_s x_o + BDx_o = +mD^2 x_i - mD^2 x_o \quad (3.116)$$

ou

$$(mD^2 + BD + K_s)x_o = mD^2 x_i \quad (3.117)$$

Logo, da (3.117) vem:

$$\frac{x_o}{x_i}(D) = \frac{mD^2}{mD^2 + BD + K_s} \quad (3.118)$$

ou

$$\frac{x_o}{x_i}(D) = \frac{D^2/\omega_n^2}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}D + 1} \quad (3.119)$$

em que:

$\omega_n \triangleq \sqrt{K_s/m}$, frequência natural não-amortecida;

$\frac{2\zeta}{\omega_n} \triangleq \frac{B}{K_s}$, ou: $\zeta \triangleq \frac{B}{2\sqrt{K_s m}}$, fator de amortecimento.

Uma das funções de transferência pedida é dada pela (3.119), para o sismógrafo, pois tem como saída o deslocamento relativo x_o em função do deslocamento da base

x_i . A outra função de transferência é $\frac{x_o}{\ddot{x}_i}(D)$, para o acelerômetro. Esta função de transferência pode ser obtida da (3.116) ou diretamente da (3.119).

Sabemos que

$$x_i = \frac{1}{D^2} \ddot{x}_i \quad (3.120)$$

Substituindo (3.120) em (3.119) vem:

$$\left(\frac{x_o}{\ddot{x}_i} \right) (D) = \frac{D^2 / \omega_n^2}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} D + 1} \quad (3.121)$$

ou

$$\frac{x_o}{\ddot{x}_i} (D) = \frac{1 / \omega_n^2}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} D + 1} \quad (3.122)$$

A segunda função de transferência, dada pela (3.122), é para o acelerômetro, pois tem como saída o deslocamento relativo x_o e como entrada a aceleração da base \ddot{x}_i .

3.4.4 – PÊNDULO SIMPLES

Determinar o modelo matemático do movimento oscilatório de um pêndulo, Figura 3.27.

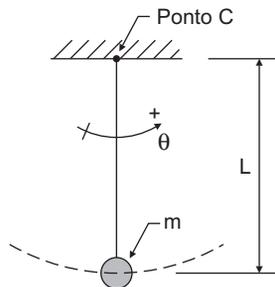


Figura 3.27 Pêndulo simples.

Nesta modelagem não temos uma entrada função do tempo como nos sistemas anteriores. A dinâmica do sistema é exercitada por meio de uma entrada tipo condição inicial. Portanto, neste caso, o modelo procurado é uma equação diferencial homogênea.

a) Hipóteses:

- (1) A massa m é pontual.
- (2) O ponto C pertence a uma referência estática.
- (3) A barra que liga o ponto C à massa m é rígida e tem massa desprezível.
- (4) O campo gravitacional é constante.
- (5) Os movimentos circulares de m em torno do ponto C são bastante pequenos.

b) Aplicação de Leis:

O sistema possui uma massa, portanto, a Lei de Newton será aplicada uma só vez.

Vamos considerar o diagrama de forças, Figura 3.28, para o pêndulo em uma posição θ arbitrária.

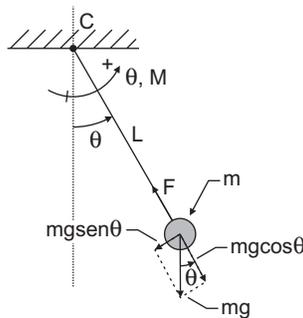


Figura 3.28 Diagrama de forças sobre m para o pêndulo em uma posição θ .

A componente do peso na direção da barra ($mg\cos\theta$) será sempre equilibrada pela força F aplicada pela barra, portanto, não causará movimentos de m nessa direção radial. Por sua vez, a componente do peso na direção perpendicular à barra ($mgsen\theta$) causará giro de m em torno de C , em função de seu momento em relação a C .

Logo, da Lei de Newton obtemos:

$$\Sigma M = J D^2 \theta \tag{3.123}$$

c) Relações:

Da Figura 3.28 vemos que:

$$J = m L^2 \tag{3.124}$$

e que:

$$\sum M = -L m g \operatorname{sen} \theta \quad (3.125)$$

Como foram consideradas variações pequenas do ângulo θ , então podemos aproximar o seno ao ângulo θ (θ em radianos), ou seja:

$$\operatorname{sen} \theta \approx \theta \quad (3.126)$$

Assim, a equação 3.125 pode ser reescrita como:

$$\sum M = -L m g \theta \quad (3.127)$$

d) Obtenção do modelo:

Substituindo (3.124) e (3.127) em (3.123), obtemos:

$$-L m g \theta = m L^2 D^2 \theta \quad (3.128)$$

ou

$$(m L^2 D^2 + m L g) \theta = 0 \quad (3.129)$$

Colocando (3.129) na forma-padrão obtemos:

$$\left(\frac{D^2}{\omega_n^2} + 1 \right) \theta = 0 \quad (3.130)$$

em que:

$$\omega_n \triangleq \sqrt{g/L}, \text{ frequência natural não-amortecida.}$$

A equação 3.130 é o modelo pedido. Observamos que o modelo é do tipo 2ª ordem (equação diferencial linear ordinária com coeficientes constantes) e tem fator de amortecimento (ζ) nulo.

A frequência natural é diretamente proporcional a \sqrt{g} .

Em relação ao comprimento da barra, a frequência é inversamente proporcional a \sqrt{L} . Logo, se queremos frequências naturais bastante baixas, temos de usar barras bastante longas.

3.4.5 – SISTEMA COM MASSAS EM UM EIXO

Para o sistema da Figura 3.29, determinar a função de transferência $\frac{x_o}{M_i}(D)$.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.2.
- (2) O eixo e os braços são rígidos e não têm massa.

- (3) O disco é rígido e seu eixo BB é paralelo ao eixo AA.
- (4) A massa m_1 é pontual.
- (5) Na condição de repouso, os braços 1 e 2 estão na horizontal.
- (6) As origens de x_o e θ são estabelecidas nas posições, respectivamente, quando o sistema está em repouso.
- (7) O sistema tem pequenos movimentos em torno da posição de equilíbrio.
- (8) Nenhum esforço (força ou momento) atua sobre o sistema, com exceção do momento M_i ; do momento da mola torcional; dos pesos de m_1 e do disco; e da força do amortecedor de translação.

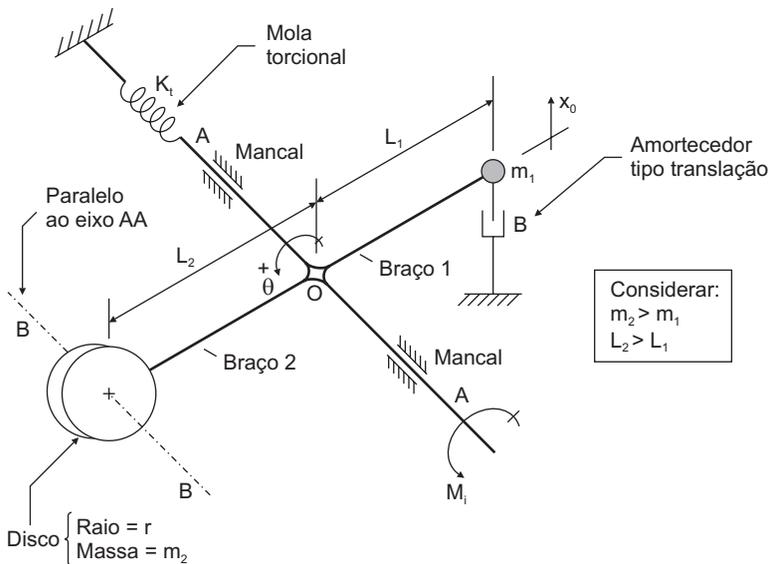


Figura 3.29 Esquema de um sistema com massas girantes em torno de um eixo.

b) Aplicação de leis:

Antes do estudo dinâmico, vamos realizar o estudo estático.

b.1) Estudo estático:

De acordo com os dados, a massa m_1 é menor que a massa m_2 e o braço L_1 é menor que o braço L_2 . No equilíbrio (em repouso), o momento da força peso de m_1 é menor que o momento da força peso de m_2 , ambos os momentos em relação ao eixo AA. Como nessa condição o amortecedor não faz força (velocidade = zero), então o sistema fica em equilíbrio em decorrência de um momento da mola torcional. Assim, fazendo a somatória dos momentos em relação ao eixo obtemos:

$$m_2 g L_2 + \overline{M}_{st} - m_1 g L_1 = 0 \quad (3.131)$$

em que:

$\overline{M}_{st} \triangleq$ momento que a mola torcional aplica ao sistema, na condição de repouso.

Conceitualmente observamos que, no equilíbrio desse sistema, a mola tem deformação no sentido positivo; isso significa que o torque \overline{M}_{st} tem sentido negativo.

b.2) Estudo dinâmico:

O sistema possui 2 massas, mas ambas estão rigidamente conectadas, portanto, constituem uma única inércia em torno do eixo AA . Chamando de J a inércia total em relação a esse eixo, esta então é dada por:

$$J = m_1 L_1^2 + \left[\left(\frac{1}{2} m_2 r^2 \right) + L_2^2 m_2 \right] \quad (3.132)$$

Na equação 3.132 o termo $m_1 L_1^2$ é o momento de inércia da massa pontual m_1 ; o termo $\frac{1}{2} m_2 r^2$ é o momento de inércia do disco de raio r em relação ao seu eixo BB ; e o termo $L_2^2 m_2$ é decorrente da translação entre os eixos paralelos, do eixo BB para o eixo AA , pois o eixo AA é o eixo de referência.

Assim, como temos só uma inércia, aplicamos a Lei de Newton uma só vez. Portanto:

$$\Sigma M = J D^2 \theta \quad (3.133)$$

em que:

$\Sigma M \triangleq$ somatória dos momentos aplicados sobre a inércia J .

Como o movimento tem deslocamentos angulares pequenos, podemos considerar os momentos decorrentes dos pesos praticamente constantes. Logo, a somatória dos momentos fica:

$$\Sigma M = M_i + M_{st} + M_a + m_2 g L_2 - m_1 g L_1 \quad (3.134)$$

em que:

$M_{st} \triangleq$ momento da mola torcional sobre a inércia;

$M_a \triangleq$ momento causado pelo amortecedor, sobre a inércia.

Substituindo (3.134) na (3.133) obtemos:

$$M_i + M_{st} + M_a + m_2 g L_2 - m_1 g L_1 = J D^2 \theta \quad (3.135)$$

c) Relações:

Se os deslocamentos angulares são pequenos, podemos escrever:

$$x_o \approx L_1 \theta \quad (3.136)$$

e, derivando:

$$D x_o \approx L_1 D \theta \quad (3.137)$$

$$D^2 x_o \approx L_1 D^2 \theta \quad (3.138)$$

c.1) Momento da mola torcional:

A mola torcional tem modelo linear e na posição de repouso aplica torque negativo \overline{M}_{st} ao sistema. Em decorrência da linearidade, o momento total M_{st} da mola é:

$$M_{st} = -K_t \theta + \overline{M}_{st} \quad (3.139)$$

c.2) Momento causado pelo amortecedor:

O amortecedor de coeficiente B é do tipo translação, portanto, sua força F_a é:

$$F_a = -B D x_o \quad (3.140)$$

e o momento dessa força em relação ao eixo AA pode ser escrito:

$$M_a = -L_1 B D x_o \quad (3.141)$$

d) Obtenção do modelo:

Substituindo (3.139) e (3.141) na (3.135) vem:

$$M_i - K_t \theta + \overline{M}_{st} - B L_1 D x_o + m_2 g L_2 - m_1 g L_2 = J D^2 x_o \quad (3.142)$$

Observando as equações 3.131 e 3.142 concluímos que os termos da condição de repouso (equilíbrio estático) podem ser retirados da equação 3.142. Assim:

$$M_i - K_t \theta - B L_1 D x_o = J D^2 \theta \quad (3.143)$$

Conforme era esperado, os termos que fazem o equilíbrio estático ficaram ausentes da equação do modelo dinâmico. Isso ocorre quando as origens das variáveis são estabelecidas na condição do sistema em repouso, isto é, quando o sistema encontra-se em repouso, seus valores são nulos. Nesta modelagem seguimos essa recomendação, pois no início fizemos a escolha das origens de x_o e θ considerando o sistema em repouso. Portanto, as condições de $m_1 < m_2$ e $L_1 < L_2$ não são necessárias, mas foram adotadas apenas para facilitar a discussão do equilíbrio estático.

Agora, substituindo (3.136) e (3.138) na (3.143) e organizando os termos obtemos:

$$\left[\frac{J}{L_1} D^2 + B L_1 D + \frac{K_t}{L_1} \right] x_o = M_i \quad (3.144)$$

ou

$$\frac{x_o}{M_i}(D) = \frac{1}{\frac{J}{L_1} D^2 + B L_1 D + \frac{K_t}{L_1}} \quad (3.145)$$

Para escrever (3.145) na forma-padrão, dividimos o numerador e o denominador da função de transferência por K_t/L_1 . Portanto:

$$\frac{x_o}{M_i}(D) = \frac{L_1/K_t}{\frac{J}{K_t} D^2 + \frac{B L_1}{K_t} D + 1} \quad (3.146)$$

Definindo:

$K \triangleq L_1/K_t$, ganho da função de transferência.

$\omega_n \triangleq \sqrt{\frac{K_t}{J}} = \sqrt{\frac{K_t}{m_1 L_1^2 + 0,5 m_2 r^2 + L_2^2 m_2}}$, frequência natural não-amortecida; e

$\frac{2 \zeta}{\omega_n} \triangleq \frac{B L_1^2}{K_t}$, ou: $\zeta \triangleq \frac{B L_1^2}{2 \sqrt{K_t (m_1 L_1^2 + 0,5 m_2 r^2 + L_2^2 m_2)}}$, fator de amortecimento.

Finalmente obtemos:

$$\frac{x_o}{M_i}(D) = \frac{K}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2 \zeta}{\omega_n} D + 1} \quad (3.147)$$

3.4.6 – SISTEMA COM DUAS MASSAS EM TRANSLAÇÃO

Para o sistema da Figura 3.30, determinar todas as funções de transferências considerando força como entrada e deslocamento como saída. Com os modelos obtidos, fazer o diagrama de blocos do sistema.

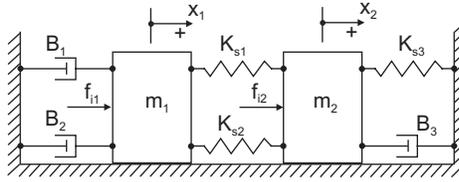


Figura 3.30 Sistema com duas massas em translação e duas forças atuantes.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.2.
- (2) As origens de x_1 e x_2 (pontos em que $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$) são nos pontos em que as massas m_1 e m_2 se encontram em repouso, respectivamente.
- (3) Nenhuma outra força atua nas massas m_1 e m_2 , com exceção das forças f_{i1} e f_{i2} , das forças das molas e das forças dos amortecedores.

b) Aplicações de leis:

O sistema possui duas massas, portanto, a Lei de Newton será aplicada duas vezes.

b.1) Lei de Newton aplicada à massa m_1 :

Da Figura 3.30 podemos fazer o diagrama de corpo livre para a massa m_1 , considerando apenas as forças na direção de x_1 , Figura 3.31.

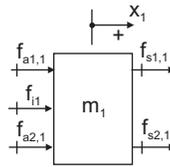


Figura 3.31 Diagrama de corpo livre da massa m_1 .

As variáveis da Figura 3.31 têm as seguintes definições:

$f_{i1} \triangleq$ força externa sobre a massa m_1 (entrada número 1);

$f_{s1,1} \triangleq$ força da mola 1 sobre a massa m_1 ;

$f_{s2,1} \triangleq$ força da mola 2 sobre a massa m_1 ;

$f_{a1,1} \triangleq$ força do amortecedor 1 sobre a massa m_1 ;

$f_{a2,1} \triangleq$ força do amortecedor 2 sobre a massa m_1 ;

$x_1 \triangleq$ deslocamento da massa m_1 .

Do diagrama da Figura 3.31 podemos escrever:

$$f_{i1} + f_{a1,1} + f_{a2,1} + f_{s1,1} + f_{s2,1} = m_1 D^2 x_1 \quad (3.148)$$

b.2) Lei de Newton aplicada à massa m_2 :

Da Figura 3.30 podemos fazer o diagrama de corpo livre para a massa m_2 , considerando apenas as forças na direção de x_2 , Figura 3.32.

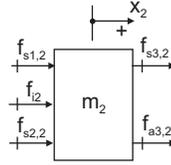


Figura 3.32 Diagrama de corpo livre da massa m_2 .

As variáveis da Figura 3.32 têm as seguintes definições:

$f_{i2} \triangleq$ força externa sobre a massa m_2 (entrada número 2);

$f_{s1,2} \triangleq$ força da mola 1 sobre a massa m_2 ;

$f_{s2,2} \triangleq$ força da mola 2 sobre a massa m_2 ;

$f_{s3,2} \triangleq$ força da mola 3 sobre a massa m_2 ;

$f_{a3,2} \triangleq$ força do amortecedor 3 sobre a massa m_2 ;

$x_2 \triangleq$ deslocamento da massa m_2 .

Do diagrama da Figura 3.32 podemos escrever:

$$f_{i2} + f_{s1,2} + f_{s2,2} + f_{s3,2} + f_{a3,2} = m_2 D^2 x_2 \quad (3.149)$$

c) Obtenção das relações:

Como as molas e o amortecedor são lineares puros, então:

$$\left. \begin{aligned} f_{s1,1} &= -K_{s1}(x_1 - x_2) \\ f_{s2,1} &= -K_{s2}(x_1 - x_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f_{s1,1} + f_{s2,1}) = -(K_{s1} + K_{s2})(x_1 - x_2) \quad (3.150)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{a1,1} &= -B_1 D x_1 \\ f_{a2,1} &= -B_2 D x_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f_{a1,1} + f_{a2,1}) = -(B_1 + B_2) D x_1 \quad (3.151)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{s1,2} &= -K_{s1}(x_2 - x_1) \\ f_{s2,2} &= -K_{s2}(x_2 - x_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f_{s1,2} + f_{s2,2}) = -(K_{s1} + K_{s2})(x_2 - x_1) \quad (3.152)$$

$$f_{s3,2} = -K_{s3} x_2 \quad (3.153)$$

$$f_{a3,2} = -B_3 D x_2 \quad (3.154)$$

d) Obtenção do modelo:

d.1) Equações na forma de matriz:

Substituindo as equações 3.150 a 3.154 nas 3.148 e 3.149 e reorganizando os termos obtemos:

$$\left[m_1 D^2 + (B_1 + B_2)D + (K_{s1} + K_{s2}) \right] x_1 - (K_{s1} + K_{s2})x_2 = f_{i1} \quad (3.155)$$

$$-(K_{s1} + K_{s2})x_1 + \left[m_2 D^2 + B_3 D + (K_{s1} + K_{s2} + K_{s3}) \right] x_2 = f_{i2} \quad (3.156)$$

que na forma de matriz fica:

$$\begin{bmatrix} m_1 D^2 + (B_1 + B_2)D + (K_{s1} + K_{s2}) & -(K_{s1} + K_{s2}) \\ -(K_{s1} + K_{s2}) & m_2 D^2 + B_3 D + (K_{s1} + K_{s2} + K_{s3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

d.2) Funções de transferências:

Usando a Regra de Cramer, fazendo $f_{i2} = 0$ para determinarmos $\frac{x_1}{f_{i1}}(D)$ e $\frac{x_2}{f_{i1}}(D)$ e fazendo $f_{i1} = 0$ para determinarmos $\frac{x_1}{f_{i2}}(D)$ e $\frac{x_2}{f_{i2}}(D)$, resulta:

$$G_{11} \triangleq \frac{x_1}{f_{i1}}(D) \Bigg|_{f_{i2}=0} = \frac{m_2 D^2 + B_3 D + K_{s1} + K_{s2} + K_{s3}}{aD^4 + bD^3 + cD^2 + dD + e} \quad (3.158)$$

$$G_{22} \triangleq \frac{x_2}{f_{i2}}(D) \Bigg|_{f_{i1}=0} = \frac{m_1 D^2 + (B_1 + B_2)D + (K_{s1} + K_{s2})}{aD^4 + bD^3 + cD^2 + dD + e} \quad (3.159)$$

$$G_{12} \triangleq \frac{x_1}{f_{i2}}(D) \Bigg|_{f_{i1}=0} = \frac{(K_{s1} + K_{s2})}{aD^4 + bD^3 + cD^2 + dD + e} \quad (3.160)$$

$$G_{21} \triangleq \frac{x_2}{f_{i1}}(D) \Bigg|_{f_{i2}=0} = \frac{(K_{s1} + K_{s2})}{aD^4 + bD^3 + cD^2 + dD + e} \quad (3.161)$$

em que:

$$a \triangleq m_1 m_2;$$

$$b \triangleq m_2 (B_1 + B_2) + m_1 B_3;$$

$$c \triangleq m_1 (K_{s1} + K_{s2} + K_{s3}) + m_2 (K_{s1} + K_{s2}) + B_3 (B_1 + B_2);$$

$$d \triangleq (B_1 + B_2) (K_{s1} + K_{s2} + K_{s3}) + B_3 (K_{s1} + K_{s2});$$

$$e \triangleq K_{s3} (K_{s1} + K_{s2}).$$

Aplicando o princípio da superposição³ obtemos as equações 3.162 e 3.163.

$$x_1 = G_{11} f_{i1} + G_{12} f_{i2} \quad (3.162)$$

$$x_2 = G_{21} f_{i1} + G_{22} f_{i2} \quad (3.163)$$

e) Diagrama de blocos:

Em diagramas de blocos é usual representarmos o somador conforme ilustra a Figura 3.33.

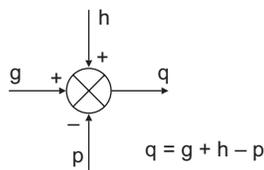


Figura 3.33 Diagrama de blocos de um somador.

Logo, a representação das equações 3.162 e 3.163, na forma de diagrama, fica conforme ilustra a Figura 3.34.

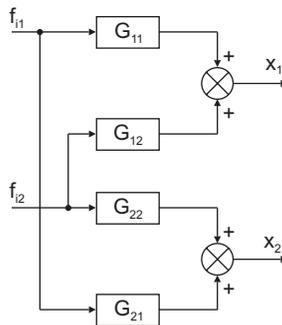


Figura 3.34 Diagrama de blocos do sistema da Figura 3.30.

3. É possível porque o sistema é linear.

3.5 – SISTEMAS FLUÍDICOS – ÁGUA

As modelagens dos sistemas fluídicos (água) apresentadas neste capítulo têm um conjunto de hipóteses gerais, as quais estão listadas no Quadro 3.3.

Quadro 3.3 Hipóteses Gerais de Sistemas Hidráulicos – Água (usadas neste capítulo).

- 1 – O fluido é incompressível, tem massa específica constante.
- 2 – A temperatura é uniforme e constante.
- 3 – As resistências fluídicas são constantes e lineares.
- 4 – Qualquer tanque tem seção uniforme (prismática) de área constante.
- 5 – A pressão atmosférica é constante.
- 6 – As resistências fluídicas são localizadas e em qualquer outro local do sistema não há atrito entre o fluido e as paredes.
- 7 – Os efeitos de inércia do fluido são desprezíveis (inertância \cong zero).
- 8 – As variações das grandezas do sistema são relativamente pequenas, a fim de manter o comportamento do sistema praticamente linear.

3.5.1 – SISTEMA COM UM TANQUE – EXEMPLO 1

Para o sistema da Figura 3.35, determinar a função de transferência $\frac{Q_o}{Q_i}(D)$.

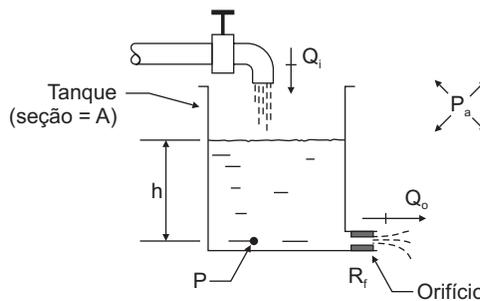


Figura 3.35 Tanque aberto cuja variável de entrada é a vazão Q_i , exemplo 1.

a) **Hipóteses:**

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.3.
- (2) A vazão de entrada Q_i é sempre positiva (sai da torneira e entra no tanque). Ela tem valores tais que mantêm h sempre positivo ($h > 0$).

b) **Aplicação de leis:**

Como temos apenas um tanque sob temperatura constante, aplicaremos somente a Lei da Conservação da Massa e uma única vez. Assim:

$$\rho Q_i - \rho Q_o = D m_T \quad (3.164)$$

em que:

$\rho \triangleq$ massa específica do fluido;

$Q_i \triangleq$ vazão que entra no tanque;

$Q_o \triangleq$ vazão que sai do tanque;

$m_T \triangleq$ massa de fluido no tanque.

c) Obtenção das relações:

Da Mecânica dos Fluidos temos que:

$$P = \rho g h \quad (3.165)$$

em que:

$h \triangleq$ altura do nível da água no tanque;

$g \triangleq$ aceleração da gravidade;

$P \triangleq$ pressão hidrostática manométrica, relativa à altura h .

Podemos relacionar a massa m_T com a altura h , assim como a vazão Q_o com a pressão P , isto é:

$$m_T = \rho A h \quad (3.166)$$

$$P = R_f Q_o \quad (3.167)$$

em que:

$A \triangleq$ área da seção transversal do tanque (constante para qualquer h);

$R_f \triangleq$ resistência fluídica do orifício, constante.

Substituindo (3.165) e (3.167) em (3.166), vem:

$$m_T = \rho A \frac{P}{\rho g} = \frac{A}{g} R_f Q_o \quad (3.168)$$

d) Obtenção do modelo:

Substituindo (3.168) em (3.164) obtemos:

$$\rho Q_i - \rho Q_o = \frac{A R_f}{g} D Q_o \quad (3.169)$$

ou

$$\left(\frac{A R_f}{\rho g} D + 1 \right) Q_o = Q_i \quad (3.170)$$

Definindo:

$$\tau \triangleq \frac{A R_f}{\rho g}, \text{ constante de tempo.}$$

Então:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(D) = \frac{1}{\tau D + 1} \quad (3.171)$$

que é a função de transferência desejada, na forma-padrão do sistema de 1^{a} ordem.

3.5.2 – SISTEMA COM UM TANQUE – EXEMPLO 2

Para o sistema da Figura 3.36, determinar as funções de transferências $\frac{Q_o}{P_i}(D)$ e $\frac{h}{P_i}(D)$.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.3.
- (2) As variações de P_i (pressão manométrica, entrada do sistema) são tais que mantêm h sempre positivo ($h > 0$).

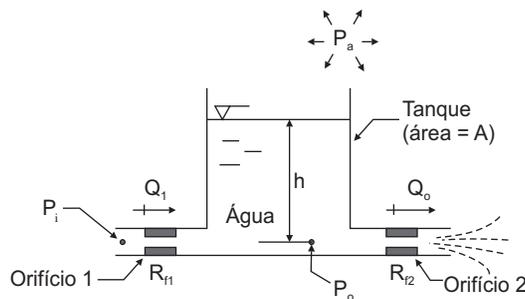


Figura 3.36 Tanque aberto cuja variável de entrada é a pressão P_i , exemplo 2.

b) Aplicação de leis:

Pelo fato de termos apenas um tanque sob temperatura constante, aplicaremos somente a Lei da Conservação da Massa e uma única vez. Logo:

$$\rho Q_i - \rho Q_o = D m_T \quad (3.172)$$

em que:

$\rho \triangleq$ massa específica do fluido;

$Q_i \triangleq$ vazão que entra no tanque;

$Q_o \triangleq$ vazão que sai do tanque;

$m_T \triangleq$ massa de fluido no tanque.

c) Obtenção das relações:

Da Figura 3.36 vemos que:

$$P_i - P_o = R_{f1} Q_i \quad (3.173)$$

$$P_o = R_{f2} Q_o \quad (3.174)$$

$$P_o = \rho g h \quad (3.175)$$

$$m_T = \rho A h \quad (3.176)$$

em que:

R_{f1} e $R_{f2} \triangleq$ resistências fluidicas dos orifícios 1 e 2, respectivamente;

$h \triangleq$ altura do nível da água no tanque;

$P_o \triangleq$ pressão hidrostática manométrica, relativa à altura h ;

$g \triangleq$ aceleração da gravidade;

$A \triangleq$ área da seção do tanque (constante, para qualquer h).

Substituindo (3.174) em (3.173) vem a (3.177), e combinando (3.174), (3.175) e (3.176) obtemos a (3.178). Assim:

$$Q_i = (P_i - R_{f2} Q_o) / R_{f1} \quad (3.177)$$

$$m_T = \rho A \frac{P_o}{\rho g} = \frac{A R_{f2}}{g} Q_o \quad (3.178)$$

d) Obtenção do modelo:

Substituindo (3.177) e (3.178) em (3.172) vem

$$\frac{\rho}{R_{f1}} (P_i - R_{f2} Q_o) - \rho Q_o = \frac{A R_{f2}}{g} D Q_o \quad (3.179)$$

Organizando (3.179) obtemos:

$$\frac{AR_{f2}}{g} D Q_o + \left(\rho \frac{R_{f2}}{R_{f1}} + \rho \right) Q_o = \frac{\rho}{R_{f1}} P_i \quad (3.180)$$

ou

$$\left[\frac{AR_{f1}R_{f2}}{\rho g} D + (R_{f2} + R_{f1}) \right] Q_o = P_i \quad (3.181)$$

Logo:

$$\frac{Q_o}{P_i}(D) = \frac{I}{\frac{AR_{f1}R_{f2}}{\rho g} D + R_{f1} + R_{f2}} \quad (3.182)$$

Então:

$$\frac{Q_o}{P_i}(D) = \frac{\frac{I}{R_{f1} + R_{f2}}}{\frac{AR_{f1}R_{f2}}{(R_{f1} + R_{f2})\rho g} D + I} \quad (3.183)$$

que na forma-padrão fica:

$$\frac{Q_o}{P_i}(D) = \frac{K_I}{\tau D + I} \quad (3.184)$$

em que:

$$K_I \triangleq \frac{I}{R_{f1} + R_{f2}}, \text{ ganho da função de transferência } \frac{Q_o}{P_i}(D);$$

$$\tau \triangleq \frac{AR_{f1}R_{f2}}{(R_{f1} + R_{f2})\rho g}, \text{ constante de tempo.}$$

A equação 3.184 é a primeira função de transferência pedida nesta modelagem.

A segunda, $\frac{h}{P_i}(D)$, pode ser obtida a partir da (3.183).

Das relações dadas pelas (3.174) e (3.175) temos:

$$Q_o = \frac{\rho g}{R_{f2}} h \quad (3.185)$$

Assim, substituindo (3.185) em (3.183) obtemos:

$$\left(\frac{\rho g}{R_{f2}}\right)h \frac{(D)}{P_i} = \frac{\frac{I}{R_{f1} + R_{f2}}}{\frac{AR_{f1}R_{f2}}{(R_{f1} + R_{f2})\rho g} D + I} \quad (3.186)$$

Logo,

$$\frac{h}{P_i}(D) = \frac{K_2}{\tau D + I} \quad (3.187)$$

em que:

$$K_2 \triangleq \frac{R_{f2}}{(R_{f1} + R_{f2})\rho g}, \text{ ganho da função de transferência } \frac{h}{P_i}(D).$$

A equação 3.187 é a segunda função de transferência pedida.

3.5.3 – SISTEMA COM UM TANQUE – EXEMPLO 3

Para o sistema da Figura 3.37, determinar a função de transferência $\frac{h}{Q_i}(D)$.

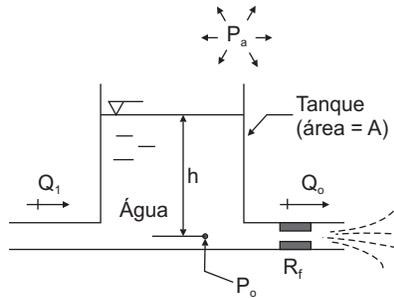


Figura 3.37 Tanque cuja variável de entrada é a vazão Q_i , exemplo 3.

À primeira vista, o sistema da Figura 3.37 parece ser igual ao anterior, o da Figura 3.36. Entretanto, há uma diferença conceitual muito importante. Na Figura 3.36 a entrada (input) é a pressão P_i e na Figura 3.37, Q_i . Conforme explicado no Capítulo 1 (seção 1.4), as entradas são independentes do sistema. Isso significa que no sistema da Figura 3.36 algum dispositivo gera de alguma forma valores e variações de P_i e o sistema responde em função disso. Conseqüentemente, a vazão Q_i é uma grandeza do sistema e depende da situação das variáveis deste. Por exemplo, se em

determinado instante a pressão P_o for igual à P_i , naquele momento a vazão Q_i é nula. Já no caso do sistema da Figura 3.37, Q_i é uma entrada e ocorre de forma independente da situação do sistema. Assim, **pouco importa se P_o é alto ou não, Q_i pode aumentar ou diminuir, tendo suas variações próprias.** Na prática, isso pode ser conseguido por meio de um sistema de controle externo, fazendo Q_i ser igual à vazão desejada. Outra maneira de implementar este “input” seria usar uma bomba de deslocamento positivo, pois sua vazão é uma função aproximadamente proporcional à rotação do seu eixo.

Agora, vamos voltar à modelagem.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.3.
- (2) As variações de Q_i são tais que mantêm h sempre positivo ($h > 0$).

b) Aplicação de leis:

Temos apenas um tanque, portanto, a conservação da massa será aplicada uma só vez. Assim:

$$\rho Q_i - \rho Q_o = D m_T \tag{3.188}$$

em que:

- $\rho \triangleq$ massa específica do fluido;
- $Q_i \triangleq$ vazão entrada (input);
- $Q_o \triangleq$ vazão que sai do tanque;
- $m_T \triangleq$ massa de fluido no tanque.

c) Obtenção das relações:

Da Figura 3.37 vemos que

$$P_o = R_f Q_o \tag{3.189}$$

$$P_o = \rho g h \tag{3.190}$$

$$m_T = \rho A h \tag{3.191}$$

em que:

- $h \triangleq$ altura do nível da água no tanque;
- $P_o \triangleq$ pressão hidrostática manométrica, relativa à altura h ;
- $g \triangleq$ aceleração da gravidade;
- $R_f \triangleq$ resistência fluídica do orifício;
- $A \triangleq$ área da seção do tanque (constante para qualquer h).

Agora, combinando (3.189) e (3.190), vem:

$$Q_o = \frac{\rho g}{R_f} h \quad (3.192)$$

d) Obtenção do modelo:

Substituindo (3.191) e (3.192) na (3.188) obtemos:

$$Q_i - \frac{\rho g}{R_f} h = A D h \quad (3.193)$$

Organizando (3.193) vem

$$\left(A D + \frac{\rho g}{R_f} \right) h = Q_i \quad (3.194)$$

Logo:

$$\frac{h}{Q_i}(D) = \frac{1}{A D + \frac{\rho g}{R_f}} \quad (3.195)$$

ou

$$\frac{h}{Q_i}(D) = \frac{\frac{R_f}{\rho g}}{\frac{A R_f}{\rho g} D + 1} \quad (3.196)$$

Definindo:

$$K \triangleq \frac{R_f}{\rho g}, \text{ ganho da função de transferência } \frac{h}{Q_i}(D);$$

$$\tau \triangleq \frac{A R_f}{\rho g}, \text{ constante de tempo.}$$

Então:

$$\frac{h}{Q_i}(D) = \frac{K}{\tau D + 1} \quad (3.197)$$

que é a função de transferência pedida, na forma-padrão do sistema de 1^a ordem.

3.5.4 – SISTEMA COM DOIS TANQUES

Para o sistema da Figura 3.38, determinar a função de transferência $\frac{h_2}{Q_i}(D)$.

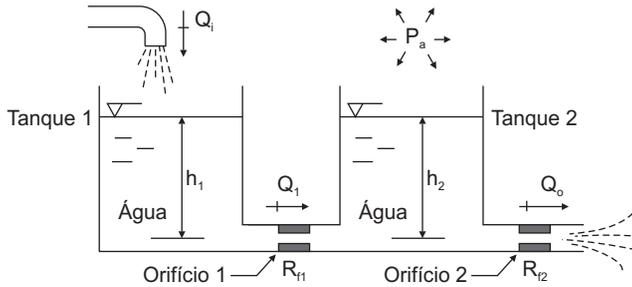


Figura 3.38 Sistema com dois tanques, com entrada de vazão Q_i no tanque 1.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.3.
- (2) As variações da vazão Q_i são tais que mantêm ambas as alturas, h_1 e h_2 , sempre positivas ($h_1 > 0$ e $h_2 > 0$).

b) Aplicação de leis:

Neste sistema temos dois tanques, portanto, a Lei da Conservação da Massa será aplicada duas vezes. Assim:

$$\rho Q_i - \rho Q_1 = D m_1 \quad (3.198)$$

$$\rho Q_1 - \rho Q_o = D m_2 \quad (3.199)$$

em que:

$\rho \triangleq$ massa específica do fluido;

$Q_i \triangleq$ vazão entrada (input) do sistema;

$Q_1 \triangleq$ vazão no orifício 1, entre os tanques 1 e 2;

$Q_o \triangleq$ vazão que sai do tanque 2;

m_1 e $m_2 \triangleq$ massas de água nos tanques 1 e 2, respectivamente.

c) Obtenção das relações:

Da Figura 3.38 vemos que:

$$(P_1 - P_2) = R_{f1} Q_1 \quad (3.200)$$

$$P_2 = R_{f2} Q_o \quad (3.201)$$

$$P_1 = \rho g h_1 \quad (3.202)$$

$$P_2 = \rho g h_2 \quad (3.203)$$

$$m_1 = \rho A_1 h_1 \quad (3.204)$$

$$m_2 = \rho A_2 h_2 \quad (3.205)$$

em que:

h_1 e $h_2 \triangleq$ alturas dos níveis de água nos tanques 1 e 2, respectivamente;

P_1 e $P_2 \triangleq$ pressões hidrostáticas manométricas relativas às alturas h_1 e h_2 , respectivamente;

R_{f1} e $R_{f2} \triangleq$ resistências fluídicas dos orifícios 1 e 2, respectivamente;

A_1 e $A_2 \triangleq$ áreas das seções dos tanques 1 e 2, respectivamente;

$g \triangleq$ aceleração da gravidade.

Combinando de (3.200) a (3.203) obtemos:

$$Q_1 = \frac{1}{R_{f1}} [\rho g h_1 - \rho g h_2] \quad (3.206)$$

$$Q_o = \frac{1}{R_{f2}} [\rho g h_2] \quad (3.207)$$

d) Obtenção do modelo:

Substituindo de (3.204) a (3.207) em (3.198) e (3.199) obtemos:

$$Q_i - \frac{1}{R_{f1}} [\rho g h_1 - \rho g h_2] = A_1 D h_1 \quad (3.208)$$

$$\frac{1}{R_{f1}} [\rho g h_1 - \rho g h_2] - \frac{1}{R_{f2}} [\rho g h_2] = A_2 D h_2 \quad (3.209)$$

Organizando (3.208) e (3.209) vem:

$$\left[A_1 D + \frac{\rho g}{R_{f1}} \right] h_1 - \left[\frac{\rho g}{R_{f1}} \right] h_2 = Q_i \quad (3.210)$$

$$-\left[\frac{\rho g}{R_{f1}} \right] h_1 + \left[A_2 D + \rho g \left(\frac{1}{R_{f1}} + \frac{1}{R_{f2}} \right) \right] h_2 = 0 \quad (3.211)$$

Escrevendo (3.210) e (3.211) na forma de matriz resulta:

$$\begin{bmatrix} \left[A_1 D + \frac{\rho g}{R_{f1}} \right] & -\frac{\rho g}{R_{f1}} \\ -\frac{\rho g}{R_{f1}} & \left[A_2 D + \frac{\rho g (R_{f1} + R_{f2})}{R_{f1} R_{f2}} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.212)$$

Agora podemos aplicar Cramer para obter $\frac{h_2}{Q_i}(D)$, então:

$$h_2 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 D + \frac{\rho g}{R_{f1}} & Q_i \\ -\frac{\rho g}{R_{f1}} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(A_1 D + \frac{\rho g}{R_{f1}} \right) & -\frac{\rho g}{R_{f1}} \\ -\frac{\rho g}{R_{f1}} & \left(A_2 D + \frac{\rho g (R_{f1} + R_{f2})}{R_{f1} R_{f2}} \right) \end{vmatrix}} \quad (3.213)$$

Logo:

$$h_2 = \frac{+\frac{\rho g}{R_{f1}} Q_i}{A_1 A_2 D^2 + \left[A_2 \frac{\rho g}{R_{f1}} + A_1 \rho g \frac{(R_{f1} + R_{f2})}{R_{f1} R_{f2}} \right] D + \left[\frac{\rho^2 g^2 (R_{f1} + R_{f2})}{R_{f1}^2 R_{f2}} - \frac{\rho^2 g^2}{R_{f1}^2} \right]} \quad (3.214)$$

Desenvolvendo o último termo do denominador, ele resulta na relação $(\rho^2 g^2 / R_{f1} R_{f2})$, e dividindo o numerador e denominador por esta relação obtemos:

$$\frac{h_2}{Q_i}(D) = \frac{\frac{\rho g}{R_{f1}} \left(\frac{R_{f1} R_{f2}}{\rho^2 g^2} \right)}{\left(\frac{A_1 A_2 R_{f1} R_{f2}}{\rho^2 g^2} \right) D^2 + \frac{R_{f1} R_{f2}}{\rho^2 g^2} \left[A_2 \frac{\rho g}{R_{f1}} + A_1 \rho g \frac{R_{f1} + R_{f2}}{R_{f1} R_{f2}} \right] D + I} \quad (3.215)$$

ou

$$\frac{h_2}{Q_i}(D) = \frac{\frac{R_{f2}}{\rho g}}{\left(\frac{A_1 A_2 R_{f1} R_{f2}}{\rho^2 g^2} \right) D^2 + \left[\frac{A_1 R_{f1}}{\rho g} + \frac{A_1 R_{f2}}{\rho g} + \frac{A_2 R_{f2}}{\rho g} \right] D + I} \quad (3.216)$$

que na forma-padrão resulta:

$$\frac{h_2}{Q_i}(D) = \frac{K}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} D + I} \quad (3.217)$$

em que:

$$K \triangleq \frac{R_{f2}}{\rho g}, \text{ ganho da função de transferência;}$$

$$\omega_n \triangleq \frac{\rho g}{\sqrt{A_1 A_2 R_{f1} R_{f2}}}, \text{ frequência natural não-amortecida;}$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} \triangleq \frac{I}{\rho g} \left[A_1 R_{f1} + A_1 R_{f2} + A_2 R_{f2} \right], \text{ ou: } \zeta \triangleq \frac{A_1 R_{f1} + A_1 R_{f2} + A_2 R_{f2}}{2\sqrt{A_1 A_2 R_{f1} R_{f2}}},$$

fator de amortecimento.

Podemos verificar por meio de demonstração matemática que o fator de amortecimento é maior que *um* ($\zeta > 1$).

Da definição de ζ podemos escrever:

$$\zeta^2 = \frac{A_1^2 R_{f1}^2 + A_1^2 R_{f2}^2 + A_2^2 R_{f2}^2 + 2 A_1 R_{f1} A_1 R_{f2} + 2 A_1 R_{f1} A_2 R_{f2} + 2 A_1 R_{f2} A_2 R_{f2}}{4(A_1 A_2 R_{f1} R_{f2})} \quad (3.218)$$

ou

$$\zeta^2 = \frac{I}{4} \left[\frac{A_1 R_{f1}}{A_2 R_{f2}} + \frac{A_1 R_{f2}}{A_2 R_{f1}} + \frac{A_2 R_{f2}}{A_1 R_{f1}} + 2 \frac{A_1}{A_2} + 2 + 2 \frac{R_{f2}}{R_{f1}} \right] \quad (3.219)$$

Definindo duas variáveis auxiliares x e y , tais que $x \triangleq (A_1/A_2)$ e $y \triangleq \left(\frac{R_{f1}}{R_{f2}} \right)$,

então:

$$\zeta^2 = \frac{I}{4} \left[x y + \frac{x}{y} + \frac{I}{x y} + 2 x + \frac{2}{y} \right] + 0,5 \quad (3.220)$$

Sabemos que para manter a configuração do sistema conforme a Figura 3.38 temos de manter os parâmetros A_1, A_2, R_{f1} e R_{f2} todos positivos, não nulos. Se alguma área, A_1 ou A_2 , for nula, significa que aquele respectivo tanque não existe. Se R_{f1} for nulo, o sistema passa a ter um só tanque, pois a comunicação entre eles é total. Se R_{f2} for nulo, o tanque 2 fica sem efeito (sempre vazio) e o tanque 1 passa a se comunicar diretamente com a atmosfera. Logo, para manter a configuração, os parâmetros A_1, A_2, R_{f1} e R_{f2} precisam ser positivos. Matematicamente isso significa que todas as parcelas da equação 3.220 são positivas.

Agora vamos analisar os termos dentro do colchete. Dentre eles vemos a presença de uma função $\left(x y + \frac{I}{x y} \right)$. Se definirmos $z \triangleq x y$, então podemos escrever:

$$f(z) = z + \frac{1}{z} = \frac{z^2 + 1}{z} \quad (3.221)$$

Essa função tem um mínimo com valor igual a 2, que ocorre no ponto $z = 1$. Podemos verificar isso por meio da primeira e da segunda derivadas. Calculando a primeira derivada e igualando-a a *zero*, obtemos:

$$\frac{d f}{d z} = \frac{2 z \cdot z - (z^2 + 1)}{z^2} = \frac{z^2 - 1}{z^2} = 0 \quad (3.222)$$

Como z é sempre positivo, o valor que satisfaz a equação 3.222 é $z = 1$.

Calculando a segunda derivada, neste ponto $z = 1$, vem:

$$\frac{d^2 f}{d z^2} \Big|_{z=1} = \frac{2 z \cdot z^2 - 2 z (z^2 - 1)}{z^4} \Big|_{z=1} = \frac{2}{z^3} \Big|_{z=1} = 2 \quad (3.223)$$

Como no ponto $z = 1$ a derivada primeira é nula e a derivada segunda é positiva, então nesse ponto temos o mínimo da função $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z}$.

Retornando à equação 3.220, vemos que, se $\left(x y + \frac{1}{xy}\right) \geq 2$ e todos os demais termos são positivos, então $\zeta^2 > 1$, o que resulta: $\zeta > 1$.

Veremos no Capítulo 5 que, se um sistema de 2ª ordem tem $\zeta > 1$, ele é chamado de superamortecido. Nesse caso ele pode ser “decomposto” (fatorado) em dois sistemas de 1ª ordem.

O comportamento oscilatório, que pode ocorrer quando temos dois tanques se comunicando, ficou ausente deste modelo por não terem sido considerados os efeitos de massa (ou inércia) do fluido. Quando temos dois tanques conectados através de um tubo e o fluido tem baixa viscosidade (R_{fi} tem baixo valor), os efeitos de massa se pronunciam e o sistema tem oscilação natural. Contudo, se houver um orifício (ou uma válvula parcialmente fechada) entre os tanques, a queda de pressão decorrente do efeito da inércia torna-se desprezível quando comparada à queda de pressão decorrente da resistência fluídica. Nesse caso, o modelo com $\zeta > 1$ representa uma boa aproximação para o sistema real.

3.6 – SISTEMAS FLUÍDICOS – AR

As modelagens dos Sistemas Fluídicos (Ar) apresentadas neste capítulo têm um conjunto de hipóteses gerais, as quais estão listadas no Quadro 3.4.

Quadro 3.4 Hipóteses Gerais de Sistemas Fluídicos – Ar (usadas neste capítulo).

- 1 – As condições de trabalho são tais que a equação de estado dos gases perfeitos representa uma boa aproximação para o comportamento do ar, pressões manométrica de 0 a 0,7 MPa (~100 psig) e temperaturas de 0 a 50°C.
- 2 – Na equação de estado, o coeficiente R para o ar é constante.
- 3 – A temperatura é uniforme e constante.
- 4 – As resistências fluídicas são constantes e lineares.
- 5 – Qualquer tanque tem o seu volume geométrico constante (não sofrem deformações com a pressão).
- 6 – A pressão atmosférica é constante.
- 7 – As resistências fluídicas são localizadas e em qualquer outro local do sistema não há atrito entre o fluido e as paredes.
- 8 – Os efeitos de inércia do fluido são desprezíveis (inertância \approx zero).
- 9 – As pressões em qualquer câmara são uniformes.
- 10 – As variações das grandezas do sistema são relativamente pequenas, a fim de manter o comportamento do sistema praticamente linear.

3.6.1 – SISTEMA PNEUMÁTICO PARA COMPENSAÇÃO PELO MÉTODO DO ATRASO DE FASE

Para o sistema da Figura 3.39, determinar a função de transferência $\frac{P_o}{P_i}(D)$.

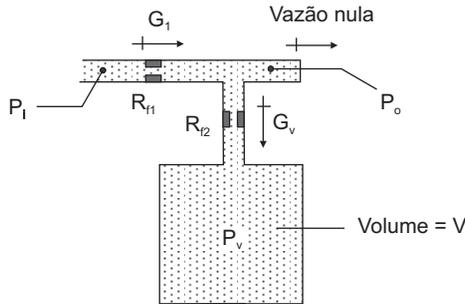


Figura 3.39 Sistema pneumático que possibilita a compensação pelo método do atraso de fase.

O sistema da Figura 3.39 é um dispositivo pneumático passivo (hardware pneumático) que pode ser adicionado a uma malha de controle caso um projetista queira implementar, de forma aproximada, um tipo de controle chamado Proporcional e Integral (P I). Computadores (equipamentos digitais e softwares) são os preferidos para realizar essas tarefas, porém, esse dispositivo analógico e passivo pode ser utilizado em situações específicas, como em aplicações militares, locais com forte campo magnético e temperatura acima da ambiente.

A modelagem desse sistema pode ser realizada conforme descrita a seguir.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.4.
- (2) O volume de ar sob a pressão P_o , Figura 3.39, é muito pequeno, tal que a descarga G_l é aproximadamente igual à G_v .

b) Aplicação de leis:

O sistema possui duas câmaras, portanto, a Lei da Conservação da Massa será aplicada duas vezes. Como, por hipótese, o volume sob a pressão P_o é muito pequeno, o acúmulo de massa nesse volume é desprezível. Assim, aplicando a Lei da Conservação da Massa aos dois volumes temos:

$$G_l - G_v = 0 \quad (3.224)$$

$$G_v = D m_T \quad (3.225)$$

em que:

$G_I \triangleq$ descarga de ar do volume sob P_i para o volume sob P_o ;

$G_v \triangleq$ descarga de ar que entra no volume V , vide Figura 3.39;

$m_T \triangleq$ massa de ar no volume V .

c) Obtenção das relações:

Da Figura 3.39 observamos que:

$$G_I = K_{fI} (P_i - P_o) \quad (3.226)$$

$$G_v = K_{fv} (P_o - P_v) \quad (3.227)$$

e para o gás ar (gás “perfeito”) no volume V podemos escrever:

$$P_v = \frac{RT}{V} m_T \quad (3.228)$$

em que:

$P_i \triangleq$ pressão absoluta, entrada (input) do sistema;

$P_o \triangleq$ pressão absoluta, saída (output) do sistema;

$P_v \triangleq$ pressão absoluta no volume V ;

$T \triangleq$ temperatura absoluta do ar em todo o sistema;

K_{fI} e $K_{fv} \triangleq$ são, respectivamente, os coeficientes que relacionam linearmente as descargas G_I e G_v com as correspondentes diferenças de pressões. Estes parâmetros são iguais à massa específica sobre resistência fluídica (ρ/R_f);

$R \triangleq$ constante da equação de estado, para o ar.

Como, neste caso, temos RT/V constante, então da equação 3.228 obtemos:

$$DP_v = \frac{RT}{V} Dm_T \quad (3.229)$$

d) Obtenção do modelo:

Substituindo (3.226), (3.227) e (3.229) em (3.224) e (3.225) obtemos:

$$K_{fI} (P_i - P_o) - K_{fv} (P_o - P_v) = 0 \quad (3.230)$$

$$K_{fv} (P_o - P_v) = \frac{V}{RT} DP_v \quad (3.231)$$

Agora, organizando (3.230) e (3.231) vem:

$$\left(-\frac{K_{fv}}{K_{fI}}\right)P_v + \left[\frac{K_{fv}}{K_{fI}} + I\right]P_o = P_i \quad (3.232)$$

$$\left[D + \frac{RT K_{fv}}{V}\right]P_v + \left(-\frac{RT K_{fv}}{V}\right)P_o = 0 \quad (3.233)$$

que na forma de matriz fica:

$$\begin{bmatrix} -\frac{K_{fv}}{K_{fI}} & \frac{K_{fI} + K_{fv}}{K_{fI}} \\ D + \frac{RT K_{fv}}{V} & -\frac{RT K_{fv}}{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_v \\ P_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.234)$$

Aplicando Cramer obtemos:

$$P_o(D) = \frac{\begin{bmatrix} D + \frac{RT K_{fv}}{V} \end{bmatrix} P_i}{\begin{bmatrix} D + \frac{RT K_{fv}}{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{K_{fI} + K_{fv}}{K_{fI}} \end{bmatrix} - \frac{RT K_{fv} K_{fv}}{V K_{fI}}} \quad (3.235)$$

ou

$$\frac{P_o}{P_i}(D) = \frac{\left(\frac{V}{RT K_{fv}} D + I\right)}{\left(\frac{K_{fI} + K_{fv}}{K_{fI}}\right) \left(\frac{V}{RT K_{fv}}\right) D + I} \quad (3.236)$$

Logo:

$$\frac{P_o}{P_i}(D) = \frac{\tau D + I}{\alpha \tau D + I} \quad (3.237)$$

em que:

$$\tau \triangleq \frac{V}{RT K_{fv}}, \text{ constante de tempo;}$$

$$\alpha \triangleq \frac{K_{fI} + K_{fv}}{K_{fI}} = \left(1 + \frac{K_{fv}}{K_{fI}} \right).$$

3.6.2 – SISTEMA COM CONTROLE DE PRESSÃO ATRAVÉS DE VÁLVULA

Para o sistema da Figura 3.40, determinar a função de transferência $\frac{P_1}{x_v}(D)$.

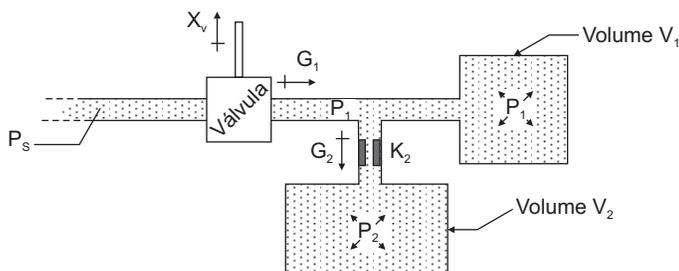


Figura 3.40 Controle da pressão P_1 através da abertura x_v da válvula.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.4.
- (2) A pressão absoluta de alimentação P_s é constante.
- (3) A área do orifício da válvula varia linearmente com o deslocamento x_v da haste da válvula.
- (4) O escoamento na válvula é sempre sônico, portanto, a descarga que passa através dela (G_1) depende somente de sua abertura proporcional a x_v e independe da diferença de pressão (ΔP).

b) Aplicação de leis:

Temos dois volumes, portanto, aplicaremos a Lei da Conservação da Massa duas vezes. Assim:

$$G_1 - G_2 = D m_1 \quad (3.238)$$

$$G_2 = D m_2 \quad (3.239)$$

em que:

$G_1 \triangleq$ descarga de ar através da válvula, do volume sob P_s para o volume sob P_1 ;

$P_1 \triangleq$ pressão absoluta no volume V_1 ;

$G_2 \triangleq$ descarga de ar através do orifício, do volume sob P_1 para o volume sob P_2 ;

$P_2 \triangleq$ pressão absoluta no volume V_2 ;
 m_1 e $m_2 \triangleq$ massas de ar nos volumes V_1 e V_2 , respectivamente.

c) Obtenção das relações:

Da Termodinâmica e Mecânica dos Flúidos verificamos que, para o ar, quando a relação das pressões antes e depois de um orifício é maior que **1,89**, a velocidade sônica é alcançada e a descarga passa a ser independente da diferença de pressão, dependendo apenas da abertura do orifício (válvula). Logo, para essas condições temos:

$$G_1 = K_v x_v \quad (3.240)$$

Supondo escoamento subsônico no orifício entre os volumes V_1 e V_2 , então:

$$G_2 = K_2 (P_1 - P_2) \quad (3.241)$$

em que:

$x_v \triangleq$ deslocamento da haste da válvula;

$K_v \triangleq$ coeficiente que relaciona linearmente a descarga G_1 com a “abertura” da válvula x_v , na condição de escoamento sônico na válvula;

$K_2 \triangleq$ coeficiente que relaciona linearmente a descarga G_2 com a diferença entre as pressões P_1 e P_2 , isto é: $(P_1 - P_2)$.

Por outro lado, como no sistema a temperatura é uniforme e constante e os volumes das câmaras também são constantes, da equação de estado para o ar vem:

$$Dm_1 = \frac{V_1}{RT} DP_1 \quad (3.242)$$

$$Dm_2 = \frac{V_2}{RT} DP_2 \quad (3.243)$$

em que:

$T \triangleq$ temperatura absoluta do ar em todo o sistema;

$R \triangleq$ constante da equação de estado, para o ar.

d) Obtenção do modelo:

Substituindo de (3.240) a (3.243) em (3.238) e (3.239), vem:

$$K_v x_v - K_2 (P_1 - P_2) = \frac{V_1}{RT} DP_1 \quad (3.244)$$

$$K_2(P_1 - P_2) = \frac{V_2}{RT} DP_2 \quad (3.245)$$

Da equação 3.245 podemos determinar P_2 na forma operacional.

$$P_2(D) = \frac{I}{\frac{V_2}{RT K_2} D + I} P_1 \quad (3.246)$$

Substituindo (3.246) em (3.244) vem:

$$K_v x_v - K_2 P_1 + \frac{K_2}{\left(\frac{V_2}{RT K_2} D + I\right)} P_1 = \frac{V_1}{RT} DP_1 \quad (3.247)$$

Agora, multiplicando por $\left(\frac{V_2}{RT K_2} D + I\right)$ e desenvolvendo obtemos:

$$\begin{aligned} K_v \left(\frac{V_2}{RT K_2} D + I\right) x_v - \frac{K_2 V_2}{RT K_2} DP_1 - K_2 P_1 + K_2 P_1 &= \\ = \left(\frac{V_1 V_2}{RT K_2 RT} D + \frac{V_1}{RT}\right) DP_1 & \end{aligned} \quad (3.248)$$

que, simplificando e agrupando os termos fica:

$$\left(\frac{V_2}{RT K_2} D + I\right) x_v = \left[\frac{V_1 V_2}{RT K_2 RT K_v} D + \frac{V_1 + V_2}{RT K_v}\right] DP_1 \quad (3.249)$$

Multiplicando ambos os lados por $\left[RT K_v / (V_1 + V_2)\right]$ obtemos:

$$\frac{P_1}{x_v}(D) = \frac{\frac{RT K_v}{(V_1 + V_2)} \left[\frac{V_2}{RT K_2} D + I\right]}{D \left[\frac{V_1 V_2}{(V_1 + V_2) RT K_2} D + I\right]} \quad (3.250)$$

que, na forma-padrão, fica:

$$\frac{P_1}{x_v}(D) = \frac{K (\tau_1 D + 1)}{D[\tau_2 D + 1]} \quad (3.251)$$

em que:

$$K \triangleq \frac{RT K_v}{(V_1 + V_2)}, \text{ ganho;}$$

$$\tau_1 \triangleq \frac{V_2}{RT K_2}, \text{ constante de tempo;}$$

$$\tau_2 \triangleq \frac{V_1}{(V_1 + V_2)} \tau_1, \text{ constante de tempo.}$$

Notamos que a função de transferência dada pela equação 3.251 tem dinâmica de I^{a} ordem no numerador, um integrador e outra dinâmica de I^{a} ordem no denominador.

Agora, pensando em uma modificação no sistema da Figura 3.40, se o tanque 2 não existisse ($V_2 = 0$), da equação 3.250 vemos que a função de transferência ficaria:

$$\frac{P_1}{x_v}(D) = \frac{RT K_v}{D} \quad (3.252)$$

ou

$$\frac{P_1}{x_v}(D) = \frac{K_I}{D} \quad (3.253)$$

em que:

$$K_I \triangleq \frac{RT K_v}{V_1}, \text{ ganho.}$$

Logo, o sistema da Figura 3.40, sem o tanque 2, se transforma em um integrador, conforme ilustra a função de transferência dada pela equação 3.253. É claro que tal comportamento refere-se às pequenas variações de x_v , porque se x_v ficar constante por longo período, P_1 acaba ficando igual a P_2 , e o modelo difere de um integrador. No mundo real os integradores sempre têm limitações porque as grandezas não crescem indefinidamente.

3.7 – SISTEMAS TÉRMICOS

Os modelos dos sistemas térmicos apresentados neste capítulo têm um conjunto de hipóteses gerais, as quais estão listadas no Quadro 3.5.

Quadro 3.5 Hipóteses Gerais de Sistemas Térmicos (usadas neste capítulo).

- 1 – A geometria dos corpos são tais que a taxa de transmissão de calor pode ser considerada unidirecional.
- 2 – Os isolantes são perfeitos e não ocorre transmissão de calor através deles.
- 3 – As peças metálicas têm alta condutividade térmica e dimensões relativamente pequenas, tal que podem ser consideradas com temperaturas uniformes.
- 4 – As resistências e capacitâncias térmicas são constantes e lineares.
- 5 – As capacitâncias térmicas são desprezadas ($C_i \approx 0$) quando o material tem alta resistência térmica e baixo armazenamento de energia.
- 6 – Os materiais sempre ficam no mesmo estado, isto é, não há mudanças de fase.
- 7 – As variações das grandezas do sistema são relativamente pequenas, a fim de manter o comportamento do sistema praticamente linear.

3.7.1 – SISTEMA COM UMA MASSA

Para o sistema da Figura 3.41, determinar a função de transferência $\frac{T_o}{T_i}(D)$.

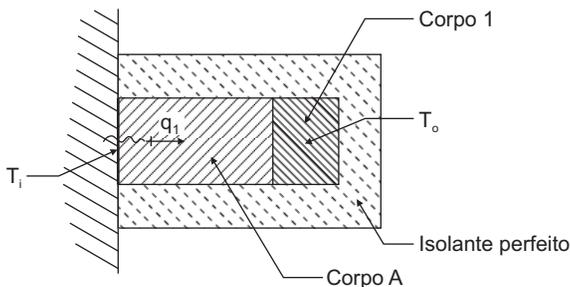


Figura 3.41 Sistema térmico com uma capacitância térmica.

a) **Hipóteses:**

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.5.
- (2) O corpo *A* tem baixo armazenamento de energia e alta resistência, portanto, é considerado como resistência pura, com capacitância térmica igual a *zero*.
- (3) O corpo *I* é uma peça metálica, portanto, tem apenas capacitância térmica.

b) Aplicação de leis:

Como temos somente uma capacitância térmica (um corpo com capacidade de armazenar energia), então aplicaremos a Lei da Conservação de Energia apenas uma vez. Assim:

$$q_I = C_t D T_o \quad (3.254)$$

em que:

$q_I \triangleq$ taxa de transmissão de calor, conforme Figura 3.41;

$T_o \triangleq$ temperatura do corpo I (output do sistema);

$C_t \triangleq$ capacitância térmica do corpo I ;

c) Obtenção das relações:

Da Figura 3.41 vemos que

$$T_i - T_o = R_t q_I \quad (3.255)$$

em que:

$T_i \triangleq$ temperatura da entrada (input) do sistema;

$R_t \triangleq$ resistência térmica do corpo A .

d) Obtenção do modelo:

Usando (3.255) para substituir q_I na equação 3.254, vem:

$$\frac{T_i - T_o}{R_t} = C_t D T_o \quad (3.256)$$

ou

$$(R_t C_t D + 1) T_o = T_i \quad (3.257)$$

Logo:

$$\frac{T_o}{T_i}(D) = \frac{1}{\tau D + 1} \quad (3.258)$$

em que:

$\tau \triangleq R_t C_p$, constante de tempo.

O modelo dado pela equação 3.258, relativo ao sistema da Figura 3.41, pode ser também o modelo de um termômetro de bulbo, Figura 3.42, se considerarmos as seguintes hipóteses:

- (1) A temperatura T_L do líquido que envolve o termômetro é uniforme.
- (2) A parede do bulbo não armazena energia e entre o líquido e o mercúrio há somente uma resistência térmica.
- (3) A variação da massa de mercúrio no bulbo é desprezível.

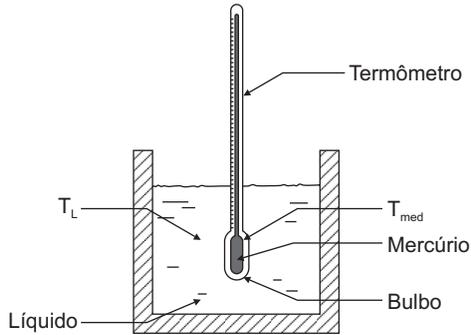


Figura 3.42 Esquema para modelagem dinâmica de um termômetro de bulbo.

Da equação 3.258 podemos escrever diretamente o modelo.

$$\frac{T_{med}}{T_L}(D) = \frac{l}{\tau D + l} \quad (3.259)$$

em que:

$T_{med} \triangleq$ temperatura medida (temperatura do mercúrio);

$T_L \triangleq$ temperatura do líquido;

$\tau \triangleq R_i C_i$, constante de tempo.

Neste caso verificamos que:

$$R_i \triangleq l/UA$$

$$C_i \triangleq M C$$

em que:

$M \triangleq$ massa de mercúrio no bulbo;

$C \triangleq$ calor específico do mercúrio;

$U \triangleq$ coeficiente de transferência de calor total;

$A \triangleq$ área da superfície de transferência de calor.

3.7.2 – SISTEMAS COM DUAS MASSAS

Para o sistema da Figura 3.43, determinar a função de transferência $\frac{T_2}{T_i}(D)$.

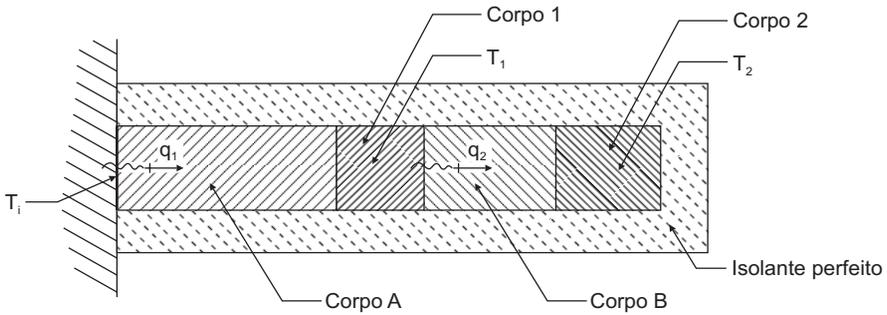


Figura 3.43 Sistema térmico com duas capacitâncias térmicas.

a) Hipóteses:

- (1) Todas as hipóteses do Quadro 3.5.
- (2) Os corpos *A* e *B* têm baixo armazenamento de energia e altas resistências térmicas. Suas capacitâncias térmicas são desprezíveis.
- (3) Os corpos *1* e *2* são peças metálicas e cada uma representa uma capacitância térmica.

b) Aplicação de leis:

Como temos duas capacitâncias térmicas, aplicaremos a Lei da Conservação da energia duas vezes. Assim:

$$q_1 - q_2 = C_{t1} DT_1 \quad (3.260)$$

$$q_2 = C_{t2} DT_2 \quad (3.261)$$

em que:

T_1 e $T_2 \triangleq$ temperaturas dos corpos *1* e *2*, respectivamente;

C_{t1} e $C_{t2} \triangleq$ capacitâncias térmicas dos corpos *1* e *2*, respectivamente;

q_1 e $q_2 \triangleq$ taxas de transmissão de calor, conforme indica a Figura 3.43.

c) Obtenção das relações:

$$T_i - T_1 = R_{t1} q_1 \quad (3.262)$$

$$T_1 - T_2 = R_{t2} q_2 \quad (3.263)$$

em que:

R_{t1} e $R_{t2} \triangleq$ resistências térmicas dos corpos A e B , respectivamente.

d) Obtenção do modelo:

Determinando q_1 e q_2 das equações 3.262 e 3.263 e substituindo em (3.260) e (3.261), obtemos:

$$\frac{T_i - T_1}{R_{t1}} - \frac{T_1 - T_2}{R_{t2}} = C_{t1} DT_1 \quad (3.264)$$

$$\frac{T_1 - T_2}{R_{t2}} = C_{t2} DT_2 \quad (3.265)$$

Desenvolvendo e organizando (3.264) e (3.265), vem:

$$R_{t1} C_{t1} DT_1 + T_1 + \frac{R_{t1}}{R_{t2}} T_1 - \frac{R_{t1}}{R_{t2}} T_2 = T_i \quad (3.266)$$

$$-T_1 + R_{t2} C_{t2} DT_2 + T_2 = 0 \quad (3.267)$$

que na forma de matriz fica:

$$\begin{bmatrix} \left(R_{t1} C_{t1} D + \frac{R_{t1} + R_{t2}}{R_{t2}} \right) & -\frac{R_{t1}}{R_{t2}} \\ -1 & (R_{t2} C_{t2} D + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.268)$$

Aplicando Cramer para determinar T_2 , obtemos:

$$T_2(D) = \frac{T_i}{(R_{t2} C_{t2} D + 1) \left(R_{t1} C_{t1} D + \frac{R_{t1} + R_{t2}}{R_{t2}} \right) - \frac{R_{t1}}{R_{t2}}} \quad (3.269)$$

ou

$$T_2(D) = \frac{T_i}{(R_{t2} C_{t2} R_{t1} C_{t1}) D^2 + \left[R_{t2} C_{t2} \frac{R_{t1} + R_{t2}}{R_{t2}} + R_{t1} C_{t1} \right] D + \frac{R_{t2}}{R_{t2}} + \frac{R_{t1}}{R_{t2}} - \frac{R_{t1}}{R_{t2}}} \quad (3.270)$$

Agora, definindo τ_1 e τ_2 :

$\tau_1 \triangleq R_{i1} C_{i1}$, constante de tempo 1;

$\tau_2 \triangleq R_{i2} C_{i2}$, constante de tempo 2.

Então:

$$\frac{T_2}{T_i}(D) = \frac{1}{\tau_1 \tau_2 D^2 + (\tau_1 + \tau_2 + R_{i1} C_{i2}) D + 1} \quad (3.271)$$

que representa uma função de transferência de um sistema de 2^{a} ordem.

Se esse sistema de 2^{a} ordem for escrito na forma-padrão, em termos de ω_n e ζ , podemos demonstrar, de maneira similar à prova desenvolvida na seção 3.5.4, que ζ é sempre maior que a unidade ($\zeta > 1$). Isso significa, conforme veremos no Capítulo 5, que ele é chamado de superamortecido e pode ser “decomposto” (fatorado) em dois sistemas de 1^{a} ordem.

3.8 – GANHOS DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIAS

3.8.1 – DEFINIÇÕES

No Capítulo 2 foi apresentado (vide Figura 2.1) o fluxograma da organização do trabalho analítico com as expressões matemáticas para a obtenção de um modelo do tipo 30. No caso do modelo 30, é imperativo considerar a função de transferência operacional escrita em termos do ganho.

O ganho de uma função de transferência é o coeficiente em evidência no numerador quando os *últimos* termos de todos os polinômios, do numerador e do denominador, forem iguais à *unidade*. Exemplificando, vamos determinar o ganho da função de transferência a seguir.

$$\frac{q_0}{q_i}(D) = \frac{a(b_2 D^2 + b_1 D + b_0)(c_1 D + c_0)}{(d_1 D + d_0)(e_3 D^3 + e_2 D^2 + e_1 D + e_0)} \quad (3.272)$$

Para que os últimos termos de todos os polinômios fiquem iguais à unidade, temos de colocar os coeficientes b_0 , c_0 , d_0 e e_0 em evidência, logo:

$$\frac{q_0}{q_i}(D) = \frac{\left(\frac{a b_0 c_0}{d_0 e_0}\right) \left(\frac{b_2}{b_0} D^2 + \frac{b_1}{b_0} D + 1\right) \left(\frac{c_1}{c_0} D + 1\right)}{\left(\frac{d_1}{d_0} D + 1\right) \left(\frac{e_3}{e_0} D^3 + \frac{e_2}{e_0} D^2 + \frac{e_1}{e_0} D + 1\right)} \quad (3.273)$$

Com a função de transferência escrita desta forma podemos então definir o ganho, isto é:

$$K \triangleq \frac{a b_0 c_0}{d_0 e_0}, \text{ ganho.}$$

Às vezes, a função de transferência contém operadores D em evidência no numerador ou no denominador, caracterizando a existência de derivador(es) ou integrador(es). Em função desse fato, a definição de ganho é aprimorada conforme a descrição a seguir.

a) Ganho Proporcional $\triangleq K$

Ele ocorre quando não temos operadores em evidência, por exemplo, a função de transferência dada pela equação 3.273.

Neste caso, a unidade do ganho é dada por:

$$[\text{unidade de } K] \equiv \frac{(\text{unidade da saída } q_0)}{(\text{unidade da entrada } q_i)}$$

É usual o Ganho Proporcional ser chamado simplesmente de Ganho.

b) Ganho Derivativo $\triangleq K_D$

É o ganho quando a função de transferência tem derivador(es). No exemplo a seguir há “ n ” derivadores.

$$\frac{q_0}{q_i}(D) = \frac{K_D D^n (a_j D^j + \dots + 1)(a_p D^p + \dots + 1)}{(a_r D^r + \dots + 1)(a_w D^w + \dots + 1)(a_v D^v + \dots + 1)} \quad (3.274)$$

A unidade do ganho K_D é dada por:

$$[\text{unidade de } K_D] \equiv \left[\frac{(\text{unidade da saída } q_0)}{(\text{unidade da entrada } q_i)} (\text{unidade de tempo})^n \right]$$

Salientaremos que a literatura sobre Controle Clássico (automação) define “Ganho Derivativo” quando a função de transferência tem *um único* derivador ($n = 1$).

c) Ganho Integrador $\triangleq K_I$

É o ganho quando a função de transferência tem integrador(es). Por exemplo:

$$\frac{q_0}{q_i}(D) = \frac{K_I (a_j D^j + \dots + 1)(a_p D^p + \dots + 1)}{D^m (a_w D^w + \dots + 1)(a_v D^v + \dots + 1)} \quad (3.275)$$

A unidade do ganho K_I é dada por:

$$[\text{unidade de } K_I] \equiv \left[\frac{(\text{unidade da saída } q_o)}{(\text{unidade da entrada } q_i)} \frac{1}{(\text{unidade de tempo})^m} \right]$$

De maneira similar ao Ganho Derivativo, os livros sobre Controle Clássico definem o “Ganho Integral” quando a função de transferência tem *um único* integrador ($m = 1$).

3.8.2 – INTERPRETAÇÃO FÍSICA DOS GANHOS K , K_D E K_I

Todos esses ganhos têm uma interpretação física que é desenvolvida considerando a entrada $q_i(t)$ uma constante ou uma rampa.

Sabemos⁴ que a solução de uma equação diferencial linear, ordinária, com coeficientes constantes é a soma da solução da homogênea (q_{ob}) com a solução da particular (q_{op}).

Sendo o sistema estável, quando o tempo tende a altos valores, q_{ob} tende a *zero*, restando somente q_{op} . Como a solução da particular q_{op} depende da função de entrada q_p , se a função excitadora for polinomial, q_{op} também será polinomial.

Um polinômio pode ser escrito da seguinte forma:

$$q_i(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (3.276)$$

Observando a equação 3.276 podemos dizer que uma constante é um polinômio com $a_0 \neq 0$ e todos os demais coeficientes iguais a *zero*. Uma rampa também seria, pois bastaria fazer $a_1 \neq 0$ e os outros iguais a *zero*.

Aplicando essas observações às funções de transferências de sistemas estáveis, podemos fazer as interpretações conforme apresentado a seguir.

a) Ganho Proporcional:

A interpretação do Ganho Proporcional é feita considerando na entrada uma função degrau, uma função polinomial para $t > 0$ e igual a *zero* para $t < 0$, Figura 3.44.

Conforme ilustra a Figura 3.44, se a entrada for uma função degrau, o Ganho Proporcional K é a relação entre a saída e a entrada, na condição de regime permanente.

4. Vide Apêndice A.

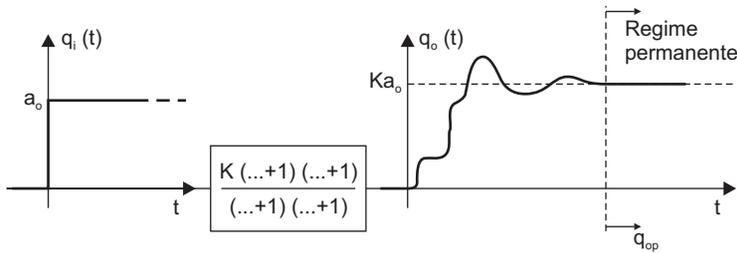


Figura 3.44 Resposta típica de uma função de transferência com Ganho Proporcional, quando a entrada é a função degrau, $q_i(t) = a_0 u(t)$.

b) Ganho Derivativo:

Neste caso, vamos considerar a entrada uma rampa, que é uma reta para $t > 0$ e igual a zero para $t < 0$, Figura 3.45.

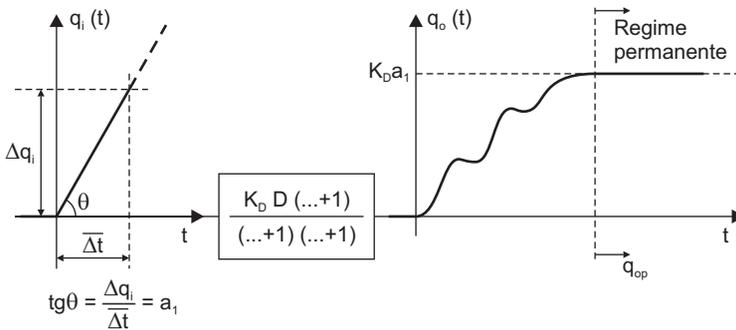


Figura 3.45 Resposta típica de uma função de transferência com Ganho Derivativo, contendo um único derivador, quando a entrada é uma rampa, $q_i(t) = a_1 t$, para $t > 0$.

A Figura 3.45 mostra que, se a função de transferência tiver um único derivador e se a entrada for uma rampa, o Ganho Derivativo K_D é a relação entre a saída e a derivada da entrada, na condição de regime permanente.

Se a função de transferência tiver dois derivadores, a saída será uma constante na condição de regime permanente somente se a entrada for uma parábola.

c) Ganho Integral:

Para interpretar o Ganho Integral vamos considerar na entrada uma função degrau, Figura 4.36.

A Figura 3.46 mostra que, se a função de transferência tiver um único integrador e se a entrada for uma função degrau, o Ganho Integral K_I é a relação entre a derivada da saída e a entrada, na condição de regime permanente.

Se a função de transferência tiver dois integradores, a saída será uma parábola, na condição de regime permanente, se a entrada for uma constante.

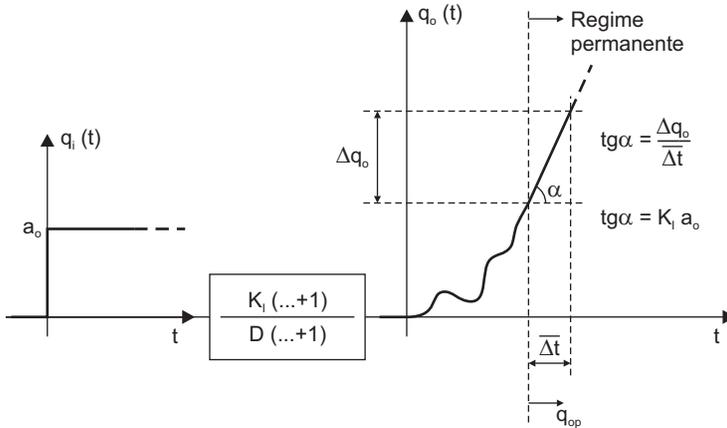


Figura 3.46 Resposta típica de uma função de transferência com Ganho Integral, contendo um único integrador, quando a entrada é a função degrau, $q_i(t) = a_0 u(t)$.

3.8.3 – GANHO PARAMÉTRICO k

Além dos três tipos de ganhos (K , K_D e K_I), há o *Ganho Paramétrico k* . Na área de Sistema de Controle Clássico esse ganho é chamado de *Sensibilidade Estática da Malha (static-loop sensitivity)*.

Quando queremos expressar a função de transferência em termos de k , fazemos uma manipulação matemática a fim de deixar todos os *primeiros* coeficientes dos polinômios iguais à *unidade*. No caso da função de transferência dada pela equação 3.272 obtemos:

$$\frac{q_o}{q_i}(D) = \frac{\frac{a b_2 c_1}{d_1 e_3} \left(D^2 + \frac{b_1}{b_2} D + \frac{b_0}{b_2} \right) \left(D + \frac{c_0}{c_1} \right)}{\left(D + \frac{d_0}{d_1} \right) \left(D^3 + \frac{e_2}{e_3} D^2 + \frac{e_1}{e_3} D + \frac{e_0}{e_3} \right)} \quad (3.277)$$

ou

$$\frac{q_o}{q_i}(D) = \frac{k \left(D^2 + \frac{b_1}{b_2} D + \frac{b_0}{b_2} \right) \left(D + \frac{c_0}{c_1} \right)}{\left(D + \frac{d_0}{d_1} \right) \left(D^3 + \frac{e_2}{e_3} D^2 + \frac{e_1}{e_3} D + \frac{e_0}{e_3} \right)} \quad (3.278)$$

em que:

$$k \triangleq \frac{a b_2 c_1}{d_1 e_3}, \text{ ganho paramétrico } k \text{ (static-loop sensitivity).}$$

Geralmente escrevemos a função de transferência dessa maneira, usando o ganho k , quando queremos obter a função de transferência em termos das raízes dos seus polinômios, isto é, na forma fatorada. Exemplo desse procedimento encontra-se desenvolvido no Capítulo 4, seção 4.8.

3.9 – TÉCNICAS DE VERIFICAÇÃO DE MODELAGEM

Muitas modelagens são extensas e envolvem diversas manipulações matemáticas. Nessas situações, a probabilidade de cometermos erros aumenta, tornando interessante e necessária a aplicação de técnicas de verificação.

Apesar de os métodos de verificação não implicarem a garantia completa, eles são muito úteis. Em outras palavras, quando submetemos um modelo às técnicas de verificação e nenhum erro é detectado, não temos garantia absoluta de que a modelagem esteja correta, porém, se houver erro nas manipulações matemáticas, a probabilidade de os métodos “dizerem” que há erro é muito grande.

Em geral aplicamos três métodos: Método de Routh, Análise da Condição de Regime Permanente e Análise Dimensional, descritos a seguir.

3.9.1 – MÉTODO DE ROUTH

O Método de Routh foi desenvolvido por volta de 1870 e é usado como critério de estabilidade em projeto de sistemas de controle, teoria clássica.

O Método é aplicado à equação característica da função de transferência, que, por sua vez, é o polinômio de seu denominador igualado a **zero**. Sob o ponto de vista da teoria de equações diferenciais, as raízes dessa equação vão formar a solução da homogênea. Analisando as posições das raízes no plano complexo, se **todas** as raízes estiverem no semiplano **esquerdo**, o sistema é **estável**. Isso significa que, se alguma raiz estiver na origem ou no semiplano direito do plano complexo, o sistema é instável; e se algum par de conjugado estiver no eixo imaginário, teremos, indefinidamente, vibrações, que também é considerado instável.

O Método de Routh é aplicado para revelar a quantidade de raízes instáveis de uma equação polinomial, sem ter de resolvê-la, mas aplicando apenas um algoritmo.

O algoritmo é melhor entendido por meio de exemplo. Seja a equação:

$$a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \quad (3.279)$$

em que todos os coeficientes são reais e $a_0 \neq 0$, pois foi retirada qualquer raiz nula.

A partir dos coeficientes da equação damos início aos procedimentos montando as duas primeiras linhas do algoritmo, ou seja:

$$\begin{array}{cccc} a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \\ a_5 & a_3 & a_1 & \end{array}$$

E, dando seqüência a essas duas linhas, calculamos as demais de maneira a obter a seguinte configuração:

$$\begin{array}{cccc} a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \\ a_5 & a_3 & a_1 & \\ b_1 & b_2 & b_3 & \\ c_1 & c_2 & & \\ d_1 & d_2 & & \\ e_1 & & & \\ f_1 & & & \end{array}$$

em que:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 \triangleq \frac{a_5 a_4 - a_6 a_3}{a_5} \\ b_2 \triangleq \frac{a_5 a_2 - a_6 a_1}{a_5} \\ b_3 \triangleq \frac{a_5 a_0}{a_5} = a_0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 \triangleq \frac{b_1 a_3 - a_5 b_2}{b_1} \\ c_2 \triangleq \frac{b_1 a_1 - a_5 b_3}{b_1} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 \triangleq \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \\ d_2 \triangleq \frac{c_1 b_3}{c_1} = b_3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 \triangleq \frac{d_1 c_2 - c_1 d_2}{d_1} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 \triangleq \frac{e_1 d_2}{e_1} = d_2 \end{array} \right.$$

Segundo o Método de Routh, a quantidade de mudanças de sinal algébrico dos termos da primeira coluna do algoritmo é igual à quantidade de raízes instáveis.

Ao continuar com o estudo do Método de Routh chegamos a algumas conclusões que são aplicáveis como critério para a verificação da modelagem:

(1) Falta de termo na equação característica:

Se faltar algum termo da equação característica, o sistema é instável. Por exemplo: seja a equação característica: $D^3 + 4D + 3 = 0$.

Neste exemplo, falta o termo: $a_2 D^2$.

Calculando as raízes vemos que são: $+i$, $-i$ e -3 , ou seja, temos uma raiz estável (-3) e duas raízes conjugadas no eixo imaginário, portanto, o sistema é oscilante.

Na prática, são bem perceptíveis os sistemas com modelos que podem oscilar indefinidamente, como, por exemplo, massa–mola (sem amortecimento), pêndulo, etc. Se conceitualmente identificamos o sistema como *não oscilante* e *estável* e obtemos uma equação característica com falta de algum termo, é muito provável que tenham ocorrido erros no desenvolvimento da modelagem.

(2) Troca de sinais algébricos na equação característica:

Se entre um e outro coeficiente da equação característica houver troca de sinal algébrico, o sistema é instável. Exemplo: seja a equação característica: $D^2 - 7D + 10 = 0$.

Neste exemplo, os coeficientes são: $+1$, -7 e $+10$, havendo, portanto, troca de sinal. As raízes são: $+2$ e $+5$, ambas no semiplano direito do plano complexo. Na verdade, basta uma única raiz estar no semiplano direito para tornar o sistema instável.

Se conceitualmente sabemos que estamos modelando um sistema estável e obtemos uma equação característica com trocas de sinais algébricos, então é quase certo que ocorreram erros na modelagem. Contudo, é importantíssimo salientar que essa ferramenta de detecção de erro somente funciona se a modelagem for realizada com *harmonia* e *coerência*, isto é:

*Uma modelagem é considerada harmoniosa se as origens e os sentidos positivos das grandezas forem coerentes e se todos os parâmetros usados forem positivos.*⁵

É quase certo que a falta desse cuidado produzirá uma função de transferência com uma equação característica contendo uma miscelânea de sinais algébricos. Nessa condição não podemos aplicar essa técnica de verificação.

(3) Resumo do Método de Routh:

Se na equação característica faltar termos e/ou tiver troca de sinais algébricos, provavelmente há erros na modelagem.

5. Vide seção 2.5 do Capítulo 2 e seção 3.1 deste capítulo.

3.9.2 – CONDIÇÃO DE REGIME PERMANENTE

Em muitos sistemas, mesmo complexos, não é difícil conhecer a condição de regime permanente. Diante dessa informação podemos verificar o ganho, seja ele proporcional, derivativo ou integral.

Por exemplo, no *circuito RC*, Figura 3.6, quando $e_i(t)$ for constante, conceitualmente verificamos que, em regime permanente, $e_o(t)$ deve ter o mesmo valor, significando ganho unitário. De fato, o ganho obtido na modelagem, equação 3.17, é igual à unidade ($K = 1$), coincidindo, portanto, com o esperado.

Em outro exemplo, consideramos o sistema massa–mola–amortecedor, Figura 3.21. Se a força $f_i(t)$ for constante positiva, conceitualmente observamos que, em regime permanente, a massa terá deslocamento positivo e essa força f_i ficará em equilíbrio com a força que a mola aplica sobre a massa. Assim, equacionando a somatória das forças na condição de regime permanente, vem:

$$0 = f_i + f_m = f_i - K_s x \quad (3.280)$$

ou

$$f_i = K_s x \quad (3.281)$$

que resulta:

$$\frac{x}{f_i} = \frac{1}{K_s} \quad (3.282)$$

Verificamos, por meio de análise conceitual na condição de regime permanente, que a relação entre x e f_i é $1/K_s$, que deve ser igual ao ganho da função de transferência. De fato, o ganho obtido na modelagem é $1/K_s$, equações 3.94 e 3.95, coincidindo, portanto, com o esperado.

3.9.3 – ANÁLISE DIMENSIONAL

A análise dimensional representa um dos métodos mais exigentes de verificação. Em outras palavras, se ocorreu um erro na manipulação matemática da modelagem, dificilmente a análise dimensional será satisfeita.

Sabemos que modelos do tipo 30 são formados por: *ganho*, *derivadores* ou *integradores* e *polinômios*. Os ganhos têm unidades conforme discutido na seção 3.8. O conjunto de derivadores D^n tem unidade $(1/\text{tempo})^n$ e os integradores $(1/D)^m$ têm unidade $(\text{tempo})^m$. Os polinômios são adimensionais.

A técnica de verificação pela análise dimensional é melhor entendida por meio de exemplo. Seja o sistema da Figura 3.38 (sistema com dois tanques de água) cuja função de transferência é dada pela equação 3.216, transcrita a seguir.

$$\frac{h_2}{Q_i}(D) = \frac{\frac{R_{f2}}{\rho g}}{\left(\frac{A_1 A_2 R_{f1} R_{f2}}{\rho^2 g^2}\right) D^2 + \left[\frac{A_1 R_{f1}}{\rho g} + \frac{A_1 R_{f2}}{\rho g} + \frac{A_2 R_{f2}}{\rho g}\right] D + 1} \quad (3.283)$$

A verificação pode ser feita utilizando unidades do Sistema Internacional,⁶ por meio das seguintes etapas:

a) 1º Passo – Unidade da Relação: Saída/Entrada.

$$\left[\frac{h_2}{q_i}\right] \equiv \left[\frac{m}{m^3/seg}\right] = \left[\frac{seg}{m^2}\right] \quad (3.284)$$

b) 2º Passo – Unidade do Ganho Proporcional: $K \triangleq \frac{R_{f2}}{\rho g}$

Temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{Unidade da resistência fluídica: } \frac{kg}{seg \, m^4} \\ - \text{Unidade de } \rho: \frac{kg}{m^3} \\ - \text{Unidade de } g: \frac{m}{seg^2} \end{array} \right.$$

Então:

$$\left[\frac{R_{f2}}{\rho g}\right] \equiv \left[\frac{kg \, m^3 \, seg^2}{seg \, m^4 \, kg \, m}\right] = \left[\frac{seg}{m^2}\right] \quad (3.285)$$

A unidade do Ganho Proporcional está verificada e satisfeita, pois é igual à unidade da (saída/entrada), dada pela equação 3.284.

c) 3º Passo – Primeiro Termo do Polinômio do Denominador:

$$\left(\frac{A_1 A_2 R_{f1} R_{f2}}{\rho^2 g^2}\right) D^2$$

6. Neste livro, a abreviatura de segundo é *seg*.

Temos:

$$\left[\left(\frac{A_1 A_2 R_{f1} R_{f2}}{\rho^2 g^2} \right) (D^2) \right] \equiv \left[\left(\frac{m^2 m^2 kg kg m^6 seg^4}{seg m^4 seg m^4 kg^2 m^2} \right) \left(\frac{1}{seg^2} \right) \right] = \text{adimensional} \quad (3.286)$$

O primeiro termo do polinômio é adimensional, portanto, tem sua verificação satisfeita.

d) 4º Passo – Segundo Termo do Polinômio do Denominador:

$$\left[\frac{A_1 R_{f1}}{\rho g} + \frac{A_1 R_{f2}}{\rho g} + \frac{A_2 R_{f2}}{\rho g} \right] D$$

Observamos que os três termos dentro dos colchetes têm as mesmas dimensões, portanto, basta verificar um deles. Assim:

$$\left[\left(\frac{A R_f}{\rho g} \right) D \right] \equiv \left[\left(\frac{m^2 kg m^3 seg^2}{seg m^4 kg m} \right) \left(\frac{1}{seg} \right) \right] = \text{adimensional} \quad (3.287)$$

O segundo termo também tem a verificação satisfeita.

e) 5º Passo – Conclusão:

Quando aplicamos Análise Dimensional e não encontramos problemas na função de transferência, é muito provável que a manipulação matemática da modelagem esteja correta.

3.10 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS⁷

EX1 – Determine a função de transferência $\frac{e_o}{e_i}(D)$ do sistema da Figura E3.1.

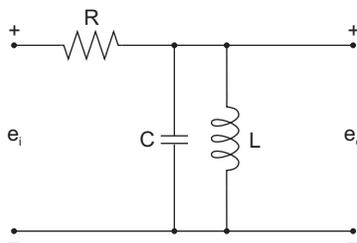


Figura E3.1

7. Enuncie as hipóteses de todas as modelagens.

EX2 – Determine a função de transferência $\frac{e_o}{e_i}(D)$ do sistema da Figura E3.2.

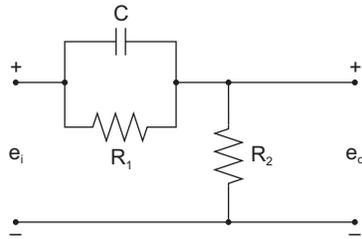


Figura E3.2

EX3 – Determine a função de transferência $\frac{e_o}{e_i}(D)$ do sistema da Figura E3.3.

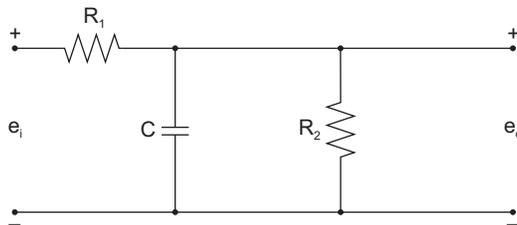


Figura E3.3

EX4 – Para o sistema da Figura E3.4, determine:

a) A função de transferência $\frac{\theta_o}{f_i}(D)$.

b) Os valores numéricos dos parâmetros:

ganho = K ;

frequência natural = ω_n ; e

fator de amortecimento = ζ .

Sabe-se que: $J = 0,2 \text{ kg.m}^2$; $K_s = 20 \text{ N/m}$; $B = 10 \text{ N/(m/seg)}$; $L_1 = 0,5 \text{ m}$; e $L_2 = 0,3 \text{ m}$.

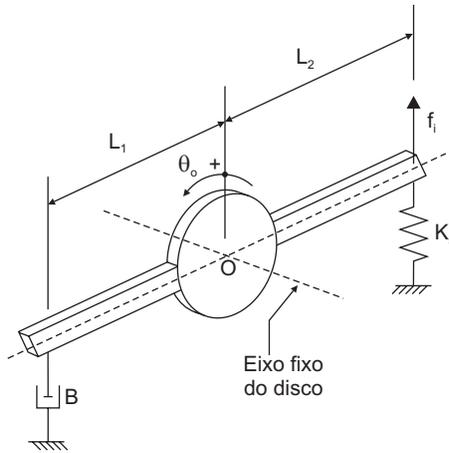


Figura E3.4

EX5 – Determine a função de transferência $\frac{e_o}{e_i}(D)$ da Figura E3.5a e compare com a função de transferência da Figura E3.5b. Se forem diferentes, explique sinteticamente. Sabe-se que o amplificador tem *ganho* = 1, baixíssima impedância na saída e altíssima impedância na entrada.

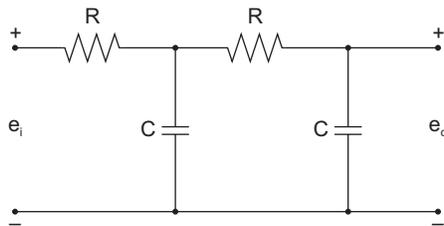


Figura E3.5a

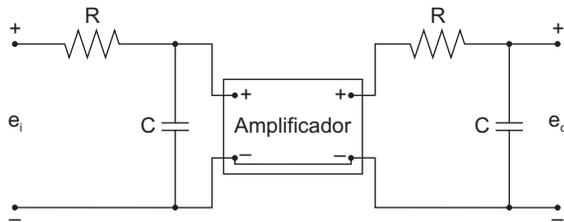


Figura E3.5b

EX6 – O momento externo (input) $M_i = A_i \text{ sen}(\omega t)$ atua no eixo do sistema da Figura E3.6. Determine:

a) A função de transferência $\frac{x_o}{M_i}(D)$ (defina: K , ω_n e ζ).

b) Os valores de: K , ω_n e ζ .

Considere:

m = massa pontual ($m = 4 \text{ kg}$)

K_s = coeficiente da mola linear ($K_s = 16 \text{ N/m}$)

B_t = coeficiente do amortecedor torcional ($B_t = 0,5 \text{ Nm/(rad/seg)}$);

L = comprimento ($L = 25 \text{ cm}$);

x_o = deslocamento linear da massa (output);

θ = deslocamento angular do eixo.

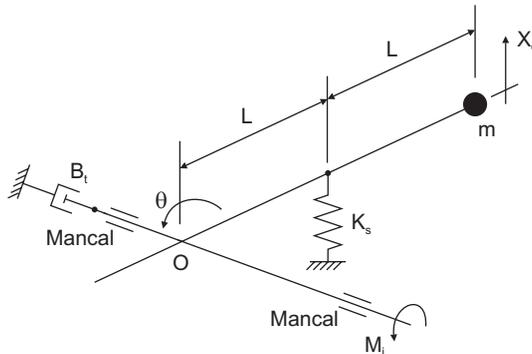


Figura E3.6.

EX7 – Determine as funções de transferências $\frac{x_2}{x_1}(D)$ para os sistemas das

Figuras E3.7a e E3.7b.

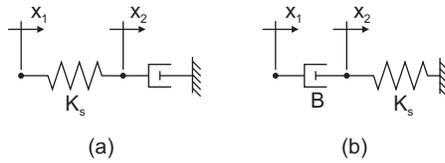


Figura E3.7

EX8 – O momento externo (*input*) função do tempo $M_i(t)$ atua no eixo do sistema da Figura E3.8. Determine a função de transferência $\frac{x}{M_i}(D)$.

Considere:

m = massa;

J = inércia do disco e braços;

K_1 e K_2 = coeficientes das molas lineares;

B_1 = coeficiente do amortecedor torcional;

B_2 = coeficiente do amortecedor linear;

L_1 e L_2 = comprimentos;

x = deslocamentos linear da massa; e

θ_o = deslocamento angular do eixo.

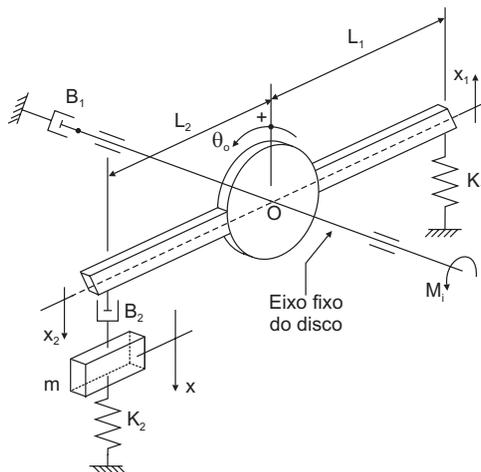


Figura E3.8

EX9 – Para o sistema da Figura E3.9 determine a função de transferência $\frac{\theta_1}{M_i}(D)$. Os discos são iguais, ambos têm massa M e giram, respectivamente, em torno de seus centros O_1 e O_2 . Notas:

- No repouso, a linha AB está na vertical.
- A barra que liga o disco 1 à massa m tem massa desprezível.
- A massa m é pontual.
- Momentos de inércia:

– de um disco: $J_d = \frac{1}{2}MR^2$;

– de uma massa pontual: $J_m = mr^2$

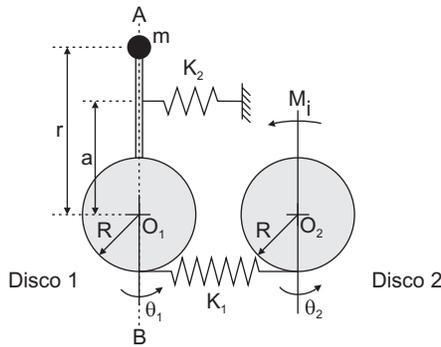


Figura E3.9

EX10 – Determine para o sistema da Figura E3.10 a função de transferência $\frac{y}{f_i}(D)$. Sabe-se que o braço AB tem massa desprezível e que o momento de inércia de um disco é dado por: $J = \frac{1}{2}MR^2$.

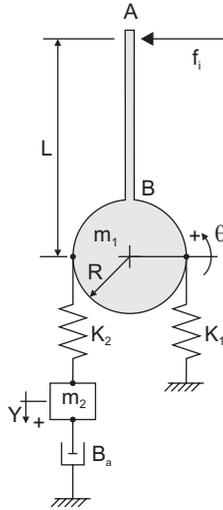


Figura: E3.10

EX11 – O sistema da Figura E3.11 é excitado simultaneamente pelo deslocamento $x_i(t)$ e pela força $f_i(t)$. Definindo f_o como a força da mola K_s sobre a massa m_2 , determine o modelo em forma de matriz e depois obtenha as funções de transferências $\frac{f_o}{x_i}(D)$ e $\frac{f_o}{f_i}(D)$.

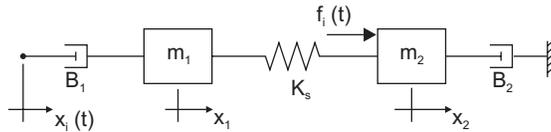


Figura E3.11

EX12 – Determine a função de transferência $\frac{Q_o}{Q_i}(D)$ do sistema de tanques representado na Figura E3.12.

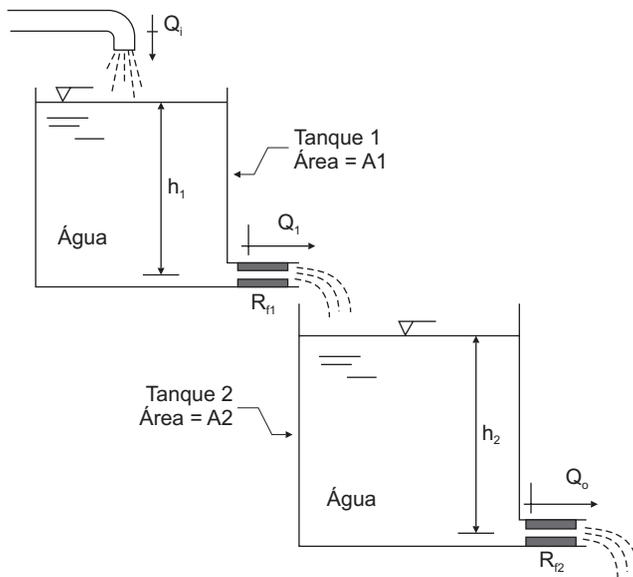


Figura E3.12

EX13 – Determine a função de transferência $\frac{T_o}{e_i}(D)$ do sistema da Figura E3.13.

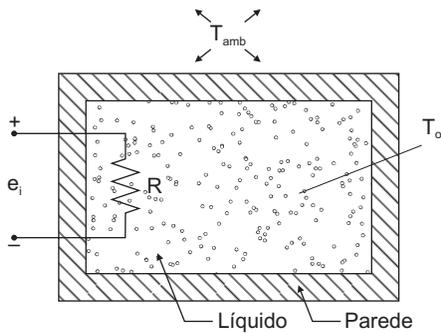


Figura E3.13

TRANSFORMADA DE LAPLACE

4.1 – INTRODUÇÃO

A Transformada de Laplace (T. L.) está aqui desenvolvida com o objetivo de sua aplicação em estudos da dinâmica de sistemas.

Um dos interesses em estudarmos a Transformada de Laplace deve-se ao fato desta ser um importante método alternativo para resolver *equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes*.

Na grande maioria das vezes, o método da Transformada de Laplace é utilizado para resolver os mesmos tipos de equações em que outros métodos também são aplicáveis. A vantagem do método da transformada é que a solução pode ser encontrada de maneira rápida e fácil.

Alguns aspectos que distinguem o método da Transformada de Laplace (T. L.) do método clássico são:

- (i) A T. L. permite que equações diferenciais sejam transformadas em equações algébricas relativamente simples que podem ser facilmente manipuladas para a forma desejada.
- (ii) No método do T. L. não temos etapas distintas para determinarmos a solução da homogênea, particular e os valores das constantes pertinentes à solução. A solução completa, inclusive considerando as condições iniciais, é obtida de uma só vez quando aplicamos a T. L.
- (iii) Não existem dúvidas a respeito de quais seriam as condições iniciais necessárias. O processo de resolução usando a T. L. introduz automaticamente as condições iniciais corretas.
- (iv) Com o método da T. L. manipulamos os sinais descontínuos de maneira simples, direta e clara. O método clássico exige resolução por partes acompanhada de laboriosas operações para fazer coincidir as condições finais de um trecho com as condições iniciais do trecho seguinte.
- (v) O procedimento é matematicamente mais rigoroso que o método do operador D . Com o operador D nós tratamos as equações como se fossem algébricas, mas com a T. L. elas realmente são algébricas.
- (vi) Problemas similares resultam em padrões que são catalogados, e isto facilita o uso da T. L.

4.2 – TRANSFORMADA DE LAPLACE E SUA INVERSA – DEFINIÇÕES

4.2.1 – DEFINIÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Dada uma função do tempo $f(t)$ que atende a três condições (contínua por partes, de ordem exponencial e nula para argumentos negativos), a sua Transformada de Laplace é:

$$\mathcal{L}[f(t)] \triangleq \int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \triangleq F(s) \quad (4.1)$$

em que:

$\mathcal{L} \triangleq$ símbolo operacional da T. L.;

$s \triangleq \sigma + i \omega \triangleq$ variável complexa (unidade: 1/tempo);

$i \triangleq \sqrt{-1}$;

$F(s) \triangleq$ Transformada de Laplace de $f(t)$;

$0^+ \triangleq \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \varepsilon_1$, para $\varepsilon_1 > 0$;

$f(t) \triangleq$ função do tempo, sendo:

(i) contínua por partes;

(ii) de ordem exponencial;

(iii) $f(t) = 0$ para $t < 0$.

É comum usarmos letras minúsculas para as funções do tempo e as correspondentes letras maiúsculas para as suas respectivas transformadas. Por exemplo, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$, etc.

Quando a integral da equação 4.1 converge, a transformada existe e é uma função de s . Sempre cabe uma discussão sobre a convergência da integral da T. L. em função de valores de s . Ilustrando o problema, vamos calcular a transformada da *função degrau unitário* $u(t)$.

A função degrau unitário $u(t)$ é definida¹ como sendo

$$u(t) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0; \\ 1 & \text{para } t > 0; \\ \text{no ponto } t = 0 & \text{a função não é definida.} \end{cases}$$

1. Vide seção 4.6 para um melhor estudo da função degrau.

Aplicando a definição da T. L., obtemos:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_{0^+}^{\infty} u(t)e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_{0^+}^{\infty} \quad (4.2)$$

Então, para $\sigma > 0$ ($s = \sigma + i\omega$) vem:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (4.3)$$

Este resultado é obtido porque, se a parte real de s for positiva, temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0 \quad (4.4)$$

Se $\sigma < 0$, a integral da equação 4.2 é divergente.

Considerando outro exemplo, vamos calcular a transformada de $f(t)$ sendo $f(t) = 0$ (zero) para $t < 0$ e $f(t) = ce^{-at}$ para $t > 0$. Então, da definição:

$$\mathcal{L}[ce^{-at}] = \int_{0^+}^{\infty} ce^{-at} e^{-st} dt = c \int_{0^+}^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = -\frac{c}{s+a} \left[e^{-(a+s)t} \right]_{0^+}^{\infty} = +\frac{c}{s+a} \quad (4.5)$$

No cálculo desta transformada observamos a necessidade de $(a + s) > 0$ ou a parte real de s ser maior que $-a$ para que a integral da T. L. (equação 4.5) convirja.

Um questionamento com relação à equação 4.5 refere-se à validade da transformada na região em que $\sigma < -a$. Estudos aprofundados usando a teoria de números complexos mostram que $F(s)$ assim obtida pode ser considerada válida em todo plano s , exceto no ponto onde $s = -a$.

Para efeito dos nossos estudos em Dinâmica de Sistemas, não faremos mais referência às restrições de s , ficando entendido que s pertence a um intervalo que garanta a convergência da T. L.

Outro ponto a ser observado da T. L. é que ela é uma transformada linear. Isto significa que se as funções $f(t)$ e $g(t)$ têm transformadas, respectivamente, $F(s)$ e $G(s)$, então:

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s) \quad (4.6)$$

Agora, continuando a discussão sobre a definição da T. L. vamos considerar as restrições quanto à função $f(t)$. Devemos afirmar que é condição suficiente para a determinação de $F(s)$ se a função $f(t)$ preencher as 3 condições da definição, isto é: igual a zero para $t < 0$; contínua por partes; e de ordem exponencial. Estas condições são suficientes mas não necessárias porque existem algumas exceções. Por exemplo, $f(t) = t^{-1/2}$ não é contínua por partes, mas a sua T. L. existe.

Para melhor entendimento do significado de “contínua por partes” e de “ordem exponencial”, temos:

- (i) Uma função $f(t)$ é “contínua por partes” no intervalo $[0, \infty]$ se esta, em qualquer intervalo $0 \leq a \leq t \leq b$, tiver um número finito de descontinuidade e toda descontinuidade for de primeira espécie, isto é, se existirem os limites laterais. Exemplos:

Exemplo 1: A função $f(t)$ (onda quadrada) da Figura 4.1. é contínua por partes.

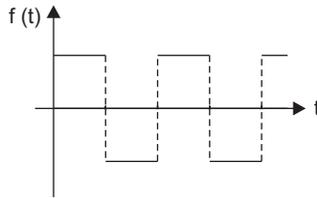


Figura 4.1 Gráfico qualitativo de uma onda quadrada.

Exemplo 2: A função $g(t) = 1/(t - 5)$, Figura 4.2, não é uma função contínua por partes.

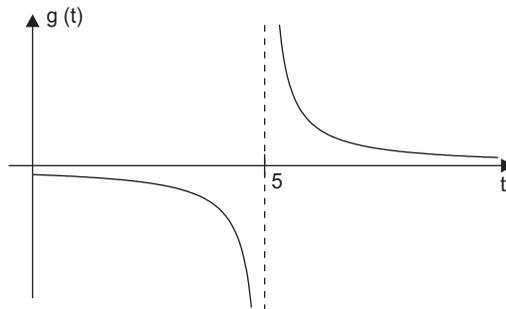


Figura 4.2 Gráfico qualitativo da função $g(t)=1/(t - 5)$.

- (ii) Uma função é de ordem exponencial se existirem números $c, M > 0$ e $T > 0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t > T$ (todos os valores de t maiores que um valor finito de tempo T).
- (iii) A condição de: $f(t) = 0$ para $t < 0$ é explícita por si só, mas é comum a falta de rigor neste requisito. Exemplificando, a função $f_1(t) = \cos(\omega t)$ não é transformável porque ela não é nula para $t < 0$, Figura 4.3.

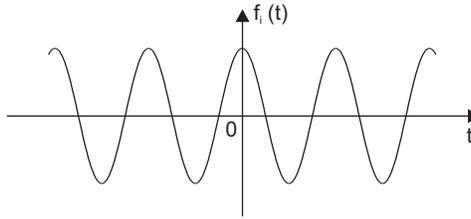


Figura 4.3 A função $f_i(t) = \cos(\omega t)$ não é transformável.

Devemos destacar que as três condições que recaem sobre $f(t)$ não representam empecilhos sobre o ponto de vista prático. Em engenharia, as funções normalmente atendem a essas condições, lembrando que o instante admitido como $t = 0$ é uma questão de escolha; portanto, a exigência de $f(t) = 0$ para $t < 0$ não representa uma restrição.

Neste livro, quando a T. L. é aplicada a uma função do tempo, devemos sempre subtender que ela atende às três condições da definição, mesmo quando não estiver explícito no texto. Repetindo, as funções que não obedecem as três condições não são transformáveis.

É importante lembrar que ao realizarmos a Transformada de Laplace de $f(t)$ obtemos como resultado $F(s)$, que é uma função apenas da variável s . Esta afirmativa pode ser facilmente comprovada através da definição da T.L., pois, ao resolvermos a integral em relação ao tempo (equação 4.1), a variável tempo t desaparece devido à sua substituição pelos limites da integração que são 0^+ e ∞ .

A Transformada de Laplace pode também ter uma interpretação gráfica. Neste caso a função $F(s)$ seria a área calculada de $t = 0^+$ a ∞ do gráfico da função $e^{-st} f(t)$ contra o tempo t . Como a função e^{-st} é adimensional (dimensão de s é $1/\text{tempo}$), a função $F(s)$ possui dimensão igual à de $f(t)$ multiplicada pela unidade de tempo. Por exemplo, se $f(t)$ for pressão expressa em Pa , a unidade de $F(s)$ é $Pa \text{ seg}$. (Nota: Sabemos que o símbolo para a unidade de tempo “segundo” é a letra s , porém, em dinâmica, a letra s é internacionalmente utilizada para representar a variável de Laplace, ficando para a unidade de tempo a abreviatura seg ou sec em inglês).

4.2.2 – DEFINIÇÃO DA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

A Transformada de Laplace foi definida pela equação 4.1 como sendo:

$$\mathcal{L} [f(t)] \triangleq \int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \triangleq F(s) \quad (4.1) \text{(repetida)}$$

Conforme a definição, a integração começa no ponto $t = 0^+$, o que significa que a forma de $f(t)$ para $t < 0$ não influencia o resultado da integração. Por exemplo,

para todas as funções da Figura 4.4, se o cálculo da integral fosse realizado, o resultado seria o mesmo e isto proporcionaria $F_1(s) = F_2(s) = F_3(s)$.

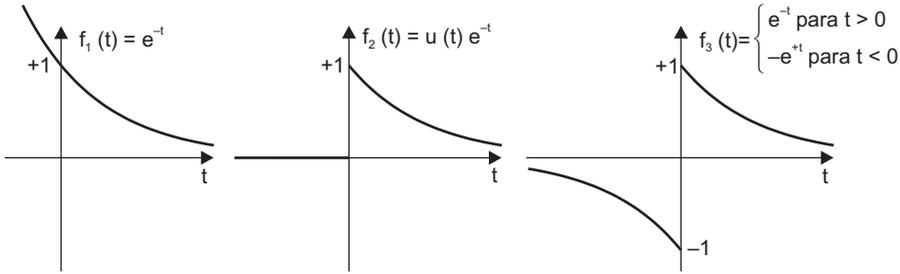


Figura 4.4 Três funções que produziram o mesmo resultado se a integral de Laplace fosse calculada.

Com o objetivo de fazer existir uma única $f(t)$ para cada $F(s)$ é que impomos a condição de $f(t)$ ser zero para $t < 0$. Conseqüentemente, somente a função $f_2(t)$ é transformável.

Quando é colocada a condição de $f(t) = 0$ para $t < 0$ para a unicidade, isto leva à existência de uma fórmula que nos permite, a partir de $F(s)$, determinar $f(t)$.

$$f(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} F(s)e^{st} ds; \text{ para } t > 0 \quad (4.7)$$

em que σ_1 é maior que σ da equação 4.1.

A equação 4.7 é uma integral de contorno e sua discussão não faz parte do escopo deste livro. A determinação de $f(t)$ usando a equação 4.7 exige o conhecimento da teoria de funções de variáveis complexas. Uma maneira mais fácil de determinar $f(t)$ é o uso de tabelas (vide Apêndice D), construídas através do cálculo da T. L. de funções, aplicando sua definição.

O *teorema da unicidade* garante que, se $f(t)$ for *contínua*, para a função $f(t)$ há uma e somente uma $F(s)$. Como $f(t)$ é igual a *zero* para $t < 0$, então uma dada $F(s)$ corresponde a somente uma $f(t)$.

Matematicamente é possível mostrar que em certas situações a *Transformada Inversa de Laplace* de uma $G(s)$ pode não ser única. Se $g_1(t)$ e $g_2(t)$ não forem contínuas, mas contínuas por partes e de ordem exponencial, então, se $\mathcal{L}[g_1(t)] = \mathcal{L}[g_2(t)]$, $g_1(t)$ e $g_2(t)$ são essencialmente iguais, ou seja, elas podem ser diferentes somente nos pontos de descontinuidade.

Felizmente, as descontinuidades das funções nos problemas de Engenharia não correspondem às exceções matemáticas, portanto, em Dinâmica de Sistemas a unicidade ocorre. Por esta razão, a aplicação de tabelas para realizar a Transformada Inversa de Laplace representa um método aceito e amplamente usado.

A Transformada Inversa de Laplace é também uma transformação linear, isto é, para α e β constantes, temos:

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F(s) + \beta G(s)] = \alpha \mathcal{L}^{-1}[F(s)] + \beta \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \quad (4.8)$$

4.3 – TEOREMAS DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

4.3.1 – TEOREMA DA INTEGRAÇÃO

a) Teorema:

É muito comum encontrarmos em tabelas a transformada da função integral definida, que apontamos ser diferente da transformada da função integral indefinida.

O objetivo aqui é determinar a T. L. da função $\int f(t)dt$, isto é, $\mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right]$.

Podemos resolver esta transformada aplicando a definição da T. L. e também a integração por partes (Apêndice A, equação A.20), ou seja:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (4.9)$$

Fazendo

$$u = e^{-st} \quad (4.10)$$

$$dv = f(t) dt \quad (4.11)$$

Então:

$$du = -se^{-st} dt \quad (4.12)$$

$$v = \int f(t) dt \quad (4.13)$$

Usando as equações 4.9 até 4.13 e a definição da T. L. obtemos:

$$\int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \left[e^{-st} \int f(t) dt \right]_{0^+}^{\infty} + s \int_{0^+}^{\infty} \left[\int f(t) dt \right] e^{-st} dt \quad (4.14)$$

ou

$$F(s) = -\left[\int f(t) dt \right]_{t=0^+} + s \mathcal{L}\left[\int f(t) dt \right] \quad (4.15)$$

Agora, definindo:

$$f^{(-1)}(0^+) \triangleq \left[\int f(t) dt \right]_{t=0^+}; \text{ valor da função integral no ponto } 0^+.$$

Então:

$$\mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0^+)}{s} \quad (4.16)$$

que é o Teorema da Integração

O Teorema da Integração fica modificado se a transformada for da integral definida de 0^+ a t , isto é:

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^+}^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (4.17)$$

Agora, generalizando a equação 4.16 para integrais de ordem maior, obtemos:

$$\mathcal{L}\left[f^{(-n)}(t)\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(-k)}(0^+)}{s^{n-k+1}} \quad (4.18)$$

em que:

$$f^{(-k)}(0^+) \triangleq \left[\int \int \int \dots \int f(t) (dt)^k \right]_{t=0^+};$$

$$f^{(-0)}(t) \triangleq f(t);$$

n e k \triangleq números inteiros.

b) Exemplo:

Determinar a função velocidade $v(t)$ de um sistema mola-amortecedor, com massas desprezíveis, Figura 4.5. A força “input” f_i é zero e o sistema tem condição inicial $x(t)|_{0^+} = x(0^+)$.

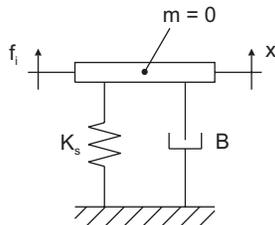


Figura 4.5 Sistema mola-amortecedor (neste exemplo $f_i = 0$).

Resolução:

Aplicando a Lei de Newton com o objetivo de equacionar em função da velocidade $v(t)$ obtemos:

$$Bv(t) + K_s x(t) = 0 \quad (4.19)$$

Sendo $x(t) = \int v(t) dt$, então a T. L. da (4.19) fica:

$$BV(s) + K_s \left[\frac{V(s)}{s} + \frac{\int v(t) dt \Big|_{0^+}}{s} \right] = 0 \quad (4.20)$$

em que:

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)]$$

Organizando os termos vem:

$$[Bs + K_s]V(s) = -K_s x(0^+) \quad (4.21)$$

Logo

$$V(s) = -\frac{K_s x(0^+)}{Bs + K_s} = -\frac{\left(\frac{K_s}{B}\right)x(0^+)}{s + \frac{K_s}{B}} \quad (4.22)$$

Na seção 4.2.1 foi dito que:

$$\left[\begin{array}{c} \text{unidade de} \\ F(s) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{unidade de} \\ f(t) \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} \text{unidade de} \\ \text{tempo} \end{array} \right] \quad (4.23)$$

Então, se a unidade de $v(t)$ for *metro/segundo*, a unidade de $V(s)$ é *metro*. Verificando 4.22 obtemos:

$$\left[\begin{array}{c} \text{unidade} \\ \text{de } V(s) \end{array} \right] \equiv \frac{\left[\frac{N/m}{N\text{seg}/m} \right] \times [m]}{\left[\frac{1}{\text{seg}} \right] + \left[\frac{N/m}{N\text{seg}/m} \right]} \equiv [m] \quad (4.24)$$

Portanto, a unidade de $V(s)$ fica verificada.

Agora, fazendo a Transformada Inversa de Laplace da (4.22), usando a equação 4.5, obtemos:

$$\mathcal{L}^{-1}[V(s)] = v(t) = \left(-\frac{K_s}{B} x(0^+) \right) e^{-\frac{K_s}{B} t}; \quad (\text{para } t > 0) \quad (4.25)$$

Da (4.25) podemos também obter $x(t)$, ou seja:

$$x(t) = +x(0^+) e^{-\frac{K_s}{B}t}; \text{ (para } t > 0) \quad (4.26)$$

na qual observamos que, para $t = 0^+$, temos a condição inicial $x = x(0^+)$.

Para o caso de $x(0^+) = -1$, as funções $v(t)$ e $x(t)$ (equações 4.25 e 4.26) têm seus gráficos qualitativos conforme ilustra a Figura 4.6.

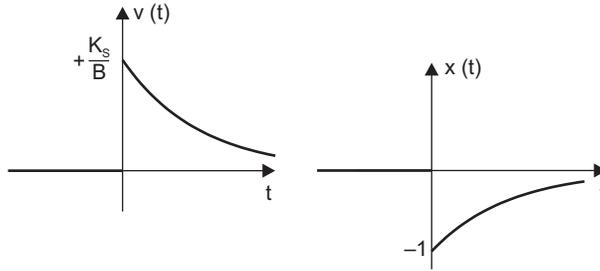


Figura 4.6 Gráfico das funções $v(t)$ e $x(t)$ dadas pelas equações 4.25 e 4.26, respectivamente.

4.3.2 – TEOREMA DA DERIVAÇÃO REAL

a) Dedução do Teorema:

O objetivo é determinar a transformada da função $\frac{df(t)}{dt}$.

Aplicando a definição da T. L. e a integração por partes obtemos a T. L. desta função. Neste caso fazemos:

$$u = f(t) \quad (4.27)$$

$$dv = e^{-st} dt \quad (4.28)$$

Então:

$$du = \left(\frac{df(t)}{dt} \right) dt \quad (4.29)$$

$$v = -\frac{1}{s} e^{-st} \quad (4.30)$$

Da integração por partes obtemos:

$$\int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} f(t) e^{-st} \right]_{0^+}^{\infty} - \left(-\frac{1}{s} \right) \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} \left(\frac{df(t)}{dt} \right) dt \quad (4.31)$$

ou

$$F(s) = \frac{f(0^+)}{s} + \frac{1}{s} \mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] \quad (4.32)$$

Logo,

$$\mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = sF(s) - f(0^+) \quad (4.33)$$

que é o Teorema da Derivação Real.

Generalizando para ordens maiores resulta:

$$\mathcal{L} \left[f^{(n)}(t) \right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n f^{(k-1)}(0^+) s^{(n-k)} \quad (4.34)$$

em que:

$$f^{(k-1)}(0^+) \triangleq \left[\frac{d^{k-1} f(t)}{dt^{k-1}} \right]_{t=0^+};$$

$$f^{(0)}(t) \triangleq f(t);$$

n e $k \triangleq$ números inteiros.

b) Exemplo:

Usaremos a variável x e não t , portanto $\mathcal{L}[f(x)] = \int_{0^+}^{\infty} f(x) e^{-sx} dx = F(s)$.

Vamos supor que a função estática $f(x)$ seja uma carga distribuída por unidade de comprimento que atua em uma viga, Figura 4.7.

O objetivo é determinar $Y(s)$, que é a transformada de $y(x)$, deflexão da viga causada pela carga $f(x)$.

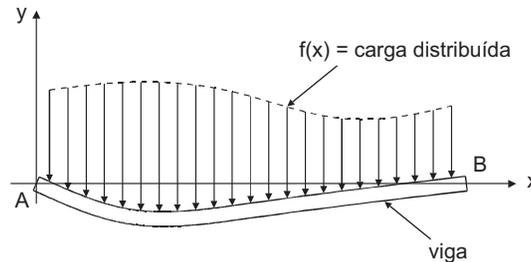


Figura 4.7 Viga AB submetida a uma carga distribuída $f(x)$.

Para uma viga submetida a uma carga distribuída $f(x)$, a Resistência dos Materiais nos fornece a equação:

$$EI \frac{d^4 y(x)}{dx^4} = f(x) \quad (4.35)$$

em que:

$E \triangleq$ módulo de elasticidade;

$I \triangleq$ momento de inércia de área da seção transversal da viga;

$y \triangleq$ deflexão estática da viga;

$x \triangleq$ distância ao longo da viga.

Aplicando a T. L. em ambos os lados da equação 4.35 obtemos:

$$s^4 Y(s) - s^3 y(0^+) - s^2 y'(0^+) - s y''(0^+) - y'''(0^+) = \frac{F(s)}{EI} \quad (4.36)$$

Logo, a transformada da deflexão $Y(s)$ resulta:

$$Y(s) = \frac{y(0^+)}{s} + \frac{y'(0^+)}{s^2} + \frac{y''(0^+)}{s^3} + \frac{y'''(0^+)}{s^4} + \frac{1}{EI} \frac{F(s)}{s^4} \quad (4.37)$$

4.3.3 – TEOREMA DA DERIVAÇÃO COMPLEXA

Este teorema refere-se à derivação de $F(s)$ em função da variável complexa s ,

ou seja: $\left(\frac{d}{ds} F(s) \right)$,

Para obter a expressão do teorema fazemos a T. L. da função $tf(t)$.

Aplicando a definição da T. L. vem:

$$\mathcal{L}[t f(t)] = \int_{0^+}^{\infty} t f(t) e^{-st} dt \quad (4.38)$$

Como:

$$t f(t) e^{-st} = -f(t) \frac{d}{ds} e^{-st} \quad (4.39)$$

e a variável s é independente de t , substituindo (4.39) em (4.38) vem:

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{d}{ds} \int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (4.40)$$

Logo:

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{d}{ds} F(s) \quad (4.41)$$

que é o Teorema da Derivada Complexa.

Generalizando para ordens maiores ($n = 1, 2, 3 \dots$), vamos obter:

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad (4.42)$$

em que n é um número inteiro ($n = 1, 2, 3 \dots$).

4.3.4 – TEOREMA DO DEFASAMENTO NO TEMPO

A função $f(t-a)$ é chamada de função defasada porque ela é idêntica à função $f(t)$ a menos do defasamento do intervalo de tempo $\Delta t = a > 0$. A Figura 4.8 ilustra um exemplo de uma função $f(t-a)$ que é a defasada da função $f(t)$.

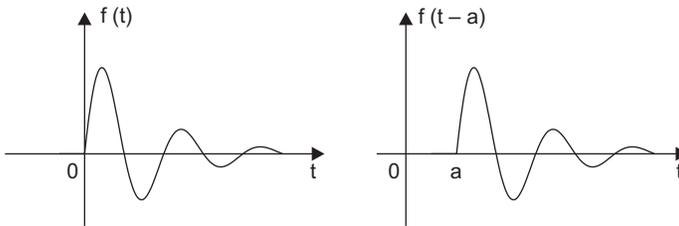


Figura 4.8 Exemplo de uma função $f(t)$ e a sua defasada $f(t-a)$, para $a > 0$.

A determinação da transformada de uma função $g(t) \triangleq f(t-a)$ pode ser realizada a partir da definição da T. L., ou seja:

$$G(s) = \int_{0^+}^{\infty} g(t) e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} f(t-a) e^{-st} dt \quad (4.43)$$

Multiplicando a equação 4.43 por e^{as} vem:

$$e^{as} G(s) = \int_{0^+}^{\infty} f(t-a) e^{as} e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} f(t-a) e^{-s(t-a)} dt \quad (4.44)$$

Definindo uma variável τ como $\tau \triangleq t-a$, então $dt = d\tau$, e observando que $f(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, a integral da equação 4.44 fica:

$$\int_{0^+}^{\infty} f(t-a) e^{-s(t-a)} dt = \int_{0^+ - a}^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{0^+}^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = F(s) \quad (4.45)$$

Combinando (4.43), (4.44) e (4.45) resulta:

$$\int_{0^+}^{\infty} f(t-a) e^{-st} dt = e^{-as} F(s) \quad (4.46)$$

Lembrando mais uma vez que $f(t)$ é zero para argumentos negativos, então:

$$f(t-a) = f(t-a)u(t-a) \quad (4.47)$$

em que:

$$u(t-a) \triangleq \begin{bmatrix} \text{função degrau} \\ \text{unitário} \end{bmatrix} \triangleq \begin{cases} 0 & \text{para } t < a \\ 1 & \text{para } t > a \\ \text{no ponto } t = a & \text{a função não é definida.} \end{cases} \quad (4.48)$$

Portanto, das equações 4.46 e 4.47 vem:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as} F(s)} \quad (4.49)$$

que é o Teorema do Defasamento no Tempo (chamado de “Delay Theorem”).

Se $f(t)$ não for igual a zero para argumentos negativos, o teorema ainda é válido, mas neste caso a T. L. de $f(t)$ deve ser entendida como sendo:

$$F(s) = \lim_{\substack{\varepsilon_2 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0}} \int_{\varepsilon_1}^{\infty} f(t)u(t-\varepsilon_2) e^{-st} dt \quad (4.50)$$

Discussão para melhor interpretar a equação 4.50 está desenvolvida na seção 4.7.

4.3.5 – TEOREMA DO DEFASAMENTO EM S

Vamos calcular a T. L. da função $g(t) = e^{at} f(t)$, em que a é um número real.

Pela definição da T. L. temos:

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt \quad (4.51)$$

Logo²

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)} \quad (4.52)$$

que é o Teorema do Defasamento em s .

2. Lembrando que, para a convergência da T. L., a parte real de $(s-a)$ é maior que zero.

4.3.6 – TEOREMA DA MUDANÇA DE ESCALA NO TEMPO

A mudança de escala no tempo ocorre quando trocamos t por at , em que a é uma constante positiva. Nesta situação, a função $f(t)$ é mudada para $f(at)$ e sua T. L. fica:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_{0^+}^{\infty} f(at)e^{-st} dt \quad (4.53)$$

Definindo:

$$\tau_1 \triangleq at$$

$$s_1 \triangleq \frac{s}{a}$$

Então:

$$dt = \frac{1}{a} d\tau_1 \quad (4.54)$$

$$e^{-st} = e^{-s_1\tau_1} \quad (4.55)$$

Da definição de τ_1 vemos que, para $t \rightarrow 0^+$ temos $\tau_1 \rightarrow 0^+$ e para $t \rightarrow \infty$ temos $\tau_1 \rightarrow \infty$.

Usando as variáveis τ_1 e s_1 na equação 4.53 obtemos:

$$\mathcal{L}[f(\tau_1)] = \frac{1}{a} \int_{0^+}^{\infty} f(\tau_1) e^{-s_1\tau_1} d\tau_1 = \frac{1}{a} F(s_1) \quad (4.56)$$

Logo:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)} \quad (4.57)$$

que é o Teorema da Mudança de Escala de Tempo.

4.3.7 – TEOREMA DO VALOR FINAL

Em algumas situações é importante saber o valor final da função, isto é, queremos o valor de $f(t)$ quanto t tende para infinito.

Se a função $f(t)$ é conhecida, o seu valor final pode ser determinado através do cálculo do seu limite quando t tende para infinito.

Quando temos somente $F(s)$, o valor final de $f(t)$ pode ser determinado aplicando este teorema, poupando o trabalho da realização da Transformada Inversa de

$F(s)$. Contudo, a aplicação do teorema tem algumas restrições matemáticas, ou seja, o teorema poderá ser aplicado somente se:

- (i) $f(t)$ e $\frac{df(t)}{dt}$ são transformáveis; e
- (ii) todas as raízes do denominador de $F(s)$, exceto $s = 0$, têm as partes reais negativas.

Se estas condições forem atendidas, então:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)} \quad (4.58)$$

O teorema pode ser provado usando a T. L. da derivada de $f(t)$ (seção 4.3.2), fazendo o limite para s tendendo a *zero*. Então:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[\int_{0^+}^{\infty} \left[\frac{df}{dt} \right] e^{-st} dt \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s F(s) - f(0^+) \right] = \left[\lim_{s \rightarrow 0} s F(s) \right] - f(0^+) \quad (4.59)$$

Desenvolvendo o termo do lado esquerdo da equação 4.59 vem:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[\int_{0^+}^{\infty} \left[\frac{df}{dt} \right] e^{-st} dt \right] = \int_{0^+}^{\infty} \frac{df}{dt} dt = f(t) \Big|_{0^+}^{\infty} = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \right] - f(0^+) \quad (4.60)$$

Igualando (4.59) e (4.60) obtemos:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s F(s) \right]} \quad (4.61)$$

que é o Teorema do Valor Final.

4.3.8 – TEOREMA DO VALOR INICIAL

Aplicamos este teorema quando temos $F(s)$ e queremos o valor inicial de $f(t)$, isto é, $f(0^+)$.

Tal como no caso do teorema anterior (do Valor Final), este teorema tem as mesmas restrições, ou seja:

- (i) $f(t)$ e $\frac{df(t)}{dt}$ são transformáveis; e
- (ii) todas as raízes do denominador de $F(s)$, exceto $s = 0$, têm as partes reais negativas.

Se estas condições forem atendidas, então:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)} \quad (4.62)$$

A demonstração é feita de forma análoga à anterior. Usamos a T. L. da derivada de $f(t)$ e determinamos o limite para s tendendo a infinito.

Sabemos que:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d f}{d t} \right] = s F(s) - f(0^+) \quad (4.63)$$

Então:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\int_{0^+}^{\infty} \frac{d f}{d t} e^{-st} d t \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s F(s) - f(0^+)] \quad (4.64)$$

Como a variável s dentro da integral independe do tempo, o lado esquerdo da equação 4.64 tende a *zero*, ou seja:

$$0 = \lim_{s \rightarrow \infty} [s F(s) - f(0^+)] \quad (4.65)$$

Como s não influencia no valor de $f(0^+)$, então:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)} \quad (4.66)$$

que é o Teorema do Valor Inicial.

4.4 – DIFERENÇA ENTRE O OPERADOR D E A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ambos, o Operador D e a Transformada de Laplace, quando aplicados, realizam matematicamente transformações lineares.

É importante entender que tanto o Operador D como a Transformada de Laplace são ferramentas a nossa disposição.

Em livros, artigos, etc., encontramos freqüentemente a variável s da T. L. e raramente o uso do Operador D . Isto ocorre em razão da enorme quantidade de trabalhos dedicados a Sistemas Lineares, em que a Transformada de Laplace é preferida.

Em certas oportunidades o uso do Operador D não é admitido e somente a T. L. é aceita. Na verdade, devemos entender que estas transformações lineares têm diferentes conceitos. Uma trabalha com funções do tempo t e a outra com transformadas que são funções de s .

Exemplificando, vamos supor um sistema que é um integrador, com condições iniciais nulas, cuja entrada é $q_i(t) = At$. A representação em forma de diagrama de blocos está ilustrada na Figura 4.9.

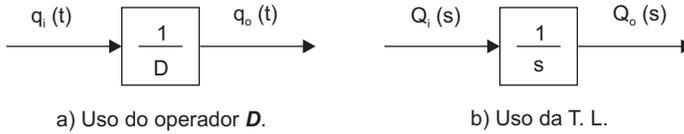


Figura 4.9 Representação de um integrador usando o Operador D e a T. L.

No diagrama da Figura 4.9a, a entrada $q_i(t)$ e a saída $q_o(t)$ são funções do tempo, isto é, $q_i(t) = At$ e $q_o(t) = \frac{A}{2}t^2$. O sistema $\frac{1}{D}$ é de fato um integrador, pois, por definição:

$$\frac{1}{D} f(t) = \int f(t) dt \quad (4.67)$$

Por outro lado, a função de transferência $\frac{1}{s}$ não é um integrador, pois s é uma variável complexa. A função $Q_o(s)$ não é a integral no tempo de $Q_i(s)$, mas sim:

$$Q_o(s) = \frac{Q_i(s)}{s} \quad (4.68)$$

em que $Q_o(s)$ e $Q_i(s)$ são funções de s .

Quando fazemos a Transformada Inversa de $Q_o(s)$ e $Q_i(s)$ obtemos $q_o(t) = \mathcal{L}^{-1}[Q_o(s)] = \frac{A}{2}t^2$ e $q_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[Q_i(s)] = At$, e agora podemos observar que $q_o(t)$ é a integral de $q_i(t)$. Este resultado provoca interpretação simplista que leva a admitir a função de transferência $\frac{1}{s}$ como sendo um integrador. De fato, a integração acaba ocorrendo, mas de maneira indireta, podendo ser constatada somente quando examinamos as funções no domínio do tempo.

Com a existência do Operador D e a T. L., o engenheiro tem, portanto, duas ferramentas disponíveis, e a escolha de uma delas depende do tipo de modelo.

Se pretendermos obter um modelo do tipo 30 (vide Tabela 1.1 e seção 1.7) que resulta em equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes, tanto o operador D como a T. L. podem ser usadas.

A T. L. aplicada a um modelo do tipo 30, com condições iniciais iguais a zero, tem a mesma “aparência” de quando usamos o Operador D . Por exemplo, para o sistema massa–mola–amortecedor, Figura 3.21, a equação diferencial é:

$$m \ddot{x}_0 + B\dot{x}_0 + K_s x_0 = f_i(t) \quad (4.69)$$

que, colocando em termos do Operador D , resulta:

$$(m D^2 + B D + K_s) x_0 = f_i(t) \quad (4.70)$$

ou, fazendo a T. L. de (4.69), vem:

$$(m s^2 + B s + K_s) X_0(s) = F_i(s) \quad (4.71)$$

As equações 4.70 e 4.71 têm a mesma aparência (as condições iniciais são nulas), porém a primeira tem funções do tempo e a segunda, funções de s .

Apesar de o Operador D e a T. L. serem possíveis quando os modelos são do tipo 30, *o uso da T. L. é muito mais conveniente e, portanto, recomendada*. Isto se deve às muitas ferramentas e técnicas já desenvolvidas para a análise ou projeto de sistemas modelados com a variável s de Laplace.

Em adição ao grande volume de teorias, Laplace representa uma resolução, pelo menos, mais “elegante”. Quando escrevemos a equação característica de uma equação diferencial em termos do Operador D , estamos forçando uma igualdade “um pouco estranha”. Visualizando, no caso do exemplo dado (equação 4.70), a equação característica seria: $m D^2 + B D + K_s = 0$, visivelmente um polinômio em termos do Operador D . Procurar encontrar as raízes desta equação pode significar um procedimento um tanto “nebuloso”.

Saindo dos modelos lineares, quando a modelagem é encaminhada para resultar em um sistema não-linear, ficamos impossibilitados de aplicar a T. L., então a alternativa é usarmos o Operador D . Exemplificando, vamos supor que em um sistema massa–mola–amortecedor (Figura 3.21) a força do amortecedor seja não-linear dada por:

$$F_a = -B\dot{x}_0^2 \text{sign}(\dot{x}_0) \quad (4.72)$$

em que:

$F_a \triangleq$ força do amortecedor sobre a massa m ;

$B \triangleq$ coeficiente do amortecedor (constante);

$\dot{x}_0 \triangleq$ velocidade da massa m ;

e a função $\text{sign}(\dot{x}_0)$:

$$\text{sign}(\dot{x}_0) \triangleq \begin{cases} = 1 & \text{para } \dot{x}_0 > 0 \\ = 0 & \text{para } \dot{x}_0 = 0 \\ = -1 & \text{para } \dot{x}_0 < 0 \end{cases}$$

A força F_a deste amortecedor foi modelada utilizando dois termos não-lineares: \dot{x}_0^2 e a função $\text{sign}(\dot{x}_0)$.

A função $\text{sign}(\dot{x}_0)$ é necessária ao modelo para fazer a inversão do sentido (sinal) de F_a em função do sinal de \dot{x}_0 , pois o termo $B\dot{x}_0^2$ é sempre positivo.

Em razão dessas não-linearidades não podemos aplicar a T. L. à equação 4.72. A resolução deste tipo de problema geralmente é implementada através de métodos computacionais, em que a força F_a é gerada por algoritmo ou através de um diagrama, conforme ilustra a Figura 4.10.

No diagrama da Figura 4.10, as variáveis não são Transformadas de Laplace, mas sim funções do tempo; portanto, para realizarmos derivações ou integrações usamos o Operador D .

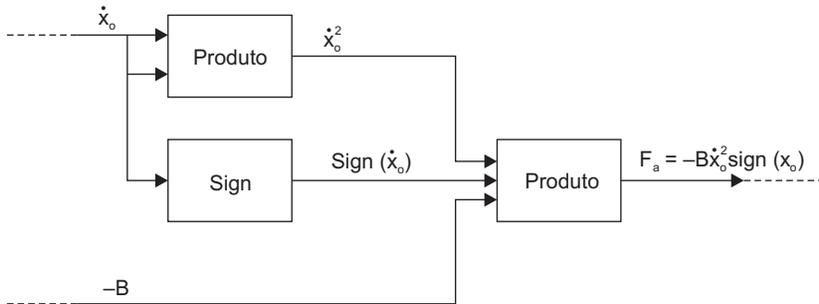


Figura 4.10 Diagrama de blocos para gerar $F_a = -B\dot{x}_0^2 \text{sign}(\dot{x}_0)$.

Finalizando a comparação entre o Operador D e a T. L., concluímos que, para sistemas lineares, tanto o Operador D como a T. L. podem ser usados, mas a T. L. é preferível e recomendada. Já para sistemas não-lineares, utilizamos somente o Operador D .

4.5 – TRANSFORMADA DE LAPLACE DE UMA FUNÇÃO PERIÓDICA

Uma função é periódica quando ela se repete depois de um período T ou seus múltiplos nT ($n = 1, 2, 3, \dots$). A Figura 4.11 ilustra uma função $f(t)$ que é periódica para $t > 0$ e igual a zero para $t < 0$.

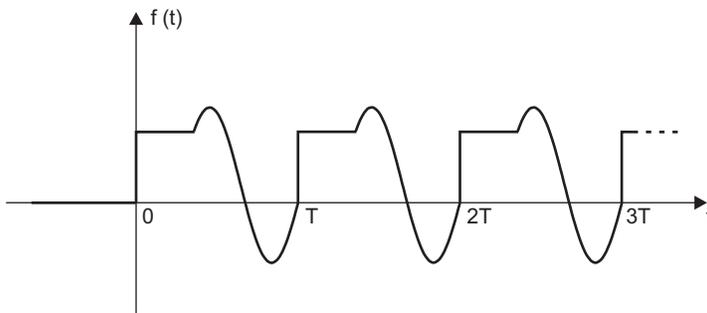


Figura 4.11 Função periódica para $t > 0$.

Matematicamente, uma função periódica de período $T > 0$ pode ser definida como:

$$f(t) = f(t + nT); n=1; 2; 3; \dots \quad (4.73)$$

As funções periódicas aqui consideradas não contêm impulsos (vide seção 4.6) nos tempos $t = 0, T, 2T, 3T, \dots$. Os impulsos podem até ocorrer bem próximos destes pontos, isto é, em valores de t dentro do intervalo $[(n-1)T + 0^+] < t < [nT]$, sendo $n = 1, 2, 3, \dots$ e $f(t) = f(t + nT)$.

Assim, se $f(t)$ atende a essa condição e às demais exigências das funções transformáveis, então podemos calcular a sua transformada, ou seja:

$$F(s) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (4.74)$$

ou

$$F(s) = \int_{0^+}^{T-0^+} f(t)e^{-st} dt + \int_{T-0^+}^{T+0^+} f(t)e^{-st} dt + \int_{T+0^+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (4.75)$$

Considerando que não ocorrem impulsos nos tempos $t = 0$ e $t = nT, n = 1, 2, 3, \dots$, então:

$$\int_{T-0^+}^{T+0^+} f(t)e^{-st} dt = 0 \quad (4.76)$$

$$\int_{0^+}^{T-0^+} f(t)e^{-st} dt = \int_{0^+}^T f(t)e^{-st} dt \quad (4.77)$$

Logo, a equação 4.75 fica

$$F(s) = \int_{0^+}^T f(t)e^{-st} dt + \int_{T+0^+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (4.78)$$

Fazendo $t = \tau + T$, a última integral da equação 4.78 fica:

$$\int_{T+0^+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} f(\tau + T)e^{-s(\tau+T)} d\tau \quad (4.79)$$

Substituindo (4.73) na (4.79), vem:

$$\int_{0^+}^{\infty} f(\tau + T)e^{-s(\tau+T)} d\tau = e^{-sT} \int_{0^+}^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-sT} \mathcal{L}[f(t)] \quad (4.80)$$

Agora, vamos definir uma função $f_T(t)$ da seguinte forma:

$$f_T(t) \triangleq \begin{cases} = f(t) & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ = 0 & \begin{cases} \text{para } t < 0 \text{ e} \\ \text{para } t > T \end{cases} \end{cases}$$

Pela definição, é evidente que $f_T(t)$ é igual a $f(t)$ somente no primeiro ciclo e igual a **zero** para os demais valores de t . Para o exemplo de $f(t)$ periódico dado na figura 4.11, $f_T(t)$ seria conforme mostra a Figura 4.12.

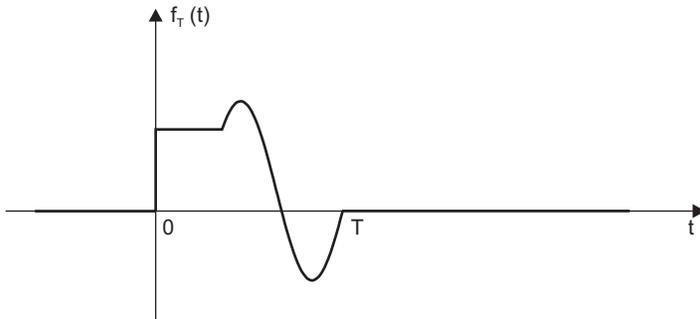


Figura 4.12 Função $f_T(t)$ extraída da função $f(t)$ da Figura 4.11.

Se $f(t)$ é transformável, então $f_T(t)$ também será e sua T. L. fica:

$$F_T(s) = \int_{0^+}^{\infty} f_T(t) e^{-st} dt = \int_{0^+}^T f(t) e^{-st} dt \quad (4.81)$$

A equação 4.81 corresponde à primeira integral da (4.78). Logo, substituindo (4.80) e (4.81) na (4.78) obtemos:

$$F(s) = F_T(s) + e^{-sT} F(s) \quad (4.82)$$

Então:

$$\boxed{F(s) = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}}} \quad (4.83)$$

que é a equação para cálculo da T. L. de uma função periódica.

É importante destacar o cuidado que devemos tomar com a equação 4.83. Quando encontramos o denominador $1 - e^{-sT}$, a transformada inversa de $F(s)$ só será

periódica se o numerador (coeficiente de $1/(1 - e^{-sT})$) tiver uma transformada inversa, função do tempo, igual a zero para $t > T$. Se esta condição não for satisfeita, a equação 4.83 não pode ser usada para encontrar a transformada inversa.

4.6 – FUNÇÃO DEGRAU, FUNÇÃO IMPULSO E SUAS TRANSFORMADAS

4.6.1 – FUNÇÃO DEGRAU

a) Definição:

A definição de $u(t)$ já foi apresentada na seção 4.2.1 e a de $u(t-a)$ na seção 4.3.4.

Nesta seção pretendemos ampliar o estudo da Função Degrau, e iniciamos repetindo sua definição, ou seja:

$$u(t-a) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{para } t > a \\ 0 & \text{para } t < a \\ \text{no ponto } t = a, \text{ a função não é definida.} \end{cases}$$

Quando $a = 0$, temos a função $u(t)$. E a função $u_+(t)$ é dada por:

$$u_+(t) \triangleq \lim_{\substack{\varepsilon_2 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0}} u(t - \varepsilon_2)$$

em que ε_1 é o limite inferior da integral da T. L. ($\varepsilon_1 = 0^+$).

Na Figura 4.13 estão ilustradas as funções $u(t-a)$, $u(t)$ e $u_+(t)$.

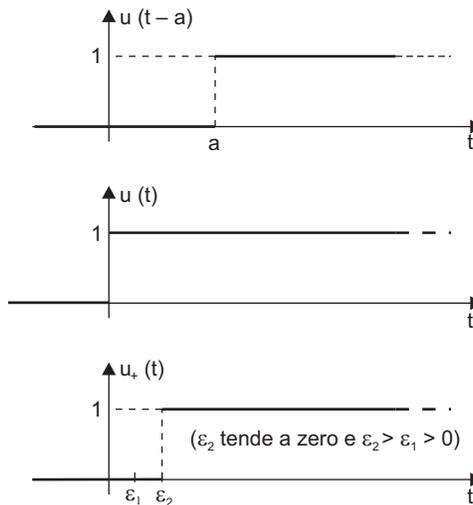


Figura 4.13 Gráfico das funções $u(t-a)$, $u(t)$ e $u_+(t)$, sendo: $\varepsilon_1 = 0^+$ e $a > 0$.

Observamos através dos gráficos que os valores destas funções no ponto 0^+ são:

$$\begin{cases} u(t-a)|_{0^+} = 0; & (\text{para } a > 0) \\ u(t)|_{0^+} = 1 \\ u_+(t)|_{0^+} = 0 \end{cases} \quad (4.84)$$

b) Funções com a função degrau:

Dentre os diversos aspectos importantes da função degrau está a sua utilização para gerar funções transitórias. Por exemplo, os pulsos da Figura 4.14, $p_1(t)$ e $p_2(t)$ podem ser escritos:

$$p_1(t) = 5u(t-2) - 5u(t-4) \quad (4.85)$$

$$p_2(t) = 3(t-1)u(t-1) - 3(t-2)u(t-2) - 3u(t-2) \quad (4.86)$$

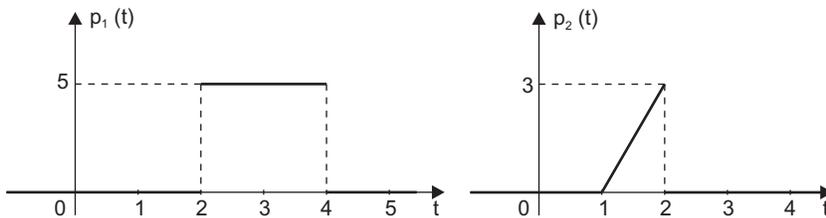


Figura 4.14 Gráfico das funções $p_1(t) = 5u(t-2) - 5u(t-4)$ e $p_2(t) = 3(t-1)u(t-1) - 3(t-2)u(t-2) - 3u(t-2)$.

Outra maneira de entender a Função Degrau Unitário $u(x)$ seria através do seu argumento; neste caso, o argumento é igual a x . Se o argumento for maior que zero, a função é igual a 1; se for negativo, a função é zero. Desta forma, a função $u(a-t)$ tem o gráfico “rebatido” ou “espelhado”, conforme mostra a Figura 4.15.

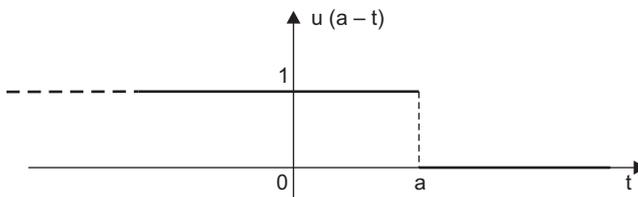


Figura 4.15 Gráfico da função $u(a-t)$.

Esta função $u(a-t)$ não é transformável, pois não tem seus valores iguais a zero para $t < 0$.

Supondo o caso com $a < 0$, por exemplo, a função $u(-5 - t)$, tem o seu gráfico conforme a Figura 4.16

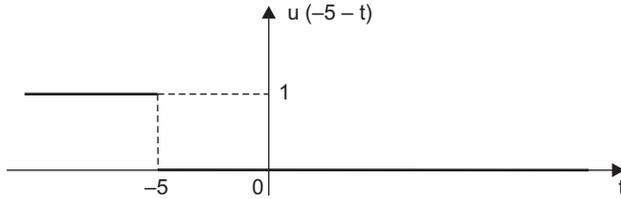


Figura 4.16 Gráfico da função $u(-5 - t)$.

Este tipo de função degrau $u(a - t)$ (com o tempo negativo) pode também ser usada para gerar transitório. Por exemplo, as funções $p_1(t)$ e $p_2(t)$ dadas pelas equações 4.85 e 4.86 poderiam ser escritas:

$$p_1(t) = 5u(t - 2)u(4 - t) \quad (4.87)$$

$$p_2(t) = 3(t - 1)u(t - 1)u(2 - t) \quad (4.88)$$

As funções $p_1(t)$ e $p_2(t)$ dadas pelas (4.87) e (4.88) produzem os mesmos gráficos da Figura 4.14. Porém, em termos de dificuldade para a obtenção das suas transformadas $P_1(s)$ e $P_2(s)$, é muito mais fácil e conveniente transformar as funções das equações 4.85 e 4.86. Nestas, $p_1(t)$ e $p_2(t)$ são geradas por meio de uma soma de funções, em que cada parcela é o produto de funções com o mesmo argumento. Portanto, cada parcela pode ser facilmente transformada usando o Teorema do Defasamento.

Por outro lado, determinar $P_1(s)$ e $P_2(s)$ partindo das equações 4.87 e 4.88 exigirá a aplicação da definição devido aos produtos de funções com argumentos diferentes. Portanto, recomendamos não gerar funções transientes usando produtos de funções com argumentos diferentes, conforme mostram as equações 4.87 e 4.88.

c) Transformada de Laplace da Função Degrau:

O objetivo aqui é determinar as transformadas das funções $u(t - a)$; $u(t)$ e $u_+(t)$. Aplicando a definição temos:

$$\mathcal{L}[u(t - a)] = \int_{0^+}^{\infty} u(t - a)e^{-st} dt = \int_a^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_a^{\infty}; \text{ para } a > 0^+ \quad (4.89)$$

então:

$$\boxed{\mathcal{L}[u(t - a)] = \frac{e^{-as}}{s}} \quad (4.90)$$

Para $u(t)$ vem:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_{0^+}^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_{0^+}^{\infty} = -\frac{1}{s}(0-1) \quad (4.91)$$

então:

$$\boxed{\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}} \quad (4.92)$$

Por último, a T. L. de $u_+(t)$ é:

$$\mathcal{L}[u_+(t)] = \lim_{\substack{\varepsilon_2 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 > 0^+}} \int_{0^+}^{\infty} u(t - \varepsilon_2) e^{-st} dt \quad (4.93)$$

Da (4.90) obtemos:

$$\mathcal{L}[u_+(t)] = \lim_{\substack{\varepsilon_2 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 > 0^+}} \frac{e^{-\varepsilon_2 t}}{s} \quad (4.94)$$

Logo:

$$\boxed{\mathcal{L}[u_+(t)] = \frac{1}{s}} \quad (4.95)$$

4.6.2 – “FUNÇÃO” IMPULSO

a) Definição:

A “função” impulso unitário (função Delta de Dirac) é definida da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{l} \text{"Função"} \\ \text{impulso} \\ \text{unitário} \end{array} \right] \triangleq \begin{cases} \delta(x-a) = 0; & \text{para } x \neq a \\ \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(x-a) dt = 1; & \text{para } \begin{cases} \varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4.96)$$

Graficamente, podemos representar a “função” impulso $\delta(t-a)$ conforme mostra a Figura 4.17.

Dentro de rigor matemático, o impulso unitário não é uma função, pois para o único valor em que o impulso não é zero ele não tem valor definido. Apesar de não estar rigorosamente correto sob o ponto de vista matemático, ele tem enorme utilidade dentro da aplicação da teoria da transformada nos estudos da dinâmica de sistemas.

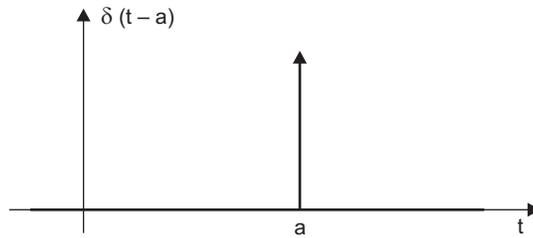


Figura 4.17 Representação gráfica do impulso $\delta(t - a)$.

Um procedimento que poderia ser utilizado para visualizarmos um impulso unitário seria o processo de limite. Por exemplo, para o pulso $p(x - a)$ dado na Figura 4.18, o impulso unitário seria “obtido” através do limite de b tendendo a zero. Assim:

$$\delta(x - a) = \lim_{b \rightarrow 0} p(x - a) \quad (4.97)$$

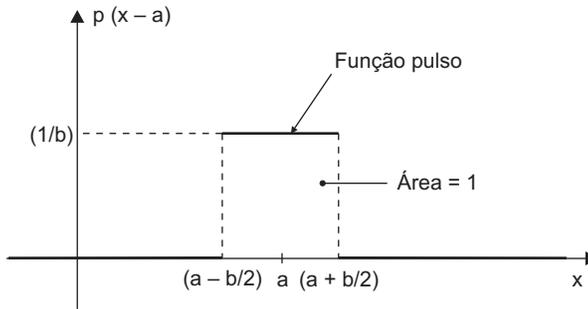


Figura 4.18 Função pulso $p(x - a)$.

Conforme podemos observar pela Figura 4.18, se b tende a zero, a definição dada para o impulso unitário (equação 4.96) fica ilustrada.

Adicionalmente, vamos definir também as funções $\delta(t)$ e $\delta_+(t)$.

A função impulso $\delta(t)$ é a função $\delta(t - a)$ quando a é zero. Neste caso, o impulso ocorre quando $t = 0$, Figura 4.19a.

Por sua vez, a função $\delta_+(t)$ é definida:

$$\delta_+(t) \triangleq \lim_{\substack{\varepsilon_2 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0}} \delta(t - \varepsilon_2)$$

em que ε_1 é o limite inferior da integral de Laplace, isto é, $\varepsilon_1 = 0^+$.

A Figura 4.19b ilustra a função $\delta_+(t)$.

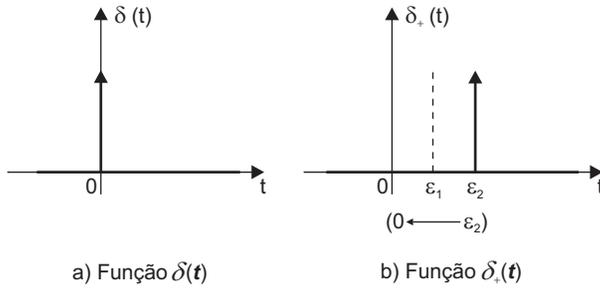


Figura 4.19 Representações gráficas das funções $\delta(t)$ e $\delta_+(t)$.

b) Integração com Impulso:

A integral da multiplicação de uma função $f(x)$ pela função impulso é um resultado importante e de grande utilidade.

Vamos considerar uma integral definida de tal forma que o impulso ocorra dentro dos limites de integração:

$$\int_b^c f(x)\delta(x-a)dx; \text{ sendo } b < a < c \quad (4.98)$$

Como a função impulso é igual a **zero** para todos os valores de x diferentes de a , o intervalo de integração pode ser modificado e a equação 4.98 reescrita da seguinte forma:

$$\int_b^c f(x)\delta(x-a)dx = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\delta(x-a)dx; \varepsilon > 0 \quad (4.99)$$

em que ε pode ser feito tão pequeno quanto se queira.

Se $f(x)$ for contínua no ponto $x = a$, Figura 4.20, a sua variação no intervalo de integração torna-se muito pequena se $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, fazer ε ser bastante pequeno é equivalente a fazer a função $f(x)$ no intervalo de integração ser tão próxima da constante $f(a)$ quanto se queira. Logo, podemos escrever:

$$\int_b^c f(x)\delta(x-a)dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(x-a)dx \quad (4.100)$$

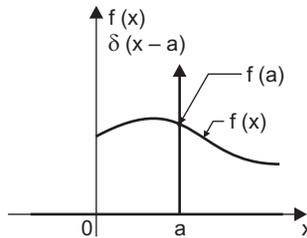


Figura 4.20 Exemplo das funções: $f(x)$ e $\delta(x-a)$.

A integral $\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(x-a) dx$ da equação 4.100 é exatamente igual a I (área unitária da função impulso), independentemente do tamanho de $\varepsilon > 0$, portanto:

$$\int_b^c f(x) \delta(x-a) dx = f(a); \quad b < a < c \quad (4.101)$$

c) Transformada de Laplace da Função Impulso:

Fazendo as seguintes considerações: a variável independente x da equação 4.101 ser o tempo; a função $f(x)$ ser igual a e^{-st} ; e os intervalos de integração serem 0^+ e ∞ ; então, a T. L. da função impulso $\delta(t-\eta)$ resulta:

$$\mathcal{L}[\delta(t-\eta)] = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} \delta(t-\eta) dt = e^{-s\eta}; \quad \eta > 0 \quad (4.102)$$

ou

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta(t-\eta)] = e^{-s\eta}; \quad \eta > 0} \quad (4.103)$$

Fazendo η bastante pequeno resulta:

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \eta > 0^+}} \mathcal{L}[\delta(t-\eta)] = \mathcal{L}[\delta_+(t)] = I \quad (4.104)$$

É importante observar que, para $\delta_+(t)$, temos $\eta > 0^+$, portanto o impulso ocorre dentro do intervalo de integração da T. L. (de 0^+ a ∞). No caso de η ser nulo ($\eta = 0$), o impulso $\delta(t)$ ocorre fora do intervalo de integração da Transformada de Laplace. Isto significa que a T. L. de $\delta(t)$ é diferente da T. L. de $\delta_+(t)$, ou seja:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 0 \quad (4.105)$$

porém, da (4.104):

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta_+(t)] = I} \quad (4.106)$$

Graças à simplicidade da Transformada de Laplace da função $\delta_+(t)$, a equação 4.106 tem utilidade importante nos estudos da dinâmica de sistemas.

d) Relação entre o Impulso e a Função Degrau:

A função degrau unitário pode também ser definida através da função impulso unitário, ou seja:

$$u(t-a) \triangleq \int_0^t \delta(t-a) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } t < a \\ 1 & \text{para } t > a \end{cases} \quad (4.107)$$

O que nos leva a escrever:

$$\frac{d}{dt}u(t-a) = \delta(t-a) \quad (4.108)$$

Aqui o símbolo $\frac{d}{dt}$ é usado de forma representativa porque o limite implícito da derivação não existe no ponto de descontinuidade.

A Figura 4.21 ilustra graficamente estas duas funções.

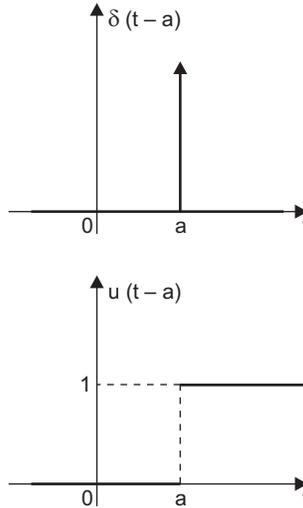


Figura 4.21 Representação gráfica das funções $\delta(t-a)$ e $u(t-a)$.

Sendo a “derivada” da função degrau igual à função impulso, devemos indagar a respeito da validade em aplicarmos a estas “funções” a fórmula da T. L. da função diferenciação, equação 4.33. A resposta é que a equação 4.33 é também válida para estas “funções”.

Vimos que $\mathcal{L}[u(t-a)]$, equação 4.90, aqui repetida é:

$$\mathcal{L}[u(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s} \quad (4.90) \text{ (repetida)}$$

Então, aplicando o teorema da derivação real, equação 4.33, e utilizando as (4.84) e (4.90) resulta:

$$\mathcal{L}\left[\frac{du(t-a)}{dt}\right] = s \mathcal{L}[u(t-a)] - u(t-a)|_{0^+} = e^{-as} \quad (4.109)$$

Sendo a T. L. de $\delta(t-a)$ igual a e^{-as} , então da equação 4.109 vem:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{du(t-a)}{dt}\right] = e^{-as} = \mathcal{L}[\delta(t-a)]} \quad (4.110)$$

Este resultado demonstra a aplicabilidade da equação 4.33 e certa coerência em relação à equação 4.108.

Podemos verificar também a aplicação da equação 4.33 para as derivadas de $u(t)$ e $u_+(t)$.

Repetindo a (4.33):

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+) \quad (4.33) \text{ (repetida)}$$

Para $f(t) = u(t)$ temos:

$$\mathcal{L}\left[\frac{du(t)}{dt}\right] = s\mathcal{L}[u(t)] - u(t)|_{0^+} \quad (4.111)$$

Como $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$ e $u(t)|_{0^+} = 1$ (equações 4.92 e 4.84), a (4.111) resulta:

$$\mathcal{L}\left[\frac{du(t)}{dt}\right] = s\left[\frac{1}{s}\right] - 1 = 0 \quad (4.112)$$

Das equações 4.105 e 4.112 constatamos que:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{du(t)}{dt}\right] = \mathcal{L}[\delta(t)] = 0} \quad (4.113)$$

Mostrando coerência na igualdade: $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$.

Agora, usando a (4.33) para $f(t) = u_+(t)$, então:

$$\mathcal{L}\left[\frac{du_+(t)}{dt}\right] = s\mathcal{L}[u_+(t)] - u_+(t)|_{0^+} \quad (4.114)$$

Como $\mathcal{L}[u_+(t)] = \frac{1}{s}$ e $u_+(t)|_{0^+} = 0$ (equações 4.95 e 4.84), a (4.114) resulta:

$$\mathcal{L}\left[\frac{du_+(t)}{dt}\right] = s\left[\frac{1}{s}\right] - 0 = 1 \quad (4.115)$$

Das equações 4.106 e 4.115 podemos escrever:

$$\mathcal{L} \left[\frac{du_+(t)}{dt} \right] = \mathcal{L} [\delta_+(t)] = 1 \quad (4.116)$$

Mostrando coerência na igualdade: $\frac{du_+(t)}{dt} = \delta_+(t)$.

e) Transformada de Laplace da Derivada da Função Impulso:

Pode parecer estranho falar na derivada da função impulso, $\frac{d\delta(t-a)}{dt} = \delta'(t-a)$, porém ela tem uso na resolução de problemas.

Para visualizar como seria $\delta'(t-a)$ vamos gerar a função impulso $\delta(t-a)$ por meio de um pulso tipo triangular $f_p(t)$ dado na Figura 4.22a. A Figura 4.22b mostra $f_p'(t)$, derivada do pulso.

Considerando a função da Figura 4.22b, se fizermos $b \rightarrow 0$, podemos dizer que:

$$\lim_{b \rightarrow 0} f_p'(t) = \delta'(t-a) \quad (4.117)$$

As funções da Figura 4.23 representam as funções-limite da Figura 4.32.

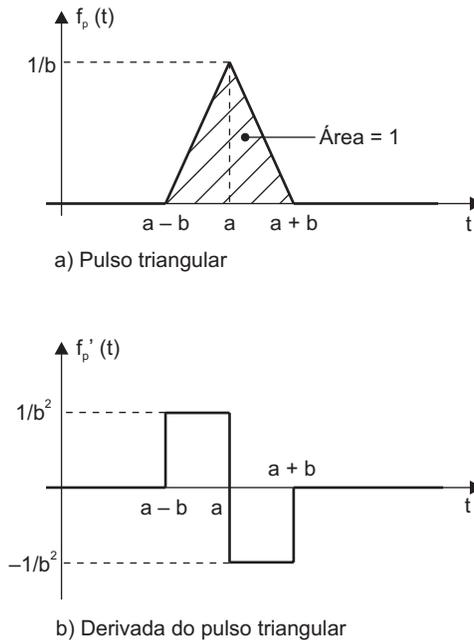


Figura 4.22 Gráficos do pulso triangular $f_p(t)$ e da sua derivada $f_p'(t)$.

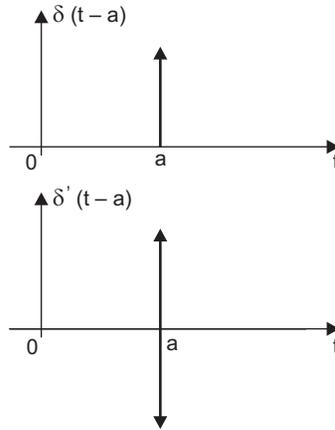


Figura 4.23 Representação gráfica das funções $\delta(t-a)$ e $\delta'(t-a)$.

A T. L. da derivada da função impulso, $\delta'(t-a)$, pode ser calculada através da definição da T. L. e de integração por partes. Repetindo a fórmula geral da integração por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (4.118)$$

e fazendo

$$u = e^{-st} \quad (4.119)$$

$$dv = \delta'(t-a) dt \quad (4.120)$$

Então:

$$du = -s e^{-st} dt \quad (4.121)$$

$$v = \delta(t-a) \quad (4.122)$$

Aplicando a definição da T. L., considerando $a > 0$, obtemos:

$$\mathcal{L}[\delta'(t-a)] = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} \delta'(t-a) dt = \left[e^{-st} \delta(t-a) \right]_{0^+}^{\infty} + s \int_{0^+}^{\infty} \delta(t-a) e^{-st} dt \quad (4.123)$$

Logo:

$$\mathcal{L}[\delta'(t-a)] = s \mathcal{L}[\delta(t-a)] = s e^{-as}; \text{ para } a > 0 \quad (4.124)$$

Generalizando para ordens maiores, vamos obter:

$$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t-a)] = s^n e^{-as} \quad (\text{para } a > 0) \quad (4.125)$$

em que:

$$\delta^{(n)}(t-a) \triangleq \frac{d^n \delta(t-a)}{d t^n}$$

Na Figura 4.24 estão ilustrados exemplos de pulsos, $p(t-a)$, $p'(t-a)$ e $p''(t-a)$, que no limite, fazendo $b \rightarrow 0$, obteríamos a representação de $\delta(t-a)$, $\delta'(t-a)$ e $\delta''(t-a)$.

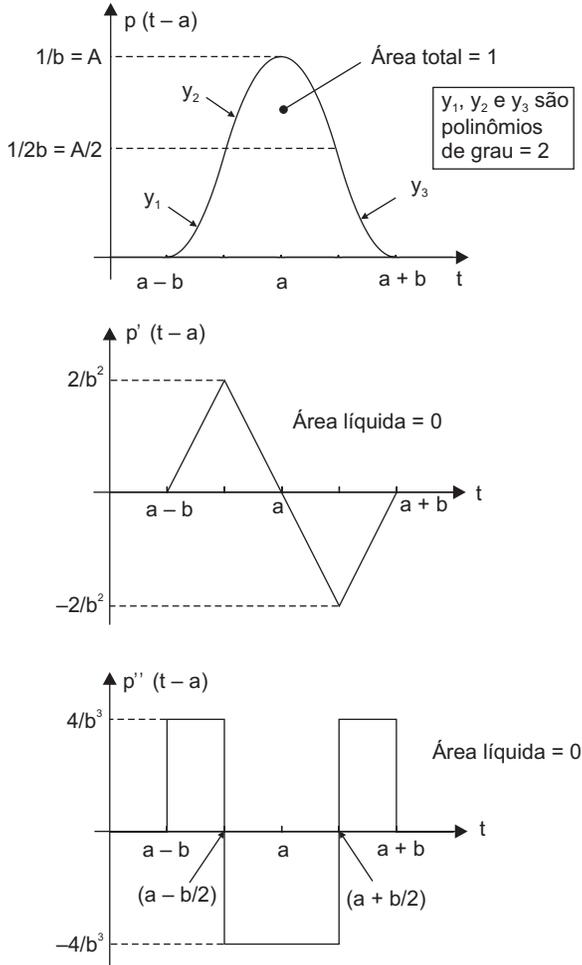


Figura 4.24 Representação gráfica das funções $\delta(t-a)$, $\delta'(t-a)$ e $\delta''(t-a)$ se $b \rightarrow 0$.

4.7 – CONDIÇÕES INICIAIS

4.7.1 – INTRODUÇÃO

A Transformada de Laplace é admitida como uma ferramenta matemática fácil e acessível, com exceção de certos detalhes na origem. Interpretações falhas quanto aos problemas na origem podem proporcionar resultados errados. Portanto, há necessidade de realizar um estudo das funções e da transformada na região da origem.

Devemos iniciar este estudo salientando que as soluções de equações diferenciais obtidas através da T. L. não são exatamente iguais às soluções obtidas pelo método clássico. Elas são idênticas somente para $t \geq 0^+$, sendo, portanto, diferentes para $t \leq 0$. Por exemplo, suponha a equação diferencial

$$\begin{cases} \tau \frac{dx}{dt} + x = 0 \\ \text{Com Condição Inicial (C. I.): } x(0) = 1 \end{cases} \quad (4.126)$$

Resolvendo a equação 4.126 pelo método clássico obtemos:

$$x = e^{-t/\tau} \quad (4.127)$$

enquanto que por Laplace:

$$x = e^{-t/\tau} u_+(t) \quad (4.128)$$

A função $u_+(t)$ aparece multiplicando a exponencial para que $x(t)$ seja transformável ($x = 0$ para $t < 0$), para que as descontinuidades da origem caiam dentro do intervalo de integração da T. L., e, por último, para dar condições à aplicabilidade dos teoremas.

Conforme podemos observar na Figura 4.25, estas funções são idênticas para $t \geq 0^+$, porém são completamente diferentes para $t \leq 0$.

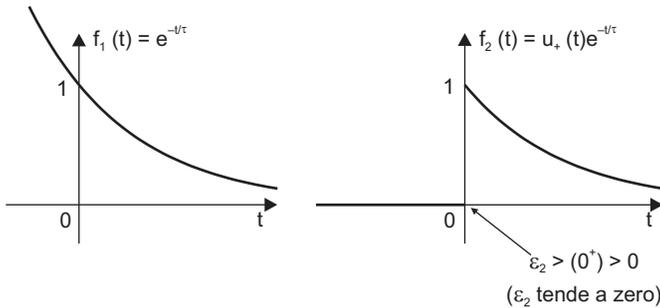


Figura 4.25 Gráfico das funções: $f_1 = e^{-t/\tau}$ e $f_2 = u_+(t) e^{-t/\tau}$.

Diante destas considerações, aparece a seguinte questão: como a equação 4.128 pode ser solução da equação 4.126 se ela não satisfaz a Condição Inicial? De fato, rigorosamente, a função dada pela equação 4.128 não é solução da equação 4.126. Esta verdade matemática é incontestável porque, matematicamente, as equações diferenciais são expressas em termos de t variando de $-\infty$ a $+\infty$. É neste ponto que o bom senso do engenheiro deve estar presente. A este interessa a solução para t maior que *zero*, e aquela solução dada pela equação 4.128 é válida para t variando de 0^+ a $+\infty$. Se de fato for exigida a solução para t exatamente igual a *zero*, devemos lembrar que as soluções (respostas) e as variáveis de problemas reais variam de forma contínua, portanto podemos admitir que:

$$x(0) = x(0^+) \quad (4.129)$$

4.7.2 – CONVERSÃO DE UM PROBLEMA COM CONDIÇÕES INICIAIS DIFERENTES DE ZERO A UM COM CONDIÇÕES INICIAIS IGUAIS A ZERO

A conversão de um problema com condições iniciais *diferentes de zero* a um com condições iniciais *iguais a zero* é feita adicionando impulsos e suas derivadas à função de entrada.

Suponha, por exemplo, a seguinte equação diferencial:

$$A_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + A_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + A_1 \frac{dy}{dt} + A_0 y = f(t) \quad (4.130)$$

com condições iniciais diferentes de zero e considerando o campo onde $t > 0$.

Iniciando a conversão, vamos definir uma função $y_1(t)$ da seguinte forma:

$$y_1(t) \triangleq y(t) u_+(t) \quad (4.131)$$

em que, conforme já visto na seção 4.6.1:

$$u_+(t) \triangleq \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} u(t - \varepsilon_2) \quad (4.132)$$

$$\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0 \quad (4.133)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] \triangleq \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{\varepsilon_1}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (4.134)$$

A interpretação das equações 4.132, 4.133 e 4.134 é importante, pois o degrau da função $u_+(t)$ ocorre depois do limite inferior da T. L., vide Figura 4.13, seção 4.6.1.

Para evitar a discussão sobre qual seria o valor da função no exato instante de $t = 0$, nós admitiremos que o seu valor seja igual ao limite da direita para $t \rightarrow 0$. Assim, todas as condições iniciais serão interpretadas desta forma, como sendo o limite do lado direito, escrito $f(0^+)$ para a função $f(t)$. Portanto, definimos que $f(0) = f(0^+)$.

Diante destas colocações, para a função $y(t)$, solução da (4.130), podemos considerar:

$$y(0^+) = y(\varepsilon_1) \triangleq y(0) \triangleq y(\varepsilon_2) \quad (4.135)$$

como condição inicial de $y(t)$.

Quanto à função $y_1(t)$, como no ponto $t = 0^+ = \varepsilon_1$ a função $u_+(0^+)$ é zero, então:

$$y_1(0^+) = y_1(\varepsilon_1) = y(\varepsilon_1)u_+(\varepsilon_1) = 0 \quad (4.136)$$

Estendendo esta consideração para as derivadas de $y_1(t)$, concluímos que as condições iniciais de $y_1(t)$ são *zero*.

Agora, aplicando a regra da cadeia, a derivada da equação 4.131 fica:

$$\frac{d y_1}{d t} = \frac{d y}{d t} u_+(t) + y(t) \delta_+(t) \quad (4.137)$$

O segundo termo do lado direito da equação 4.137 é multiplicação de uma função pela função impulso. A multiplicação de uma função pela função impulso não segue as regras ordinárias da multiplicação, por isso necessita ser definida. Esta operação é definida da seguinte maneira:

$$f(t) \cdot \delta(t-a) \triangleq f(a) \delta(t-a); a > 0 \quad (4.138)$$

Portanto, quando o produto de uma função comum pela função impulso aparece, este deve ser imediatamente interpretado como dado acima (equação 4.138) antes de qualquer operação subsequente.

Por outro lado, a multiplicação de uma função pela função degrau segue as regras comuns da multiplicação.

Desta forma, aplicando esta definição de multiplicação à (4.137) e derivando para ordens maiores, resulta:

$$\frac{d y_1}{d t} = \frac{d y}{d t} u_+(t) + y(0^+) \delta_+(t) \quad (4.139)$$

$$\frac{d^2 y_1}{d t^2} = \frac{d^2 y}{d t^2} u_+(t) + \frac{d y}{d t}(0^+) \delta_+(t) + y(0^+) \delta'_+(t) \quad (4.140)$$

$$\frac{d^3 y_l}{dt^3} = \frac{d^3 y}{dt^3} u_+(t) + \frac{d^2 y}{dt^2}(0^+) \delta_+(t) + \frac{d y}{dt}(0^+) \delta'_+(t) + y(0^+) \delta''_+(t) \quad (4.141)$$

Agora, multiplicando as equações 4.131, 4.139, 4.140 e 4.141, respectivamente, por A_0 , A_1 , A_2 e A_3 , e efetuando a soma destas, resulta:

$$A_3 \frac{d^3 y_l}{dt^3} + A_2 \frac{d^2 y_l}{dt^2} + A_1 \frac{d y_l}{dt} + A_0 y_l = \left[A_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + A_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + A_1 \frac{d y}{dt} + A_0 y \right] u_+(t) + [\dots] \delta_+(t) + [\dots] \delta'_+(t) + [\dots] \delta''_+(t) \quad (4.142)$$

Sendo o primeiro termo do lado direito da equação 4.142 igual a $f(t)$ (vide equação 4.130), então:

$$A_3 \frac{d^3 y_l}{dt^3} + A_2 \frac{d^2 y_l}{dt^2} + A_1 \frac{d y_l}{dt} + A_0 y_l = f(t) u_+(t) + [A_1 y(0^+) + A_2 y'(0^+) + A_3 y''(0^+)] \delta_+(t) + [A_2 y(0^+) + A_3 y'(0^+)] \delta'_+(t) + [A_3 y(0^+)] \delta''_+(t) \quad (4.143)$$

Esta equação tem todos os seus termos facilmente transformáveis, sem problemas na origem, e todas as suas condições iniciais são nulas. Comparando com a equação diferencial anterior vemos que as condições iniciais da (4.130) foram substituídas por funções excitadoras formadas por impulsos e suas derivadas.

Note também que as funções excitadoras $f(t)u_+(t)$; $[\dots]\delta_+(t)$; $[\dots]\delta'_+(t)$; e $[\dots]\delta''_+(t)$ têm início e/ou ocorrem no tempo $t = \epsilon_2$, portanto após o limite inferior ($t = 0^+ = \epsilon_1$) da Integral de Laplace.

A interpretação física da conversão de um problema com condições iniciais diferentes de zero a um com condições iniciais iguais a zero é melhor entendida através de um exemplo. Suponha o sistema mecânico dado na Figura 4.26, uma massa M sobre um plano sem atrito.

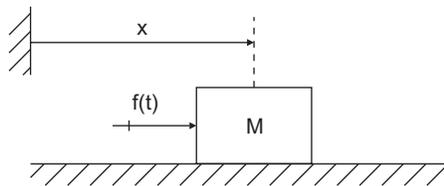


Figura 4.26 Sistema mecânico composto de uma massa M sobre um plano sem atrito.

Sejam as condições iniciais (C. I.) da massa iguais a:

$$C. I. \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \quad (4.144)$$

Aplicando a Lei de Newton à massa M , temos:

$$f = M \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (4.145)$$

Agora, fazendo $x_l(t) \triangleq x(t) u_+(t)$ e utilizando o resultado expresso na equação 4.143, vem:

$$M \frac{d^2 x_l}{dt^2} = f(t) u_+(t) + M v_0 \delta_+(t) + M x_0 \delta'_+(t) \quad (4.146)$$

Como esta equação é linear, o princípio de superposição pode ser usado (vide seção A.4.4, Apêndice A). Isto significa que a resposta total é igual à soma das respostas individuais em razão de cada uma das entradas. Desta forma, podemos analisar separadamente a influência de cada uma das entradas.

Considerando como entrada somente a força igual a $M v_0 \delta_+(t)$, então (4.146) fica:

$$M \ddot{x}_l = M v_0 \delta_+(t) \quad (4.147)$$

Logo:

$$\ddot{x}_l = v_0 \delta_+(t) \quad (4.148)$$

Os comportamentos das funções \ddot{x}_l , \dot{x}_l e x_l na origem podem ser visualizados através da Figura 4.27.

Agora, analisando a outra força, isto é, considerando como entrada somente o termo $M x_0 \delta'_+(t)$, a equação 4.146 fica:

$$M \ddot{x}_l = M x_0 \delta'_+(t) \quad (4.149)$$

Os comportamentos das funções \ddot{x}_l , \dot{x}_l e x_l na origem podem ser visualizados através da Figura 4.28.

Conforme pode ser observado nas Figuras 4.26 e 4.27, o efeito das funções impulso e sua derivada é a transferência instantânea de uma espécie de “condição inicial” ao corpo.

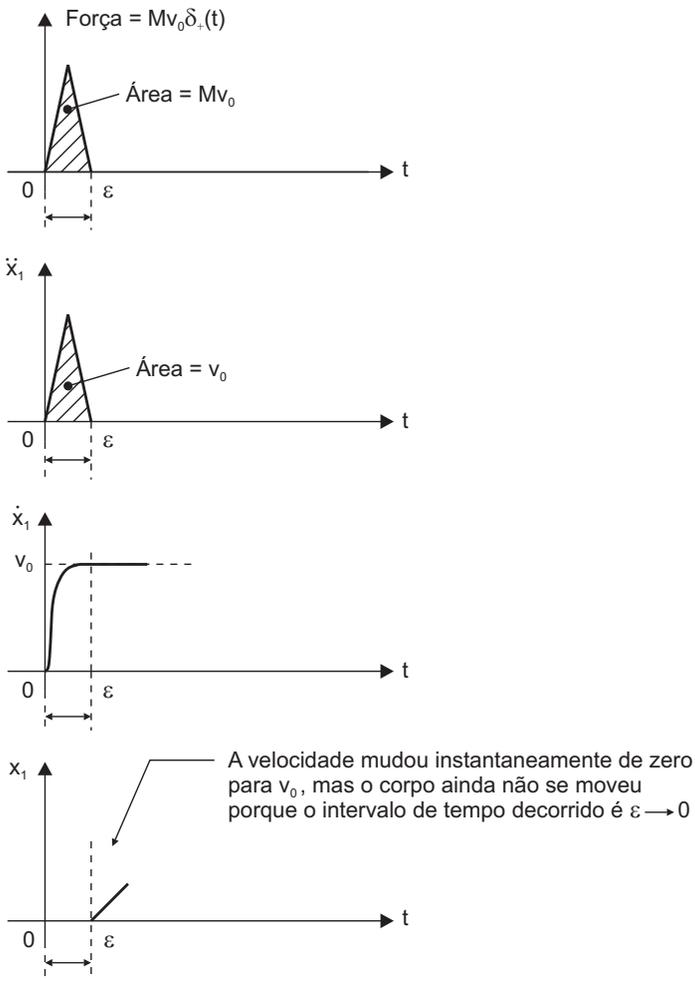


Figura 4.27 Comportamento das funções \ddot{x}_1 , \dot{x}_1 e x_1 na origem quando a força de entrada é igual a $Mv_0\delta_+(t)$.

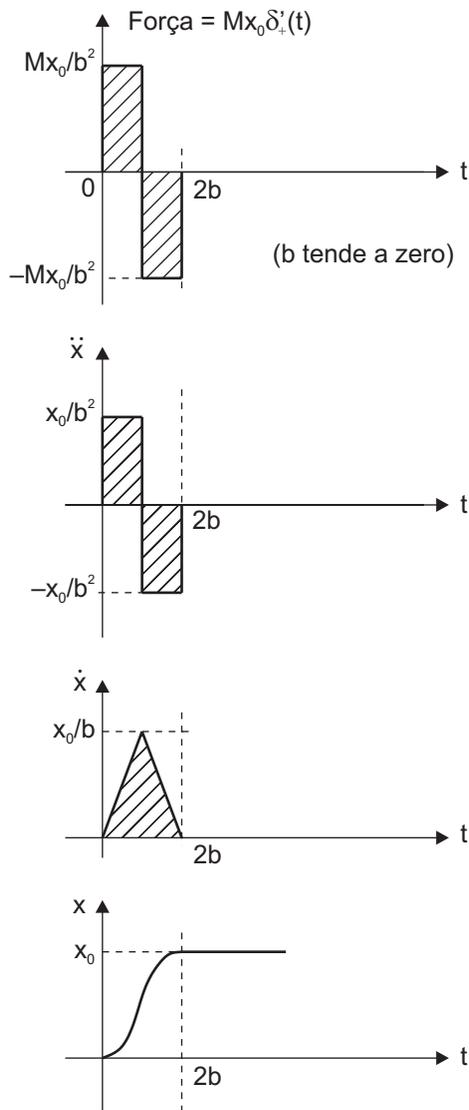


Figura 4.28 Comportamento das funções \ddot{x}_l , \dot{x}_l e x_l na origem quando a força de entrada é igual a $Mx_0\delta'_+(t)$.

4.7.3 – MÉTODO PARA TRATAR CONDIÇÕES INICIAIS

O método é aqui estudado através de um exemplo. Seja o circuito da Figura 4.29, onde desejamos determinar $e_o(t)$, com a carga inicial do capacitor igual a *zero* e sendo a entrada a função degrau, isto é, $e_i = u(t)$ volts.

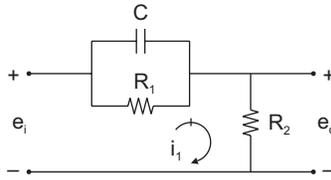


Figura 4.29 Circuito elétrico utilizado para estudo de condições iniciais.

Adotando as mesmas hipóteses consideradas na modelagem do circuito da Figura 3.11 (Capítulo 3, seção 3.3.4), podemos utilizar a equação 3.45. Assim, obtemos a equação diferencial:

$$\tau_1 \frac{d e_0}{d t} + e_0 = K \left[\tau_2 \frac{d e_i}{d t} + e_i \right] \quad (4.150)$$

em que:

$$\tau_1 \triangleq \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$$

$$\tau_2 \triangleq R_1 C$$

$$K \triangleq \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

A literatura discute alguns métodos para a determinação do valor de $e_0(0^+)$ que são relativamente complicados e também não são práticos. Em razão desses problemas, um outro método é geralmente preferido e recomendado. Este se baseia na seguinte consideração: *O limite inferior da T. L. e as Condições Iniciais ocorrem antes que a entrada seja aplicada.*

Obedecendo esta instrução, o gráfico da função entrada $e_i(t)$ deste exemplo deve ser o ilustrado na Figura 4.30.

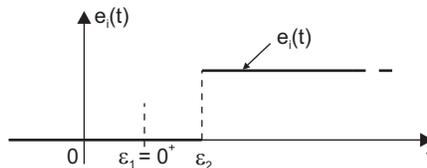


Figura 4.30 Gráfico da função $e_i(t) = u(t - \epsilon_2)$, com $\epsilon_2 > \epsilon_1$ e $\epsilon_2 \rightarrow 0$.

Para aplicações em engenharia, esta diferença infinitesimal quanto ao início da função entrada é completamente desprezível. Porém, sob o ponto de vista da

aplicação da T. L., tal artifício traz benefícios consideráveis, tanto em termos de facilidade no manuseio das equações como em termos de compreensão dos problemas na origem. Assim, aplicando a T. L. à equação 4.150 obtemos:

$$\tau_1 s E_0(s) - \tau_1 e_0(0^+) + E_0(s) = K \tau_2 s E_i(s) - K \tau_2 e_i(0^+) + K E_i(s) \quad (4.151)$$

Como a carga inicial do capacitor é igual a *zero*, das Figura 4.29 e 4.30 vemos que $e_i(0^+) = 0$ e que $e_o(0^+) = 0$ também. Então, a equação 4.151 fica reduzida a:

$$\tau_1 s E_0(s) + E_0(s) = (K \tau_2 s) \frac{I}{s} + \frac{K}{s} \quad (4.152)$$

Sendo $K\tau_2 = \tau_1$, esta equação pode ser reescrita como:

$$(\tau_1 s + I)E_0(s) = \frac{\tau_1 s + K}{s} \quad (4.153)$$

que resulta:

$$E_0(s) = \frac{\tau_1 s + K}{s(\tau_1 s + I)} \quad (4.154)$$

Para obtermos $e_o(t)$ realizamos a transformada inversa de Laplace, assunto da próxima seção.

4.8 – INVERSÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

4.8.1 – INTRODUÇÃO

Basicamente existem três métodos para realizar a transformada inversa:

- (i) aplicação da definição da transformada inversa;
- (ii) métodos computacionais; e
- (iii) uso de tabelas.

Raramente a definição da transformada inversa de Laplace, equação 4.7, é utilizada.

Quanto aos métodos computacionais, estes usam “softwares” aplicados, e as suas descrições não fazem parte do escopo deste livro.

A metodologia aqui aplicada refere-se ao uso de tabelas. Assim, para realizar a transformada inversa de $F(s)$ a fim de obter a função $f(t)$, utilizaremos tabelas da T. L. Muitos manuais da T. L. contêm grande quantidade de pares de funções do tempo

e as suas transformadas. No Apêndice D há uma tabela prática e útil para o estudo de Dinâmica.

No caso de não termos em mãos uma tabela vasta de transformadas e sim uma tabela modesta, algumas operações tornam-se necessárias para que possamos realizar a inversão de $F(s)$. É para esta situação que as considerações abaixo estão descritas.

4.8.2 – PROCEDIMENTO PARA EXECUTAR A INVERSÃO USANDO TABELAS

Para sistemas lineares cujo modelo obtido é uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes, a função $F(s)$ que queremos inverter é sempre uma fração em que o numerador $N(s)$ e o denominador $D(s)$ são polinômios em s , excetuando o caso em que existem termos de defasamento e^{-as} . Estes termos são facilmente resolvidos com a aplicação do teorema do Defasamento. Então, temos $F(s)$:

$$F(s) \triangleq \frac{N(s)}{D(s)} \quad (4.155)$$

em que:

$N(s) \triangleq$ polinômio em s correspondente ao numerador de $F(s)$;

$D(s) \triangleq$ polinômio em s correspondente ao denominador de $F(s)$.

O procedimento para executar a inversão pode ser resumido da seguinte forma:

(i) Preparação do denominador $D(s)$:

Se o primeiro coeficiente de $D(s)$ (o relativo à maior potência de s) não for igual à unidade, divida o numerador $N(s)$ e o denominador $D(s)$ pelo valor deste primeiro coeficiente.

(ii) Se o grau de $N(s)$ for maior ou igual ao grau de $D(s)$:

Se $N(s)$ tiver grau maior ou igual que $D(s)$, divida $N(s)$ por $D(s)$ para obter: uma “fração apropriada” + outros termos.

O grau do numerador desta “fração apropriada” seguramente será menor que o grau do denominador.

(iii) Fatore $D(s)$:

Para fatorar $D(s)$ use as raízes do polinômio $D(s)$, que poderão ser reais e/ou complexas. Para facilitar a determinação das raízes, use o MATLAB, conforme descrito no Apêndice B, seção B.6.2.

(iv) Faça a expansão em frações parciais:

Outros métodos, como Método dos resíduos e Método gráfico, poderiam ser utilizados, porém o da frações parciais é o recomendado.

Nesta seção é apresentado o processo comum para realizar a expansão, e este é geralmente trabalhoso. Esta tarefa pode ser desenvolvida mais facilmente usando o MATLAB, conforme explicado na seção B.8, Apêndice B.

(v) Utilize tabelas para obter $f(t)$.

Após obter $F(s)$ em frações parciais, procure a correspondente função do tempo para cada fração.

4.8.3 – EXEMPLOS

1. Exemplo 1: Obtenha $f(t)$ sendo $F(s) = \frac{4s^4 + 32s^3 + 98s^2 + 116s + 38}{2s^3 + 12s^2 + 22s + 12}$

Resolução:

A fração de $F(s)$ mostra-nos que o primeiro termo do denominador é $2s^3$, portanto, o coeficiente da maior potência de s do denominador não é igual a 1. Por esta razão, o primeiro passo é dividir ambos, numerador e denominador, por 2. Assim obtemos:

$$F(s) = \frac{2s^4 + 16s^3 + 49s^2 + 58s + 19}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \quad (4.156)$$

Em seguida, como o grau de $N(s)$ é maior que o grau de $D(s)$, temos de dividir $N(s)$ por $D(s)$, ou seja:

$$\begin{array}{r} 2s^4 + 16s^3 + 49s^2 + 58s + 19 \quad | \quad s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \\ \underline{-2s^4 - 12s^3 - 22s^2 - 12s} \\ 0 + 4s^3 + 27s^2 + 46s + 19 \quad 2s + 4 \\ \underline{-4s^3 - 24s^2 - 44s - 24} \\ 0 + 3s^2 + 2s - 5 \end{array} \quad (4.157)$$

Logo, da (4.156) e da (4.157) podemos escrever:

$$F(s) = 2s + 4 + \frac{3s^2 + 2s - 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \quad (4.158)$$

Então, da linearidade vem:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[2s + 4] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s^2 + 2s - 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}\right] \quad (4.159)$$

A transformada inversa de $(2s + 4)$ pode ser obtida diretamente da tabela do Apêndice D, pares números 1 e 2, isto é:

$$\mathcal{L}^{-1}[2s+4]=2\delta'_+(t)+4\delta_+(t) \quad (4.160)$$

Agora, para calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s^2+2s-5}{s^3+6s^2+11s+6}\right]$ precisamos fatorar o denominador

e expandir a fração em frações parciais:

Calculando as raízes de $D(s) = 0$, ou seja, de $s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$ obtemos $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ e $r_3 = -3$.

Portanto, podemos escrever que:

$$(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) = (s+1)(s+2)(s+3) \quad (4.161)$$

ou, para o cálculo da transformada inversa:

$$\frac{3s^2+2s-5}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{3s^2+2s-5}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3} \quad (4.162)$$

em que A , B e C são os numeradores das frações parciais.

Para determinarmos A , multiplicamos ambos os lados da (4.162) pelo denominador de A e depois fazemos s igual à raiz correspondente ao denominador de A , neste caso, $s = -1$. Desta forma, as frações com os numeradores B e C tornam-se nulas, no que resulta:

$$A = \left[(s+1) \left(\frac{3s^2+2s-5}{s^3+6s^2+11s+6} \right) \right]_{s=-1} = \left. \frac{3s^2+2s-5}{(s+2)(s+3)} \right|_{s=-1} = \frac{-4}{2} = -2 \quad (4.163)$$

Os numeradores B e C são determinados de maneira análoga, portanto:

$$B = \left[(s+2) \left(\frac{3s^2+2s-5}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right) \right]_{s=-2} = \frac{3}{-1} = -3 \quad (4.164)$$

$$C = \left[(s+3) \left(\frac{3s^2+2s-5}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right) \right]_{s=-3} = \frac{16}{2} = 8 \quad (4.165)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s^2+2s-5}{s^3+6s^2+11s+6}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{s+1} + \frac{-3}{s+2} + \frac{8}{s+3}\right] = \\ &= (-2e^{-t} - 3e^{-2t} + 8e^{-3t})u_+(t) \end{aligned} \quad (4.166)$$

Conseqüentemente, combinando (4.159), (4.160) e (4.166), a $f(t)$ pode ser escrita como sendo:

$$f(t) = 2\delta'_+(t) + 4\delta_+(t) + (-2e^{-t} - 3e^{-2t} + 8e^{-3t})u_+(t) \quad (4.167)$$

2. Exemplo 2: Obtenha $f(t)$ sendo $F(s) = \frac{18s^2 + 36s + 24}{(6s + 6)(s + 2)^3}$

Resolução:

Como o termo de maior potencia do denominador é $6s^4$, dividimos ambos, o numerador e o denominador, por 6 para obtermos:

$$F(s) = \frac{3s^2 + 6s + 4}{(s + 1)(s + 2)^3} \quad (4.168)$$

Neste caso observamos que o denominador $D(s)$ da função $F(s)$ possui raízes repetidas. Por este motivo, o procedimento para obter as frações parciais é um pouco diferente, ou seja:

$$F(s) = \frac{3s^2 + 6s + 4}{(s + 1)(s + 2)^3} = \frac{A}{(s + 1)} + \frac{B_3}{(s + 2)^3} + \frac{B_2}{(s + 2)^2} + \frac{B_1}{(s + 2)} \quad (4.169)$$

Os cálculos de A e B_3 podem ser feitos de maneira análoga ao do exemplo anterior, ou seja:

$$A = \left[(s + 1) \left(\frac{3s^2 + 6s + 4}{(s + 1)(s + 2)^3} \right) \right]_{s=-1} = \frac{3 - 6 + 4}{1} = 1 \quad (4.170)$$

$$B_3 = \left[(s + 2)^3 \left(\frac{3s^2 + 6s + 4}{(s + 1)(s + 2)^3} \right) \right]_{s=-2} = \frac{12 - 12 + 4}{-1} = -4 \quad (4.171)$$

Por sua vez, os coeficientes B_2 e B_1 devem ser calculados através de outro expediente, que é a equação 4.172 dada abaixo.

$$B_n = \left\{ \frac{1}{(m - n)!} \frac{d^{m-n}}{ds^{m-n}} \left[(s - s_l)^m F(s) \right] \right\}_{s=s_l} \quad (4.172)$$

em que:

$m \triangleq$ número de vezes que o pólo s_l aparece;

$n \triangleq$ índice do numerador da fração parcial.

Neste exemplo temos $m = 3$ e $n = 1, 2$ e 3 .

Para $n = 3$ observamos que a equação 4.172 fica reduzida à equação 4.171. Notamos que a equação 4.172 pode perfeitamente ser aplicada quando $n = m$, assim como também no caso de $m = n = 1$.

Fazendo $n = 2$ para calcular o coeficiente B_2 obtemos:

$$B_2 = \left[\frac{1}{1!} \frac{d}{ds} (s+2)^3 F(s) \right]_{s=-2} = \frac{(6s+6)(s+1) - (3s^2 + 6s + 4)}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} =$$

$$= \frac{6-4}{1} = 2 \quad (4.173)$$

E para $n = 1$:

$$B_1 = \left[\frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} (s+2)^3 F(s) \right]_{s=-2} = \frac{1}{2} \frac{(6s+6)(s+1) - 2(3s^2 + 6s + 2)}{(s+1)^3} \Big|_{s=-2}$$

$$= \frac{1}{-1} = -1 \quad (4.174)$$

Consultando a tabela do Apêndice D, seção D.2, temos para o par nº 7:

$$\mathcal{L} \left[\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} u_+(t) \right] = \frac{1}{(s+a)^n}; \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.175)$$

então:

$$f(t) = (e^{-t} - 2t^2 e^{-2t} + 2te^{-2t} - 1e^{-2t}) u_+(t) \quad (4.176)$$

4.8.4 – INVERSÃO DA T. L. QUANDO $D(s)$ POSSUI RAÍZES COMPLEXAS

Se o denominador de $F(s)$ possuir raízes complexas, a função $F(s)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$F(s) = F_1(s) \frac{1}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \quad (4.177)$$

ou

$$F(s) = \frac{A}{s + (\alpha - i\beta)} + \frac{B}{s + (\alpha + i\beta)} + \underbrace{\dots}_{\text{outros termos}} \quad (4.178)$$

É possível provar que A e B são conjugados, então, da equação 4.178 obtemos:

$$F(s) = \frac{2 \operatorname{Re}[(s + \alpha + i\beta)A]}{[(s + \alpha)^2 + \beta^2]} + \underbrace{\dots}_{\text{outros termos}} \quad (4.179)$$

em que $\operatorname{Re}[\dots]$ é a função que extrai a parte real de um número complexo (ou variável complexa).

Combinando as equações 4.172, 4.177 e 4.178, vem:

$$A = [(s + \alpha - i\beta)F(s)]_{s=-\alpha+i\beta} = \left[\frac{F_1(s)}{s + \alpha + i\beta} \right]_{s=-\alpha+i\beta} = \frac{F_1(-\alpha + i\beta)}{-\alpha + i\beta + \alpha + i\beta} \quad (4.180)$$

Então:

$$A = \frac{F_1(-\alpha + i\beta)}{2i\beta} \quad (4.181)$$

em que:

$F(-\alpha + i\beta)$ significa $F_1(s)|_{s=-\alpha+i\beta}$

Para exemplificar este procedimento, vamos determinar $f(t)$ sendo

$$F(s) = \frac{s+3}{s^3 + 3s^2 + 6s + 4}.$$

Como as raízes de $s^3 + 3s^2 + 6s + 4 = 0$ são: -1 e $-1 \pm i\sqrt{3}$, então, fatorando $D(s)$ obtemos:

$$F(s) = \frac{s+3}{[(s+1)^2 + 3](s+1)} \quad (4.182)$$

Comparando (4.182) e (4.177), neste exemplo vemos que $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{3}$ e $F_1(s) = (s+3)/(s+1)$.

Então, usando a equação 4.181 resulta:

$$A = \frac{F_1(-\alpha + i\beta)}{2i\beta} = \frac{-1 + i\sqrt{3} + 3}{2i\sqrt{3}(-1 + i\sqrt{3} + 1)} = \frac{2 + i\sqrt{3}}{-6} = -\frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (4.183)$$

Voltando à expansão em frações parciais, podemos escrever:

$$F(s) = \frac{s+3}{[(s+1)^2+3]} = \frac{A}{s+(\alpha-i\beta)} + \frac{B}{s+(\alpha+i\beta)} + \frac{C}{(s+1)} \quad (4.184)$$

Devemos notar, através das equações 4.177, 4.178 e 4.184, que os “**outros termos**” (neste caso: $C/(s+1)$) não são iguais a $F_1(s)$, mas relativos às raízes de $F_1(s)$.

Agora, calculando C , vem:

$$C = [(s+1)F(s)]_{s=-1} = \frac{-1+3}{3} = \frac{2}{3} \quad (4.185)$$

Logo, como B é o conjugado de A , os valores de A , B e C são:

$$A = -\frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (4.186)$$

$$B = -\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (4.187)$$

$$C = \frac{2}{3} \quad (4.188)$$

Observando que:

$$\frac{c+di}{s+(\alpha-i\beta)} + \frac{c-di}{s+(\alpha+i\beta)} = \frac{(2c)s+(2c\alpha-2d\beta)}{[(s+\alpha)^2+\beta^2]} \quad (4.189)$$

então, como $\alpha = 1$; $\beta = \sqrt{3}$; $c = -1/3$; e $d = -(\sqrt{3})/6$, combinando as equações (4.184) e (4.189), a função $F(s)$ em frações parciais resulta:

$$F(s) = \frac{2}{3} \frac{1}{(s+1)} - \frac{2}{3} \frac{(s-1/2)}{[(s+1)^2+3]} \quad (4.190)$$

Sabendo que (par nº 29 da tabela do Apêndice D):

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+a_0}{(s+a)^2+b^2} \right] = \left[\frac{1}{b} \sqrt{(a_0-a)^2+b^2} e^{-at} \operatorname{sen}(bt+\phi) \right] u_+(t) \quad (4.191)$$

em que:

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a_0-a} \quad (4.192)$$

Então, a função $f(t)$ fica:

$$f(t) = \frac{2}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{\left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{2}\right)^2 + 3} \right] e^{-t} \operatorname{sen} \left(\sqrt{3} t + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{-\frac{1}{2} - \frac{2}{2}} \right) \right\} \quad (4.193)$$

ou:

$$f(t) = \frac{2}{3} \left[e^{-t} - \frac{\sqrt{7}}{2} e^{-t} \operatorname{sen} \left(\sqrt{3} t + \operatorname{arctg} \frac{+2}{-\sqrt{3}} \right) \right] \quad (4.194)$$

Continuando para a determinação de ϕ , visualizamos através da Figura 4.31 que:

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{+2}{-\sqrt{3}} \quad (4.195)$$

$$\phi = \pi - \gamma \quad (4.196)$$

em que:

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{+2}{+\sqrt{3}} \quad (4.197)$$

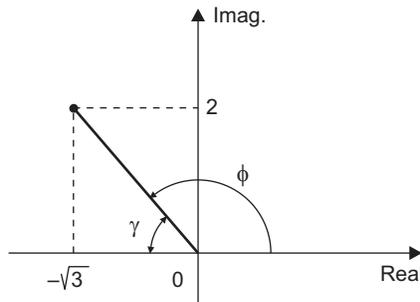


Figura 4.31 Representação gráfica do ângulo ϕ e ângulo γ .

Agora, lembrando as igualdades trigonométricas:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\pi - \theta) = +\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen}(-\psi) = -\operatorname{sen} \psi \end{cases} \quad (4.198)$$

Então, da (4.196) e (4.198) vem:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(bt + \phi) &= \operatorname{sen}(bt + \pi - \gamma) = \operatorname{sen}[\pi - (\gamma - bt)] = \\ &= \operatorname{sen}(\gamma - bt) = -\operatorname{sen}(bt - \gamma) \end{aligned} \quad (4.199)$$

Finalmente, a função $f(t)$ pode ser escrita como sendo:

$$f(t) = \frac{2}{3} e^{-t} \left[1 + \frac{\sqrt{7}}{2} \operatorname{sen} \left(\sqrt{3}t - \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \right] u_+(t) \quad (4.200)$$

Observações:

1. No Apêndice A apontamos (Figura A.1) que em Dinâmica devemos lembrar que: $\operatorname{arctg} \left(\frac{-b}{-a} \right) \neq \operatorname{arctg} \left(\frac{+b}{+a} \right)$.
2. Os procedimentos para o caso de $D(s)$ ter raízes complexas repetidas não serão aqui tratados.

4.9 – INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

4.9.1 – TEOREMA

A *Integral de Convolução* é importante principalmente por dois pontos:

- (i) É usada no estudo da resposta de sistemas através do método da transformada de Laplace (vide Capítulo 7).
- (ii) É utilizada para implementar a transformada inversa de Laplace por meios computacionais. Usando o teorema da convolução, o computador não faz a inversão na forma funcional (expressão matemática), mas sim o gráfico de $f(t)$ quando $F(s)$ é dado.

O teorema da *Integral de Convolução* diz que:

$$\mathcal{L}^{-1} [F_1(s) F_2(s)] = \int_{0^+}^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (4.201)$$

em que:

τ é uma variável auxiliar.

$$F_1(s) \triangleq \mathcal{L} [f_1(t)]$$

$$F_2(s) \triangleq \mathcal{L} [f_2(t)]$$

É necessário lembrar que $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são iguais a zero para $t < 0$.

4.9.2 – PROVA DO TEOREMA

Antes de iniciarmos a prova propriamente dita, é interessante realizar uma interpretação gráfica da equação 4.201.

Seja, por exemplo, as funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ dadas na Figura 4.32.

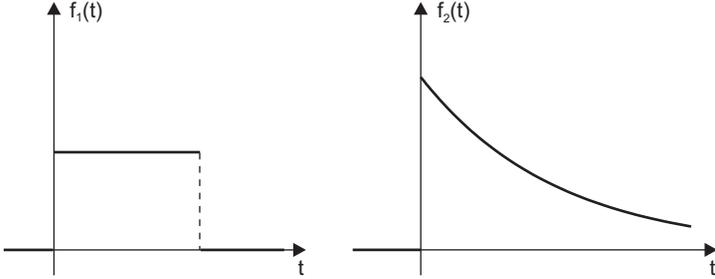


Figura 4.32 Funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ dadas para ilustrar a interpretação gráfica da equação 4.201.

Das funções dadas na Figura 4.32 obtemos o produto $f_1(\tau)f_2(t - \tau)$ fazendo $t = t_1$, um dado valor de t , Figura 4.33. Observe que $f_2(t_1 - \tau)$ é uma “função espelhada” (rebatida) e é igual a *zero* para $\tau > t_1$, pois a função original $f_2(t)$ é igual a *zero* para argumentos negativos. Logo, a função produto $f_1(\tau)f_2(t - \tau)$ é sempre *zero* para $\tau < 0$ e também para $\tau > t_1$.

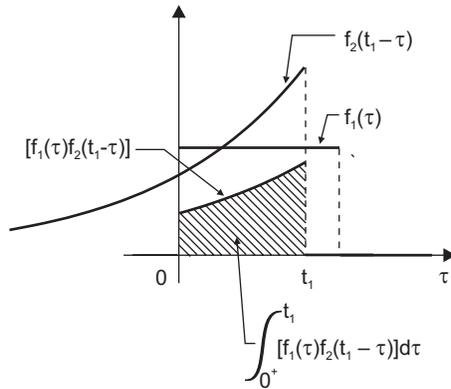


Figura 4.33 Representação gráfica da integral $\int_{0^+}^{t_1} f_1(\tau) f_2(t_1 - \tau) d\tau$.

Assim, se definirmos uma função $f(t)$ igual à transformada inversa de $F(s) = F_1(s) F_2(s)$, isto é:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) F_2(s)] \triangleq \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \triangleq f(t) \quad (4.202)$$

então, a área sombreada dada na Figura 4.33 é igual ao valor da função $f(t)$ no ponto t_1 , ou seja:

$$f(t_1) = \int_{0^+}^{t_1} f_1(\tau) f_2(t_1 - \tau) d\tau \quad (4.203)$$

Repetindo o processo para outros valores de t , fazendo $t = t_2, t_3, \dots$, determinamos o gráfico da função $f(t)$.

Agora, voltando à prova do teorema, como $f_2(t - \tau)$ é zero para $\tau > t$, então a equação 4.201 pode ser reescrita conforme abaixo.

$$f(t) = \int_{0^+}^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_{0^+}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (4.204)$$

Calculando a transformada da integral, vem:

$$\mathcal{L} \left[\int_{0^+}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] = \int_{0^+}^{\infty} \left[\int_{0^+}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-st} dt \quad (4.205)$$

Neste ponto queremos mudar a ordem da integração, um processo que é muitas vezes válido, mas nem sempre. Para as funções utilizadas em engenharia quase sempre é válido. É claro que, em caso de dúvidas, um manual de matemática pode ser consultado.

Supondo que a mudança da ordem de integração seja possível, então obtemos:

$$\int_{0^+}^{\infty} \left[\int_{0^+}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{0^+}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-st} dt \right] d\tau \quad (4.206)$$

Do teorema do Defasamento temos:

$$\int_{0^+}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-st} dt = e^{-s\tau} F_2(s) \quad (4.207)$$

Combinando (4.205), (4.206) e (4.207), resulta:

$$\mathcal{L} \left[\int_{0^+}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] = F_2(s) \int_{0^+}^{\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau = F_2(s) F_1(s) \quad (4.208)$$

que, observando os limites de integração da (4.204), a (4.208) é equivalente à (4.201).

4.9.3 – COMENTÁRIOS SOBRE A INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

Devemos ressaltar que, se

$$F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (4.209)$$

excetuando o caso de $f_1(t) = f_2(t) = \delta_+(t)$, é certo que:

$$f(t) \neq f_1(t) \cdot f_2(t) \quad (4.210)$$

ou

$$\mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \mathcal{L}^{-1} [F_1(s) \cdot F_2(s)] \neq \mathcal{L}^{-1} [F_1(s)] \cdot \mathcal{L}^{-1} [F_2(s)] \quad (4.211)$$

Exemplificando, sejam as funções de s :

$$F_1(s) = \frac{1}{s} \quad (4.212)$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s+a} \quad (4.213)$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s+a)} = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (4.214)$$

Fazendo as inversões de cada uma obtemos:

$$\mathcal{L}^{-1} [F_1(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = u_+(t) \quad (4.215)$$

$$\mathcal{L}^{-1} [F_2(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+a} \right] = e^{-at} u_+(t) \quad (4.216)$$

$$\mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s+a)} \right] = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) u_+(t) \quad (4.217)$$

o que ilustra que $\mathcal{L}^{-1} [F(s)] \neq \mathcal{L}^{-1} [F_1(s)] \cdot \mathcal{L}^{-1} [F_2(s)]$.

4.10 – FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIAS COM LAPLACE

4.10.1 – FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

O conceito de Função de Transferência (F. T.) é melhor definido quando a Transformada de Laplace é usada.

A Função de Transferência com Laplace, também chamada Função do Sistema, relaciona um par escolhido para a saída e entrada do sistema. Ela é definida como a relação entre a transformada da saída e a transformada da entrada, quando *todas* as outras entradas, inclusive as condições iniciais, são tomadas como zero ou constantes, pois o “zero” pode depender da origem adotada e do sistema de unidade.

Como exemplo, suponha o sistema mecânico massa–mola–amortecedor dado na Figura 3.21. A função de transferência considerando o deslocamento como saída e a força como entrada resulta:

$$\frac{X_o(s)}{F_i(s)} = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1} \quad (4.218)$$

em que:

$$X_o \triangleq \mathcal{L}[x_o(t)]$$

$$F_i \triangleq \mathcal{L}[f_i(t)]$$

e os parâmetros K , ω_n e ζ seguem as mesmas definições anteriores: ganho, frequência natural não-amortecida e fator de amortecimento.

As funções de transferência com Laplace podem também ser visualizadas na forma de diagrama de blocos. No caso da equação 4.218, o diagrama é o ilustrado na Figura 4.34.

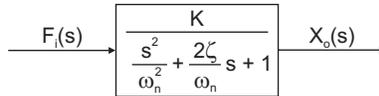


Figura 4.34 Diagrama de blocos com Laplace de um sistema de segunda ordem.

4.10.2 – PÓLOS E ZEROS DE UMA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Uma função de transferência de um sistema linear é geralmente igual a uma fração na forma operacional, com polinômios em s no numerador e denominador, equação 4.219.

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = K \frac{[b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + I]}{[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + I]} \quad (4.219)$$

em que:

Q_o e $Q_i \triangleq$ Transformadas de Laplace da saída $q_o(t)$ e entrada $q_i(t)$, respectivamente;

$K \triangleq$ ganho;

$a_n, \dots, a_o, b_m, \dots, b_o \triangleq$ coeficientes dos polinômios em s , constantes.

Transformando estes polinômios em equações (igualando-os a zero) podemos determinar suas raízes.

As raízes do numerador são chamadas de **Zeros** da função de transferência e são representadas por “O” no plano complexo.

As raízes do denominador são os *Pólos* da função de transferência e são representados por “X” no plano complexo.

Uma função de transferência pode ser escrita em termos de *pólos* e *zeros*.

Exemplificando, seja a função de transferência com o ganho $K = 5$:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{5(0,25s^2 + 1)(s + 1)}{(0,1s^2 + 0,7s + 1)(0,25s + 1)^2} \quad (4.220)$$

Como queremos escrever a função de transferência (F. T.) em termos de *pólos* e *zeros*, devemos preparar a F. T. deixando os coeficientes das maiores potências de s iguais a 1 . Assim:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{5 \cdot 0,25 \left(s^2 + \frac{1}{0,25} \right) (s + 1)}{0,1 \cdot 0,25^2 \left[s^2 + \left(\frac{0,7}{0,1} \right) s + \left(\frac{1}{0,1} \right) \right] \left(s + \frac{1}{0,25} \right)^2} \quad (4.221)$$

ou

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{200(s^2 + 4)(s + 1)}{(s^2 + 7s + 10)(s + 4)^2} \quad (4.222)$$

em que $200 \triangleq k$, *ganho paramétrico*.

Como as raízes de $s^2 + 7s + 10 = 0$ são $s_1 = -2$ e $s_2 = -5$, então os *pólos* e *zeros* da F. T. são:

- *Pólos*: Temos 4 *pólos*:
 $P_1 = -2$; $P_2 = -5$; e $P_3 = P_4 = -4$ (*pólo duplo*).
- *Zeros*: Temos 3 *zeros*:
 $Z_1 = 2i$; $Z_2 = -2i$; $Z_3 = -1$.

Escrevendo a 4.220 em termos de seus *pólos* e *zeros* vem:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{200(s - 2i)(s + 2i)(s + 1)}{(s + 2)(s + 5)(s + 4)^2} \quad (4.223)$$

A Figura 4.35 ilustra estes *pólos* e *zeros* no plano complexo.

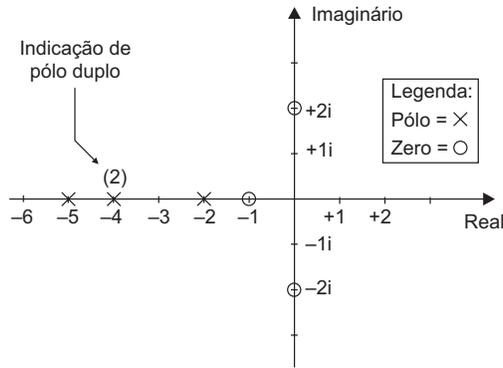


Figura 4.35 Representação no plano complexo dos pólos: -2 ; -4 ; -4 ; -5 ; e dos zeros: $\pm 2i$; -1 .

4.11 – EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

A) Exercício 1: Determinar $F(s)$ sendo $f(t) = A[\text{sen } \omega_1 t]u_+(t)$

Resolução:

Da definição:

$$F(s) = \int_{0^+}^{\infty} A \text{sen}(\omega_1 t) u_+(t) e^{-st} dt \quad (4.224)$$

Lembrando que (equação A.6, Apêndice A):

$$\text{sen} \omega_1 t = \frac{e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_1 t}}{2i} \quad (4.225)$$

então:

$$F(s) = \frac{A}{2i} \int_{0^+}^{\infty} e^{-(s-i\omega_1)t} dt - \frac{A}{2i} \int_{0^+}^{\infty} e^{-(s+i\omega_1)t} dt \quad (4.226)$$

Resolvendo as integrais vem:

$$F(s) = \frac{A}{2i} \left[\frac{1}{s-i\omega_1} - \frac{1}{s+i\omega_1} \right] = \frac{A}{2i} \left[\frac{s+i\omega_1 - s+i\omega_1}{s^2 + \omega_1^2} \right] = \frac{A}{2i} \left(\frac{2i\omega_1}{s^2 + \omega_1^2} \right) \quad (4.227)$$

Logo:

$$\mathcal{L} [A(\text{sen } \omega_1 t)u_+(t)] = A \frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2} \quad (4.228)$$

B) **Exercício 2:** Comparar $\mathcal{L}[\ddot{y}_1(t)]$ com $\mathcal{L}[\ddot{y}_2(t)]$ sendo $y_1(t) = (5 - 5e^{-2t})u(t)$ e $y_2(t) = (5 - 5e^{-2t})u_+(t)$.

Resolução:

As duas funções são transformáveis porque satisfazem as três condições da definição (vide seção 4.2).

Iniciando, vamos calcular as derivadas de $y_1(t)$.

$$y_1(t) = (5 - 5e^{-2t})u(t) \quad (4.229)$$

$$\dot{y}_1(t) = +10e^{-2t}u(t) + (5 - 5e^{-2t})\delta(t) = +10e^{-2t}u(t) \quad (4.230)$$

$$\ddot{y}_1(t) = -20e^{-2t}u(t) + 10e^{-2t}\delta(t) = -20e^{-2t}u(t) + 10\delta(t) \quad (4.231)$$

As derivadas para a função $y_2(t)$ são:

$$y_2(t) = (5 - 5e^{-2t})u_+(t) \quad (4.232)$$

$$\dot{y}_2(t) = +10e^{-2t}u_+(t) + (5 - 5e^{-2t})\delta_+(t) = +10e^{-2t}u_+(t) \quad (4.233)$$

$$\ddot{y}_2(t) = -20e^{-2t}u_+(t) + 10e^{-2t}\delta_+(t) = -20e^{-2t}u_+(t) + 10\delta_+(t) \quad (4.234)$$

Lembrando que $\mathcal{L}[\delta(t)] = 0$ e $\mathcal{L}[\delta_+(t)] = 1$ (vide equações 4.105 e 4.106), as transformadas $\mathcal{L}[\ddot{y}_1(t)]$ e $\mathcal{L}[\ddot{y}_2(t)]$ resultam:

$$\mathcal{L}[\ddot{y}_1(t)] = \frac{-20}{s+2} = \frac{-10}{0,5s+1} \quad (4.235)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{y}_2(t)] = \frac{-20}{s+2} + 10 = \frac{-20 + 10s + 20}{s+2} = \frac{+5s}{0,5s+1} \quad (4.236)$$

Logo:

$$\mathcal{L}[\ddot{y}_1(t)] \neq \mathcal{L}[\ddot{y}_2(t)] \quad (4.237)$$

As transformadas são diferentes porque a descontinuidade de $y_2(t)$ está dentro do intervalo de integração de Laplace enquanto a descontinuidade de $y_1(t)$ está fora do intervalo de integração de Laplace.

C) **Exercício 3:** Determinar $P(s)$ sendo $p(t)$ um pulso, conforme a Figura 4.36.

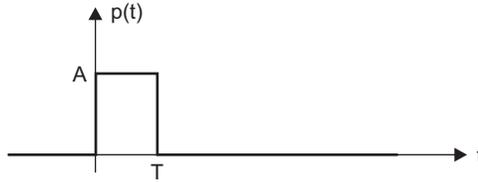


Figura 4.36 Gráfico do pulso retangular $p(t)$.

Resolução:

A função $p(t)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$p(t) = A[u_+(t) - u(t-T)] \quad (4.238)$$

então, $P(s)$ fica:

$$P(s) = A \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} \right] \quad (4.239)$$

Logo:

$$P(s) = A \frac{(1 - e^{-Ts})}{s} \quad (4.240)$$

D) **Exercício 4:** Determinar $y(t)$ sabendo que $y(0^+) = 0$ e que: $0,1 \dot{y} + y = p(t)$, em que $p(t)$ é o pulso da Figura 4.36, com $A = 1$ e $T = 0,5$ segundo.

Resolução:

Fazendo a T. L. da equação diferencial obtemos:

$$0,1sY(s) + Y(s) = \frac{1 - e^{-0,5s}}{s} \quad (4.241)$$

Logo:

$$Y(s) = \frac{1}{s(0,1s + 1)} - \frac{e^{-0,5s}}{s(0,1s + 1)} \quad (4.242)$$

ou

$$Y(s) = \frac{10}{s(s + 10)} - \frac{10e^{-0,5s}}{s(s + 10)} \quad (4.243)$$

Consultando a tabelas da T. L do Apêndice D, o par nº 8 é:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+a)}\right] = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u_+(t) \quad (4.244)$$

Portanto, da tabela e do teorema do defasamento escrevemos:

$$y(t) = 10 \frac{1}{10}(1 - e^{-10t})u_+(t) - 10 \frac{1}{10}[1 - e^{-10(t-0,5)}]u(t-0,5) \quad (4.245)$$

que resulta:

$$y(t) = (1 - e^{-10t})u_+(t) - [1 - e^{-10(t-0,5)}]u(t-0,5) \quad (4.246)$$

E) **Exercício 5:** Determinar a transformada da função $y(t) = e^{-5t} t^3 u_+(t)$ usando o teorema da translação em s .

Resolução:

O teorema da translação em s nos diz que, sendo $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, então:

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a) \quad (4.247)$$

Do par nº 5 da tabela do Apêndice D temos:

$$\mathcal{L}[t^3 u_+(t)] = \frac{3!}{s^4} \quad (4.248)$$

Então:

$$\mathcal{L}[e^{-5t} t^3 u_+(t)] = \frac{3!}{(s+5)^4} \quad (4.249)$$

Logo:

$$\mathcal{L}[e^{-5t} t^3 u_+(t)] = \frac{6}{(s+5)^4} \quad (4.250)$$

F) **Exercício 6:** Fazer o gráfico da função $y(t) = u(2\pi - t) \text{sen}(2\pi - t)$.

Resolução:

Estudando os argumentos das funções $u(2\pi - t)$ e $\text{sen}(2\pi - t)$ vemos que a função $y(t) = u(2\pi - t) \text{sen}(2\pi - t)$ é do tipo “rebatida” (“espelhada”), conforme mostra a Figura 4.37.

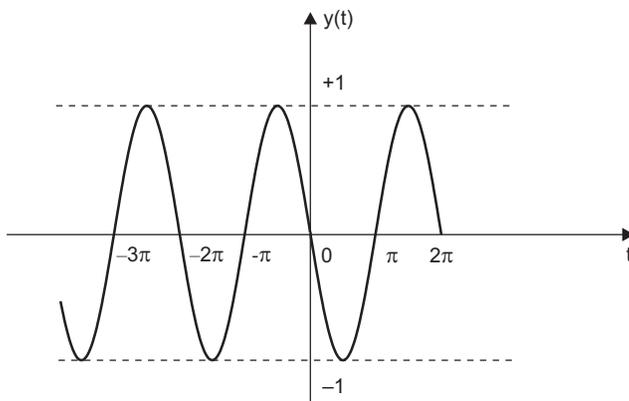


Figura 4.37 Gráfico da função $y(t) = u(2\pi - t)\sin(2\pi - t)$.

G) Exercício 7: Dada a função $z(t) = (t - 2)^3 u(t - 2)$, fazer o gráfico desta função e obter $Z(s)$.

Resolução:

A Figura 4.38 mostra o gráfico da função.

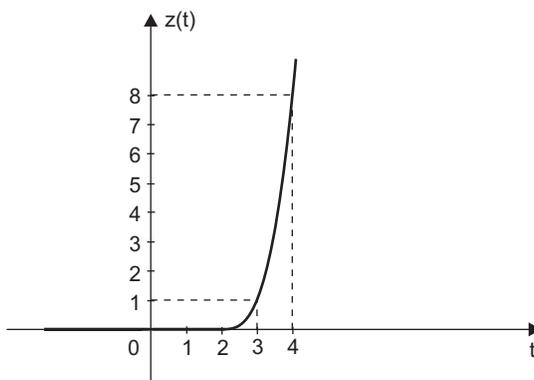


Figura 4.38 Gráfico da função $z(t) = (t - 2)^3 u(t - 2)$.

A sua transformada é obtida através do teorema do defasamento. Sendo

$$\mathcal{L}[t^3 u_+(t)] = \frac{3!}{s^4} \text{ então:}$$

$$Z(s) = \frac{6e^{-2s}}{s^4} \quad (4.251)$$

H) **Exercício 8:** Determinar $y(t)$ sendo: $\ddot{y} + 9y = 4\delta(t - 2\pi)$ com condições iniciais $y(0^+) = 1$ e $\dot{y}(0^+) = 0$.

Resolução:

A Transformada de Laplace da equação diferencial é:

$$s^2 Y(s) - sy(0^+) - \dot{y}(0^+) + 9Y(s) = 4e^{-2\pi s} \quad (4.252)$$

Substituindo as condições iniciais obtemos:

$$(s^2 + 9)Y(s) = 4e^{-2\pi s} + s \quad (4.253)$$

ou

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2 + 3^2)} + 4 \frac{e^{-2\pi s}}{(s^2 + 3^2)} \quad (4.254)$$

Consultando a tabela da T. L. (Apêndice D, pares nºs 25 e 26) vemos que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] = (\cos \omega t) u_+(t) \quad (4.255)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] = (\text{sen} \omega t) u_+(t) \quad (4.256)$$

Assim, da tabela e do teorema do defasamento, obtemos:

$$y(t) = (\cos 3t) u_+(t) + \frac{4}{3} \text{sen}[3(t - 2\pi)] u(t - 2\pi) \quad (4.257)$$

I) **Exercício 9:** Determinar $F(s)$ sendo $f(t)$ uma função periódica, conforme ilustra a Figura 4.39.

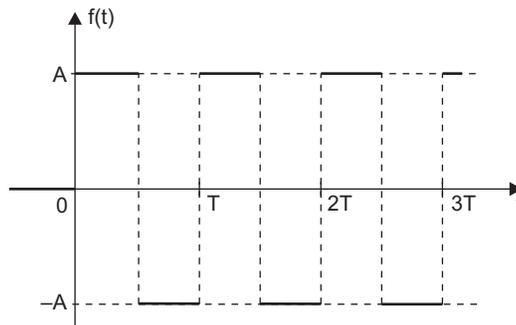


Figura 4.39 Gráfico da função periódica $f(t)$ (onda quadrada para $t > 0$).

Resolução:

Sabemos que se $f(t)$ for periódica e transformável, a sua $F(s)$ é dada pela equação 4.83, isto é:

$$F(s) = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}} \quad (4.258)$$

em que $f_T(t)$ é igual a $f(t)$ somente no primeiro ciclo e igual a *zero* para os demais valores de t , Figura 4.40.

Da figura vemos que

$$f_T(t) = A[u_+(t) - 2u(t - T/2) + u(t - T)] \quad (4.259)$$

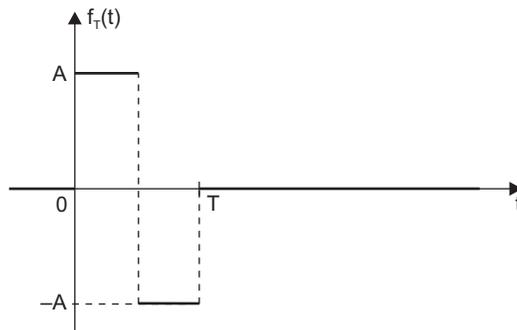


Figura 4.40 Função $f_T(t)$ extraída da função $f(t)$ periódica dada na Figura 4.39.

Agora, calculando sua transformada

$$F_T(s) = A \left[\frac{1}{s} - \frac{2e^{-\frac{T}{2}s}}{s} + \frac{e^{-Ts}}{s} \right] \quad (4.260)$$

que substituindo na (4.258) resulta:

$$F(s) = \frac{A \left(1 - 2e^{-\frac{T}{2}s} + e^{-Ts} \right)}{s(1 - e^{-Ts})} = \frac{A \left(1 - e^{-\frac{T}{2}s} \right)^2}{s \left(1 + e^{-\frac{T}{2}s} \right) \left(1 - e^{-\frac{T}{2}s} \right)} \quad (4.261)$$

Logo:

$$F(s) = \frac{A \left(1 - e^{-\frac{T}{2}s} \right)}{s \left(1 + e^{-\frac{T}{2}s} \right)} \quad (4.262)$$

J) **Exercício 10:** Para um sistema de segunda ordem subamortecido ($\zeta < 1$), fazer a interpretação geométrica dos pólos no plano complexo.

Resolução:

A função de transferência padrão de um sistema de segunda ordem é:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \quad (4.263)$$

Da sua equação característica $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ determinamos os seus pólos, que são:

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (4.264)$$

Como $\zeta < 1$ (subamortecido), então:

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (4.265)$$

Estes pólos têm as posições no plano complexo conforme ilustra a Figura 4.41.

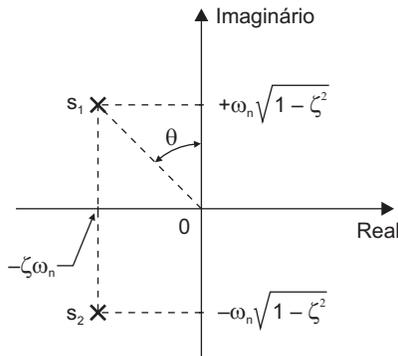


Figura 4.41 Posições dos pólos $s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ no plano complexo.

A distância de s_1 à origem pode ser determinada através da equação do triângulo retângulo, isto é:

$$\overline{s_1 \theta} = \sqrt{\zeta^2 \omega_n^2 + \omega_n^2 (1 - \zeta^2)} = \omega_n \quad (4.266)$$

que é o módulo do número complexo.

Calculando o seno do ângulo θ resulta:

$$\text{sen}\theta = \frac{\zeta \omega_n}{\omega_n} = \zeta \quad (4.267)$$

A frequência amortecida ω_d é $\omega_d \triangleq \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, então os parâmetros do sistema de segunda ordem dependem da posição dos pólos, conforme ilustra a Figura 4.42.

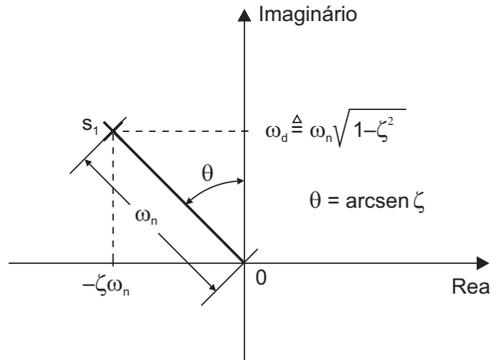


Figura 4.42 Parâmetros ω_n , ω_d e ζ em função da posição do polo s_1 no plano complexo.

K) Exercício 11: Um sistema de segunda ordem está em repouso e a sua equação característica tem raízes reais negativas distintas. Determinar $q_o(t)$ sabendo que $q_i(t) = \dot{q}_i t u_+(t)$, em que \dot{q}_i é uma constante (coeficiente angular da rampa).

Resolução:

Se $q_i(t) = \dot{q}_i t u_+(t)$, então:

$$Q_i(s) = \frac{\dot{q}_i}{s^2} \quad (4.268)$$

A função de transferência de um sistema de segunda ordem padrão é:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \quad (4.269)$$

Reescrevendo esta função de transferência para a determinação de suas raízes temos:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.270)$$

Então, a sua equação característica é:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (4.271)$$

cujas raízes são:

$$r_1, r_2 = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \quad (4.272)$$

em que $\zeta > 1$ para que as raízes sejam reais negativas distintas, conforme enunciado do exercício.

Fatorando o denominador da (4.270) em termos das raízes, vem:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s - r_1)(s - r_2) \quad (4.273)$$

ou

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = \left[s + \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \right] \left[s + \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \right] \quad (4.274)$$

Substituindo (4.274) em (4.270) obtemos:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{K\omega_n^2}{\left[s + \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \right] \left[s + \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \right]} \quad (4.275)$$

ou

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} \frac{1}{\left[\frac{s}{\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n} + 1 \right] \left[\frac{s}{\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n} + 1 \right]} \quad (4.276)$$

Definindo:

$$\tau_1 \triangleq \frac{1}{\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n}$$

$$\tau_2 \triangleq \frac{1}{\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n}$$

Então, manipulando (4.276) e combinando com (4.268) resulta:

$$Q_o(s) = \frac{K \dot{q}_i}{s^2 (\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (4.277)$$

Da tabela da T. L. do Apêndice D (par nº 19a) obtemos $q_o(t)$:

$$q_o(t) = K \dot{q}_i \left[t - (\tau_1 + \tau_2) + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \left[\tau_2^2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \tau_1^2 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right] \right] u_+(t) \quad (4.278)$$

Agora, desenvolvendo os termos $(\tau_1 + \tau_2)$, $\tau_2^2/(\tau_2 - \tau_1)$ e $\tau_1^2/(\tau_2 - \tau_1)$ desta equação vamos obter:

$$(\tau_1 + \tau_2) = \frac{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n + (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n}{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \cdot (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n} \quad (4.279)$$

ou

$$(\tau_1 + \tau_2) = \frac{2\zeta}{\omega_n} \quad (4.280)$$

Outro termo da (4.278):

$$\begin{aligned} \frac{\tau_2^2}{(\tau_2 - \tau_1)} &= \frac{\frac{1}{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^2 \omega_n^2}}{\frac{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n - (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n}{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \cdot (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n}} = \\ &= \frac{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n (-2\sqrt{\zeta^2 - 1})} \cdot \frac{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} = \\ &= \frac{\zeta^2 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1} + \zeta^2 - 1}{(-2\omega_n)\sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned} \quad (4.281)$$

Multiplicando numerador e denominador por 2ζ resulta:

$$\frac{\tau_2^2}{(\tau_2 - \tau_1)} = -\frac{2\zeta}{\omega_n} \cdot \frac{2\zeta^2 - 1 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{4\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (4.282)$$

Desenvolvendo o ultimo termo da (4.278) vem:

$$\begin{aligned}
 \frac{\tau_1^2}{(\tau_2 - \tau_1)} &= \frac{\frac{1}{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^2} \omega_n^2}{\frac{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n - (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n}{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \cdot (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n}} = \\
 &= \frac{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n (-2\sqrt{\zeta^2 - 1})} \cdot \frac{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} = \\
 &= \frac{\zeta^2 + 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1} + \zeta^2 - 1}{(-2\omega_n)\sqrt{\zeta^2 - 1}} \tag{4.283}
 \end{aligned}$$

Multiplicando numerador e denominador por 2ζ resulta:

$$\frac{\tau_1^2}{(\tau_2 - \tau_1)} = -\frac{2\zeta}{\omega_n} \cdot \frac{2\zeta^2 - 1 + 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{4\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}} \tag{4.284}$$

Substituindo (4.280), (4.282) e (4.284) em (4.278) vem:

$$\begin{aligned}
 q_o(t) &= K\dot{q}_i \left[t - \frac{2\zeta}{\omega_n} - \frac{2\zeta}{\omega_n} \cdot \frac{2\zeta^2 - 1 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{4\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\zeta}{\omega_n} \cdot \frac{2\zeta^2 - 1 + 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{4\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \right] \tag{4.285}
 \end{aligned}$$

que finalmente resulta:

$$\begin{aligned}
 q_o(t) &= \left\{ K\dot{q}_i t - \frac{2\zeta K\dot{q}_i}{\omega_n} \left[1 + \frac{2\zeta^2 - 1 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{4\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{-2\zeta^2 + 1 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{4\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \right] \right\} u_+(t) \tag{4.286}
 \end{aligned}$$

4.12 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

EX1 – Mostre que se $v(t)$ tem unidade igual a “volts”, então $\mathcal{L}[v(t)] = V(s)$ tem unidade “volt-segundo”.

EX2 – Resolva e verifique a solução da equação: $\frac{dy}{dt} + 3y + 2 \int_0^t y dt = e^{-3t} - 2$; para $y(0^+) = 2$.

EX3 – Usando a Transformada de Laplace, determine a função $y(t)$ sabendo que: $D^2 y + 2Dy + 2y = \delta(t - \pi)$; e que as condições iniciais são: $y(0^+) = 1$; e $y'(0^+) = 0$.

EX4 – Determine $y(t)$ sendo: $Y(s) = \frac{5(s+3)}{s(s+1)(s+10)(s^2+100)}$.

Use o método das frações parciais.

EX5 – Expanda em frações parciais e determine a transformada inversa de:

a) $\frac{s^2 + a_1 s + a_0}{(s + \alpha)^2 s^2}$

b) $\frac{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{(s + \gamma)(s + \alpha)^2}$

EX6 – Faça o gráfico esquemático das funções do tempo cujas transformadas são:

a) $\frac{e^{-as}}{(s + \alpha)}$

b) $\frac{(1 - e^{-s})^2}{s}$

EX7 – Determine $x(t)$ sendo: $X(s) = \frac{2e^{-0,5s}}{(s^2 + 6s + 13)} - \frac{0,5(s-1)}{(0,5s^2 - s + 1)}$

EX8 – Considerando $a > 0$, faça o gráfico de:

a) $u(-t)$

b) $u(1-t)$

c) $tu(t-1)$

d) $u(t+a) - 2u(t-2a)$

e) $tu(t) - (t-1)u(t-1)$

EX9 – Escreva as expressões para as funções cujos gráficos estão na Figura E4.1. Use funções degrau quando necessário.

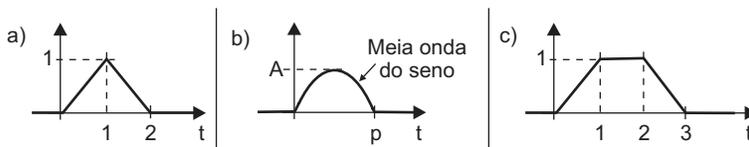


Figura E4.1

EX10 – Escreva uma expressão para a função $g(t)$ da Figura E4.2 de forma conveniente para a aplicação do teorema do defasamento. A expressão de $g(t)$ deve valer para $-\infty < t < \infty$. Obtenha $G(s)$ usando tabelas da Transformada de Laplace.

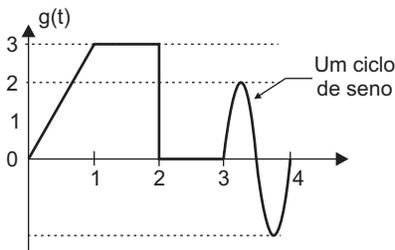


Figura E4.2

EX11 – Usando o teorema do defasamento, determine a transformada da função $f(t)$ da Figura E4.3. Conforme mostra o gráfico, a função $f(t)$ não é periódica.

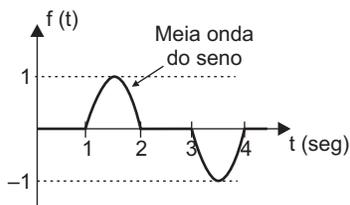


Figura E4.3

EX12 – Determine a Transformada de Laplace para as funções periódicas dadas na Figuras E4.4a e E4.4b.

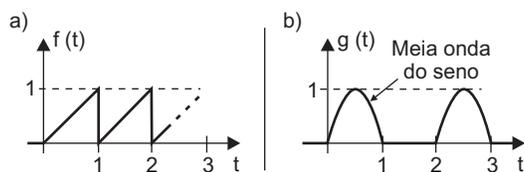


Figura E4.4

EX13 – Determine os valores finais e iniciais das funções cujas transformadas estão abaixo. Verifique os resultados com as próprias funções do tempo.

a) $\frac{1}{(s + \alpha)^2}$

b) $\frac{1}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$

RESPOSTAS NO DOMÍNIO DO TEMPO DE SISTEMAS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM ÀS ENTRADAS DO TIPO DEGRAU, RAMPA E IMPULSO

5.1 – INTRODUÇÃO

No Capítulo 4 a Transformada de Laplace foi discutida objetivando a sua aplicação ao estudo da dinâmica de sistemas. Vimos que, para os sistemas lineares, os procedimentos de resolução através de Laplace são matematicamente mais rigorosos, sendo, portanto, a metodologia recomendada. Contudo, neste capítulo não utilizaremos a Transformada de Laplace, mas sim o Operador D . Esta escolha se dá por razões didáticas.

Conforme observado no Capítulo 4, a Transformada de Laplace resolve a equação diferencial de uma só vez, englobando simultaneamente as condições iniciais, a solução da homogênea e a solução particular. Esta forma de obtenção da solução não atende aos objetivos propostos neste capítulo. Conceitualmente é importante observar a solução da homogênea separadamente da solução particular.

Assim, fica bem evidente que, para sistemas de primeira e segunda ordens, a solução da homogênea é a *resposta transitória*,¹ uma característica dos sistemas que independe do tipo de entrada. Já a solução da particular é a *resposta permanente*, intimamente ligada e dependente do tipo de entrada.

5.2 – SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM

5.2.1 – INTRODUÇÃO

No Capítulo 3 vimos que a função de transferência padrão de um sistema de primeira ordem tem a forma:

$$\boxed{\frac{q_o(D)}{q_i} = \frac{K}{\tau D + 1}} \quad (5.1)$$

1. É sempre transitória para qualquer sistema linear estável.

em que:

$q_o \triangleq$ saída do sistema;

$q_i \triangleq$ entrada;

$K \triangleq$ ganho (tem unidade: [(unidade de q_o)/(unidade de q_i)]);

$\tau \triangleq$ constante de tempo (unidade de tempo);

$D \triangleq \frac{d}{dt} \triangleq$ operador diferenciador (unidade: 1/tempo).

Da função de transferência (5.1) podemos obter a equação diferencial:

$$\tau D q_o + q_o = K q_i \quad (5.2)$$

ou

$$\tau \frac{dq_o}{dt} + q_o = K q_i \quad (5.3)$$

Da teoria de equações diferenciais² sabemos que a solução é:

$$q_o = q_{oh} + q_{op} \quad (5.4)$$

em que:

$q_{oh} \triangleq$ solução da equação diferencial homogênea;

$q_{op} \triangleq$ solução particular, considerando a entrada q_i .

5.2.2 – SOLUÇÃO DA HOMOGÊNEA

A equação diferencial homogênea é:

$$(\tau D + 1) q_o = 0 \quad (5.5)$$

que tem a equação característica:

$$\tau D + 1 = 0 \quad (5.6)$$

A raiz desta equação é:

$$r = -\frac{1}{\tau} \quad (5.7)$$

Logo:

$$\boxed{q_{oh} = C e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}} \quad (5.8)$$

2. Consulte a seção A.4 do Apêndice A.

em que:

$C \triangleq$ constante.

Conforme indica a equação 5.5, a solução da homogênea não depende do tipo de entrada, portanto, a equação 5.8 é usada para todas as entradas.

A Figura 5.1 ilustra graficamente a solução dada pela equação 5.8.

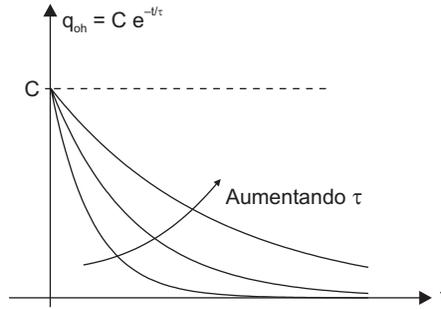


Figura 5.1 Gráfico da função $q_{oh} = C e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Conforme notamos na Figura 5.1, quanto maior o valor de τ , mais lentamente os valores “caem” exponencialmente para zero.

5.2.3 – RESPOSTA À FUNÇÃO DEGRAU

Para o sistema em repouso (equilíbrio, condições iniciais iguais a zero) fazemos a entrada ser uma função degrau, Figura 5.2, cuja equação é:

$$q_i = q_{is} u(t) \quad (5.9)$$

em que:

$q_{is} \triangleq$ constante, tamanho do degrau;

$u(t) \triangleq$ função degrau unitário.

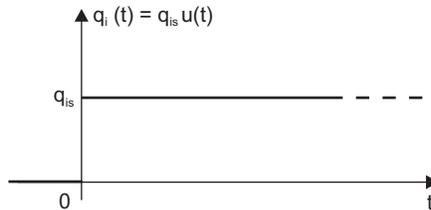


Figura 5.2 Função degrau $q_i = q_{is} u(t)$.

Substituindo (5.9) em (5.3) obtemos, para $t > 0$:

$$\tau \frac{dq_o}{dt} + q_o = Kq_{is} \quad (5.10)$$

Da teoria de equações diferenciais sabemos que q_{op} é uma constante, isto é:

$$q_{op} = a \quad (5.11)$$

em que a é uma constante.

Substituindo (5.11) em (5.10), vem:

$$a = Kq_{is} \quad (5.12)$$

Logo

$$\boxed{q_{op} = Kq_{is}} \quad (5.13)$$

Agora, combinando (5.4), (5.8) e (5.13) obtemos:

$$q_o = Ce^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} + Kq_{is} \quad (5.14)$$

Sabendo que para $t = 0$ o sistema está em repouso, podemos calcular o valor de $q_o(0^+)$ para ser usado na equação 5.14. Isto é importante para observarmos o valor de $q_o(t)$ logo após a ocorrência do degrau. Da equação 5.10 vem:

$$\tau dq_o + q_o dt = Kq_{is} dt \quad (5.15)$$

Integrando de 0 a 0^+ :

$$\int_0^{0^+} \tau dq_o + \int_0^{0^+} q_o dt = \int_0^{0^+} Kq_{is} dt \quad (5.16)$$

A primeira integral da (5.16) resulta:

$$\int_0^{0^+} \tau dq_o = \tau [q_o(0^+) - q_o(0)] \quad (5.17)$$

A última integral da (5.16) resulta:

$$\int_0^{0^+} Kq_{is} dt = Kq_{is} [t]_0^{0^+} = 0 \quad (5.18)$$

A segunda integral da (5.16), $\int_0^{0^+} q_o dt$, é igual a **zero** independentemente do comportamento de $q_o(t)$, a menos que tenha valor infinito neste intervalo como no caso do impulso. Podemos mostrar que $q_o(t)$ não é um impulso. Se fosse, substituindo $q_o(t)$ por $\delta(t)$ na equação 5.10 e integrando de 0 a 0^+ , o resultado das integrais dos termos do lado esquerdo seria igual à **unidade**, isto é:

$$\tau \int_0^{0^+} \delta'(t) dt + \int_0^{0^+} \delta(t) dt = 1 \quad (5.19)$$

O lado esquerdo resulta igual a *um* e o lado direito igual a *zero*, portanto, não ocorre um impulso em $q_o(t)$ de 0 a 0^+ . Logo, a segunda integral da (5.16) é realmente *zero*. Assim, usando este resultado e combinando (5.16), (5.17) e (5.18) obtemos:

$$\tau [q_o(0^+) - q_o(0)] = 0 \quad (5.20)$$

Sendo $q_o(0) = 0$, logo:

$$q_o(0^+) = 0 \quad (5.21)$$

Agora, fazendo $t = 0^+$ na equação 5.14 e usando (5.21) vem:

$$0 = C + Kq_{is} \quad (5.22)$$

ou

$$C = -Kq_{is} \quad (5.23)$$

Substituindo (5.23) em (5.14) obtemos:

$$\boxed{q_o = Kq_{is} \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \right]} \quad (5.24)$$

que é a resposta do sistema de primeira ordem à entrada degrau, quando as condições iniciais são iguais a zero.

A Figura 5.3 mostra o gráfico normalizado desta função e a Figura 5.4, o gráfico não normalizado.

Conforme ilustram as Figuras 5.3 e 5.4, quanto maior for o valor de τ , mais lentamente a resposta tende ao valor Kq_{is} .

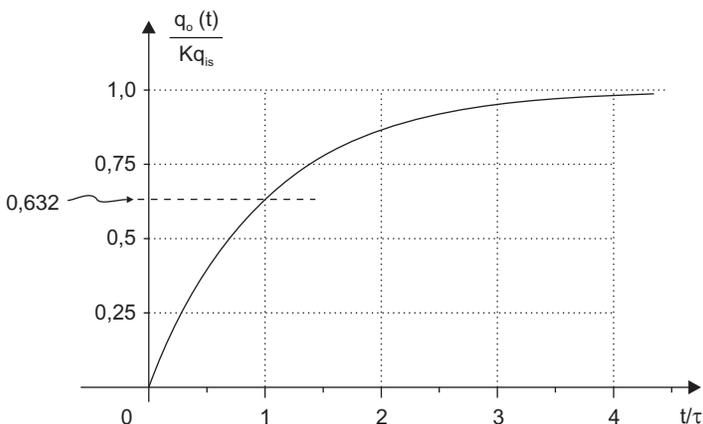


Figura 5.3 Gráfico normalizado da resposta do sistema de primeira ordem à entrada degrau.

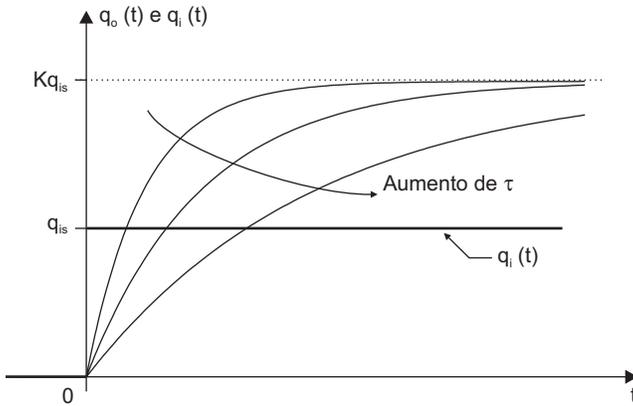


Figura 5.4 Gráfico da resposta do sistema de primeira ordem à entrada degrau, $q_{is}u(t)$, indicando a influência de τ .

5.2.4 – RESPOSTA À FUNÇÃO RAMPA

Neste caso, com o sistema em repouso, fazemos a entrada ser uma rampa, Figura 5.5, cuja equação é:

$$q_i = \dot{q}_i t \quad (5.25)$$

em que:

$\dot{q}_i \triangleq$ coeficiente angular da rampa (constante).

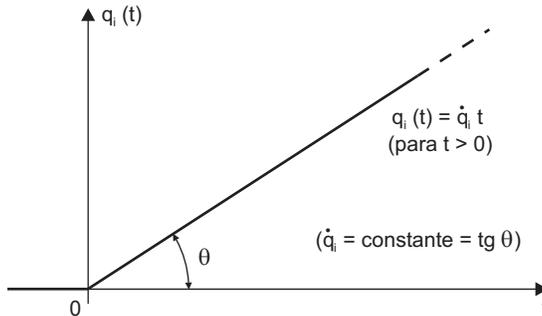


Figura 5.5 Gráfico da função rampa $q_i = \dot{q}_i t$, para $t > 0$.

Para a determinação da particular, substituímos (5.25) em (5.3). Então, para $t \geq 0$:

$$\tau \frac{dq_o}{dt} + q_o = K\dot{q}_i t \quad (5.26)$$

Da teoria de equações diferenciais sabemos que a solução particular é um polinômio de grau igual a *um*.

$$q_{op} = A_1 t + B_1 \quad (5.27)$$

Substituindo (5.27) em (5.26) vem:

$$\tau A_1 + A_1 t + B_1 = K \dot{q}_i t \quad (5.28)$$

Da identidade entre os coeficientes dos polinômios temos:

$$\begin{cases} A_1 = K \dot{q}_i \\ B_1 = -K \tau \dot{q}_i \end{cases} \quad (5.29)$$

Portanto:

$$\boxed{q_{op} = \dot{q}_i K (t - \tau)} \quad (5.30)$$

Agora, combinando (5.4), (5.8) e (5.30) obtemos:

$$q_o = C e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} + \dot{q}_i K (t - \tau) \quad (5.31)$$

Como $q_o(0) = 0$, então:

$$0 = C - \dot{q}_i K \tau$$

ou

$$C = K \dot{q}_i \tau \quad (5.32)$$

Logo, a equação 5.31 fica:

$$\boxed{q_o = K \dot{q}_i \tau \left[e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} + \frac{t}{\tau} - 1 \right]} \quad (5.33)$$

que é a resposta do sistema de primeira ordem à entrada rampa, tendo como condição inicial o repouso.

Aprofundando o estudo da (5.33) podemos determinar a assíntota de $q_o(t)$, quando t tende a infinito ($t \rightarrow \infty$). Para $t \rightarrow \infty$, a função $e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \rightarrow 0$, portanto:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Reta assíntota} \\ \text{de } q_o(t) \end{array} \right) = K \dot{q}_i (t - \tau) \quad (5.34)$$

que é a solução da particular.

A Figura 5.6 ilustra as funções q_i , q_o (equação 5.33) e a reta assíntota (equação 5.34).

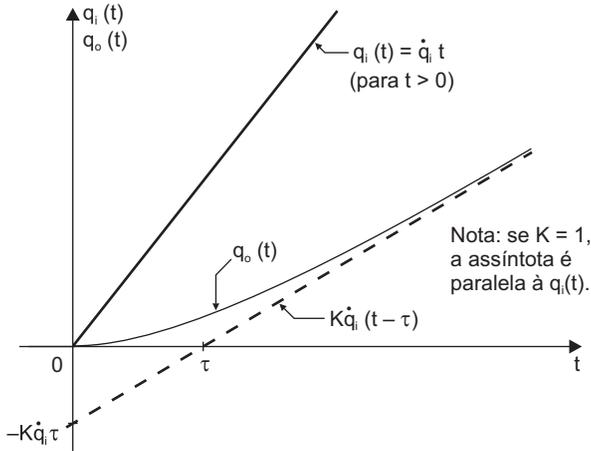


Figura 5.6 Gráfico da resposta do sistema de primeira ordem à entrada rampa, com indicações na assíntota.

5.2.5 – RESPOSTA À FUNÇÃO IMPULSO

Para o sistema em repouso, fazemos a entrada ser uma função impulso, Figura 5.7, cuja equação é:

$$q_i = A_i \delta(t) \quad (5.35)$$

em que:

$\delta(t) \triangleq$ função impulso unitário (área unitária);

$A_i \triangleq$ área do impulso entrada (constante).

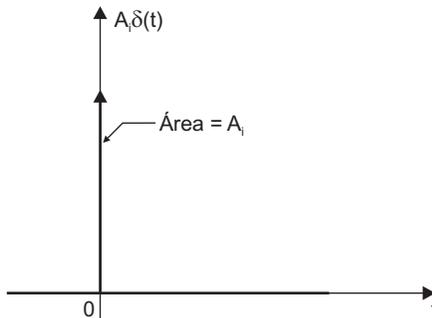


Figura 5.7 Representação da função $q_i(t) = A_i \delta(t)$, impulso de área A_i .

Combinando (5.3) e (5.35) obtemos a equação diferencial:

$$\tau \dot{q}_o + q_o = K A_i \delta(t) \quad (5.36)$$

Devemos observar que, para o sistema de primeira ordem, a entrada é $q_i(t) = A_i \delta(t)$, o que significa que o impulso tem área A_i . Contudo, na equação do modelo a entrada é multiplicada por K , portanto, na equação 5.36 o impulso tem área KA_i .

Da teoria da Transformada de Laplace (vide seção 4.7) podemos mostrar que:

Equação Diferencial
 $a_n D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + \dots + a_o = \bar{A} \delta(t)$
 com
 Condições Iniciais: C.I.'s = zero
 Em que $\bar{A} \triangleq$ área do impulso e
 $a_n, a_{n-1}, \dots \triangleq$ coeficientes da equação diferencial

\equiv

Equação Diferencial
 $a_n D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + \dots + a_o = 0$
 com C.I.'s:
 $D^{n-1} x \Big|_{t=0^+} = \frac{\bar{A}}{a_n}$ e
 demais C.I.'s = zero

Logo, resolver um sistema com entrada impulso equivale a resolver a homogênea com condições iniciais iguais a **zero** (C.I.'s = zero), exceto a C.I.:

$$D^{n-1} x \Big|_{t=0^+} = \frac{\bar{A}}{a_n} \quad (5.37)$$

Aplicando (5.37) para o caso do sistema de primeira ordem, equação 5.36, a condição inicial fica:

$$q_o(0^+) = \frac{KA_i}{\tau} \quad (5.38)$$

Uma interpretação que podemos fazer seria entender o impulso como um fenômeno que instantaneamente fornece ao sistema uma condição inicial. Em outras palavras, em um intervalo de tempo de duração infinitesimal, o impulso fornece ao sistema energia capaz de mudar o valor de uma variável “instantaneamente”. De fato, pelo método tradicional de resolução de equação diferencial, a equação 5.36 deve ser reescrita das seguintes formas:

$$\tau q_o + q_o = K A_i \delta(t), \text{ para } 0^- < t < 0^+ \text{ e C.I.'s} = 0 \quad (5.39)$$

$$\tau q_o + q_o = 0, \text{ para } t > 0^+ \text{ e C.I.'s deixadas pelo impulso} \quad (5.40)$$

Assim, a resposta da função impulso pode ser obtida resolvendo a equação homogênea 5.40 com a condição inicial dada pela (5.38).

Logo, das equações 5.5 e 5.8 temos:

$$q_o = C e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \quad (5.41)$$

que aplicando a C.I. resulta:

$$\frac{KA_i}{\tau} = C \quad (5.42)$$

Portanto:

$$\boxed{q_o = \frac{KA_i}{\tau} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}} \quad (5.43)$$

que é a resposta do sistema de primeira ordem à entrada impulso, tendo como condição inicial o sistema em repouso.

A Figura 5.8 ilustra a resposta do sistema de primeira ordem quando a entrada é um impulso de área A_i .

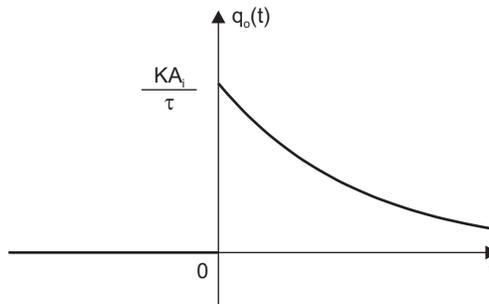


Figura 5.8 Gráfico da resposta do sistema de primeira ordem à entrada impulso de área A_i , isto é, $q_i(t) = A_i \delta(t)$.

5.3 – SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

5.3.1 – INTRODUÇÃO

A função de transferência padrão de um sistema de segunda ordem é:

$$\boxed{\frac{q_o(D)}{q_i} = \frac{K}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} D + 1}} \quad (5.44)$$

em que:

$q_o(t) \triangleq$ saída do sistema;

$q_i(t) \triangleq$ entrada do sistema;

$K \triangleq$ ganho da função de transferência (tem unidade: [(unidade de q_o / unidade de q_i)]);

$\omega_n \triangleq$ frequência natural não-amortecida (unidade: *rad/seg*);

$\zeta \triangleq$ fator de amortecimento (não tem unidade).

Da função de transferência podemos obter a equação diferencial:

$$\frac{1}{\omega_n^2} D^2 q_o + \frac{2\zeta}{\omega_n} D q_o + q_o = K q_i \quad (5.45)$$

ou

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dq_o}{dt} + q_o = K q_i \quad (5.46)$$

cuja solução é:

$$q_o = q_{oh} + q_{op} \quad (5.47)$$

5.3.2 – SOLUÇÃO DA HOMOGÊNEA

A equação diferencial homogênea é:

$$\left(\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} D + I \right) q_o = 0 \quad (5.48)$$

que tem a equação característica:

$$\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} D + I = 0 \quad (5.49)$$

cujas raízes são:

$$r_1, r_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (5.50)$$

Logo, dependendo do valor de ζ , as raízes podem ser:

- (i) Se $\zeta = 1 \rightarrow$ As raízes r_1 e r_2 são raízes reais repetidas e neste caso o sistema é denominado: *Sistema com Amortecimento Crítico*.
- (ii) Se $\zeta > 1 \rightarrow$ As raízes r_1 e r_2 são raízes reais distintas e estão chamamos de: *Sistema Superamortecido*.
- (iii) Se $\zeta < 1 \rightarrow$ As raízes r_1 e r_2 são raízes complexas conjugadas e neste caso temos: *Sistema Subamortecido*.

Desta forma, devemos determinar q_{ob} para os três casos:

a) Função q_{ob} para Sistema Criticamente Amortecido:

Como $\zeta = 1$, da equação 5.50 vemos que as raízes são:

$$r_1 = r_2 = -\omega_n \quad (5.51)$$

Logo, pela teoria de equações diferenciais, q_{ob} fica:

$$\boxed{q_{oh} = Ae^{-\omega_n t} + Bte^{-\omega_n t}} \quad (5.52)$$

em que A e B são constantes.

b) Função q_{ob} para Sistema Superamortecido:

Como $\zeta > 1$, da equação 5.50 determinamos as raízes:

$$\begin{cases} r_1 = (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n \\ r_2 = (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n \end{cases} \quad (5.53)$$

Logo, para este caso, q_{ob} resulta:

$$\boxed{q_{oh} = Ae^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + Be^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}} \quad (5.54)$$

em que A e B são constantes.

c) Função q_{ob} para Sistema Subamortecido:

Como $\zeta < 1$, então as raízes são:

$$r_1, r_2 = -\zeta\omega_n \pm i\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n \quad (5.55)$$

que, para este caso, q_{ob} resulta:

$$\boxed{q_{oh} = e^{-\zeta\omega_n t} \left[C_1 \text{sen}(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t) + C_2 \text{cos}(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t) \right]} \quad (5.56)$$

ou

$$q_{oh} = A e^{-\zeta \omega_n t} \operatorname{sen}(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \phi) \quad (5.57)$$

em que:

$$C_p, C_2, A \text{ e } \phi \text{ são constantes, sendo } A \triangleq \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \text{ e } \phi \triangleq \operatorname{arctg}\left(\frac{C_2}{C_1}\right); \text{ e}$$

$\omega_{nd} \triangleq \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \triangleq$ frequência natural amortecida.

5.3.3 – RESPOSTA À FUNÇÃO DEGRAU

Para o sistema em repouso, fazemos a entrada q_i ser:

$$q_i = q_{is} u(t) \quad (5.58)$$

(igual à 5.9)

Substituindo (5.58) em (5.46) obtemos, para $t > 0$:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dq_o}{dt} + q_o = K q_{is} \quad (5.59)$$

Da teoria de equação diferencial, q_{op} é uma constante, ou seja:

$$q_{op} = a \quad (5.60)$$

em que a é uma constante.

Substituindo (5.60) em (5.59), vem:

$$a = K q_{is} \quad (5.61)$$

portanto:

$$q_{op} = K q_{is} \quad (5.62)$$

Agora, para obtermos q_o , combinamos (5.47), (5.52), (5.54), (5.57) e (5.62), para as três condições de ζ .

a) Cálculo de q_o para Sistemas Criticamente Amortecidos ($\zeta = 1$):

Das equações 5.47, 5.52 e 5.62 temos:

$$q_o = A e^{-\omega_n t} + B t e^{-\omega_n t} + K q_{is} \quad (5.63)$$

que derivando vem:

$$\dot{q}_o = -A \omega_n e^{-\omega_n t} + B e^{-\omega_n t} - B t \omega_n e^{-\omega_n t} \quad (5.64)$$

Agora, aplicando procedimento semelhante ao que foi usado no sistema de primeira ordem no desenvolvimento das equações 5.15 a 5.21, obtemos que $q_o(0^+) = q_o(0)$ e $\dot{q}_o(0^+) = \dot{q}_o(0)$. Esta investigação se faz necessária para confirmar que a descontinuidade do degrau não provoca descontinuidade em q_o .

Assim, com as condições iniciais: $q_o(0^+) = 0$ e $\dot{q}_o(0^+) = 0$ em (5.63) e (5.64) obtemos:

$$\begin{cases} 0 = A + Kq_{is} \\ 0 = -A\omega_n + B \end{cases} \quad (5.65)$$

que resulta

$$\begin{cases} A = -Kq_{is} \\ B = -Kq_{is}\omega_n \end{cases} \quad (5.66)$$

Substituindo (5.66) em (5.63), vem:

$$q_o = Kq_{is} \left[1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t} \right] \quad (5.67)$$

que é a resposta do sistema de segunda ordem criticamente amortecido à entrada degrau, tendo como condição inicial o repouso. O gráfico desta função está ilustrado na Figura 5.10.

b) Cálculo de q_o para Sistemas Superamortecidos ($\zeta > 1$):

Das equações 5.47, 5.54 e 5.62 obtemos:

$$q_o = Ae^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + Be^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + Kq_{is} \quad (5.68)$$

que derivando vem:

$$\dot{q}_o = A(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + B(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (5.69)$$

Substituindo as condições iniciais $q_o(0^+) = 0$ e $\dot{q}_o(0^+) = 0$ em (5.68) e (5.69) resulta:

$$0 = A + B + Kq_{is} \quad (5.70)$$

$$0 = A(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n + B(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \quad (5.71)$$

Da (5.70) vem:

$$B = -(A + Kq_{is}) \quad (5.72)$$

que substituindo na (5.71) resulta:

$$0 = -A\zeta + A\sqrt{\zeta^2 - 1} + A\zeta + Kq_{is}\zeta + A\sqrt{\zeta^2 - 1} + Kq_{is}\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (5.73)$$

Portanto:

$$A = -\frac{Kq_{is}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (5.74)$$

Das equações 5.74 e 5.72 obtemos B , isto é:

$$B = +\frac{Kq_{is}\zeta + Kq_{is}\sqrt{\zeta^2 - 1} - Kq_{is}2\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (5.75)$$

ou

$$B = +\frac{Kq_{is}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (5.76)$$

Substituindo (5.74) e (5.76) em (5.68) resulta:

$$q_o = Kq_{is} \left[1 - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \right] \quad (5.77)$$

que é a resposta do sistema de segunda ordem superamortecido à entrada degrau, tendo como condições iniciais o repouso. O gráfico desta função está ilustrado na Figura 5.10.

c) Cálculo de q_o para Sistemas Subamortecidos ($\zeta < 1$):

Das equações 5.47, 5.57 e 5.62 vem:

$$q_o = Ae^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \phi) + Kq_{is} \quad (5.78)$$

que derivando obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{q}_o = & -A\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \phi) + \\ & + Ae^{-\zeta\omega_n t} \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \phi) \end{aligned} \quad (5.79)$$

Substituindo as condições iniciais $\mathbf{q}_o(\mathbf{0}^+) = \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{q}}_o(\mathbf{0}^+) = \mathbf{0}$ em (5.78) e (5.79) resulta:

$$0 = A \operatorname{sen}\phi + Kq_{is} \quad (5.80)$$

$$0 = -A \zeta \omega_n \operatorname{sen}\phi + A\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n \cos\phi \quad (5.81)$$

Da equação (5.81) obtemos:

$$\frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi} = \operatorname{tg}\phi = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad (5.82)$$

Agora, vamos considerar o triângulo da Figura 5.9.

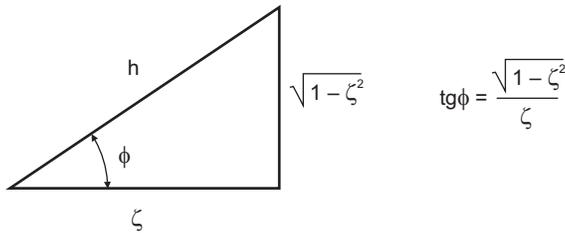


Figura 5.9 Triângulo de lados ζ e $\sqrt{1-\zeta^2}$.

A hipotenusa h do triângulo da Figura 5.9 pode ser calculada, isto é:

$$h = \sqrt{\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2 + \zeta^2} = \sqrt{1-\zeta^2 + \zeta^2} = 1 \quad (5.83)$$

Como ϕ está no primeiro quadrante, pois: $\sqrt{1-\zeta^2} > 0$ e $\zeta > 0$, então, do triângulo:

$$\operatorname{sen}\phi = \sqrt{1-\zeta^2} \quad (5.84)$$

Logo:

$$\phi = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right) \quad (5.85)$$

Substituindo (5.84) em (5.80), obtemos:

$$A = \frac{-Kq_{is}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5.86)$$

Agora, substituindo (5.85) e (5.86) em (5.78), resulta:

$$q_o = Kq_{is} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \operatorname{sen} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \operatorname{arcsen} \sqrt{1-\zeta^2} \right) \right] \quad (5.87)$$

que é a resposta do sistema de segunda ordem subamortecido à entrada degrau, tendo como condição inicial o repouso. O gráfico desta função está ilustrado na Figura 5.10.

d) Considerações gerais:

A Figura 5.10 ilustra os gráficos das funções dadas pelas equações 5.67, 5.77 e 5.87, com as escalas dos eixos normalizadas.

Notamos nesta figura que, se $\zeta = 0$, a resposta $q_o(t)$ vibra indefinidamente com a frequência ω_n e com valores variando de 0 a $2Kq_{is}$.

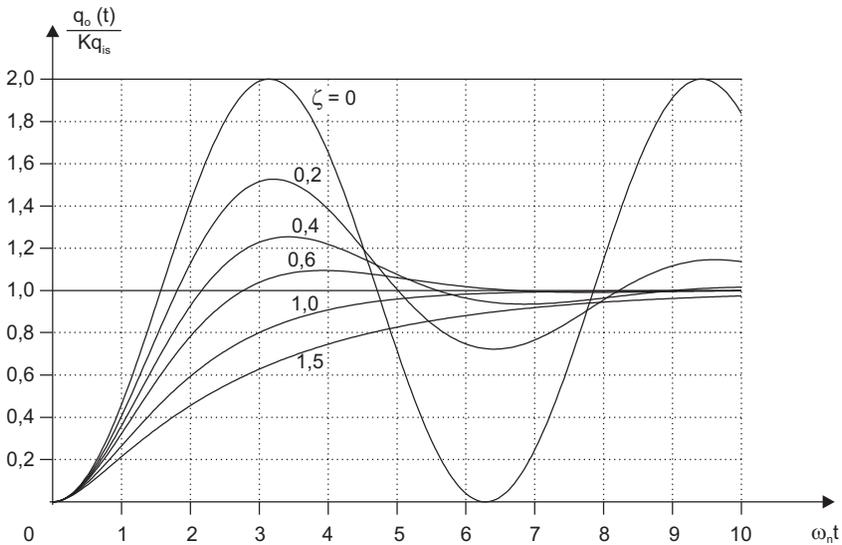


Figura 5.10 Resposta normalizada do sistema de segunda ordem à entrada degrau $q_{is} u(t)$.

Para $0 < \zeta < 1$, o primeiro pico é maior que os demais e é chamado de *sobre-sinal* (“overshoot”). O tamanho do sobre-sinal diminui com o aumento de ζ . Para valores de ζ dentro deste intervalo, a resposta $q_o(t)$ tem comportamento oscilatório amortecido que vai, no regime permanente, se estabilizar no valor igual a Kq_{is} .

Quando $\zeta \geq 1$, não temos a ocorrência de sobre-sinal. A resposta tende lentamente a Kq_{is} de maneira exponencial.

A Figura 5.11 ilustra também o comportamento destas funções, mas com as escalas dos eixos não normalizadas.

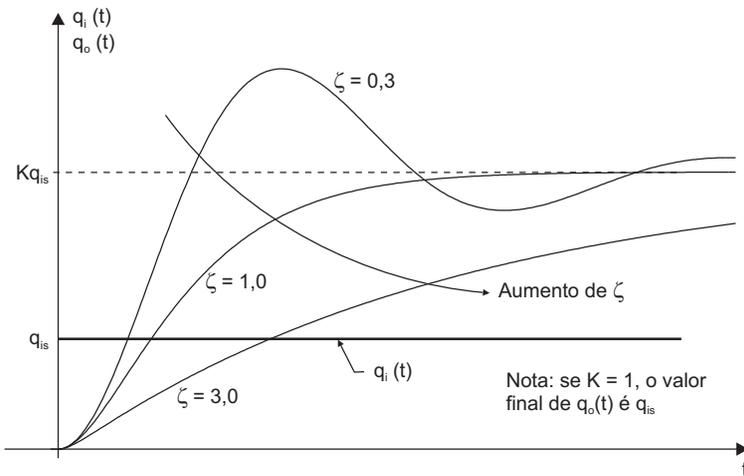


Figura 5.11 Gráfico da resposta do sistema de segunda ordem à entrada degrau $q_i u(t)$, indicando a influência de ζ .

5.3.4 – RESPOSTA À FUNÇÃO RAMPA

Para o sistema em repouso, fazemos a entrada q_i ser uma rampa de coeficiente angular \dot{q}_i (constante), Figura 5.5.

$$q_i = \dot{q}_i(t) \quad (5.88)$$

(igual à 5.25)

Substituindo (5.88) em (5.46) obtemos:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dq_o}{dt} + q_o = K\dot{q}_i t \quad (5.89)$$

Lembrando que q_{op} neste caso tem a forma:

$$q_{op} = A_i t + B_i \quad (5.90)$$

(igual à 5.23)

então, substituindo (5.90) em (5.89) vem:

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} A_i + A_i t + B_i = K\dot{q}_i t \quad (5.91)$$

Da identidade entre os coeficientes dos polinômios obtemos:

$$\begin{cases} A_i = K\dot{q}_i \\ B_i = -K\dot{q}_i \frac{2\zeta}{\omega_n} \end{cases} \quad (5.92)$$

Logo,

$$\boxed{q_{op} = K\dot{q}_i t - K\dot{q}_i \frac{2\zeta}{\omega_n}} \quad (5.93)$$

Agora, para obtermos $q_o(t)$ combinamos (5.47), (5.52), (5.54), (5.57) e (5.93), para as três condições de ζ .

a) Cálculo de q_o para Sistemas Criticamente Amortecidos ($\zeta = 1$):

Das equações 5.47, 5.52 e 5.93 obtemos:

$$q_o = Ae^{-\omega_n t} + Bte^{-\omega_n t} + K\dot{q}_i t - K\dot{q}_i \frac{2}{\omega_n} \quad (5.94)$$

que derivando:

$$\dot{q}_o = -A\omega_n e^{-\omega_n t} + Be^{-\omega_n t} - Bt\omega_n e^{-\omega_n t} + K\dot{q}_i \quad (5.95)$$

Sabendo que $q_o(0^+) = 0$ e $\dot{q}_o(0^+) = 0$, substituímos estas condições em (5.94) e (5.95) para determinarmos A e B . Então:

$$\begin{cases} 0 = A - K\dot{q}_i \frac{2}{\omega_n} \\ 0 = -A\omega_n + B + K\dot{q}_i \end{cases} \quad (5.96)$$

Logo

$$\begin{cases} A = \frac{2K\dot{q}_i}{\omega_n} \\ e \\ B = +K\dot{q}_i \end{cases} \quad (5.97)$$

Substituindo (5.97) em (5.94), vem:

$$q_o = \frac{2K\dot{q}_i}{\omega_n} e^{-\omega_n t} + K\dot{q}_i t e^{-\omega_n t} + K\dot{q}_i t - \frac{2K\dot{q}_i}{\omega_n} \quad (5.98)$$

Portanto

$$\boxed{q_o = K\dot{q}_i t - \frac{2K\dot{q}_i}{\omega_n} \left[1 - e^{-\omega_n t} \left(1 + \frac{\omega_n}{2} t \right) \right]} \quad (5.99)$$

que é a resposta do sistema de segunda ordem criticamente amortecido à entrada rampa, tendo como condições iniciais o repouso. O gráfico da Figura 5.12 ilustra o comportamento desta função.

b) Cálculo de q_o para Sistemas Superamortecidos ($\zeta > 1$):

Das equações 5.47, 5.54 e 5.93 temos:

$$q_o = Ae^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + Be^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + K\dot{q}_i t - K\dot{q}_i \frac{2\zeta}{\omega_n} \quad (5.100)$$

Agora, derivando (5.100) para obtermos $\dot{q}_o(t)$ e usando as condições iniciais $q_o(0^+) = 0$ e $\dot{q}_o(0^+) = 0$, determinamos A e B que resulta na função³ $q_o(t)$.

$$q_o = K\dot{q}_i t - \frac{2\zeta K\dot{q}_i}{\omega_n} \left[\begin{aligned} & 1 + \frac{2\zeta^2 - 1 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{4\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + \\ & + \frac{-2\zeta^2 + 1 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{4\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \end{aligned} \right] \quad (5.101)$$

que é a resposta do sistema de segunda ordem superamortecido à entrada rampa, tendo como condições iniciais o repouso. A Figura 5.12 ilustra o gráfico desta função.

c) Cálculo de q_o para Sistemas Subamortecidos ($\zeta < 1$):

Das equações 5.47, 5.57 e 5.93 obtemos:

$$q_o = Ae^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}\left(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t + \phi\right) + K\dot{q}_i t - K\dot{q}_i \frac{2\zeta}{\omega_n} \quad (5.102)$$

As constantes A e ϕ podem ser determinadas derivando (5.102) e substituindo as condições iniciais $q_o(0^+) = 0$ e $\dot{q}_o(0^+) = 0$, que resulta:

$$q_o = K\dot{q}_i t - \frac{2\zeta K\dot{q}_i}{\omega_n} \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{sen}\left(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t + \phi\right) \right] \quad (5.103)$$

em que: $\text{tg}\phi = \frac{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}{2\zeta^2 - 1}$ (ou $\phi = (\pi - \text{arcsen } 2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}) \text{rad}$)

que é a resposta do sistema de segunda ordem subamortecido à entrada rampa, tendo como condições iniciais o repouso. A Figura 5.12 ilustra a forma desta função.

3. Vide seção 4.11, exercício 11.

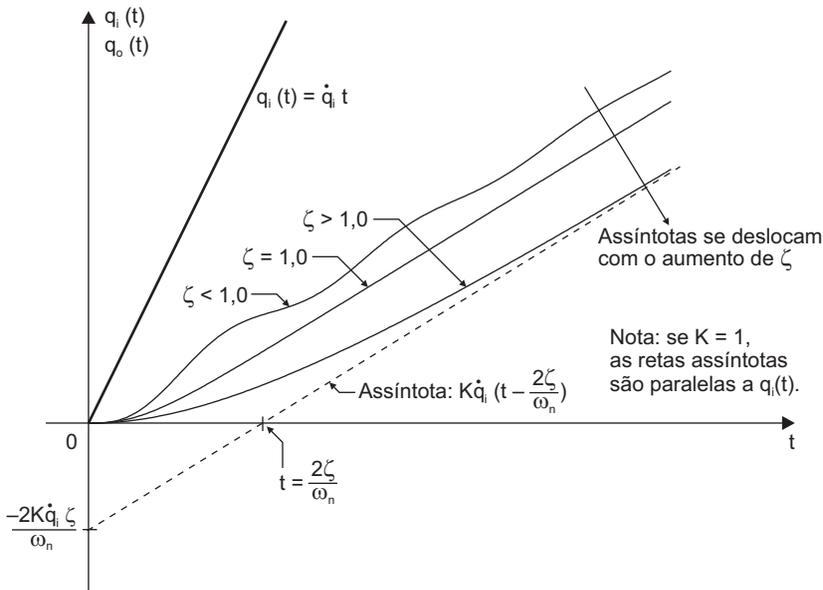


Figura 5.12 Resposta do sistema de segunda ordem à entrada rampa $q_i = \dot{q}_i t$.

Podemos observar através das equações 5.99, 5.101 e 5.103 que a função $q_o(t)$ tende a uma reta quando o tempo t tende para infinito, isto é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_o(t) = K \dot{q}_i t - \frac{2\zeta K \dot{q}_i}{\omega_n} \quad (5.104)$$

que é a reta assíntota ilustrada na Figura 5.12.

5.3.5 – RESPOSTA À FUNÇÃO IMPULSO

Para o sistema em repouso, fazemos a entrada ser a função impulso de área A_i (Figura 5.7) cuja equação é:

$$q_i = A_i \delta(t) \quad (5.105)$$

(igual à 5.35)

Substituindo (5.105) em (5.46) obtemos

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dq_o}{dt} + q_o = K A_i \delta(t) \quad (5.106)$$

Como a entrada foi multiplicada por K , a área do impulso tornou-se $K A_i$.

Lembrando que a resposta da função impulso pode ser obtida resolvendo a equação homogênea com condição inicial dada pela (5.37), escrevemos a equivalente da equação 5.106, isto é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dq_o}{dt} + q_o = 0 \\ \text{com: } \left. \frac{dq_o}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{KA_i}{\left(\frac{1}{\omega_n^2} \right)} \text{ e } q_o(0^+) = 0 \end{array} \right. \quad (5.107)$$

Assim, podemos determinar $q_o(t)$ usando as soluções da homogênea em função de ζ , dadas pelas equações 5.52, 5.54 e 5.57.

a) Cálculo de q_o para Sistemas Criticamente Amortecidos ($\zeta = 1$):

Neste caso, da equação 5.52 obtemos:

$$q_o = Ae^{-\omega_n t} + Bte^{-\omega_n t} \quad (5.108)$$

que derivando:

$$\dot{q}_o = -A\omega_n e^{-\omega_n t} + Be^{-\omega_n t} - Bt\omega_n e^{-\omega_n t} \quad (5.109)$$

Usando $q_o(0^+) = 0$ e $\dot{q}_o(0^+) = KA_i \omega_n^2$ para a determinação de A e B , a função $q_o(t)$ resulta:

$$\boxed{q_o = KA_i \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}} \quad (5.110)$$

que é a resposta do sistema de segunda ordem criticamente amortecido à entrada impulso, tendo como condições iniciais do sistema o repouso. O gráfico desta função está ilustrado na Figura 5.13.

b) Cálculo de q_o para Sistemas Superamortecidos ($\zeta > 1$):

Da equação 5.54 escrevemos:

$$q_o = Ae^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + Be^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (5.111)$$

que, derivando:

$$\dot{q}_o = A(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + B(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (5.112)$$

Substituindo $q_o(0^+) = 0$ e $\dot{q}_o(0^+) = KA_i \omega_n^2$ obtemos A e B e a solução resulta:

$$\boxed{q_o = \frac{KA_i \omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \right]} \quad (5.113)$$

que é a resposta do sistema de segunda ordem superamortecido à entrada impulso, tendo como condições iniciais do sistema o repouso. A Figura 5.13 ilustra o gráfico desta função.

c) Cálculo de q_o para Sistemas Subamortecidos ($\zeta < 1$):

Da equação 5.57 escrevemos:

$$q_o = Ae^{-\zeta \omega_n t} \text{sen}(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \phi) \quad (5.114)$$

que, derivando:

$$\dot{q}_o = -A\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \phi) + Ae^{-\zeta\omega_n t} \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n \text{cos}(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \phi) \quad (5.115)$$

Sabendo que $q_o(0^+) = 0$ e $\dot{q}_o(0^+) = KA_i \omega_n^2$ determinamos A e ϕ e a resposta q_o resulta:

$$q_o = \frac{KA_i \omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) \quad (5.116)$$

que é a resposta do sistema de segunda ordem subamortecido à entrada impulso, tendo como condições iniciais do sistema o repouso. A Figura 5.13 ilustra o gráfico desta função.

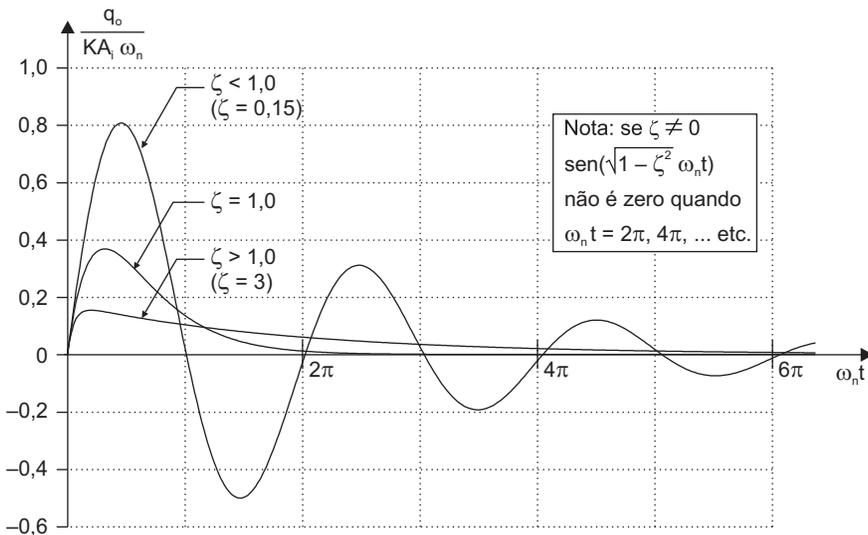


Figura 5.13 Resposta normalizada do sistema de segunda ordem à entrada impulso de área A_i .

5.4 – ESTUDO DA RESPOSTA EXPERIMENTAL À ENTRADA DEGRAU

5.4.1 – INTRODUÇÃO

Experimentos mostram que muitos sistemas reais, quando submetidos à entrada degrau, têm respostas semelhantes às respostas teóricas dos sistemas de primeira e segunda ordem.

Em se tratando de sistemas complexos já construídos, podemos ter interesse em obter um “modelo experimental”.

Respostas experimentais devido à entrada degrau contêm um conjunto de informações que ajudam a revelar as características e propriedades globais do sistema. Assim, através dos dados, determinamos (ou adaptamos com certas aproximações) uma função de transferência para o sistema. O primeiro passo para esta “modelagem experimental” é escolher se o modelo mais indicado poderá ser de primeira ou segunda ordem. Para esta definição devemos observar dois pontos:

- (i) se existe ou não sobre-sinal;
- (ii) o coeficiente angular da reta tangente no ponto $t = 0$.

Com relação à presença de sobre-sinal (*overshoot*), se este existir, o sistema não é de primeira ordem, podendo ser de segunda ou de ordem superior.

Quanto ao segundo ponto, deve ser observado somente se a resposta não apresentar sobre-sinal. Na ausência de sobre-sinal, o sistema pode ser tanto de primeira como de ordem superior. Se no ponto $t = 0$ o valor do coeficiente angular da reta tangente for diferente de zero (derivada $\neq 0$), o sistema é de primeira ordem, Figura 5.14.

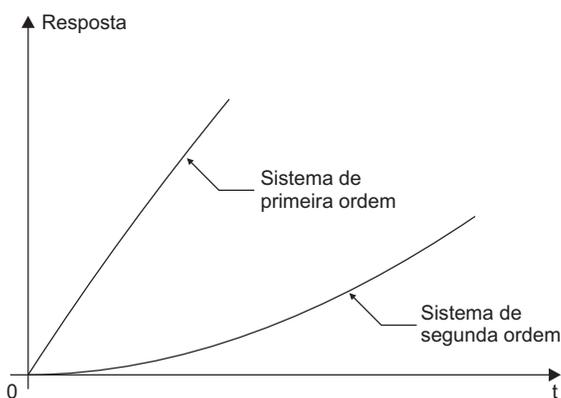


Figura 5.14 Coeficientes angulares das respostas, no ponto $t = 0$.

Uma vez definida a ordem do modelo matemático, passamos à determinação dos seus parâmetros: dois parâmetros para o sistema de primeira ordem (K e τ) e três para o sistema de segunda ordem (K , ω_n e ζ).

O ganho K é facilmente determinado observando os valores em regime antes e depois do degrau. Por exemplo, vamos considerar um sistema cuja entrada é voltagem e a saída é pressão. Vamos supor que a voltagem mudou de 6 para 8 volts (degrau = 2 volts) e a pressão mudou, em regime, de 100 para 500 psi (degrau = 400 psi), Figura 5.15. Neste caso obtemos $K = (400/2) = 200$ psi/volt.

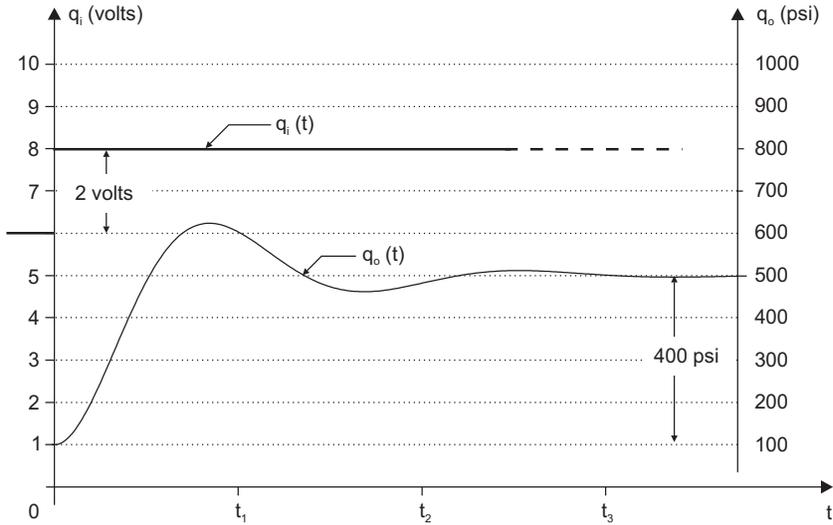


Figura 5.15 Resposta ao degrau de um sistema hipotético que tem voltagem como entrada e pressão como saída.

Para a determinação dos demais parâmetros precisamos observar o trecho transitente, e esta metodologia está descrita abaixo.

5.4.2 – SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM – DETERMINAÇÃO DE τ

Três métodos podem ser usados para levantar o valor de τ .

a) Ponto de 63,2%:

No instante em que a magnitude da saída tem o valor de 63,2% do degrau de regime, o tempo é igual à constante de tempo ($t = \tau$).

Da equação 5.24 vemos que o valor final de $q_o(t)$ é Kq_{is} . Portanto, quando $t = \tau$ temos:

$$\left(\frac{q_o}{Kq_{is}} \right)_{t=\tau} \times 100 = (1 - e^{-1}) \times 100 = (0,6321) \times 100 = 63,2\% \quad (5.117)$$

A Figura 5.16 ilustra graficamente esta consideração.

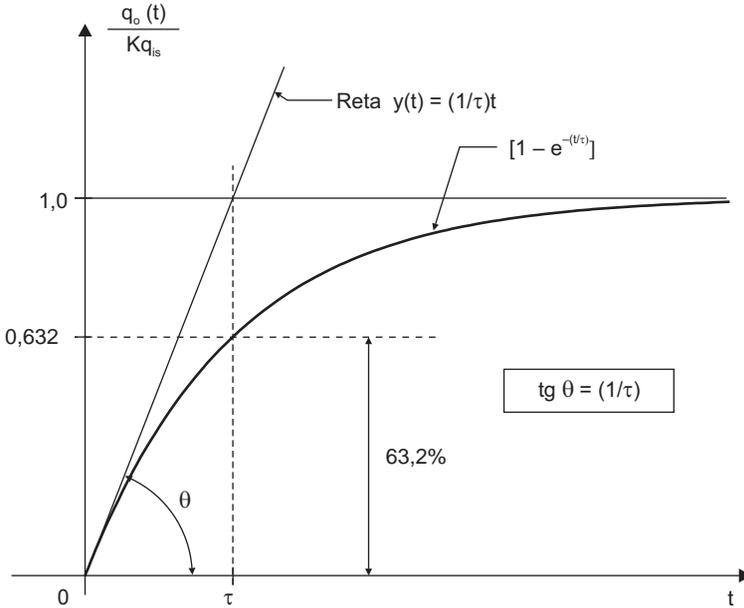


Figura 5.16 Características da resposta normalizada do sistema de primeira ordem.

b) Derivada no Ponto $t = 0$:

A resposta exponencial normalizada tem, no ponto $t = 0$, uma inclinação igual a $1/\tau$.

Da equação 5.24 podemos obter a função normalizada.

$$\frac{q_o(t)}{Kq_{is}} = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \quad (5.118)$$

Assim, derivando:

$$\frac{d\left(\frac{q_o}{Kq_{is}}\right)}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \quad (5.119)$$

que no ponto $t = 0$ resulta:

$$\left. \frac{d\left(\frac{q_o}{Kq_{is}}\right)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{I}{\tau} \quad (5.120)$$

Definindo a reta tangente no ponto $t = 0$ como sendo $y(t)$, a sua equação é:

$$y(t) = \left(\frac{I}{\tau}\right)t \quad (5.121)$$

Logo, quando $t = \tau$ obtemos $y(\tau) = I$. Isto significa que a saída atingiria o seu valor final em $t = \tau$, se a taxa de variação inicial fosse mantida. A Figura 5.16 mostra esta consideração.

c) Gráfico Usando Logaritmo:

Este método é o mais acurado tanto para verificar se o sistema é de fato de primeira ordem como para determinar o valor de τ .

Da equação 5.24 podemos escrever:

$$\left(1 - \frac{q_o(t)}{Kq_{is}}\right) = e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \quad (5.122)$$

Calculando o logaritmo na base e de ambos os lados e definindo uma variável Z , vem:

$$Z \triangleq \log_e \left(1 - \frac{q_o}{Kq_{is}}\right) = -\frac{I}{\tau}t \quad (5.123)$$

Assim, fazendo o gráfico de Z contra t devemos obter uma reta com coeficiente angular igual a $-I/\tau$. Por outro lado, se os pontos *não* estiverem alinhados, isso significa que o sistema de primeira ordem *não* pode representar, com boa aproximação, o sistema real.

A Figura 5.17 ilustra este procedimento.

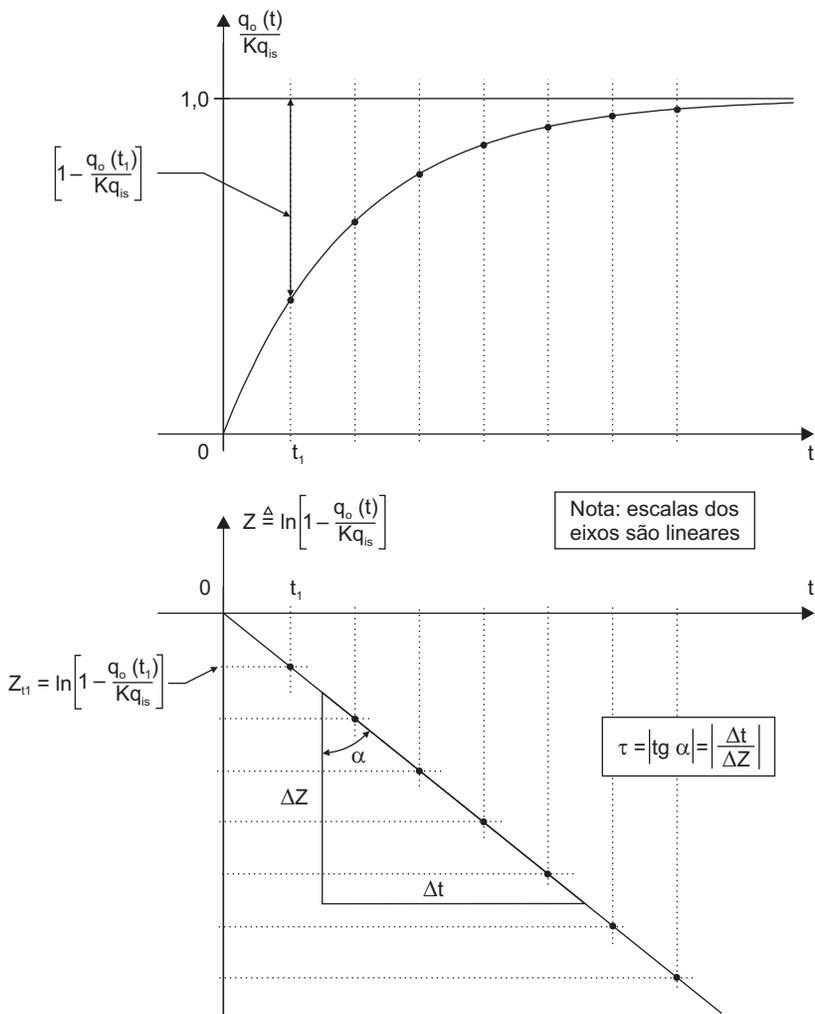


Figura 5.17 Gráfico para a determinação de τ através de logaritmo.

5.4.3 – SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM SUBAMORTECIDO – DETERMINAÇÃO DE ω_n E ζ

Neste caso temos a presença de sobre-sinal.

Na área de estudo “Sistema de Controle” é comum encontrarmos definições de parâmetros para a resposta do sistema de segunda ordem subamortecido, devido à entrada degrau, Figura 5.18.

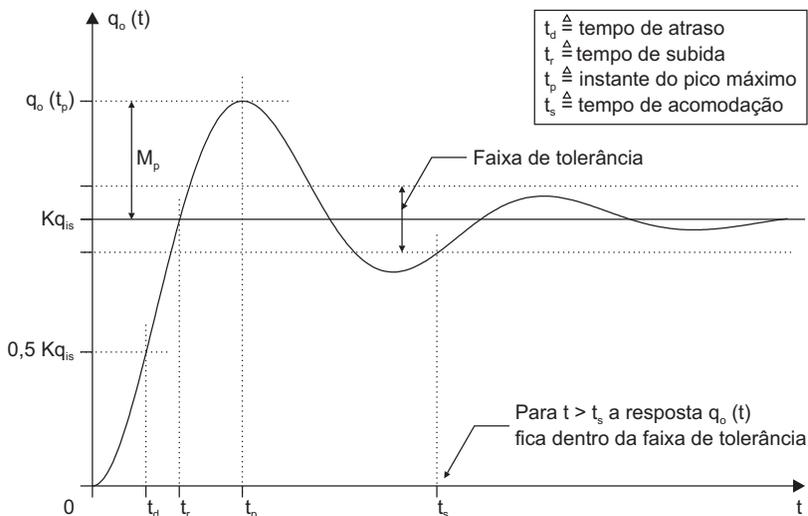


Figura 5.18 Especificação de parâmetros para a resposta do sistema de segunda ordem subamortecido à entrada degrau.

Na determinação de ω_n e ζ utilizamos dois destes parâmetros: M_p e t_p , sendo M_p dado em porcentagem, isto é:

$$M_p = \frac{[q_o(t_p) - Kq_{is}]}{Kq_{is}} \times 100 \quad (5.124)$$

Quanto a t_p , vamos determinar a expressão matemática do seu valor fazendo a derivada de $q_o(t)$ e igualando-a a *zero*, pois neste ponto a função tem um máximo. Assim, da equação 5.87 vem:

$$\left. \frac{dq_o}{dt} \right|_{t=t_p} = Kq_{is} \left[-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} (-\zeta\omega_n) e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi) - \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi) \right]_{t=t_p} = 0 \quad (5.125)$$

em que, na (5.82), vimos que $\phi = \text{arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$, ângulo no primeiro quadrante.

Agora, aplicando a igualdade trigonométrica dada no Apêndice A, equação A.11, a (5.125) fica:

$$Kq_{is} \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} \text{sen}(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_p) = 0 \quad (5.126)$$

Como $Kq_{is} \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p}$ não é zero, então:

$$\text{sen}\left(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t_p\right) = 0 \quad (5.127)$$

ou, para máximos e mínimos:

$$\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots \quad (5.128)$$

No caso do sobre-sinal estamos interessados no primeiro pico, então o ângulo é π , que resulta:

$$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \quad (5.129)$$

Para determinarmos M_p substituímos (5.129) em (5.124) e combinamos com (5.87).

$$M_p = 100 \left[1 - \frac{e^{-\left(\frac{\zeta\omega_n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}\left(\pi + \arcsen\sqrt{1-\zeta^2}\right) - 1 \right] \quad (5.130)$$

ou

$$M_p = 100e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (5.131)$$

O gráfico de M_p em função de ζ está na Figura 5.19.

Com base na Figura 5.19 e na equação 5.129 podemos determinar os parâmetros ω_n e ζ .

Da resposta experimental levantamos os valores de M_p e t_p . Do gráfico da Figura 5.19 determinamos ζ e da (5.129) calculamos ω_n , isto é:

$$\omega_n = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2} t_p} \quad (5.132)$$

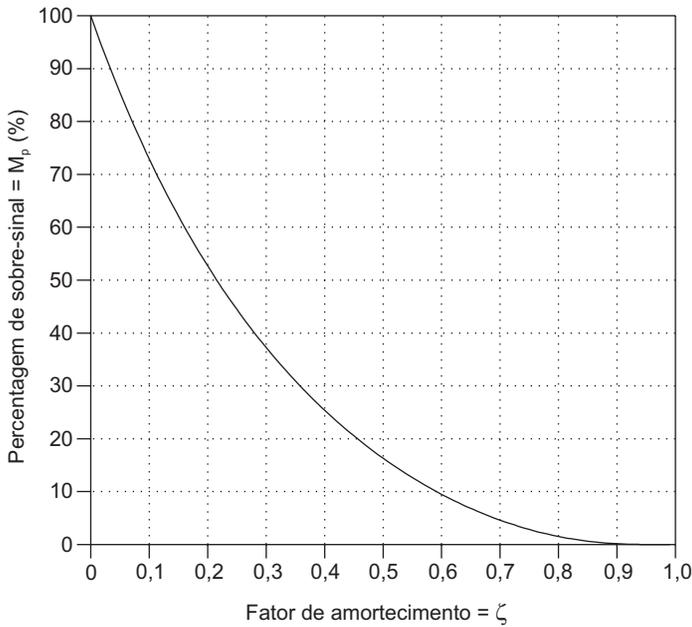


Figura 5.19 Gráfico de M_p (%) em função de ζ .

5.4.4 – SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM SUPERAMORTECIDO – DETERMINAÇÃO DE τ_1 E τ_2

Podemos escrever $q_o(t)$, resposta do sistema de segunda ordem superamortecido à entrada degrau, em termos de ω_n e ζ , equação 5.77, ou em termos de duas constante de tempo τ_1 e τ_2 . Assim, desenvolvendo:

$$q_o = Kq_{is} \left[1 - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(t/\tau_1)} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(t/\tau_2)} \right] \quad (5.133)$$

em que τ_1 e τ_2 já foram definidos no Capítulo 4, na manipulação das equações 4.276 e 4.277, que aqui repetimos:

$$\tau_1 \triangleq \frac{1}{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n}$$

$$\tau_2 \triangleq \frac{1}{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n}$$

Como $\zeta > 1$ e $(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) < (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})$, vemos que $\tau_1 > \tau_2$, ou $(1/\tau_1) < (1/\tau_2)$.

Através destas desigualdades constatamos que a exponencial $e^{-\left(\frac{t}{\tau_2}\right)}$ (referente a τ_2) tende a **zero** mais rapidamente que a exponencial $e^{-\left(\frac{t}{\tau_1}\right)}$ (referente a τ_1).

É também possível expressar os coeficientes das exponenciais em termos das constantes de tempo. Das definições de τ_1 e τ_2 podemos escrever:

$$\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} = \frac{1}{\tau_1 \omega_n} \quad (5.134)$$

$$\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} = \frac{1}{\tau_2 \omega_n} \quad (5.135)$$

$$2\sqrt{\zeta^2 - 1} = \frac{1}{\tau_2 \omega_n} - \frac{1}{\tau_1 \omega_n} = \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \right) \quad (5.136)$$

Substituindo (5.134), (5.135) e (5.136) na (5.133) resulta:

$$q_o = Kq_{is} \left[I - \frac{\frac{1}{\tau_2 \omega_n}}{\frac{1}{\omega_n} \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \right)} e^{-(t/\tau_1)} + \frac{\frac{1}{\tau_1 \omega_n}}{\frac{1}{\omega_n} \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \right)} e^{-(t/\tau_2)} \right] \quad (5.137)$$

ou

$$q_o = Kq_{is} \left[I - \left(\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \right) e^{-(t/\tau_1)} + \left(\frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \right) e^{-(t/\tau_2)} \right] \quad (5.138)$$

Uma análise considerando os valores dos coeficientes juntamente com as variações das exponenciais nos revela que, além da segunda exponencial ($e^{-(t/\tau_2)}$) tender a zero mais rapidamente, o seu coeficiente é menor que o coeficiente da primeira exponencial. Isto abrevia a sua influência nas variações de $q_o(t)$, ou seja, em um “curto” intervalo de tempo os valores de $(\tau_2/(\tau_1 - \tau_2))e^{-(t/\tau_2)}$ tornam-se desprezíveis.

Para exemplificar com números, vamos supor $\zeta = \sqrt{5} = 2,236$ e $\omega_n = 1 \text{ rad/seg}$. Como $\sqrt{\zeta^2 - 1} = \sqrt{5 - 1} = 2$, então: $(1/\tau_1) = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n = 0,236 \text{ seg}^{-1}$; $\tau_1 = 4,236 \text{ seg}$;

$(1/\tau_2) = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n = 4,236 \text{ seg}^{-1}$; e $\tau_2 = 0,236 \text{ seg}$, que substituindo na (5.77) ou na (5.138) resulta:

$$q_o = K q_{is} [1 - 1,059 e^{-0,236t} + 0,059 e^{-4,236t}] \quad (5.139)$$

Esta equação mostra que a segunda exponencial ($e^{-4,236t}$) é aproximadamente 18 vezes mais rápida que a primeira e seu coeficiente é também quase 18 vezes menor que o da primeira. Logo, após um “curto” intervalo de tempo, $q_o(t)$ passa a depender (sob o ponto de vista prático) somente da primeira exponencial.

Ampliando a discussão, podemos escrever a (5.139) juntando as exponenciais em uma função $g(t)$, isto é:

$$q_o = K q_{is} [1 - g(t)] \quad (5.140)$$

em que:

$$g(t) \triangleq 1,059 e^{-0,236t} - 0,059 e^{-4,236t}$$

A Figura 5.20 ilustra o comportamento das exponenciais e também da função $g(t)$.

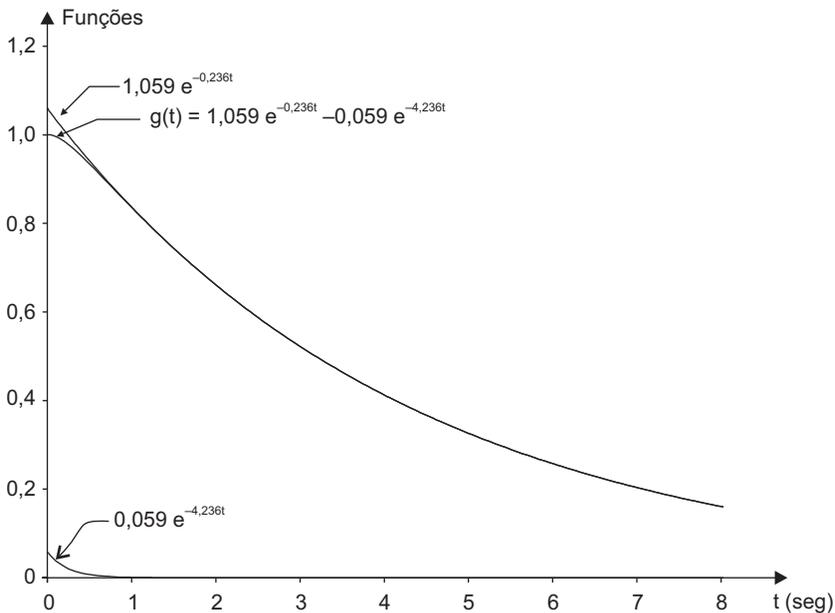


Figura 5.20 Comportamento das exponenciais e combinação delas.

Agora, trabalhando a equação 5.138 para “altos” valores de t , desprezando a segunda exponencial, temos:

$$q_o = Kq_{is} \left[1 - \left(\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \right) e^{-(t/\tau_1)} \right] \quad (5.141)$$

ou

$$(Kq_{is} - q_o) = \left[\left(\frac{Kq_{is} \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \right) e^{-(t/\tau_1)} \right] \quad (5.142)$$

Calculando o logaritmo natural de ambos os lados obtemos:

$$\ln[Kq_{is} - q_o] = \ln \left[\frac{Kq_{is} \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \right] - \left(\frac{1}{\tau_1} \right) t \quad (5.143)$$

Esta é a equação de uma reta genérica $y = m t + b$, em que:

$$y \triangleq \ln[Kq_{is} - q_o]$$

$$m \triangleq \left[-\frac{1}{\tau_1} \right]$$

$$b \triangleq \ln \left[\frac{Kq_{is} \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \right]$$

Portanto, de uma curva experimental de $q_o(t)$ podemos fazer o gráfico de $\ln[Kq_{is} - q_o]$ contra t , encontrar a reta $y = m t + b$ e, através dos valores de m e b , determinar os coeficientes.

Exemplificando, vamos supor que obtivemos experimentalmente a curva da Figura 5.21.

O primeiro passo é encontrar o valor final Kq_{is} , que, neste caso, temos $Kq_{is} = 10$. Continuando, fazemos o gráfico de $\ln[10 - q_o(t)]$ contra t , Figura 5.22.

Escolhendo um trecho considerado de “altos” valores de t , neste caso de 2,4 a 9,9 segundos, aplicamos o processo de regressão linear para obtermos uma reta que resultou:

$$y = -0,236t + 2,3599 \quad (5.144)$$

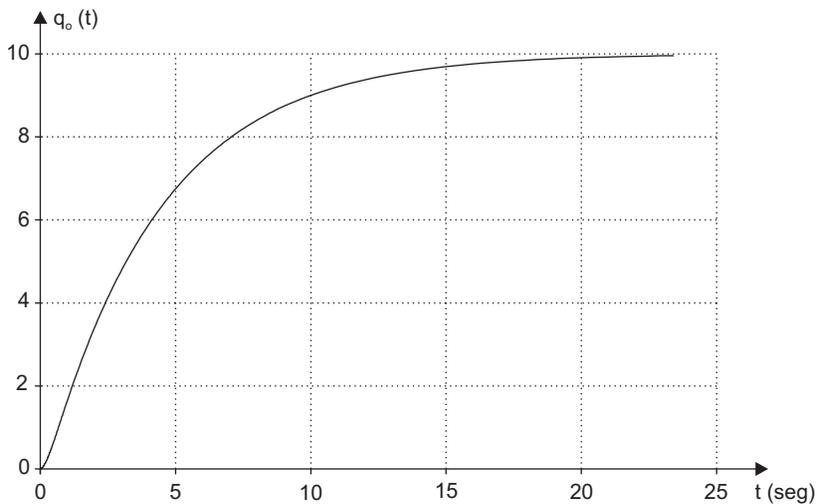


Figura 5.21 Curva supostamente obtida de um experimento.

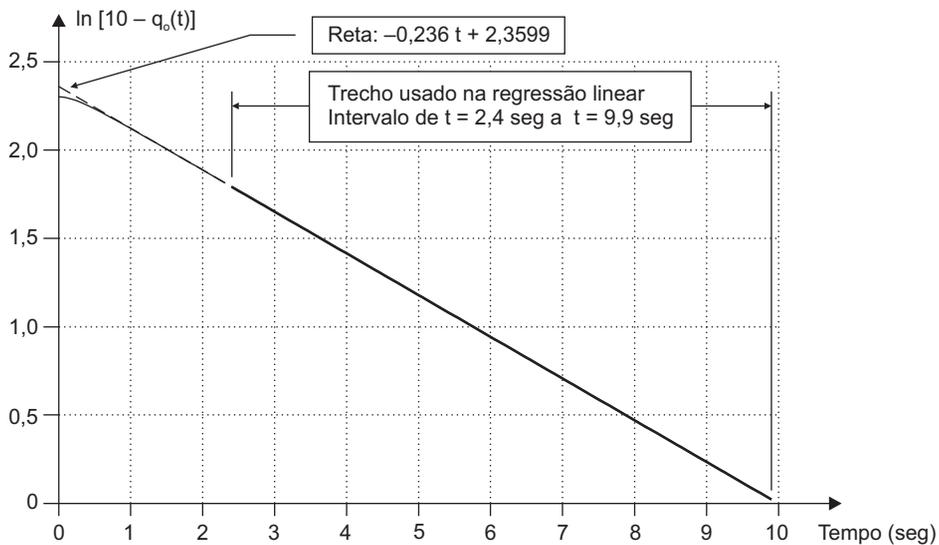


Figura 5.22 Gráfico de $\ln[10 - q_o(t)]$ contra t .

Combinando esta equação com a (5.143) obtemos:

$$\tau_1 = \frac{I}{0,236} = 4,237 \text{ seg} \quad (5.145)$$

$$b = \ln \left[\frac{Kq_{is}\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \right] = 2,3599 \quad (5.146)$$

ou

$$\frac{10\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} = e^{2,3599} = 10,590 \quad (5.147)$$

Logo

$$\tau_2 = \tau_1 \left[1 - \frac{10}{10,590} \right] \quad (5.148)$$

Do coeficiente angular da reta $y(t)$ já obtivemos $\tau_1 = 4,237 \text{ seg}$, então:

$$\tau_2 = 4,237 \times 0,056 = 0,236 \text{ seg} \quad (5.149)$$

Substituindo os valores de τ_1 e τ_2 para a obtenção dos coeficientes e expoentes:

$$\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} = \frac{4,237}{4,237 - 0,236} = 1,059 \quad (5.150)$$

$$\frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} = \frac{0,236}{4,237 - 0,236} = 0,059 \quad (5.151)$$

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{4,237} = 0,236 \text{ seg}^{-1} \quad (5.152)$$

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{0,236} = 4,237 \text{ seg}^{-1} \quad (5.153)$$

Logo, a função $q_o(t)$ obtida a partir da curva da Figura 5.21 é:

$$q_o(t) = 10 \left[1 - 1,059 e^{-0,236t} + 0,059 e^{-4,237t} \right] \quad (5.154)$$

que é praticamente idêntica à (5.139), que foi a função usada para gerar em computador os dados da curva da Figura 5.21, adotando $Kq_{is} = 10$.

No caso prático, como um sistema real ensaiado provavelmente não será um exato sistema de segunda ordem superamortecido, a função obtida corresponderá a

um modelo aproximado. De qualquer forma, devemos sempre efetuar a comparação entre a curva analítica e a curva experimental para auxiliar no julgamento de se o modelo é satisfatório ou não.

5.5 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

EX1 – Para o sistema da Figura E5.1, determine $q_o(t)$ sendo $q_i(t)$ uma rampa conforme especificada na figura.

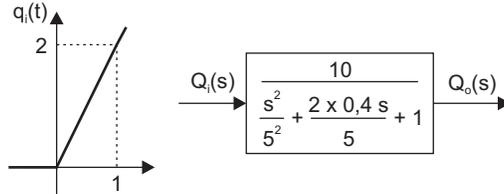


Figura E5.1

EX2 – Um sistema de 1ª ordem foi submetido a uma entrada do tipo degrau igual a $q_i = 1,8u(t)$. A resposta do sistema foi registrada e está ilustrada na Figura E5.2. Com base no gráfico desta resposta, determine os parâmetros do sistema (ganho e constante do tempo).

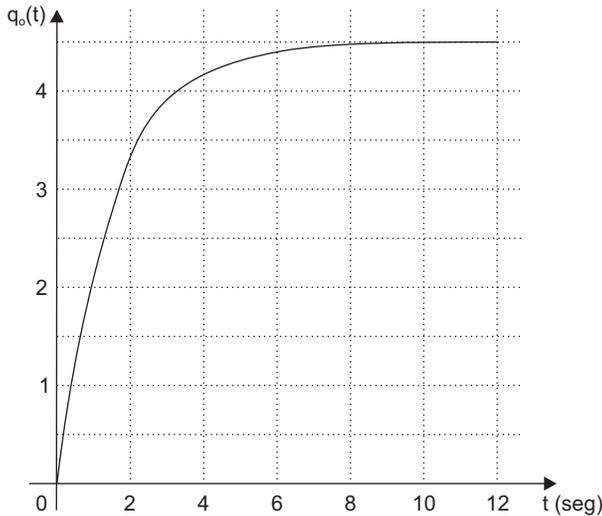


Figura E5.2

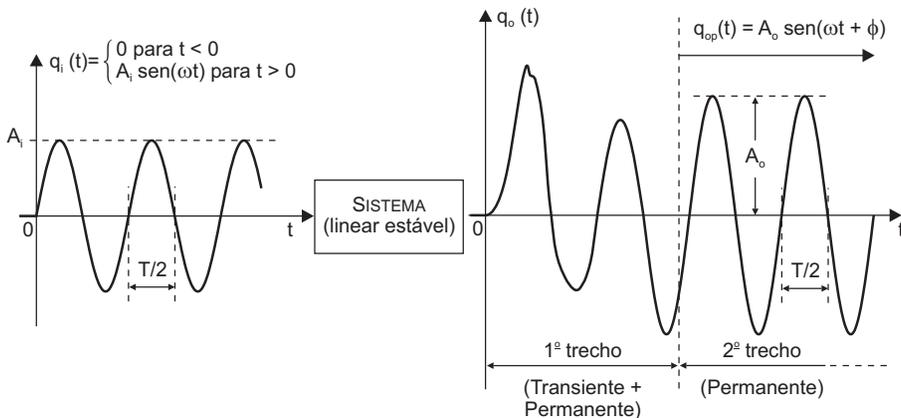
RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

6.1 – CONCEITO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Quando uma entrada qualquer $q_i(t)$ excita um sistema linear estável em repouso ou equilíbrio, a resposta do sistema tem 2 trechos:

- (i) 1º trecho = resposta completa (transitória + permanente);
- (ii) 2º trecho = resposta permanente.

Ainda para sistema¹ linear estável, se a entrada $q_i(t)$ for *senoidal*, a *resposta permanente* também será *senoidal* e com oscilação na mesma frequência da entrada. A Figura 6.1 ilustra qualitativamente estes trechos.



em que:

$q_i \triangleq$ entrada

$A_i \triangleq$ amplitude de entrada

$\omega \triangleq$ frequência da entrada

$T \triangleq$ período

$q_{op} \triangleq$ resposta permanente (tem frequência ω igual à de $q_i(t)$)

$A_o \triangleq$ amplitude de q_{op}

$\phi \triangleq$ ângulo de fase de q_{op} em relação à $q_i(t)$

Figura 6.1 Visualização dos trechos da resposta de um sistema quando a entrada é senoidal.

1. Observe na seção 6.3.2 discussão para sistemas com integradores.

Matematicamente, em termos de equações diferenciais, a resposta $q_o(t)$ é a soma das soluções da homogenia (transitória) e da particular (permanente). Como estamos considerando sistemas estáveis, após determinado tempo a solução da homogenia torna-se desprezível, restando apenas a resposta permanente, correspondente ao 2º trecho.

Em um instante de tempo dentro do 2º trecho podemos fazer a superposição da entrada $q_i(t)$ com a resposta permanente $q_{op}(t)$. Desta forma, colocando os gráficos de $q_i(t)$ e $q_{op}(t)$ juntos, Figura 6.2, determinamos a *Relação de Amplitudes* $\frac{A_o}{A_i}$ e o *Ângulo de Fase* ϕ .

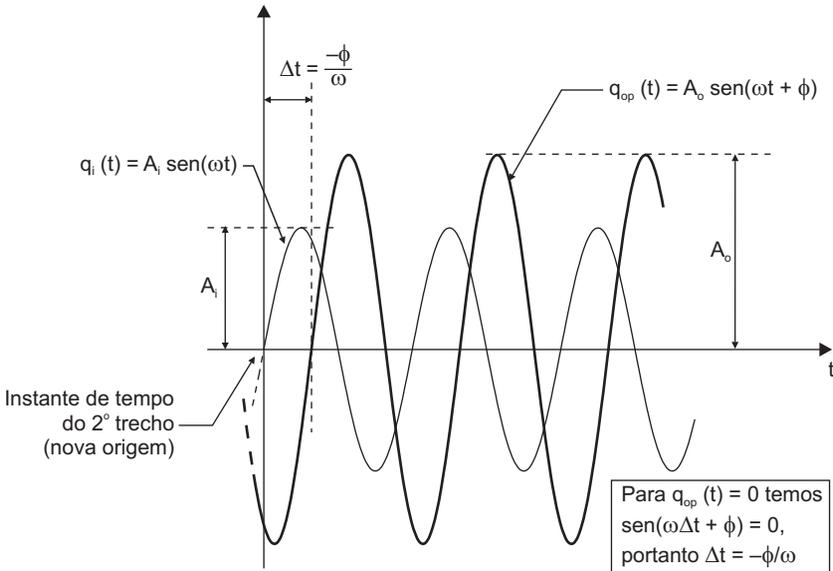


Figura 6.2 Superposição dos gráficos de $q_i(t)$ e $q_{op}(t)$.

Análises teóricas assim como experimentos mostram que os valores da relação de amplitudes $\frac{A_o}{A_i}$ e da fase ϕ dependem de ω , que é a frequência da entrada $q_i(t)$ e também da resposta permanente $q_{op}(t)$.

O estudo do comportamento da relação de amplitudes e da fase em função da frequência é chamado de *resposta em frequência*. Na forma gráfica, o conjunto dos gráficos de $\frac{A_o}{A_i}$ e ϕ em função de ω é denominado de *Gráfico da Resposta em Frequência* (R. F.), por exemplo, Figura 6.3.

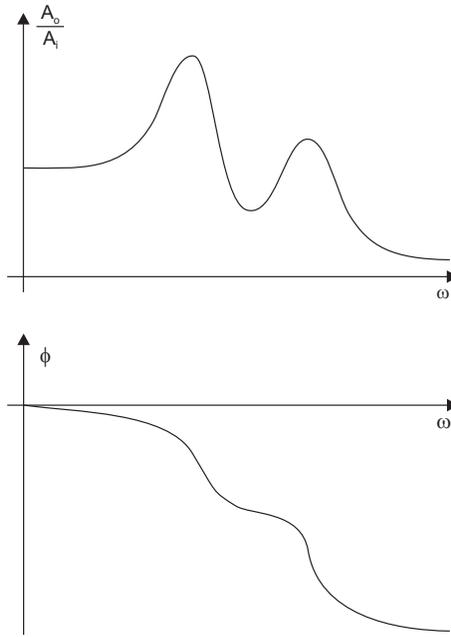


Figura 6.3 Exemplo de gráfico de resposta em frequência ($\frac{A_o}{A_i}$ e ϕ em função de ω).

Conforme podemos observar na Figura 6.3, *um* gráfico da resposta em frequência é na verdade um conjunto de dois gráficos, gráfico de $\frac{A_o}{A_i}$ e ϕ em função de ω .

Na elaboração dos gráficos, a unidade do eixo da frequência ω deve ser *rad/seg*, mas esporadicamente encontramos *Hz*. O eixo vertical da relação de amplitudes tem unidade igual à relação: (unidade da saída/unidade da entrada). Com respeito à “unidade” da fase, é neste ponto que entra o bom senso do engenheiro. O ângulo ϕ deve ser obrigatoriamente expresso em *rad*, mas no eixo da fase é sempre usado *graus*. Esta prática deve-se ao fato de as pessoas terem maior sensibilidade com ângulos em *graus* do que em *radianos*, mas nas equações não podemos usar graus porque ωt é expresso em *rad/seg*.

6.2 – FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA SENOIDAL

Seja a função de transferência do modelo de um sistema, equação 6.1.

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_o}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_o} \quad (6.1)$$

em que:

$s \triangleq$ variável da transformada de Laplace;
 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_0 \triangleq$ constantes;
 Q_i e $Q_o \triangleq$ respectivas transformadas de $q_i(t)$ e $q_o(t)$.

Se na equação 6.1 substituirmos s por $i\omega$, a função de transferência transformase em uma função complexa e é possível provar, usando conceitos de números complexos e de equações diferenciais, que:

- o módulo² desta função complexa é igual a: $\frac{A_o}{A_i}$;
- a fase desta função complexa é igual a: ϕ ;

em que $\frac{A_o}{A_i}$ e ϕ são, respectivamente, a relação de amplitudes e a fase da resposta em frequência do sistema cujo modelo é dado pela função de transferência.

Quando substituimos s por $i\omega$ obtemos uma expressão que chamamos de *função de transferência senoidal*, isto é:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(i\omega) = \frac{b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_0} \quad (6.2)$$

6.3 – EQUAÇÕES PARA A RELAÇÃO DE AMPLITUDES E A FASE DE SISTEMAS BÁSICOS

Através da substituição de s por $i\omega$ serão obtidas as equações da relação de amplitudes e da fase dos seguintes sistemas básicos:

- Função de Transferência do Ganho: K
- Função de Transferência do Integrador: $\frac{I}{s}$
- Função de Transferência do Sistema de 1ª Ordem: $\frac{I}{(\tau s + 1)}$
- Função de Transferência do Sistema de 2ª Ordem: $\frac{I}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}$
- Função de Transferência do Tempo Morto (*Dead Time*): $e^{-s\tau_{DT}}$

2. Vide equação A.1 do Apêndice A para o cálculo do módulo e da fase.

6.3.1 – RELAÇÃO DE AMPLITUDES E FASE PARA O GANHO K

A função de transferência de um ganho é:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = K \quad (6.3)$$

Substituindo s por $i\omega$, a função de transferência senoidal fica:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(i\omega) = K \quad (6.4)$$

Sendo K um número real, então:

$$\frac{A_o}{A_i} = \left| \frac{Q_o}{Q_i}(i\omega) \right| = |K| \quad (6.5)$$

$$\phi = 0^\circ \quad (K > 0) \quad (6.6)$$

Considerando K positivo, o gráfico da resposta em frequência do ganho é o mostrado na Figura 6.4.

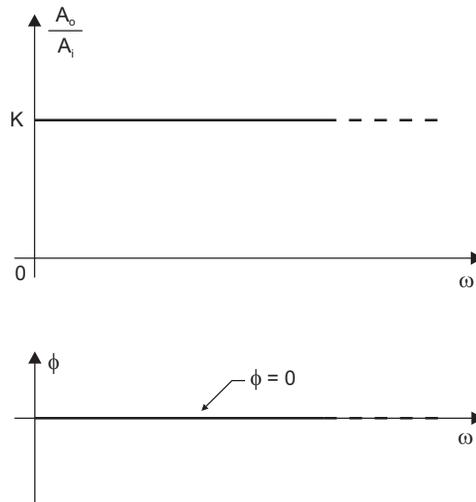


Figura 6.4 Resposta em frequência do ganho K , para $K > 0$ (eixos com escalas lineares).

Conforme podemos observar através da Figura 6.4 e das equações 6.5 e 6.6, a relação de amplitudes independe de ω , pois é uma constante de $\omega = 0$ até $\omega \rightarrow \infty$. A fase repete a forma, pois é também uma linha horizontal. Para valores positivos do ganho ($K > 0$) a fase é igual a *zero* para qualquer valor de ω . No caso do K ser negativo ($K < 0$), a fase pode ser considerada tanto $+180^\circ$ como -180° .

A interpretação desta curva de resposta em frequência é importante, pois significa que, mesmo para frequências extremamente altas, a saída continua igual à entrada multiplicada por uma constante. Nenhum sistema real tem este comportamento, porque, a partir de certos valores de frequência, o sistema deixa de funcionar como um ganho.

6.3.2 – RELAÇÃO DE AMPLITUDES E FASE PARA O INTEGRADOR $\frac{1}{s}$

Alguns detalhes das curvas da resposta em frequência de integradores precisam ser examinados.

Na definição de resposta em frequência (seção 6.1) foi declarada a condição de que o sistema precisa ser estável. Por sua vez, um sistema é considerado estável se as raízes da sua equação característica estão no semiplano esquerdo do plano complexo. Nesta condição, a resposta do sistema à entrada senoidal realmente é formada por duas parcelas: uma transitória que decai com o tempo e outra permanente, oscilatória senoidal, com a mesma frequência da entrada, mas com amplitude e fase dependentes da frequência.

No caso de integradores, as suas equações características têm raízes iguais a zero, portanto, *não* estão no semiplano esquerdo. Estes pólos no *zero* introduzem na resposta uma função polinomial. Em outras palavras, a resposta de um sistema linear qualquer de ordem n que possui p integradores tem três parcelas: a que decai com o tempo (transitória), a oscilatória (permanente) e mais uma que é do tipo polinomial com grau $p - 1$ cuja forma é: $a_{p-1}t^{p-1} + a_{p-2}t^{p-2} + \dots + a_0$. Esta parcela polinomial não decai com o tempo, pelo contrário, pode até ir aumentando, conforme mostra a Figura 6.5, que é a resposta de um sistema cuja função de transferência é um integrador duplo ($1/s^2$).

A forma analítica da função $q_o(t)$ da Figura 6.5 é facilmente obtida aplicando Laplace e utilizando o par nº 33 da tabela do Apêndice D.

A Figura 6.5 evidencia o problema que encontramos quando queremos realizar um ensaio experimental da resposta em frequência de um sistema que possui um integrador duplo. A resposta cresce com o tempo e pode causar danos ao sistema.

Diante dos pontos discutidos acima, fica claro que resposta em frequência de integradores leva em conta apenas a parcela oscilatória, deixando de considerar a parcela polinomial da resposta.

Agora, vamos determinar a função de transferência senoidal de um integrador. Em termos de Laplace, a sua função de transferência é:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{1}{s} \quad (6.7)$$

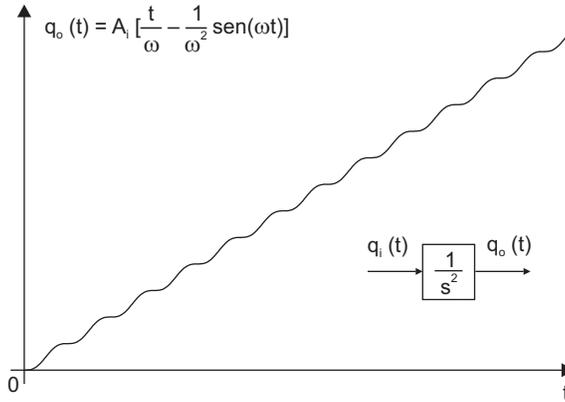


Figura 6.5 Resposta de um sistema cuja função de transferência é um integrador duplo, quando a entrada é $q_i(t) = A_i \text{sen}(\omega t)$.

Substituindo s por $i\omega$, então:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(i\omega) = \frac{1}{i\omega} \quad (6.8)$$

Calculando o módulo e a fase desta função complexa vem:

$$\frac{A_o}{A_i} = \left| \frac{Q_o}{Q_i}(i\omega) \right| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2}} = \frac{1}{\omega} \quad (6.9)$$

$$\phi = \left(\begin{array}{l} \text{fase do} \\ \text{numerador} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{fase do} \\ \text{denominador} \end{array} \right) = (0^\circ) - (90^\circ) = -90^\circ \quad (6.10)$$

O gráfico da resposta em frequência do integrador está na Figura 6.6.

Através do gráfico notamos que a relação de amplitudes é altíssima quando a frequência é baixa e baixíssima para altas frequências. Quanto à fase, é uma constante igual a -90° para qualquer frequência.

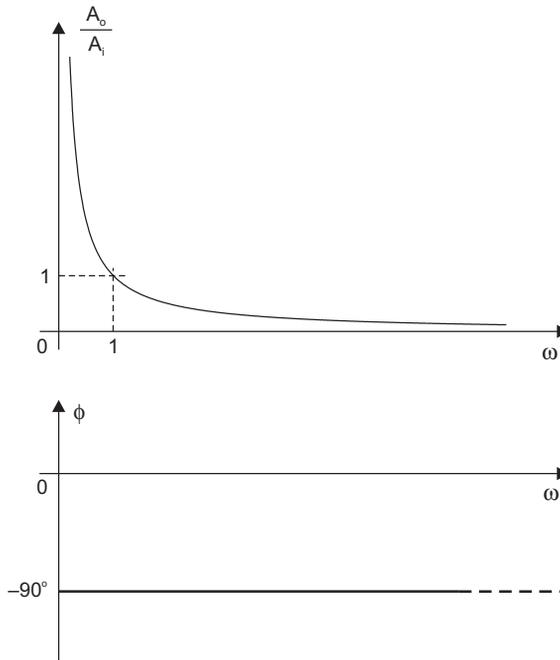


Figura 6.6 Resposta em frequência do integrador $1/s$ (eixos com escalas lineares).

6.3.3 – RELAÇÃO DE AMPLITUDES E FASE PARA O SISTEMA DE 1ª ORDEM $\frac{1}{\tau s + 1}$

O sistema tem a função de transferência:

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (6.11)$$

Logo, a função de transferência senoidal é:

$$\frac{Q_o(i\omega)}{Q_i(i\omega)} = \frac{1}{\tau i\omega + 1} \quad (6.12)$$

Calculando o módulo e a fase obtemos:

$$\frac{A_o}{A_i} = \left| \frac{Q_o(i\omega)}{Q_i(i\omega)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\tau\omega)^2}} \quad (6.13)$$

$$\phi = 0 - \arctg\left(\frac{\tau\omega}{1}\right) = -\arctg(\tau\omega) \quad (6.14)$$

O gráfico da resposta em frequência tem a forma mostrada na Figura 6.7.

É muito comum encontrarmos a função de transferência do sistema de 1ª ordem com o ganho incluído, equação 6.15.

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (6.15)$$

Com o objetivo de generalizar a resposta em frequência desta função de transferência para quaisquer valores de K e τ , construímos um gráfico normalizado que é muito usado na prática, Figura 6.8.

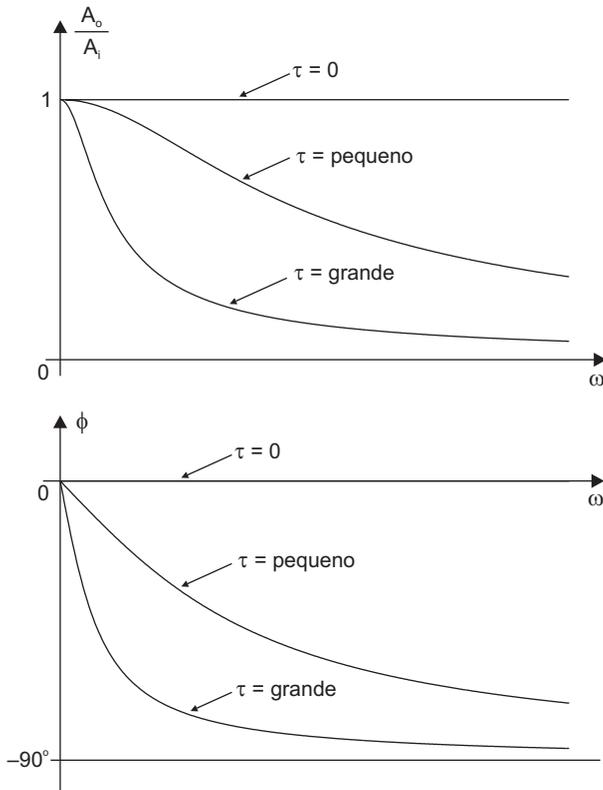
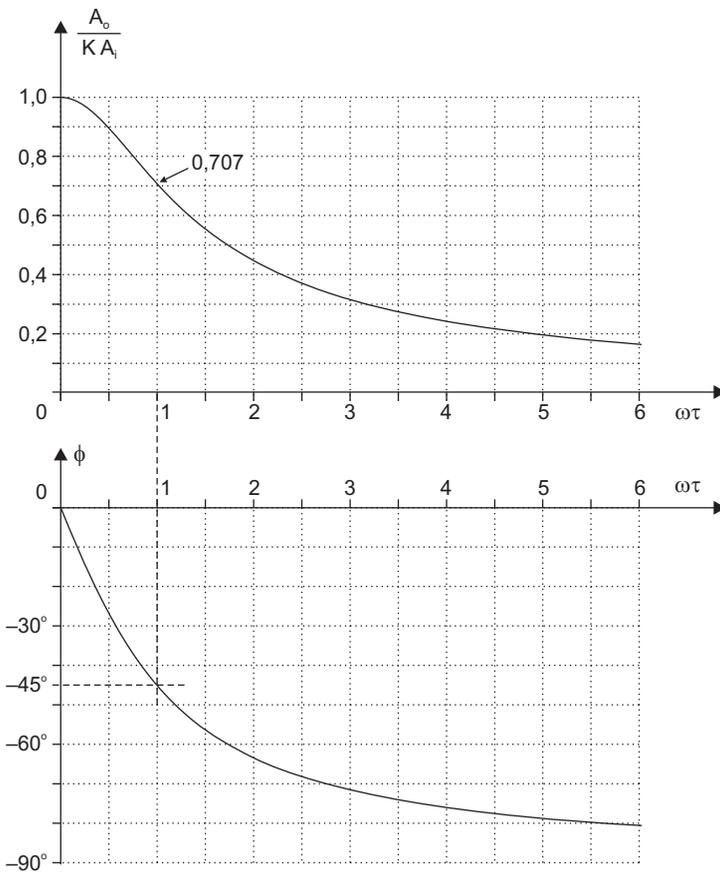


Figura 6.7 Resposta em frequência do sistema de 1ª ordem

$$\frac{1}{\tau s + 1} \text{ (eixos com escalas lineares).}$$



$\omega\tau$	A_o/KA_i	ϕ (graus)	$\omega\tau$	A_o/KA_i	ϕ (graus)
0	1,000	0,0	3,5	0,275	-74,1
0,5	0,894	-26,6	4,0	0,243	-76,0
1,0	0,707	-45,0	4,5	0,217	-77,5
1,5	0,555	-56,3	5,0	0,196	-78,7
2,0	0,447	-63,4	5,5	0,179	-79,7
2,5	0,371	-68,2	6,0	0,164	-80,5
3,0	0,316	-71,6	∞	0	-90

Figura 6.8 Resposta em frequência normalizada do sistema de 1ª ordem

$$\frac{K}{\tau s + 1}. \text{ (eixos com escalas lineares).}$$

Com base na Figura 6.8 podemos dividir o comportamento do sistema em três regiões. Para $\omega\tau \ll 0,1$, o sistema de primeira ordem responde praticamente igual a um Ganho, pois $(A_o/A_i) \approx 1$ e $\phi \approx 0^\circ$. Quando $\omega\tau < 0,1$, temos um compor-

tamento próximo ao do “Tempo Morto” (vide seção 6.3.5), pois $(A_o/A_i) \approx 1$ e a fase é aproximadamente linear. Quando $\omega\tau > 0,1$, à medida que $\omega\tau$ aumenta, tanto a relação de amplitudes como a fase variam, a primeira tendendo a *zero* e a segunda tendendo a -90° .

6.3.4 – RELAÇÃO DE AMPLITUDES E FASE PARA O

SISTEMA DE 2ª ORDEM
$$\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$$

Neste caso, a função de transferência é:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \quad (6.16)$$

e a função de transferência senoidal fica:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(i\omega) = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + i\left[\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right]} \quad (6.17)$$

Calculando o módulo e a fase desta função complexa obtemos:

$$\frac{A_o}{A_i} = \left| \frac{Q_o}{Q_i}(i\omega) \right| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \quad (6.18)$$

$$\phi = -\arctg \frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (6.19)$$

De maneira análoga ao sistema de 1ª ordem, muitas vezes o sistema de 2ª ordem é estudado com o ganho incluído, equação 6.20.

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \quad (6.20)$$

O gráfico normalizado da resposta em frequência desta função é muito útil e está na Figura 6.9.

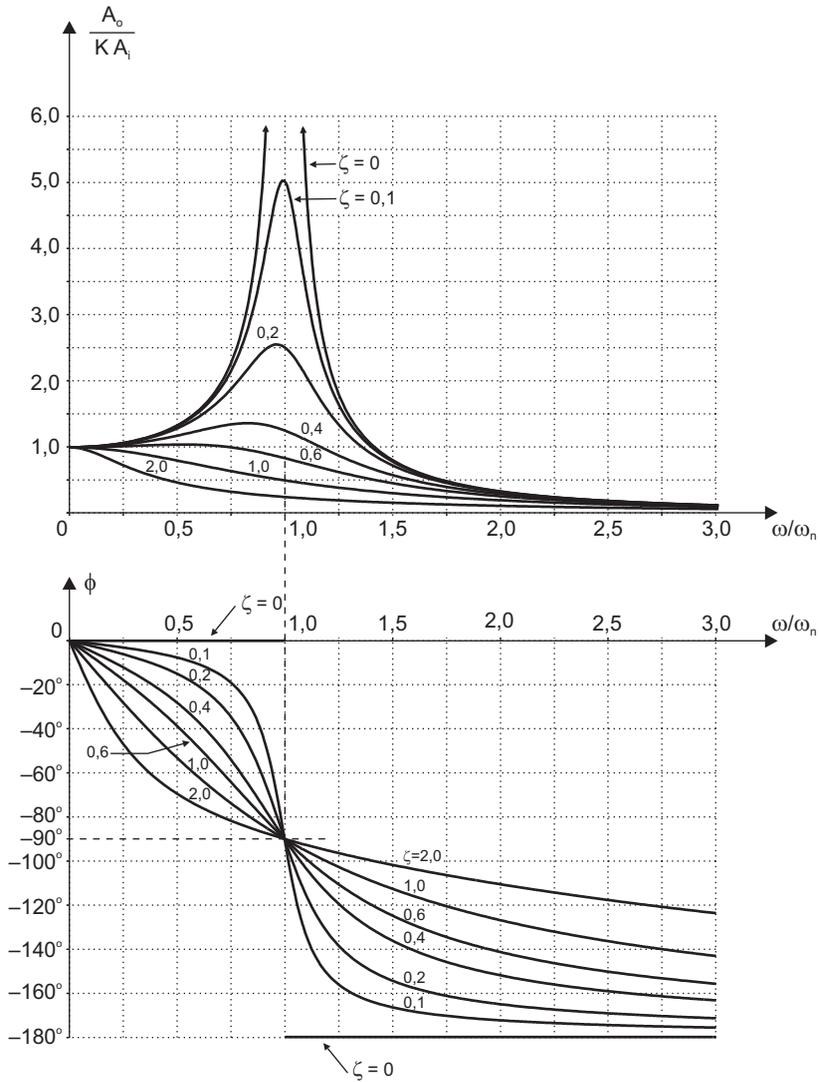


Figura 6.9 Resposta em frequência normalizada do sistema de 2ª ordem

$$\frac{K}{s^2 + 2\zeta \frac{\omega_n}{s} + \omega_n^2} \quad (\text{eixos com escalas lineares}).$$

Devemos observar o gráfico da fase quando $\zeta = 0$. Para $\omega < \omega_n$, o ângulo ϕ é *nulo*, para $\omega > \omega_n$ o ângulo é -180° e é igual a -90° quando $\omega = \omega_n$.

Para sistemas de 2ª ordem com $\zeta < \sqrt{2}/2$ ($\zeta < 0,707$), o gráfico da relação de amplitudes possui um pico. A frequência em que este pico ocorre é determinada derivando a relação de amplitudes e igualando-a a zero (cálculo do máximo). Assim, obtemos:

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \text{ para } \zeta < 0,707 \quad (6.21)$$

Considerando que em sistemas reais ζ pode ser muito pequeno, mas não é *nulo*, na prática este pico sempre ocorre à esquerda de ω_n e se distancia de ω_n com o aumento de ζ , conforme mostram a Figura 6.9 e a equação 6.21.

Face à introdução de mais esta frequência, constatamos que sistemas de 2ª ordem possuem três importantes frequências, todas já definidas, mas para efeito de sumário repetimos suas definições:

$\omega_n \triangleq$ frequência natural não-amortecida;

$\omega_{nd} \triangleq \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \triangleq$ frequência natural amortecida;

$\omega_p \triangleq \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \triangleq$ frequência do pico da relação de amplitudes.

Há uma quarta frequência que é a frequência de ressonância ω_r , definida também para outros sistemas de ordem maior.

No caso do sistema de 2ª ordem, temos:

$\omega_r \triangleq \omega_p \triangleq$ frequência de ressonância.

Se o pico da relação de amplitudes não existir, ω_r e ω_p não existem.

Se o pico existir, a magnitude do pico de ressonância M_r pode ser calculada incluindo o ganho na (6.18) e substituindo ω por ω_p . Assim, obtemos:

$$M_r = \left(\frac{A_o}{A_i} \right)_{\omega=\omega_p} = \frac{K}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, \text{ para } 0 < \zeta < 0,707 \quad (6.22)$$

A Figura 6.9 mostra que é possível dividir o comportamento do sistema em quatro regiões. Quando temos $\omega/\omega_n \ll 0,1$, o sistema de 2ª ordem responde praticamente igual a um Ganho, pois $(A_o/A_i) \approx 1$ e $\phi \approx 0^\circ$. Para $\omega/\omega_n < 0,1$, temos um comportamento próximo ao do “Tempo Morto” (vide seção 6.3.5), pois $(A_o/A_i) \approx 1$ e a fase é aproximadamente linear. A terceira região se localiza ao redor de $\omega/\omega_n = 1$.

Nesta região as fases são próximas de -90° e a relação de amplitudes apresenta um pico se $\zeta < 0,707$.

A quarta região se caracteriza para $\omega/\omega_n > 1,25$. Com o aumento de ω/ω_n a relação de amplitudes tende para *zero* e a fase tende para -180° .

6.3.5 – RELAÇÃO DE AMPLITUDES E FASE PARA O TEMPO MORTO (*DEAD TIME*): $e^{-s\tau_{DT}}$

O termo $e^{-s\tau_{DT}}$ representa a função de transferência do Tempo Morto (*dead time*).

Este tipo de elemento auxilia na modelagem porque certos componentes e equipamentos se comportam de forma semelhante ao do Tempo Morto.

O Tempo Morto é um sistema que tem a saída exatamente igual à entrada, mas responde com um atraso de τ_{DT} segundos (o tempo morto). Matematicamente é a função defasada, já observada no Capítulo 4, seção 4.3.4.

Se temos:

$$q_o = q_i(t - \tau_{DT}), \quad \tau_{DT} > 0 \quad (6.23)$$

então:

$$Q_o(s) = e^{-s\tau_{DT}} Q_i(s) \quad (6.24)$$

que resulta na função de transferência:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = e^{-s\tau_{DT}} \quad (6.25)$$

A resposta em frequência é determinada substituindo s por $i\omega$. Logo:

$$\frac{A_o}{A_i} = \left| \frac{Q_o}{Q_i}(i\omega) \right| = 1 \quad (6.26)$$

$$\phi = -\tau_{DT} \omega \quad (6.27)$$

Adotando escalas lineares para os eixos, a resposta em frequência do Tempo Morto resulta no gráfico da Figura 6.10.

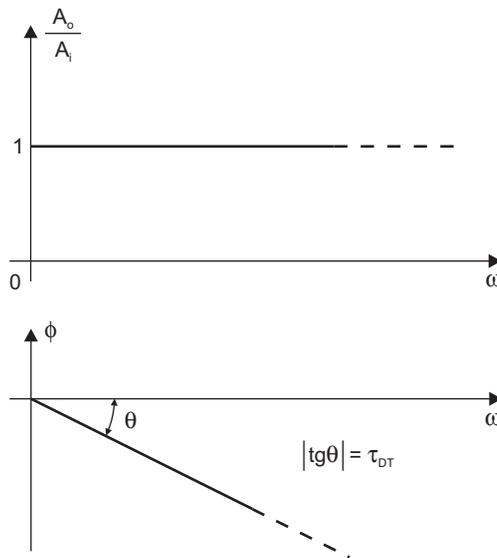


Figura 6.10 Gráfico da resposta em frequência do Tempo Morto, em escalas lineares.

6.4 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA EM MONO-LOG

6.4.1 – INTRODUÇÃO

O gráfico da resposta em frequência em papel mono-log é também chamado de Gráfico de Bode ou Diagrama de Bode.

O objetivo desta seção é apresentar um procedimento manual para a elaboração do gráfico da resposta em frequência. Um procedimento computacional que produz o gráfico e uma tabela está apresentado na seção B.9 do Apêndice B.

Sob o ponto de vista de produção de gráfico, o procedimento manual e o computacional colocam-se como métodos alternativos. Neste contexto, o método manual tem desvantagens porque é trabalhoso, demanda tempo e o resultado é um gráfico menos preciso.

Considerando apenas este aspecto de geração de gráfico, estudar o procedimento manual parece até sem propósito. Entendemos, no entanto, que a obtenção de gráfico não representa o único produto do método. Quando passamos pelo estudo dos detalhes do processo, automaticamente melhoramos a compreensão do significado de características dinâmicas e também de como cada parte influencia o comportamento do sistema. Estes conhecimentos representam benefícios importantes, pois aprimoram o bom senso e aprofundam os conceitos dinâmicos. Intrinsecamente, eles proporcionam amplas aplicações: esclarecem o funcionamento de certas técnicas usadas em Controle e Automação e são fundamentais no desenvolvimento de projetos

e na definição das propriedades dinâmicas de equipamentos de medida. Além disto, aguçam a visão para analisar as características de sistemas reais. Portanto, o escopo do procedimento manual não está restrito exclusivamente à tarefa de construção de gráfico, mas ajuda a entender a dinâmica de sistemas e, inclusive, a interpretar os gráficos produzidos por método computacional.

Diante de todos os benefícios advindos do processo manual, entendemos que o seu estudo se torna indispensável.

Os gráficos da resposta em freqüência em papel mono-log são obtidos lançando nos eixos:

- “eixo x” da freqüência \Rightarrow escala logarítima, $\log \omega$;
- “eixo y” da relação de amplitudes \Rightarrow relação de amplitudes em db (decibel);
- “eixo y” da fase \Rightarrow linear normal, em graus.

A definição de db para a resposta em freqüência³ é:

$$\left(\text{valor de } \frac{A_o}{A_i} \text{ em decibel} \right) \triangleq \left(20 \log \frac{A_o}{A_i} \right) db$$

Pela definição, se $(A_o/A_i) = 1$, o valor em db é zero; se $(A_o/A_i) > 1$, o valor em db é positivo; e, se $(A_o/A_i) < 1$, o valor em db é negativo.

Como no “eixo x” temos $\log \omega$, os gráficos são construídos em papel mono-log, lançando diretamente a freqüência ω na escala logarítmica. O fato de a escala do papel ser logarítmica dispensa o cálculo matemático de $\log \omega$.

Muitos modelos lineares apresentam funções de transferência compostas pelos cinco tipos de termos:

(i) Ganho: K

(ii) Termo correspondente ao Integrador ou Derivador: s^N

(iii) Termos de 1ª Ordem: $(\tau s + 1)^{\pm 1}$

(iv) Termos de 2ª ordem: $\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1 \right)^{\pm 1}$

(v) Termo do Tempo Morto: $e^{-s\tau_{DT}}$

3. Em estudos acústicos db tem outra definição.

Por exemplo:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s^2(\tau_3 s + 1) \left(\frac{s^2}{\omega_{n1}^2} + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n1}} s + 1 \right) \cdot \left(\frac{s^2}{\omega_{n2}^2} + \frac{2\zeta_2}{\omega_{n2}} s + 1 \right)} \quad (6.28)$$

Substituindo s por $i\omega$, a Relação de Amplitudes $\frac{A_o}{A_i}$ será o produto (ou a divisão) dos módulos de cada um dos cinco tipos. Assim, ao calcularmos $\frac{A_o}{A_i}$ em db , transformamos os produtos dos módulos em somas em db .

É importante destacar as vantagens desse processo construtivo. Sob o ponto de vista da elaboração do gráfico em (db) contra $(\log\omega)$ estas são:

- (1) transformamos os produtos (ou divisão) dos módulos em somas (ou subtrações);
- (2) gráficos de funções do tipo $\log(a\omega^n)$ contra $\log(\omega)$ são retas.

6.4.2 – GRÁFICO EM db DO GANHO K

Vimos que para o ganho:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = K \quad (6.29)$$

que resultou:

$$\frac{A_o}{A_i} = K \quad (6.30)$$

$$\phi = 0^\circ \text{ (para } K > 0) \quad (6.31)$$

Logo, para o gráfico em “ db ” (mono-log) obtemos:

$$\left. \frac{A_o}{A_i} \right|_{db} = 20 \log K \quad (6.32)$$

$$\phi = 0^\circ \quad (6.33)$$

Assim, o gráfico do ganho em mono-log se apresenta conforme ilustrado na Figura 6.11.

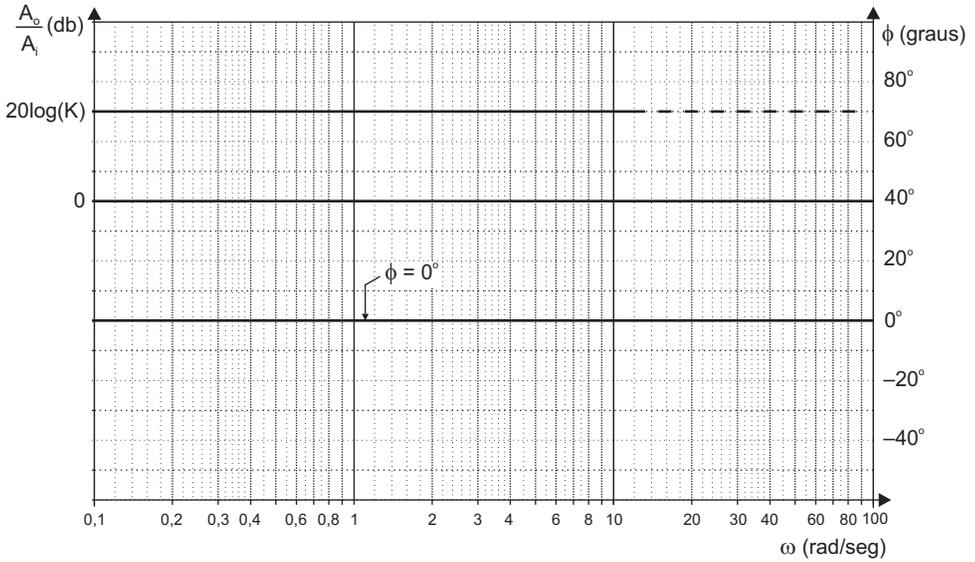


Figura 6.11 Gráfico de Bode do Ganho K ($K > 0$).

6.4.3 – GRÁFICO EM db DO TERMO: s^N

Este caso é também chamado de “*pólos e zeros na origem*”.

Se $\frac{Q_o}{Q_i}(s) = s^N$, então, para o caso da função de transferência de derivadores (N positivo inteiro), temos:

$$\frac{A_o}{A_i} = \left| (i\omega)^N \right| = \left| i^N \omega^N \right| = \omega^N \quad (6.34)$$

$$\phi = +90^\circ \times N, \text{ para } N > 0 \quad (6.35)$$

Para o caso da função de transferência de integradores (N negativo inteiro), temos:

$$\frac{A_o}{A_i} = \left| \frac{1}{(i\omega)^{-N}} \right| = \left| \frac{1}{i^{-N} \omega^{-N}} \right| = \frac{1}{\omega^{-N}} \quad (6.36)$$

$$\phi = -90^\circ \times (-N), \text{ para } N < 0 \quad (6.37)$$

Para o gráfico em db , temos:

$$\text{Para } N > 0 \Rightarrow \left. \frac{A_o}{A_i} \right|_{db} = 20 \log \omega^N = +20N \log \omega \quad (6.38)$$

$$\text{Para } N < 0 \Rightarrow \left. \frac{A_o}{A_i} \right|_{db} = 20 \log \frac{1}{\omega^{-N}} = -20(-N) \log \omega \quad (6.39)$$

Na (6.38), quando $N = +1$, temos a função $+20 \log \omega$, que colocada no gráfico contra $\log \omega$ resulta em uma reta que sobe $+20 \text{ db/década}$. Vemos também que, para cada derivador adicionado, a reta tem aumento na inclinação de $+20 \text{ db/década}$. Exemplificando, para a função de transferência com um *zero duplo* na origem, correspondente ao derivador duplo ($N = +2$), a função é $+40 \log \omega$, que colocada contra $\log \omega$ resulta em uma reta que sobe $+40 \text{ db/década}$.

No caso de funções de transferência de integradores a sistemática é semelhante, mas a inclinação é inversa. Para um integrador ($N = -1$), a função obtida através da (6.39) é $-20 \log \omega$, que resulta em uma reta que desce -20 db/década . Cada integrador acrescentado diminui a inclinação da reta em -20 db/década . Por exemplo, para um *pólo triplo* na origem ($N = -3$) a reta terá inclinação de -60 db/década .

Quanto à fase, usamos as equações 6.35 e 6.37. Cada derivador provoca um acréscimo na fase de $+90^\circ$ e cada integrador um decréscimo de -90° .

Quando $\omega = 1 \text{ rad/seg}$, $\log \omega$ é zero, portanto, as retas cruzam o 0 db (zero db) no ponto $\omega = 1 \text{ rad/seg}$, Figura 6.12.

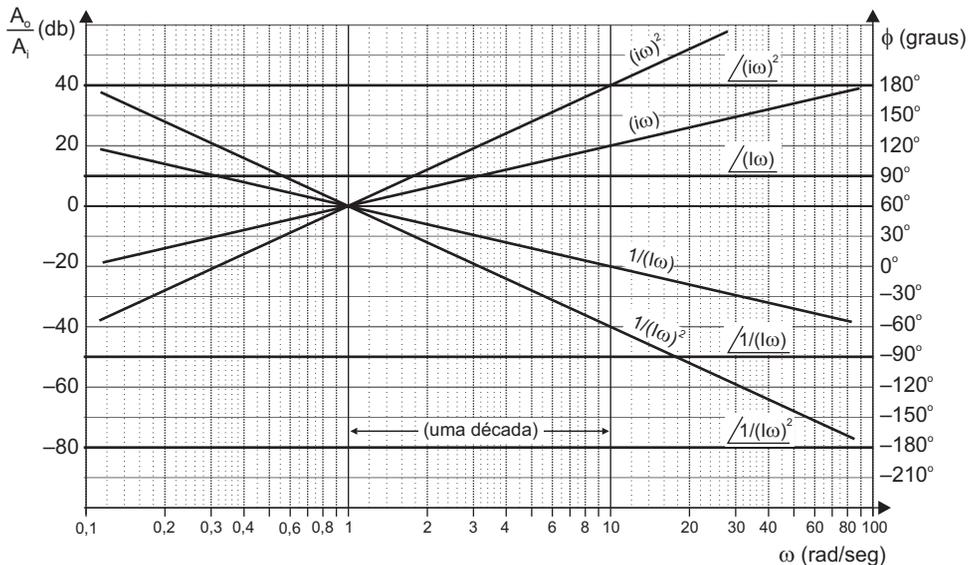


Figura 6.12 Gráfico de Bode para derivadores e integradores (pólos e zeros na origem).

Em resposta em frequência uma década significa uma frequência 10 vezes maior ou 10 vezes menor. Por exemplo, se temos uma frequência de 58 rad/seg , uma década menor é $5,8 \text{ rad/seg}$ e uma década maior é 580 rad/seg . As décadas não estão ligadas

exclusivamente à 1 rad/seg e 10 rad/seg . No caso da Figura 6.12 isto ocorre devido à coincidência de as retas cruzarem o ponto $\omega = 1 \text{ rad/seg}$, que uma década maior a partir deste ponto resulta em $\omega = 10 \text{ rad/seg}$.

6.4.4 – GRÁFICO EM db DO TERMO: $(\tau s + 1)^{\pm 1}$

Este caso é também chamado de “*pólo* ou *zero*” real diferente de zero. De fato, o pólo (ou zero) tem valor igual a $(-1/\tau)$.

Se $\frac{Q_o}{Q_i}(i\omega) = (\tau i\omega + 1)^{\pm 1}$ então, para o expoente positivo (dinâmica no numerador), vem:

$$\frac{A_o}{A_i} = |\tau i\omega + 1| = \sqrt{(\tau\omega)^2 + 1} \quad (6.40)$$

$$\phi = \text{arctg}(\tau\omega) \text{ (varia de } 0^\circ \text{ a } +90^\circ) \quad (6.41)$$

Para expoente negativo (dinâmica no denominador) temos:

$$\frac{A_o}{A_i} = \left| \frac{1}{\tau i\omega + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}} \quad (6.42)$$

$$\phi = -\text{arctg}(\tau\omega) \text{ (varia de } 0^\circ \text{ a } -90^\circ) \quad (6.43)$$

Aplicando db :

$$\text{Para expoente} = (+1) \Rightarrow \left. \frac{A_o}{A_i} \right|_{db} = +20 \log \sqrt{(\tau\omega)^2 + 1} \quad (6.44)$$

$$\text{Para expoente} = (-1) \Rightarrow \left. \frac{A_o}{A_i} \right|_{db} = -20 \log \sqrt{(\tau\omega)^2 + 1} \quad (6.45)$$

Quando $(\tau\omega) \gg 1$ ou $(\tau\omega) \ll 1$ as curvas das relações de amplitudes em db tendem a ser retas e estas são chamadas de assíntotas. As equações das assíntotas podem ser determinadas através do limite da relação de amplitudes para $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow \infty$, Tabela 6.1.

A curva da relação de amplitudes em db é obtida manualmente desenhando inicialmente as assíntotas e depois aplicando as devidas correções em relação às assíntotas. Os valores das correções podem ser obtidos através da Tabela 6.2. Para a fase não existem correções; os valores obtidos da Tabela 6.2 são lançados diretamente no gráfico.

Tabela 6.1 Obtenção das assíntotas do sistema de 1ª ordem.

	Dinâmica no Numerador: $\frac{Q_o}{Q_i}(s) = (\tau s + 1)$	Dinâmica no Denominador: $\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)}$
$\omega \rightarrow 0$	$\lim_{\omega \rightarrow 0} 20 \log \sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1} = \lim_{\omega \rightarrow 0} 20 \log 1 = 0$ ∴ reta assíntota coincide com linha 0 db	$\lim_{\omega \rightarrow 0} 20 \log \frac{1}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} = \lim_{\omega \rightarrow 0} -20 \log 1 = 0$ ∴ reta assíntota coincide com linha 0 db
$\omega \rightarrow \infty$	$\lim_{\omega \rightarrow \infty} 20 \log \sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} 20 \log \tau \omega =$ $= \lim_{\omega \rightarrow \infty} [20 \log \omega + 20 \log \tau]$ ∴ reta com inclinação = +20 db/década e cruza a linha 0 db no ponto $\omega = 1/\tau$ Definimos: $\omega_c \triangleq$ frequência de corte = $\frac{1}{\tau}$	$\lim_{\omega \rightarrow \infty} 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} \right) =$ $= \lim_{\omega \rightarrow \infty} -20 \log \tau \omega = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [-20 \log \omega - 20 \log \tau]$ ∴ reta com inclinação = -20 db/década e cruza a linha 0 db no ponto $\omega = 1/\tau$ Definimos: $\omega_c \triangleq$ frequência de corte = $\frac{1}{\tau}$

Nota: Frequência de corte é também chamada de “Frequência de quina” ou “Frequência de canto”.

Tabela 6.2 Correções e fase para o sistema de 1ª ordem.

(Frequência) x (Constante de Tempo)	Relação de Amplitudes	Fase
$\omega\tau$	Correções (db)	ϕ (graus)
0,1	± 0,04	±5,7°
0,25	±0,26	±14,0°
0,5	±0,97	±26,6°
1	±3,01	±45,0°
2	±0,97	±63,4°
4	±0,26	±76,0°
10	±0,04	±84,3°

Nota: Para $(\tau s + 1)$, 1ª ordem numerador, as correções e fases são positivas; e, para $(1/(\tau s + 1))$, 1ª ordem denominador, as correções e fases são negativas.

A Tabela 6.2 mostra que as correções para a relação de amplitudes são mais efetivas uma década antes e uma década após a frequência de corte, sendo mais significativa na região próxima a ω_c . Quanto à fase, de $0,1\omega_c$ a $10\omega_c$ ela varia de ± 78,6°, correspondendo a quase 83% da variação total, que é de 0 a ±90° (+90° para $(\tau s + 1)$ e -90° para $(1/\tau s + 1)$).

As Figuras 6.13 e 6.14 mostram gráficos normalizados, respectivamente, para as correções da relação de amplitudes e para a fase.

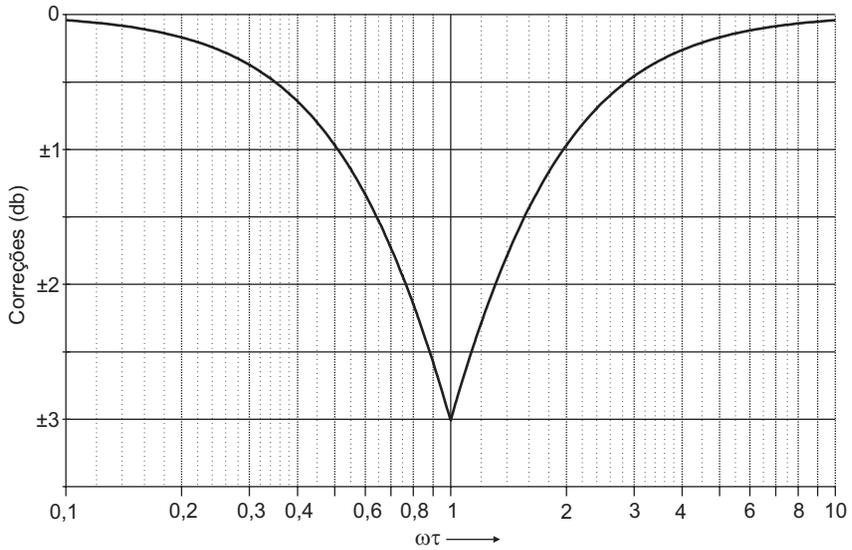


Figura 6.13 Correções para a relação de amplitudes do sistema de 1ª ordem. Valores positivos para $(\tau s + 1)$ e negativos para $1/(\tau s + 1)$.

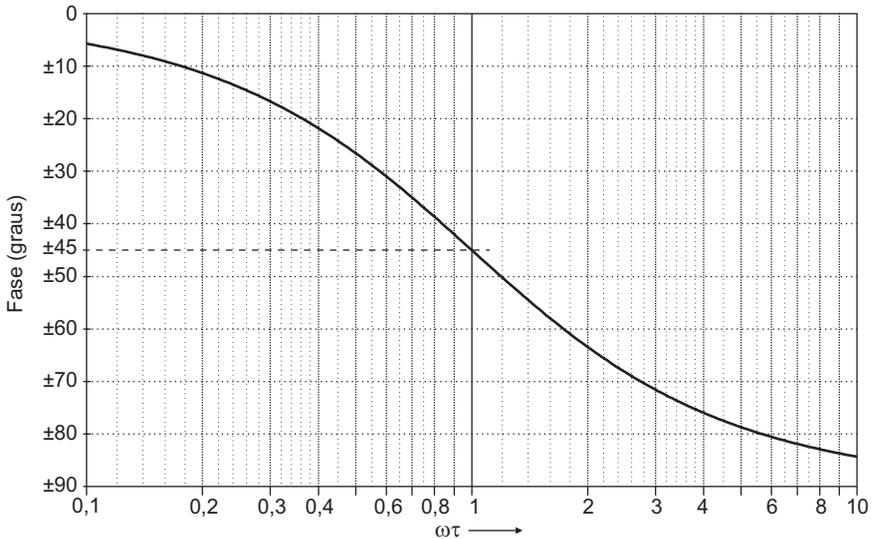


Figura 6.14 Ângulo de fase do sistema de 1ª ordem. Valores positivos para $(\tau s + 1)$ e negativos para $1/(\tau s + 1)$.

Buscando esclarecer o procedimento manual, seja o exemplo: determinar as curvas das relações de amplitudes (em *db*) de $\frac{Q_{o1}}{Q_{i1}}(s) = \frac{1}{(0,769s + 1)}$ e de $\frac{Q_{o2}}{Q_{i2}}(s) = (0,25s + 1)$.

Resolução:

a) Determinação das frequências de corte:

$$\omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{0,769} = 1,30 \text{ rad/s} \quad (6.46)$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{0,25} = 4,0 \text{ rad/s} \quad (6.47)$$

b) Correções para as relações de amplitudes:

Muitas vezes somente três correções são suficientes para traçarmos uma curva da relação de amplitudes.

O trabalho com as correções fica mais organizado se feito em forma de tabela. Nas Tabelas 6.3 e 6.4 usamos o termo $\omega\tau$ porque as correções são dadas em função de $\omega\tau$ e não de ω (vide Tabela 6.2 e Figuras 6.13 e 6.14).

Tabela 6.3 Correções para a relação de amplitudes de $1/(0,769s+1)$.

Frequência	$\omega = 0,65 \text{ rad/seg}$	$\omega = 1,30 \text{ rad/seg}$	$\omega = 2,6 \text{ rad/seg}$
Termo: $\omega\tau$	$\omega\tau = 0,5$	$\omega\tau = 1,0$	$\omega\tau = 2,0$
Correção (db)	-0,97	-3,01	-0,97

Tabela 6.4 Correções para a relação de amplitudes de $(0,25s+1)$.

Frequência	$\omega = 2,0 \text{ rad/seg}$	$\omega = 4,0 \text{ rad/seg}$	$\omega = 8,0 \text{ rad/seg}$
Termo: $\omega\tau$	$\omega\tau = 0,5$	$\omega\tau = 1,0$	$\omega\tau = 2,0$
Correção (db)	+0,97	+3,01	+0,97

c) Construção das curvas das relações de amplitudes:

Após traçarmos as assíntotas e lançarmos os valores das correções a partir destas, desenhemos manualmente as curvas das relações de amplitudes, Figura 6.15.

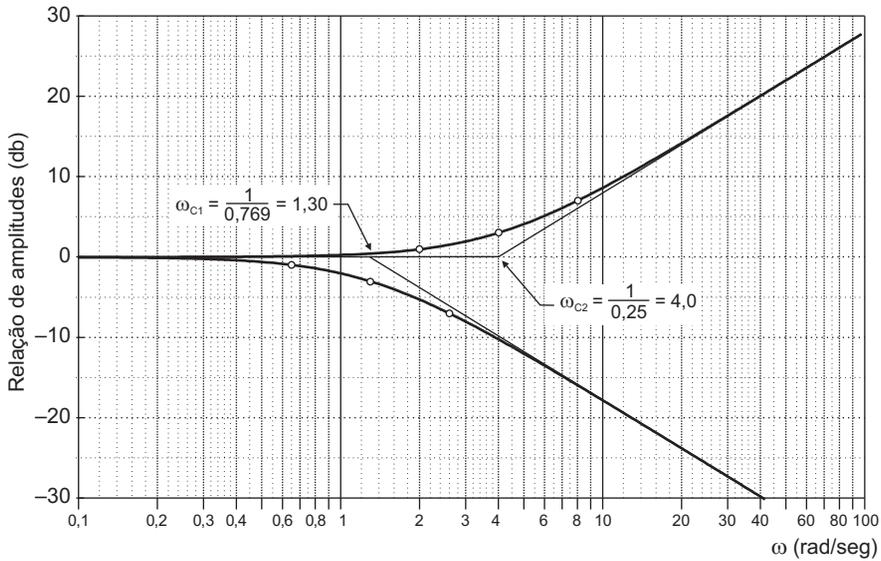


Figura 6.15 Relações de amplitudes em **db** dos sistemas: $\frac{1}{(0,769s+1)}$ e $(0,25s + 1)$.

6.4.5 – GRÁFICO EM **db** DO TERMO: $\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1\right)^{\pm 1}$

Neste caso podemos ter *pólos* (ou *zeros*) imaginários ($\zeta = 0$); complexo com a parte real negativa ($0 < \zeta < 1$); reais negativos repetidos ($\zeta = 1$); ou reais negativos distintos ($\zeta > 1$).

Se $\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1\right)^{\pm 1}$ então, para expoente positivo:

$$\frac{A_o}{A_i} = \left| \frac{(i\omega)^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}i\omega + 1 \right| = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (6.48)$$

$$\phi = \arctg \frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \text{ (varia de } 0^\circ \text{ a } +180^\circ) \quad (6.49)$$

Para expoente negativo, vem:

$$\frac{A_o}{A_i} = \left| \frac{I}{\frac{(i\omega)^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} i\omega + I} \right| = \frac{I}{\sqrt{\left[I - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}} \quad (6.50)$$

$$\phi = -\arctg \frac{2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)}{I - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}, \text{ (varia de } 0^\circ \text{ a } -180^\circ) \quad (6.51)$$

Calculando em db obtemos:

- Para expoente = $(+1) \Rightarrow \left. \frac{A_o}{A_i} \right|_{db} = +20 \log \sqrt{\left[I - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (6.52)$

- Para expoente = $(-1) \Rightarrow \left. \frac{A_o}{A_i} \right|_{db} = -20 \log \sqrt{\left[I - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (6.53)$

O sistema de 2ª ordem também possui assíntotas. Quando $\omega \ll \omega_n$ e $\omega \gg \omega_n$, as curvas das relações de amplitudes em db tendem a ser retas. Aplicando limite para $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow \infty$, as assíntotas são determinadas, Tabela 6.5.

De maneira similar ao sistema de 1ª ordem, a curva da relação de amplitudes em db para o sistema de 2ª ordem pode também ser obtida manualmente utilizando as assíntotas e com a aplicação das devidas correções. A Figura 6.16 fornece, de forma gráfica, os valores das correções para o sistema com dinâmica no denominador, isto

$$\acute{e}, \frac{I}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + I}.$$

Quanto à fase, não existem correções; os valores obtidos da Figura 6.17 devem ser lançados diretamente no gráfico.

Tabela 6.5 Obtenção das assíntotas do sistema de 2ª ordem.

	Dinâmica no Numerador $\frac{Q_\omega(s)}{Q_i(s)} = \frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1$	Dinâmica no Denominador $\frac{Q_\omega(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}$
$\omega \rightarrow 0$	$\lim_{\omega \rightarrow 0} 20 \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} =$ $= 20 \log 1 = 0$ \therefore reta assíntota coincide com a linha 0 db .	$\lim_{\omega \rightarrow 0} 20 \log \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} =$ $= -20 \log 1 = 0$ \therefore reta assíntota coincide com a linha 0 db .
$\omega \rightarrow \infty$	$\lim_{\omega \rightarrow \infty} 20 \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} =$ $= \lim_{\omega \rightarrow \infty} 20 \log \sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_n^4}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} 20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} =$ $= \lim_{\omega \rightarrow \infty} 40 \log \frac{\omega}{\omega_n} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [40 \log \omega - 40 \log \omega_n]$ \therefore reta com inclinação de +40 db/década e cruza a linha do 0 db no ponto $\omega = \omega_n$. Definimos: $\omega_c \hat{=} \text{freqüência de corte} = \omega_n$	$\lim_{\omega \rightarrow \infty} 20 \log \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} =$ $= \lim_{\omega \rightarrow \infty} -20 \log \sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_n^4}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} -20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} =$ $= \lim_{\omega \rightarrow \infty} -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [-40 \log \omega + 40 \log \omega_n]$ \therefore reta com inclinação de -40 db/década e cruza a linha do 0 db no ponto $\omega = \omega_n$. Definimos: $\omega_c \hat{=} \text{freqüência de corte} = \omega_n$

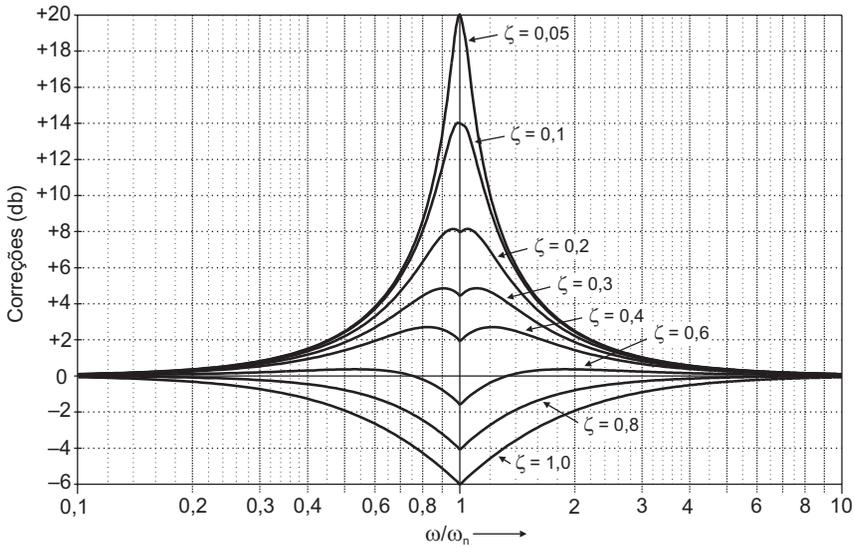


Figura 6.16 Correções para a relação de amplitudes do sistema 2ª ordem $\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}$.

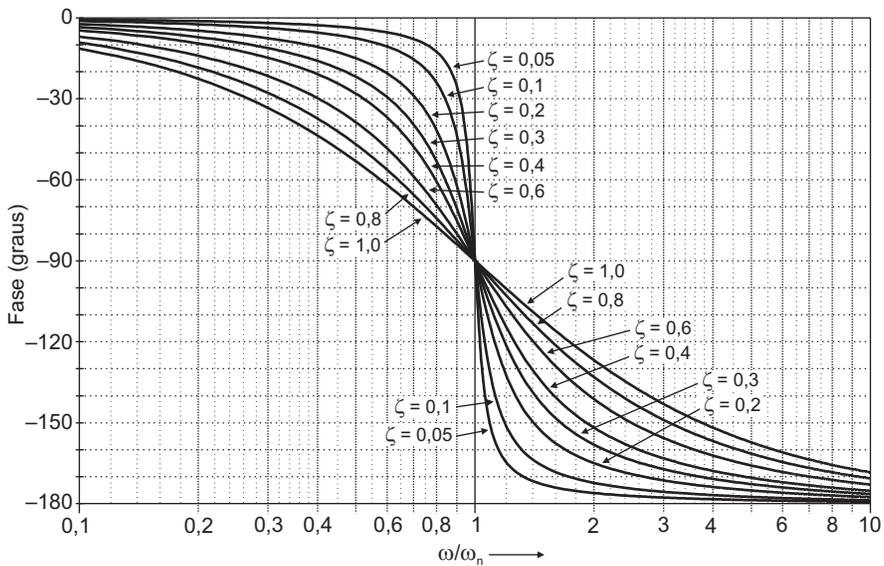


Figura 6.17 Ângulo de fase do sistema de 2ª ordem $\frac{1}{\omega_n^2 s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}$.

Para ilustração, seja o exemplo: determinar a curva da relação de amplitudes

em *db* de $\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{2^2} + \frac{0,4}{2}s + 1}$.

Resolução:

a) Determinação da frequência de corte e do fator de amortecimento:

$$\omega_c = \omega_n = 2 \text{ rad/seg} \quad (6.54)$$

$$2\zeta = 0,4 \therefore \zeta = 0,2 \quad (6.55)$$

b) Correções para as relações de amplitudes:

Podemos trabalhar com muitos pontos na construção manual do gráfico, mas neste exemplo utilizaremos apenas três pontos.

O gráfico das correções da Figura 6.16 está normalizado em função de ω/ω_n (ou ω/ω_c) e é por esta razão que na Tabela 6.6 usamos este parâmetro.

Tabela 6.6 Correções para a relação de amplitudes de $\frac{1}{\frac{s^2}{2^2} + \frac{0,4}{2}s + 1}$.

Frequência	$\omega = 1,4$ rad/seg	$\omega = 2,0$ rad/seg	$\omega = 2,8$ rad/seg
Termo: ω/ω_n	$\omega/\omega_n = 0,7$	$\omega/\omega_n = 1,0$	$\omega/\omega_n = 1,4$
Correção (db)	+4,7	+8	+5

c) Construção da curva de relações de amplitudes:

Após traçarmos as assíntotas e lançarmos os valores das correções, a partir destas desenhamos manualmente a curva para obtermos o gráfico da relação de amplitudes, Figura 6.18.

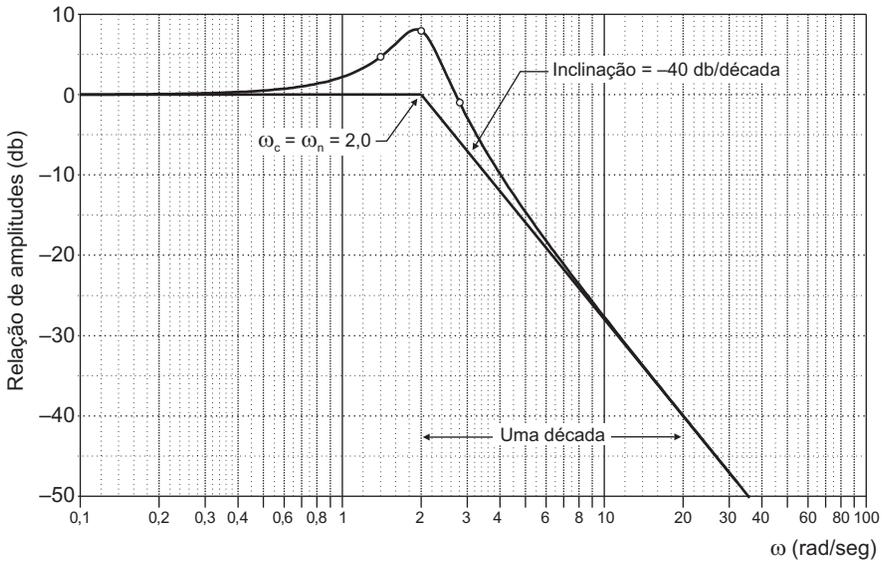


Figura 6.18 Relação de amplitudes em db de $\frac{1}{\frac{s^2}{2^2} + \frac{0,4}{2}s + 1}$.

6.4.6 – GRÁFICO EM db DO TERMO: $e^{-s\tau_{DT}}$

Vimos para a função de transferência do Tempo Morto $\frac{Q_o}{Q_i}(s) = e^{-s\tau_{DT}}$ que:

$$\frac{A_o}{A_i} = \left| \frac{Q_o}{Q_i}(i\omega) \right| = 1 \quad (6.56)$$

$$\phi = -\tau_{DT} \omega \quad (6.57)$$

Logo, a relação de amplitudes em *db* resulta:

$$\frac{A_o}{A_i} \Big|_{db} = 20 \log 1 = 0 \quad (6.58)$$

A Figura 6.19 mostra o gráfico de Bode normalizado do Tempo Morto. Observamos na figura que a relação de amplitudes é uma linha horizontal no *0 db* e a fase é uma curva.

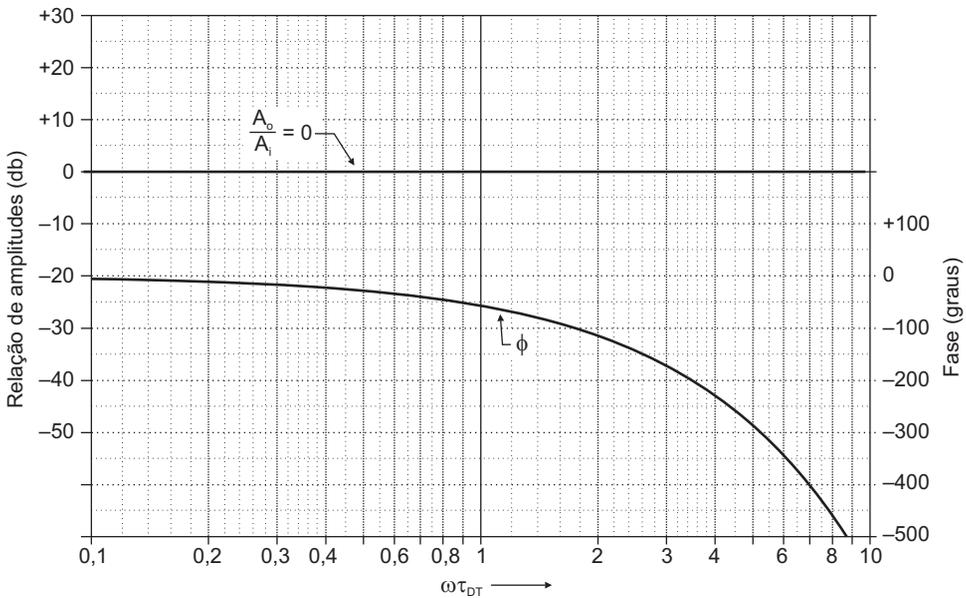


Figura 6.19 Gráfico normalizado da resposta em frequência do Tempo Morto, em mono-log.

6.5 – EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

A) Exercício 1: Sistema de 2ª Ordem Numerador

Determinar o gráfico da resposta em frequência da função de transferência:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \left[\frac{s^2}{16} + \frac{0,4}{4}s + 1 \right].$$

Resolução:

As curvas de correção da relação de amplitudes da Figura 6.16 e as da fase da Figura 6.17 se destinam a sistema de 2ª ordem denominador, mas podem ser utilizadas para sistemas de 2ª ordem numerador se invertermos todos os valores obtidos, isto é, multiplicarmos por -1 . Portanto, as Figuras 6.16 e 6.17 serão usadas neste exercício.

Agora, desenvolvendo a resolução temos:

a) 1º passo: Preparação da função de transferência em termos do ganho:

A função de transferência já está escrita em termos do ganho, pois o último termo do polinômio em s é igual a 1 . Neste exemplo temos o ganho $K = 1$.

b) 2º passo: Decomposição da função de transferência:

A função de transferência deste exemplo tem dois termos: o ganho e o sistema de 2ª ordem numerador. O ganho nunca influencia a fase e, como neste caso é igual a 1 , não influenciará também a relação de amplitudes. Portanto, a função de transferência será considerada como sendo formada por uma única função.

c) 3º passo: Determinar as frequências de corte e o fator de amortecimento:

Da função de transferência temos:

$$\omega_c = \omega_n = 4 \text{ rad / seg} \quad (6.59)$$

$$2\zeta = 0,4 \quad \therefore \quad \zeta = 0,2 \quad (6.60)$$

d) 4º passo: Escolha das escalas:

A determinação das escalas é feita a partir de uma rápida prévia do gráfico. É claro que a experiência ajuda muito nessa tarefa.

Temos três escalas para definir: a da frequência, a da relação de amplitudes e a da fase.

Com relação ao “eixo x”, o da frequência, a escala deve cobrir uma década antes da frequência de corte até uma década após. Neste exercício temos uma só frequência de corte ($\omega_c = 4 \text{ rad/seg}$), portanto, é satisfatório elaborar o gráfico em um papel mono-log de 3 décadas, fazendo a frequência $\omega = (0,1 \omega_c) = 0,4 \text{ rad/seg}$ cair na primeira década, a frequência de corte $\omega_c = 4 \text{ rad/seg}$, na segunda e $\omega = (10\omega_c) = 40 \text{ rad/seg}$, na terceira. Conseqüentemente, o gráfico deve começar com a frequência $\omega = 0,1 \text{ rad/seg}$, Figura 6.20.

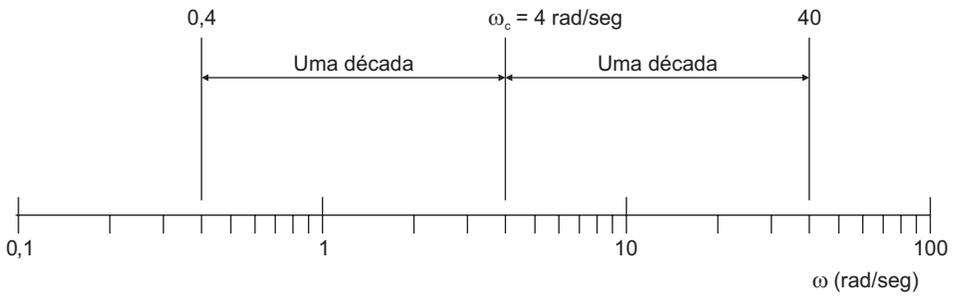


Figura 6.20 Determinação da escala de ω ("eixo x").

Quanto à escolha da escala da relação de amplitudes, é necessário fazer uma pré-avaliação das suas variações. A investigação deve focalizar três regiões: (i) a de baixas frequências; (ii) em torno de ω_c e (iii) a região de altas frequências. São nessas regiões que os máximos ou mínimos podem ocorrer.

Para investigar as três regiões fazemos um esboço das assíntotas, lembrando que a segunda assíntota tem inclinação positiva (+ 40 db/década).

Com base na Figura 6.16 detectamos que na região em torno de ω_c o pico será negativo com valor um pouco acima de -10 db, Figura 6.21.

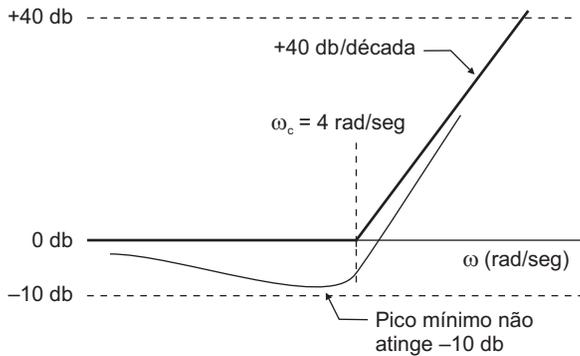


Figura 6.21 Esboço da relação de amplitudes delimitando o intervalo importante das variações.

Diante dessas observações definimos o canto superior esquerdo como sendo +50 db, e adotando para as linhas da grade principal uma variação de 10 decibéis, determinamos a posição do 0 db, Figura 6.22.

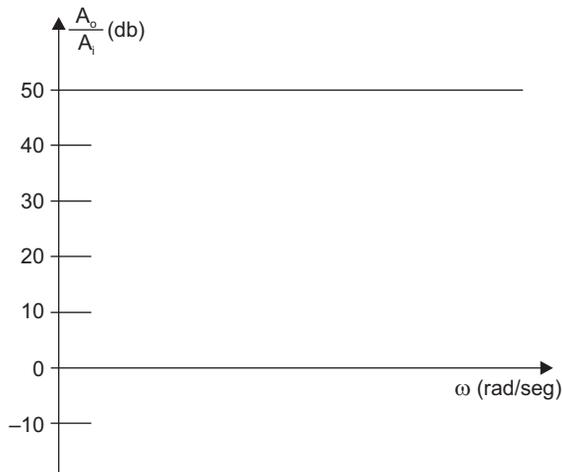


Figura 6.22 Definição da escala e da linha 0 db para a relação de amplitudes.

A última escala a ser definida é a da fase. Neste caso a avaliação dos limites e a escolha da escala nem sempre são satisfatórias na primeira tentativa.

Quando temos uma função de transferência com diversos termos (por exemplo, a equação 6.28), portanto, com mais de uma frequência de corte, os máximos e mínimos da fase podem depender das distâncias entre as frequências de corte do numerador e do denominador.

Um procedimento conservador seria analisar os limites das fases do numerador e denominador quando ω tende para infinito. É absolutamente certo que a curva da fase ficará dentro desse intervalo delimitado por esses respectivos valores.

No caso deste exemplo temos um sistema de 2ª ordem numerador, então, para $\omega \rightarrow \infty$ a fase do numerador tende para $+180^\circ$ e a fase do denominador é sempre 0° . Logo, é garantido que a curva ficará dentro desse intervalo, isto é, de 0° a $+180^\circ$. O esboço da Figura 6.23 ilustra esse comportamento.

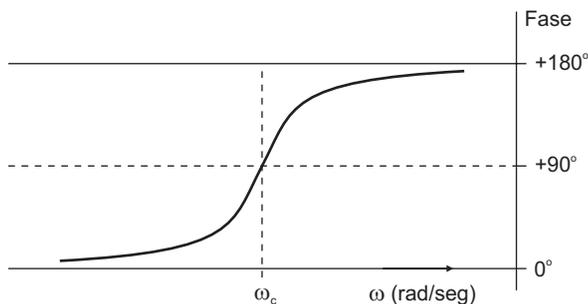


Figura 6.23 Esboço da variação da fase.

Lembrando que é recomendável trabalhar em gráficos com divisões decimais, para a definição desta escala consideraremos um intervalo de 0° a 200° . Assim, definimos o canto inferior direito como sendo -50° , e considerando para as linhas da grade principal uma variação de 50 graus, determinamos a posição do 0° , Figura 6.24.

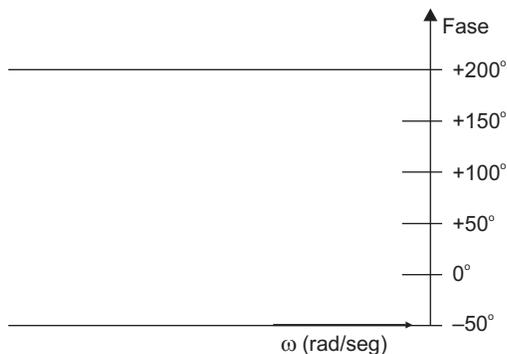


Figura 6.24 Definição da escala e da linha “ 0° ” para a fase.

e) **5º passo:** Traçado das retas assíntotas:

O gráfico das assíntotas é imediato porque neste caso temos apenas uma função, ou seja, apenas duas assíntotas.

f) **6º passo:** Determinar as correções e os ângulos de fase.

Na determinação das correções e fase precisamos inicialmente definir a quantidade de pontos e os valores das frequências.

É interessante escolher um número ímpar de pontos, considerando quantidades iguais de pontos antes e depois de ω_c . Neste exercício aplicaremos a quantidade mínima aceitável, isto é, três pontos.

Com a quantidade definida, devemos observar as curvas de correções (Figura 6.13 ou 6.16) para escolher em que frequências as correções serão determinadas, sendo que uma delas é sempre ω_c . Neste exemplo escolhemos $\omega = 0,7\omega_c$ e $\omega = 1,4\omega_c$, entendendo que estes valores proporcionam um espalhamento satisfatório.

Um outro aspecto refere-se à organização das correções e fases. O trabalho de determinação das correções e fases pode ter diversos encaminhamentos, mas recomendamos o uso de tabela porque facilita o cálculo e deixa os dados mais organizados para consulta, Tabela 6.7.

Tabela 6.7 Dados das correções e ângulos de fase para $\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \left[\frac{s^2}{16} + \frac{0,4}{4}s + 1 \right]$.

$\omega = 2,8 \text{ rad/seg}$		$\omega = 4,0 \text{ rad/seg}$		$\omega = 5,6 \text{ rad/seg}$	
$\omega/\omega_n = 0,7$		$\omega/\omega_n = 1,0$		$\omega/\omega_n = 1,4$	
db	ϕ	db	ϕ	db	ϕ
-4,7	+29°	-8	+90°	-5	+150°

g) 7º passo: Lançamento dos pontos e desenho da curva:

Lançando os dados das correções e da fase e desenhando manualmente as curvas obtemos o gráfico da resposta em frequência, Figura 6.25.

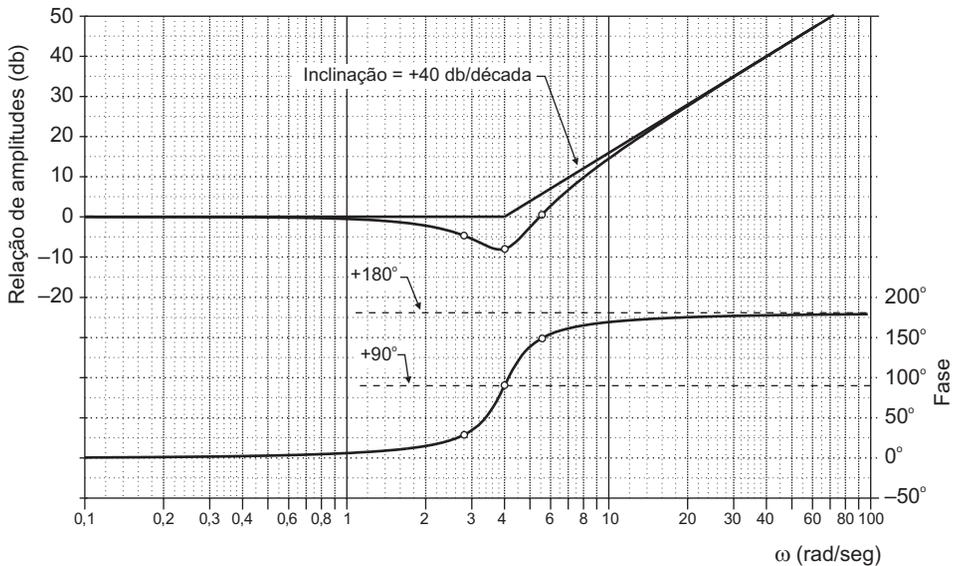


Figura 6.25 Gráfico da resposta em frequência de $\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \left[\frac{s^2}{16} + \frac{0,4}{4}s + 1 \right]$.

B) Exercício 2: Sistema $\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \left[\frac{8192s}{(10s+8)(10s^2+6,4s+102,4)} \right]$

Resolução:

a) 1º passo: Preparação da função de transferência em termos do ganho:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{\left[\frac{8192}{8 \times 102,4} \right]^s}{\left(\frac{10}{8} s + 1 \right) \left(\frac{s^2}{102,4} + \frac{6,4}{102,4} s + 1 \right)} = \frac{10s}{(1,25s + 1) \left(\frac{s^2}{3,2^2} + \frac{0,2}{3,2} s + 1 \right)} \quad (6.61)$$

b) 2º passo: Decomposição da função de transferência:

A função de transferência deste exemplo é composta pelos seguintes termos:

– Função nº 1: Ganho = 10;

– Função nº 2: Derivador = s ;

– Função nº 3: Sistema de 1ª Ordem = $\frac{1}{(1,25s + 1)}$;

– Função nº 4: Sistema de 2ª Ordem = $\frac{1}{\left(\frac{s^2}{3,2^2} + \frac{0,2}{3,2} s + 1 \right)}$.

c) 3º passo: Determinar as frequências de corte e o fator de amortecimento:

Temos duas frequências de corte, uma para a função nº 3 e outra para a nº 4.

Então:

Da função nº 3:

$$\omega_{c1} = \left(\frac{1}{\tau} \right) = \frac{1}{1,25} = 0,8 \text{ rad/seg} \quad (6.62)$$

Da função nº 4:

$$\omega_{c2} = \omega_n = 3,2 \text{ rad/seg} \quad (6.63)$$

$$2\zeta = 0,2 \quad \therefore \quad \zeta = 0,1 \quad (6.64)$$

d) 4º passo: Determinação das escalas:

A Figura 6.26 mostra uma rápida prévia do gráfico para a escolha das escalas da frequência e da relação de amplitudes, considerando cada uma das funções que compõe a função de transferência.

Observando os gráficos (b) e (c) da Figura 6.26 vemos que, a partir de $0,8 \text{ rad/seg}$, a inclinação de $+20 \text{ db/década}$ se cancela com a de -20 db/década . Isto significa que, acima de $0,8 \text{ rad/seg}$, as funções nº 2 e nº 3 não proporcionam acréscimo (ou diminuição) na relação de amplitudes. Este cancelamento ocorre próximo de 1 rad/seg , portanto, próximo do 0 db .

Dos gráficos (a) e (d) vemos que o pico da relação de amplitudes poderá ter um valor da ordem de $+34 \text{ db}$ e ocorrerá na região próxima a $3,2 \text{ rad/seg}$. Desta forma, definimos o canto superior esquerdo da escala como sendo $+50 \text{ db}$, e adotando para as linhas da grade principal uma variação de 10 db , determinamos a posição do 0 db , Figura 6.27.

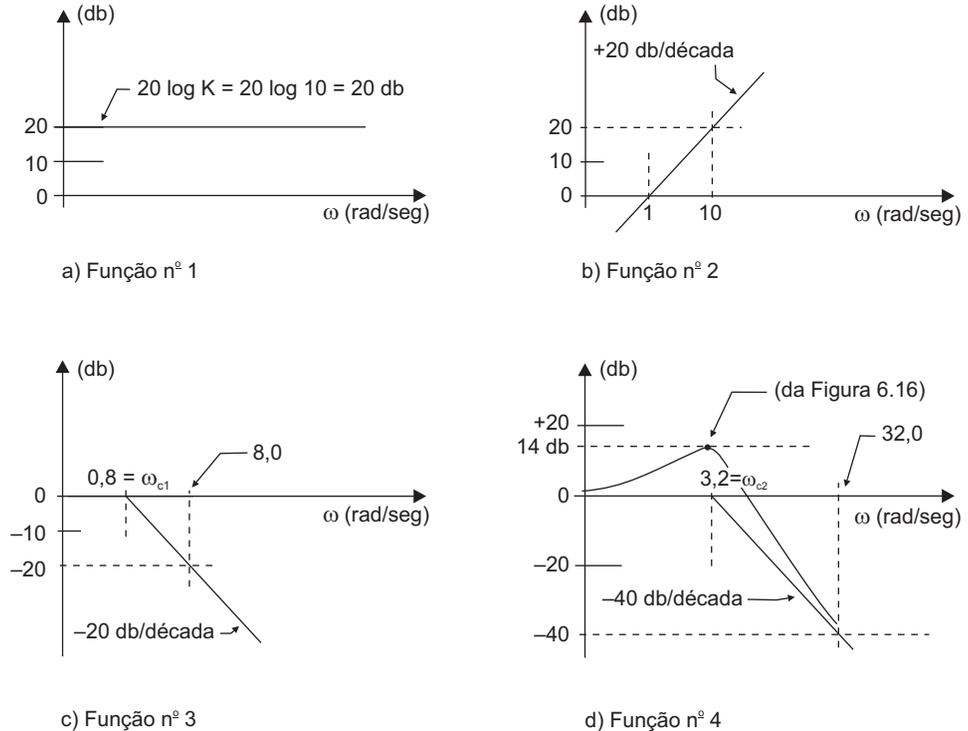


Figura 6.26 Esboço das relações de amplitudes dos termos que compõem a função de transferência.

Quanto à escala do eixo da frequência, a Figura 6.26 assinala três frequências importantes: 1 ; $0,8$; e $3,2 \text{ rad/seg}$. Adotando o critério de uma década antes da menor e uma década após a maior, o gráfico deve cobrir uma faixa de $0,08$ a 32 rad/seg . Logo, optamos por escolher um papel mono-log com 4 décadas, para iniciar com a frequência de $0,01 \text{ rad/seg}$ indo até 100 rad/seg , Figura 6.27.

A última escala refere-se à da fase. Para ω tendendo a infinito temos a fase do numerador tendendo a $+90^\circ$ e a fase do denominador a -270° . Portanto, é certo que a curva da fase ficará dentro de um intervalo de -270° a $+90^\circ$. A escala poderia ser adotada com base neste intervalo, contudo, neste exemplo temos um derivador, o que permite acurar a faixa de variação da fase. O derivador tem fase constante $+90^\circ$, independentemente da frequência, portanto, é evidente que a fase variará de $+90^\circ$ a

-180° . Desta forma, definimos o canto inferior direito como sendo -200° , e considerando para as linhas da grade principal uma variação de 50° , determinamos a posição do 0° , Figura 6.27.

e) 5º passo: Traçado das retas assíntotas:

O gráfico das retas relativas às funções nº 1 e nº 2, assim como o das assíntotas relativas às funções nº 3 e nº 4 estão traçadas na Figura 6.27.

A soma (retas + assíntotas) também está ilustrada na Figura 6.27.

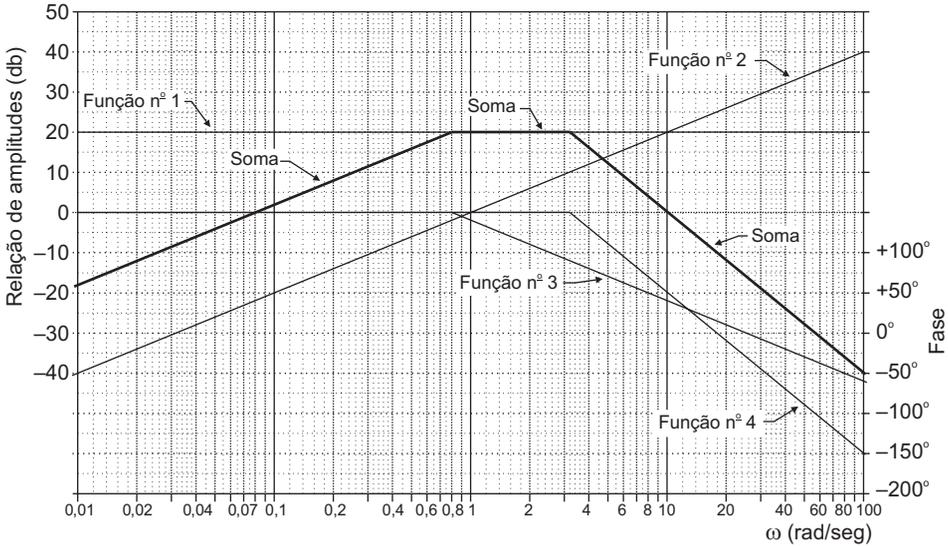


Figura 6.27 Escalas, retas, assíntotas e a soma resultante para a função de transferência:

$$\frac{10s}{(1,25s+1)\left(\frac{s^2}{3,2^2} + \frac{2 \times 0,1}{3,2}s + 1\right)}$$

f) 6º passo: Determinar as correções e os ângulos de fase:

As frequências de corte $\omega_{c1} = 0,8 \text{ rad/seg}$ e $\omega_{c2} = 3,2 \text{ rad/seg}$, juntamente com a Tabela 6.2 e as Figuras 6.13, 6.14, 6.16 e 6.17, auxiliam na escolha das frequências para as correções e os ângulos de fase. Os valores escolhidos foram: $0,4$; $0,8$; $1,6$; $3,2$; e $4,8 \text{ rad/seg}$. A Tabela 6.8 contém as correções e fases para estas respectivas frequências.

Tabela 6.8 Dados das correções e ângulos de fase para

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{10s}{(1,25s+1)\left(\frac{s^2}{3,2^2} + \frac{2 \times 0,1}{3,2}s + 1\right)}$$

Função n	$\omega = 0,4 \text{ rad/seg}$		$\omega = 0,8 \text{ rad/seg}$		$\omega = 1,6 \text{ rad/seg}$		$\omega = 3,2 \text{ rad/seg}$		$\omega = 4,8 \text{ rad/seg}$	
	$\omega\tau = 0,5$		$\omega\tau = 1,0$		$\omega\tau = 2,0$		$\omega\tau = 4,0$		$\omega\tau = 6,0$	
	$\omega/\omega_n = 0,125$		$\omega/\omega_n = 0,25$		$\omega/\omega_n = 0,5$		$\omega/\omega_n = 1,0$		$\omega/\omega_n = 1,5$	
	db	ϕ								
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	+90	0	+90	0	+90	0	+90	0	+90
3	-1	-26,6	-3	-45	-1	-63,4	-0,25	-76	-0,1	-81
4	0	-1	+0,5	-3	+2,5	-7	+14	-90	+5	-165
Σ	-1	+62,4	-2,5	+42	+1,5	+19,6	+13,75	-76	+4,9	-156

g) 7ª passo: Lançamento dos pontos e desenho da curva:

Após lançar os dados das correções e fase desenhamos as curvas para obter o gráfico da resposta em frequência, Figura 6.28.

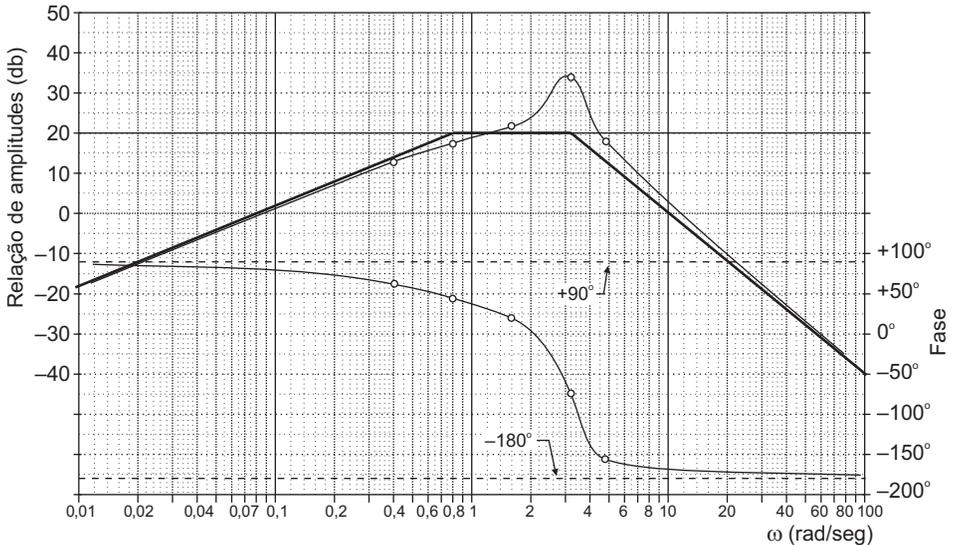


Figura 6.28 Gráfico da resposta em frequência de $\frac{10s}{(1,25s+1)\left(\frac{s^2}{3,2^2} + \frac{2 \times 0,1}{3,2}s + 1\right)}$.

6.6 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

EX1 – Determine analiticamente a relação de amplitudes e o ângulo de fase (em *rad*) de:

$$a) \frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{10s}{(0,1s+1)}, \text{ para } \omega = 10 \text{ rad/seg};$$

$$b) \frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{s^2(0,02s+1)}{2\left[\frac{s^2}{3^2} + \frac{2 \times 0,2s}{3} + 1\right]}, \text{ para } \omega = 8 \text{ rad/seg}.$$

EX2 – No sistema da Figura E6.1 pretende-se mudar a massa $M = 2 \text{ kg}$ para $M = 8 \text{ kg}$. Determine percentualmente quanto diminuirá (ou aumentará) a amplitude de x_o . Sabe-se que $x_i(t) = [1,5 \times 10^{-3} \text{ sen}(4,8t)]m$.

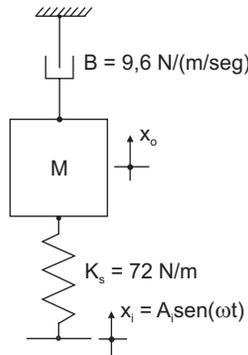


Figura E6.1

EX3 – Um sistema massa–mola–amortecedor sofre a ação de uma força excitadora periódica de amplitude 120 N e de frequência 12 rad/seg , Figura E6.2.

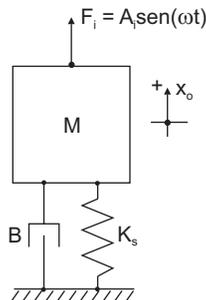


Figura E6.2

O sistema tem $M = 60 \text{ kg}$, $B = 480 \text{ Nseg/m}$ e $K_s = 24000 \text{ N/m}$. Acredita-se que mudando a mola para uma outra com $K_s = 6000 \text{ N/m}$ ocorrerá diminuição da amplitude de M .

Pede-se:

- Calcular as amplitudes (em milímetros) da vibração (da solução permanente) de M para ambos os casos.
- Com o objetivo de diminuir a amplitude de M , dizer se é recomendável trocar a mola para $K_s = 6000 \text{ N/m}$.

EX4 – Para o sistema da Figura E6.3, qual é a frequência de $x(t)$ que produzirá um deslocamento mínimo da massa M_1 ?

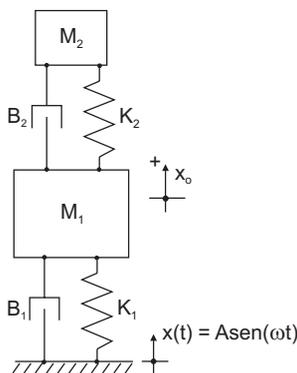


Figura E6.3

EX5 – O dispositivo da Figura E6.4 foi construído para fazer a plataforma vibrar. A plataforma sempre vibra com uma amplitude igual a $4,0 \text{ mm}$ e com frequência ω igual à frequência (rotação) do motor do dispositivo. Um processo industrial necessita que a massa m vibre com uma amplitude cujo valor seja o mais próximo possível de $3,5 \text{ mm}$. Como o motor tem regulagem discreta (vide Tabela E6.1), determine qual é a regulagem (rotação do motor) recomendada.

Dados: $B = 2513,27 \text{ Nseg/m}$, $m = 40 \text{ kg}$ e $K_s = 109662,3 \text{ N/m}$.

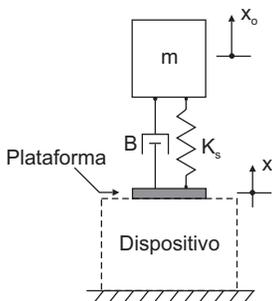


Figura E6.4

Tabela E6.1

Regulagem n°	Rotação do motor (rpm)
1	600
2	800
3	1000
4	1200
5	1400

EX6 – Faça o gráfico da resposta em frequência (em papel mono-log 3 décadas) da função de transferência abaixo. Os cálculos das correções da relação de amplitudes e das fases deverão ser efetuados pelo menos para as cinco frequências: 2,5; 5; 8; 10; e 16 rad/seg. Organize o cálculo das correções da relação de amplitudes e da fase conforme Tabela E6.2 abaixo.

Considere as funções: n° 1 = ganho; n° 2 = sistema de 1ª ordem; e n° 3 = integrador.

A função de transferência é:
$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{17,78278(0,125s + 1)}{s}$$

Tabela E6.2

Função n°	$\omega = 2,5$ rad/seg		$\omega = 5$ rad/seg		$\omega = 8$ rad/seg		$\omega = 10$ rad/seg		$\omega = 16$ rad/seg	
	$\omega\tau =$		$\omega\tau =$		$\omega\tau =$		$\omega\tau =$		$\omega\tau =$	
	db	ϕ	db	ϕ	db	ϕ	db	ϕ	db	ϕ
1										
2										
3										
Σ										

EX7 – Determine a resposta em frequência (em db) de um sistema cuja função

de transferência é:
$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{0,69464(s^2 + 3,2s + 64)}{s(s + 2,5)}$$

Para elaborar o gráfico, use papel mono-log de 3 décadas. As correções e as fases deverão ser determinadas pelo menos para as oito frequências: 1,0; 2,5; 5,0; 8,0; 10,0; 16,0; 20,0; e 40,0 rad/seg.

Organize o cálculo das correções da relação de amplitudes e da fase em uma tabela.

Considere as funções: n^o 1 = ganho; n^o 2 = sistema de 2^a ordem, n^o 3 = integrador; e n^o 4 = sistema de 1^a ordem.

EX8 – Para o sistema da Figura E6.5, determine a resposta em frequência da função de transferência $\frac{X}{Y}(s)$. Os coeficientes são: $B = 24 \text{ Nseg/m}$ e $m = 3 \text{ kg}$.

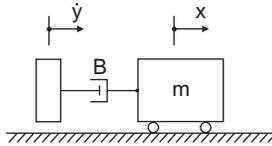


Figura E6.5

ESTUDO DA RESPOSTA USANDO O MÉTODO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

7.1 – RESPOSTA À ENTRADA IMPULSO

Suponha que $\delta_+(t)$ seja a entrada de um sistema com função de transferência $W(s)$, Figura 7.1.

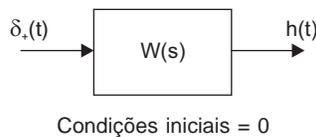


Figura 7.1 Resposta de um sistema quando a entrada é $\delta_+(t)$.

Definimos a resposta à entrada impulso como sendo $h(t)$, ou seja:

$h(t) \triangleq$ resposta à entrada impulso (*weighting function*).

Lembrando que a definição de função de transferência é a relação entre a transformada da saída e a transformada da entrada, podemos escrever:

$$W(s) = \frac{\mathcal{L}[h(t)]}{\mathcal{L}[\delta_+(t)]} \quad (7.1)$$

Então:

$$\mathcal{L}[h(t)] = W(s) \mathcal{L}[\delta_+(t)] \quad (7.2)$$

Como a transformada de $\delta_+(t)$ é igual à unidade, chegamos a um importante resultado: a Transformada de Laplace da resposta do impulso é igual à função de transferência do sistema. Matematicamente:

$$\mathcal{L}[h(t)] = W(s) \quad (7.3)$$

Ilustrando esta equação através de um exemplo, vamos supor que o sistema seja um integrador. Sabemos que a função de transferência de um integrador é $W(s) = \frac{1}{s}$. Por outro lado, vimos no Capítulo 4 que a integral da função impulso unitário $\delta_+(t)$ é a função degrau unitário $u_+(t)$. Portanto, a transformada da resposta

é igual à função de transferência, ou seja, $h(t) = u_+(t)$ e $\mathcal{L}[h(t)] = W(s) = \frac{1}{s}$, Figura 7.2.

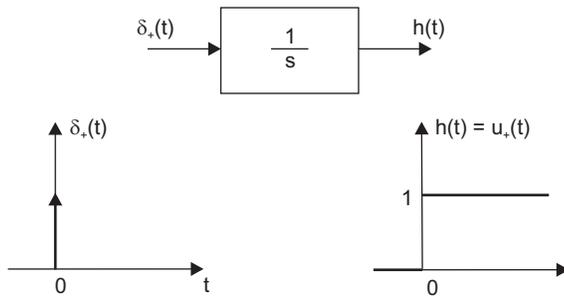


Figura 7.2 Função $h(t)$ sendo $W(s) = \frac{1}{s}$.

7.2 – RESPOSTA A UMA ENTRADA ARBITRÁRIA

Suponha que $q_i(t)$ seja uma entrada arbitrária aplicada a um sistema linear. A saída $q_o(t)$ pode ser determinada usando a definição de função de transferência e a transformada inversa de Laplace. Assim:

$$Q_o(s) = W(s) Q_i(s) \quad (7.4)$$

Calculando a transformada inversa usando o teorema da convolução (vide seção 4.9) vem:

$$q_o(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)Q_i(s)] = \int_{0^+}^t h(\tau)q_i(t-\tau)d\tau = \int_{0^+}^t q_i(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (7.5)$$

Nesta equação vemos uma das aplicações da função $h(t)$; pois, se a função $h(t)$ for conhecida (teórica ou experimentalmente), podemos determinar a função $q_o(t)$ para um dado $q_i(t)$.

Se $q_i(t)$ e $h(t)$ forem expressões matemáticas, podemos encontrar $q_o(t)$ analiticamente.

Se $q_i(t)$ e/ou $h(t)$ forem dadas em forma gráfica ou em tabelas (dados experimentais), então podemos computar $q_o(t)$ numericamente, ponto por ponto.

Por exemplo, das funções $h(t)$ e $q_i(t)$ da Figura 7.3 e de um valor de t , seja $t = t_1$, determinamos o valor $q_o(t_1)$, Figura 7.4. Repetindo o processo para t_2, t_3, t_4, \dots obtemos o gráfico de $q_o(t)$, Figura 7.5.

Devemos salientar que a equação 7.5 pode ser implementada gráfica ou numericamente através de calculadora ou computador.

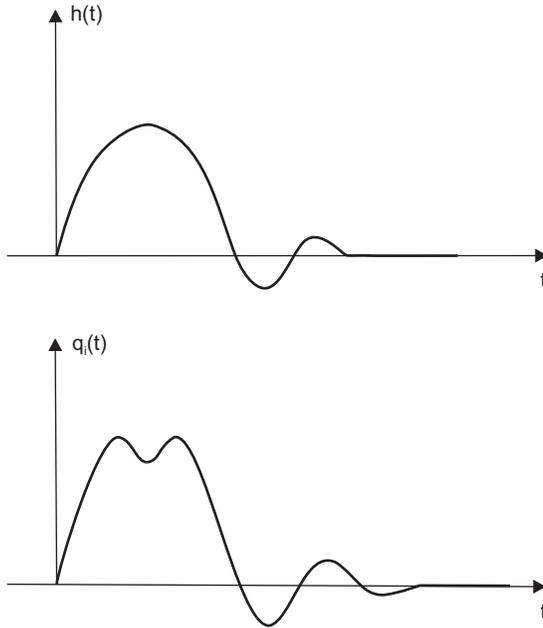


Figura 7.3 Funções $h(t)$ e $q_i(t)$ usadas para exemplificar o cálculo de $q_o(t)$.

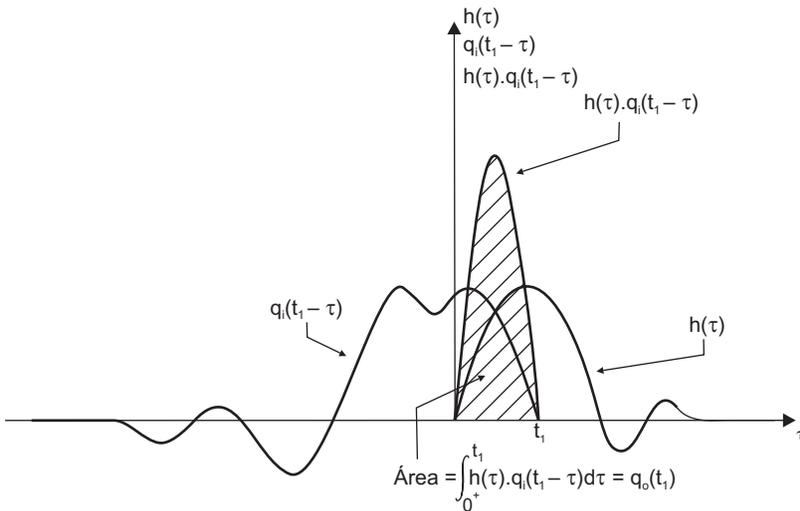


Figura 7.4 Ilustração gráfica da determinação de $q_o(t_1)$, considerando as funções $h(t)$ e $q_i(t)$ da Figura 7.3.

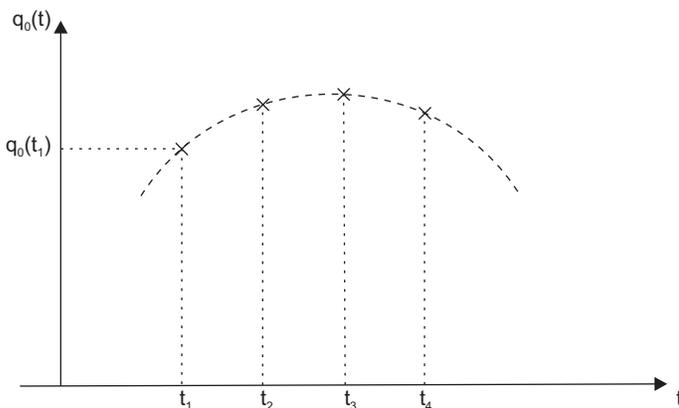


Figura 7.5 Determinação gráfica de $q_o(t)$.

7.3 – RESPOSTA DO “IMPULSO APROXIMADO”

Chamamos de “impulso aproximado” aquele impulso que pode ser realizado fisicamente. É bastante comum o “impulso aproximado” ser chamado de *pulso*.

O estudo da resposta do impulso aproximado é feito usando a integral de convolução (seção 4.9), primeiro para o impulso perfeito e depois para o aproximado.

7.3.1 – RESPOSTA DO IMPULSO PERFEITO COM ÁREA A_p

Seja $q_o(t)$ a resposta do sistema à entrada $A_p \delta_+(t)$, um impulso perfeito cuja área é igual a A_p , Figura 7.6.

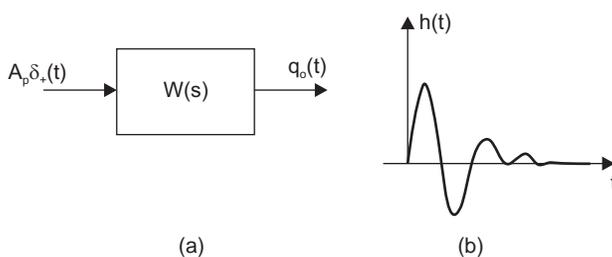


Figura 7.6 (a) Sistema com entrada $A_p \delta_+(t)$. (b) Função $h(t)$ do sistema.

Aplicando a equação 7.5, em que neste caso $q_i(t) = A_p \delta_+(t)$, obtemos:

$$q_o(t) = \int_{0^+}^t h(\tau) A_p \delta(t - \tau) d\tau \quad (7.6)$$

Considerando a função $h(t)$ da Figura 7.6 podemos fazer a representação gráfica da equação 7.6, Figura 7.7.

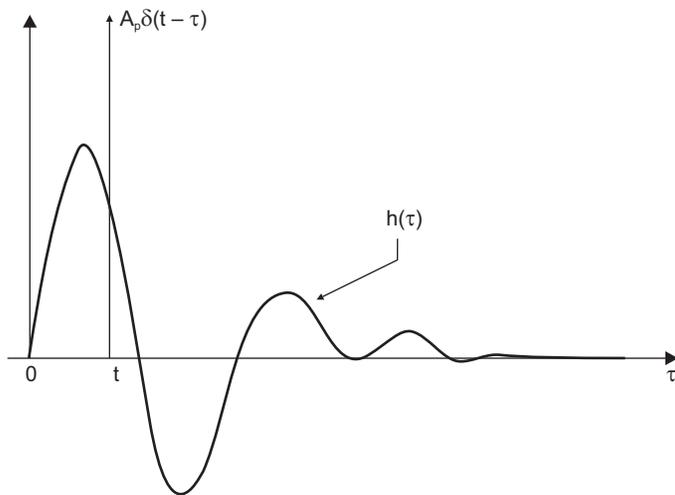


Figura 7.7 Representação das funções $A_p \delta(t - \tau)$ e $h(\tau)$.

Desenvolvendo a equação 7.6 resulta:

$$q_o(t) = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} h(\tau) A_p \delta(t - \tau) d\tau = h(t) A_p \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \delta(t - \tau) d\tau \quad (7.7)$$

Definindo uma variável auxiliar x , tal que $x \triangleq t - \tau$, então:

$$q_o(t) = h(t) A_p \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx \quad (7.8)$$

Como a integral é igual à unidade, então:

$$q_o(t) = A_p h(t) \quad (7.9)$$

Portanto, a mudança da área do impulso perfeito causa mudança proporcional nas ordenadas da resposta do sistema.

7.3.2 – RESPOSTA DO IMPULSO APROXIMADO COM ÁREA A_p

Seja a entrada de um sistema, o impulso aproximado $\delta_a(t)$ cuja duração é Δt_p e sua área igual a A_p , Figura 7.8.

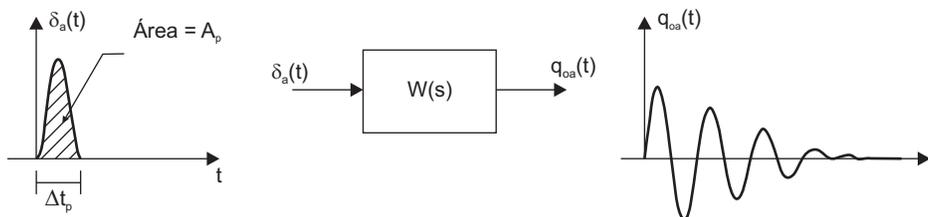


Figura 7.8 Exemplo de funções $\delta_a(t)$ e $q_{oa}(t)$.

A resposta $q_{oa}(t)$ ao impulso aproximado $\delta_a(t)$ pode ser determinada através da equação 7.5. Portanto:

$$q_{oa}(t) = \int_{0^+}^t h(\tau) \delta_a(t - \tau) d\tau \quad (7.10)$$

Para resolver a equação 7.10 podemos examinar o gráfico de $\delta_a(t - \tau)$ em relação ao gráfico de $h(\tau)$, Figura 7.9.

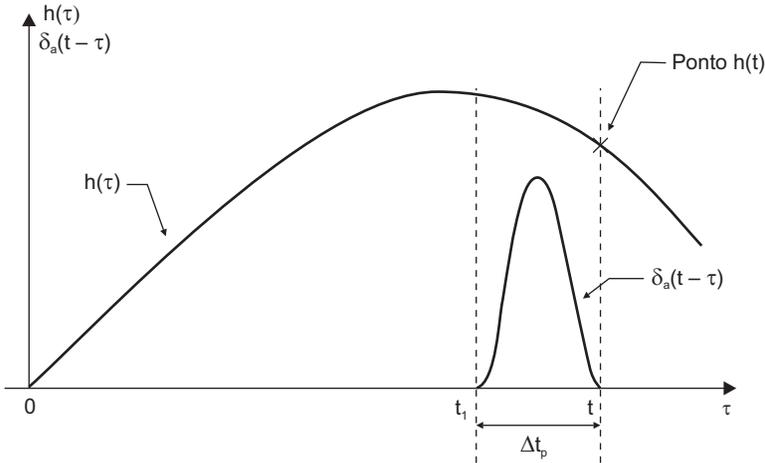


Figura 7.9 Representação gráfica de $h(\tau)$ e $\delta_a(t - \tau)$.

Se Δt_p for bastante “pequeno” e $h(\tau)$ bastante “lento” a ponto de ser praticamente constante de t_1 a t , tal que $h(t_1) \approx h(t)$, então podemos considerar $h(t)\delta_a(t - \tau)$ uma boa aproximação para a função produto $h(\tau)\delta_a(t - \tau)$. Neste caso, a (7.10) fica:

$$q_{oa}(t) \approx h(t) \int_{t_1}^t \delta_a(t - \tau) d\tau \quad (7.11)$$

ou

$$q_{oa}(t) \approx A_p h(t) \quad (7.12)$$

Comparando as equações 7.9 e 7.12 concluímos que é possível realizar na prática o teste de impulso, com uma boa aproximação, se o pulso for “rápido” em relação à resposta do sistema. Sob o ponto de vista geral, podemos fazer as seguintes observações:

- (i) “Sistemas leves” exigem pulsos de curta duração para produzir resultados com boa aproximação, Figura 7.10.
- (ii) “Sistemas pesados” podem tolerar pulsos de “longa” duração e ainda permitir resultados com boa aproximação, Figura 7.11.
- (iii) “Sistemas leves” com pulsos de longa duração levam a resultados errados, Figura 7.12.

Observamos através da Figura 7.12 que, se $h(\tau)$ for rápido e $\delta_a(t - \tau)$ for de longa duração, a equação 7.12 não é válida, ou seja:

$$q_{oa}(t) \neq A_p h(t) \quad (7.13)$$

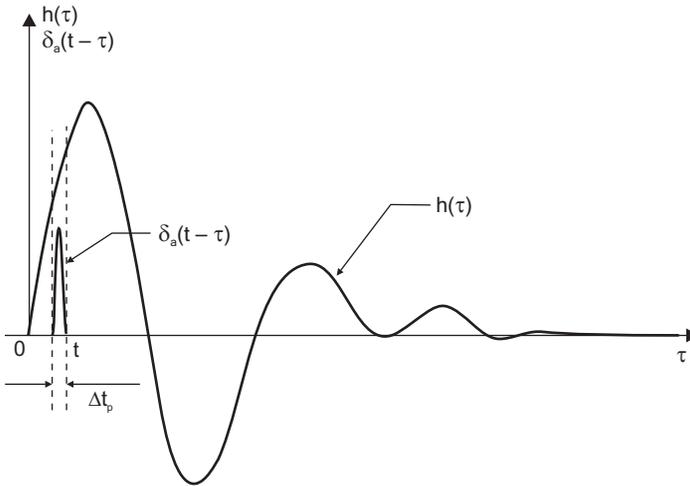


Figura 7.10 A função $\delta_a(t - \tau)$ precisa ser de curta duração quando $h(\tau)$ é rápido.

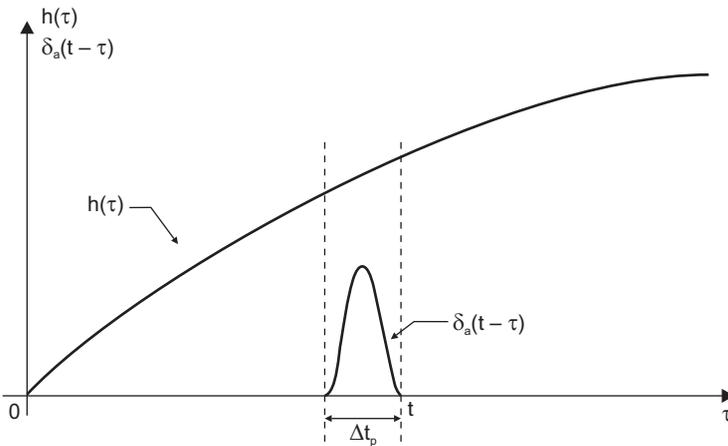


Figura 7.11 A função $\delta_a(t - \tau)$ pode ser de "longa" duração quando $h(\tau)$ é lento.

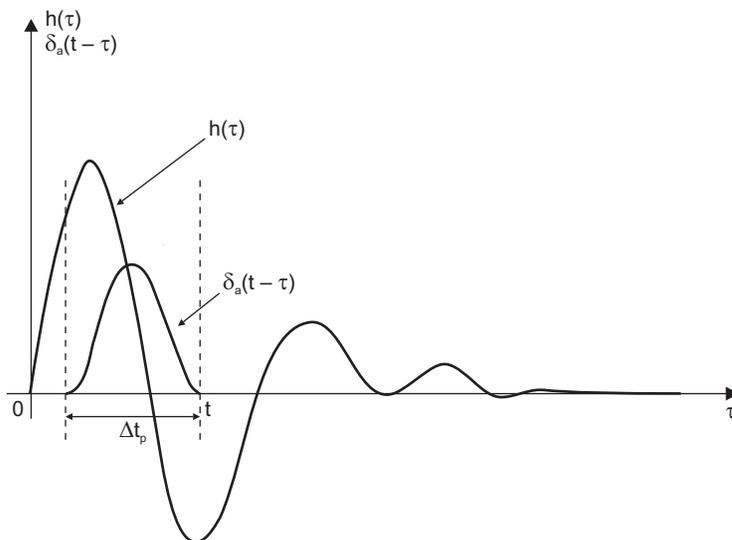


Figura 7.12 A função $\delta_a(t - \tau)$ de longa duração com $h(\tau)$ rápido leva a resultados errados quando usamos a equação 7.12.

7.4 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA (RF)

O estudo de Resposta em Frequência está desenvolvido no Capítulo 6.

Vimos no Capítulo 6 que Resposta em Frequência de um sistema linear foi definida considerando a entrada senoidal e a resposta senoidal do regime permanente do sistema. Esta resposta senoidal é observada após todos os transientes desaparecerem.

Para um dado sistema linear, Figura 7.13, devemos escolher o par entrada e saída de interesse. Fazemos a entrada escolhida $q_i(t)$ ser senoidal e observamos a resposta escolhida em regime permanente $q_{op}(t)$ que também será senoidal, Figura 7.14.

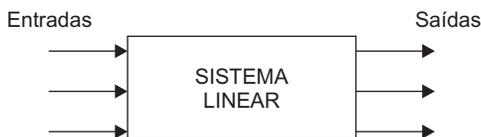


Figura 7.13 Sistema com diversas entradas e diversas saídas.

Lançando em gráfico a Relação de Amplitudes e o Ângulo de Fase, em função da frequência, obtemos o gráfico da Resposta em Frequência do sistema, Figura 7.15.

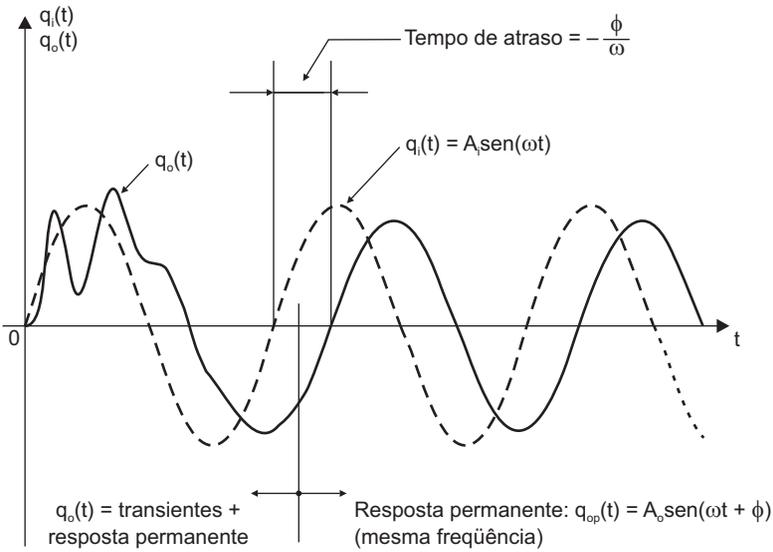


Figura 7.14 Gráfico da entrada $q_i(t) = A_i \text{sen}(\omega t)$ e da saída $q_o(t)$.

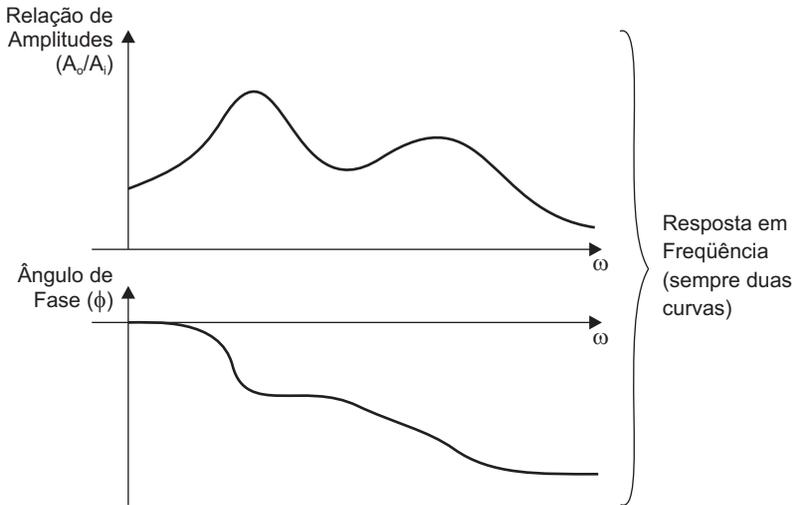


Figura 7.15 Resposta em Frequência.

A Resposta em Frequência de um sistema com função de transferência $W(s)$ pode ser determinada analiticamente por três métodos. São eles:

- (i) Resolvendo a equação diferencial pelos métodos clássicos e então encontrando $q_{op}(t) = A_o \text{sen}(\omega t + \phi)$.
- (ii) Resolvendo a equação diferencial usando a Transformada de Laplace e então encontrando $q_{op}(t) = A_o \text{sen}(\omega t + \phi)$.
- (iii) Substituindo s (Variável de Laplace) por $i\omega$. Este método é o mais conveniente.

Quando substituimos s por $i\omega$, $W(i\omega)$ torna-se uma função complexa. Esta função complexa tem módulo igual $|W(i\omega)|$ e fase¹ $\phi = \angle W(i\omega)$ e é possível mostrar que:

$$\begin{cases} |W(i\omega)| = \frac{A_o}{A_i} = \text{relação de amplitudes} \\ \angle W(i\omega) = \phi = \text{ângulo de fase} \end{cases} \quad (7.14)$$

7.5 – RELAÇÃO ENTRE A RESPOSTA DO IMPULSO E A RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

7.5.1 – DETERMINAÇÃO DA RF QUANDO A RESPOSTA DO IMPULSO É CONHECIDA

Considerando que a resposta do impulso $h(t)$ de um sistema $W(s)$ seja conhecida (expressão analítica ou dados experimentais), podemos determinar a Resposta em Frequência da seguinte maneira:

$$W(s) = \mathcal{L} [h(t)] = \int_{0^+}^{\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (7.15)$$

Substituindo s por $i\omega$ e usando a equação de Euler (equação A.5) vem:

$$W(i\omega) = \int_{0^+}^{\infty} h(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{0^+}^{\infty} h(t) \text{sen}(\omega t) dt \quad (7.16)$$

ou

$$W(i\omega) = a - ib = \sqrt{a^2 + b^2} \angle \text{arctg}(-b/a) \quad (7.17)$$

em que:

$$a \triangleq \int_{0^+}^{\infty} h(t) \cos(\omega t) dt;$$

$$b \triangleq \int_{0^+}^{\infty} h(t) \text{sen}(\omega t) dt;$$

$$\angle \text{arctg}(-b/a) \triangleq \text{fase de } (a - ib).$$

1. O símbolo “ \angle ” significa ângulo.

Se $h(t)$ é uma expressão matemática conhecida, então as integrais da equação 7.16 podem ser resolvidas analiticamente e uma expressão para $W(i\omega)$ é determinada. Através desta $W(i\omega)$ encontramos a Resposta em Freqüência.

Se não temos a expressão matemática de $h(t)$ mas sim o gráfico de $h(t)$ (obtido de experimentos), a Resposta em Freqüência $W(i\omega)$ pode ser determinada gráfica ou numericamente, mas nenhuma expressão para $W(i\omega)$ é obtida diretamente. A determinação gráfica ou numérica de $W(i\omega)$ é feita ponto por ponto, conforme ilustrada na Figura 7.16.

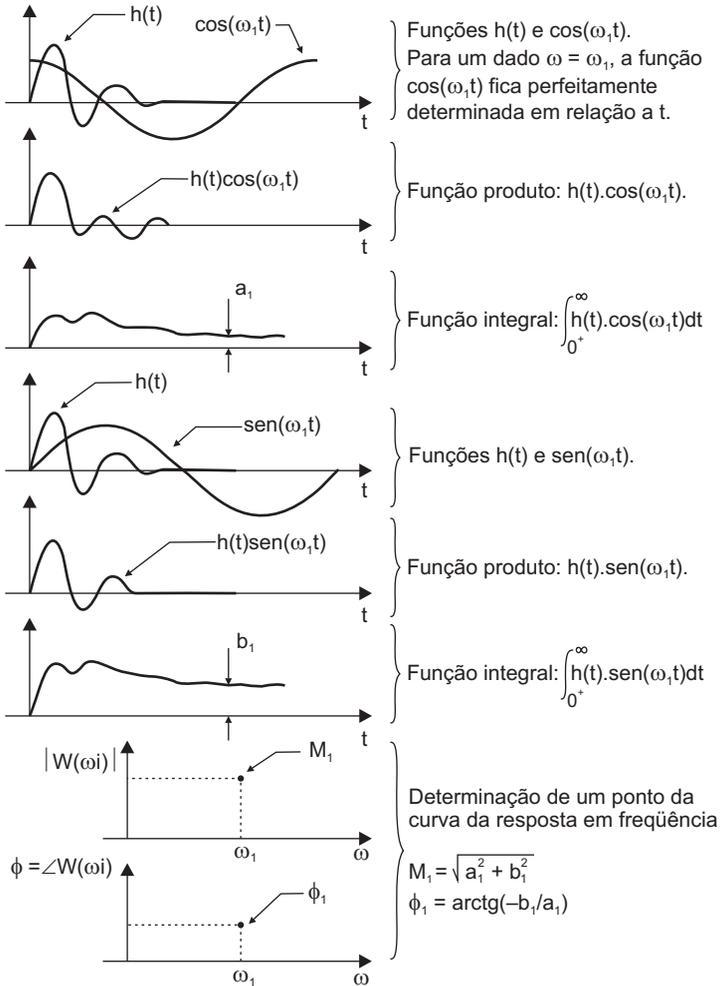


Figura 7.16 Determinação gráfica da curva da Resposta em Freqüência a partir do gráfico da resposta do impulso.

Na Figura 7.16 foi determinado um ponto da Resposta em Freqüência, para $\omega = \omega_1$; portanto, repetindo o processo para outras freqüências, $\omega_2, \omega_3, \dots$, determinamos as curvas da relação de amplitudes e do ângulo de fase.

Quando fazemos a determinação gráfica ou numérica da Resposta em Freqüência através da escolha de valores de ω , temos a preocupação em saber em que valor de ω o processo deve parar. Este problema é naturalmente resolvido porque para freqüências relativamente altas, quando comparadas com a velocidade de variação de $h(t)$, os valores de a e b ficam praticamente iguais a zero e o processo pode então ser interrompido. A Figura 7.17 ilustra este conceito.

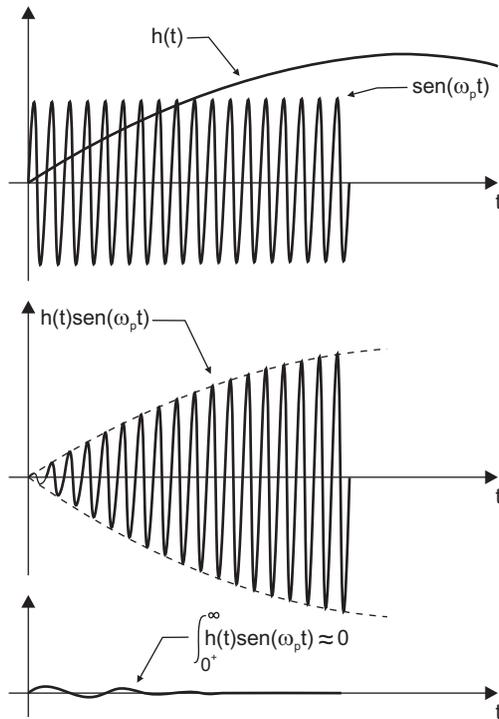


Figura 7.17 Para altas freqüências, os valores de a e b são aproximadamente iguais a zero.

7.5.2 – DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA DO IMPULSO QUANDO A RESPOSTA EM FREQÜÊNCIA É CONHECIDA

Quando a Resposta em Freqüência é conhecida e pretendemos determinar $h(t)$, usamos a Transformada Inversa de Laplace. Do Capítulo 4, equação 4.7, temos:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{st} ds \quad (7.18)$$

Lembrando que $\mathcal{L}[h(t)] = W(s)$ e fazendo $f(t) = h(t)$ obtemos:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} W(s) e^{st} ds \quad (7.19)$$

Agora, substituindo s por $i\omega$ e realizando uma série de manipulações matemáticas, chegamos ao seguinte resultado:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} |W(i\omega)| \cos \phi \cos(\omega t) d\omega \quad (7.20)$$

em que $|W(i\omega)|$ é a relação de amplitudes e ϕ é o ângulo de fase da Resposta em Freqüência.

A Figura 7.18 ilustra este método, partindo do gráfico da Resposta em Freqüência.

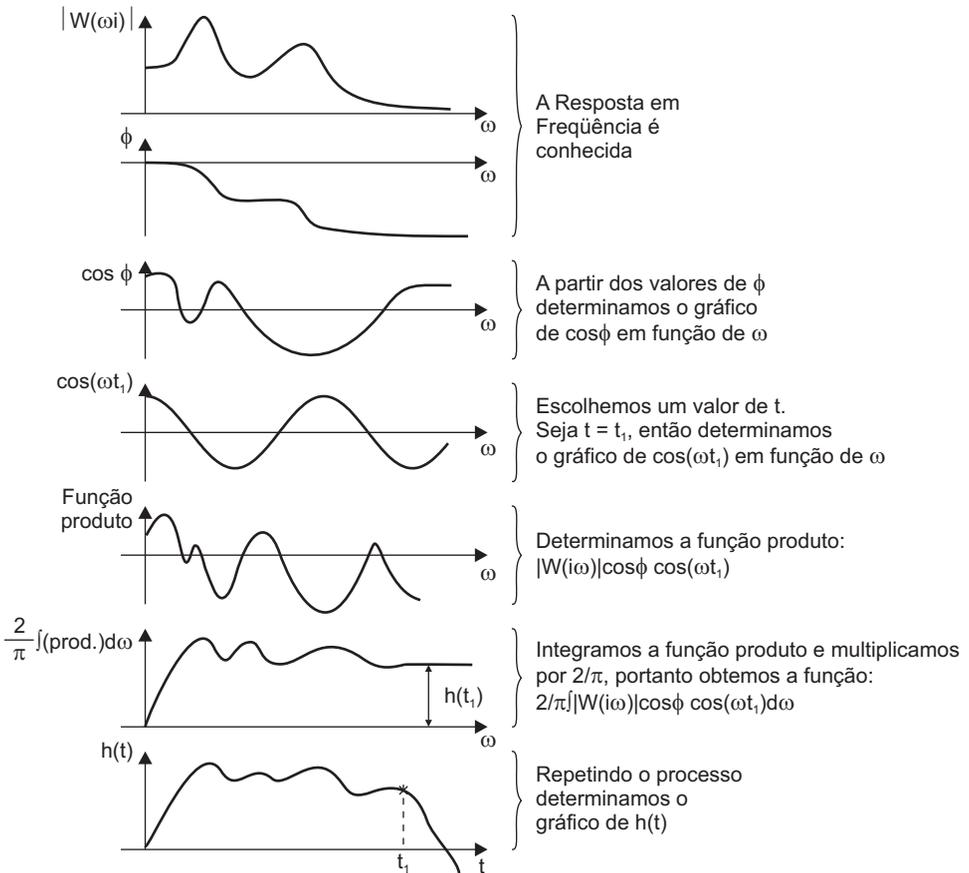


Figura 7.18 Determinação gráfica da resposta do impulso a partir da Resposta em Freqüência.

7.6 – RESPOSTA DA ENTRADA PERIÓDICA

7.6.1 – SÉRIE DE FOURIER

Se $f(t)$ for uma função periódica de período T , então $f(t) = f(t + T)$, Figura 7.19.

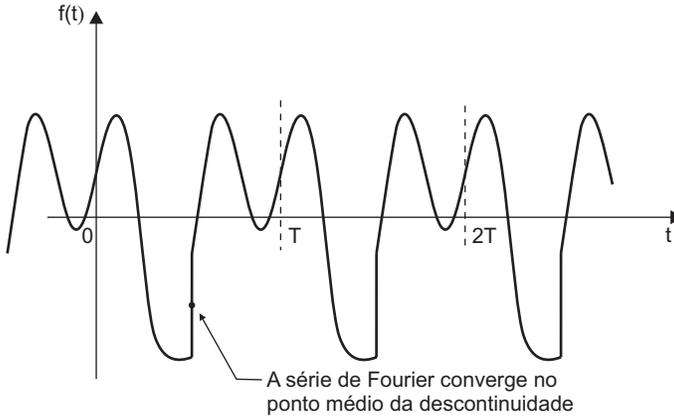


Figura 7.19 Exemplo de uma função periódica.

Uma função periódica $f(t)$, contínua por partes, pode ser representada por uma soma de senos e cossenos (expansão em série de Fourier), ou seja:

$$f(t) = \frac{a_0}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \text{sen} \frac{2\pi n}{T} t \right) \quad (7.21)$$

em que :

$$a_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \left(\frac{2\pi n}{T} t \right) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.22)$$

$$b_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen} \left(\frac{2\pi n}{T} t \right) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.23)$$

Outra forma de expandir $f(t)$ é através da Transformada de Laplace. Neste caso $f(t)$ é escrita como sendo:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad (7.24)$$

em que:

$$\omega_n \triangleq \frac{2\pi n}{T}, \quad n = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.25)$$

$$c_n \triangleq \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \mathcal{L}[f_T(t)]_{s=i\omega_n} \quad (7.26)$$

e

$f_T(t) \triangleq$ função obtida do primeiro ciclo de $f(t)$ (vide seção 4.5), isto é:

$$f_T(t) \triangleq \begin{cases} = f(t) & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ = 0 & \text{para os demais valores de } t \end{cases}$$

De acordo com a definição de $f_T(t)$, em apenas um ciclo ela é diferente de zero. Por exemplo, vide Figura 7.20.

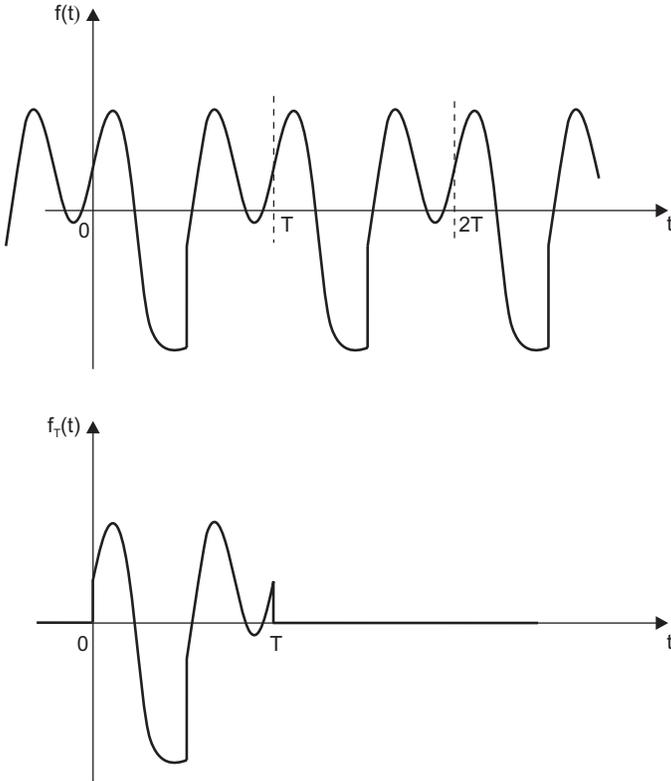


Figura 7.20 A função $f_T(t)$ é igual à função $f(t)$ somente para $0 \leq t \leq T$.

A equação 7.26 exprime a igualdade entre c_n e a Transformada de Laplace de $f_T(t)$, fazendo $s = i\omega_n$. Se s é substituído por $i\omega_n$, então o coeficiente c_n é um número complexo. É possível demonstrar matematicamente que este número complexo se relaciona com os coeficientes da equação 7.21 da seguinte maneira:

$$\operatorname{Re}[c_n] = a_n \quad (7.27)$$

$$-\operatorname{Im}[c_n] = b_n \quad (7.28)$$

em que os símbolos *Re* e *Im* significam, respectivamente, a parte real e imaginária do número complexo.

Para exemplificar o processo de expansão de $f(t)$ em série de Fourier, utilizando a equação 7.24, seja a função onda quadrada dada na Figura 7.21.

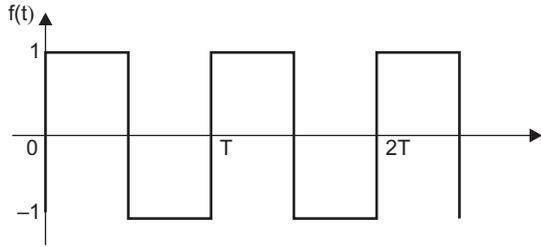


Figura 7.21 Onda quadrada com saltos de -1 a $+1$.

De forma similar à função dada pela Figura 4.39 e à equação 4.259, a função $f_T(t)$ pode ser escrita:

$$f_T(t) = u(t) - 2u(t - T/2) + u(t - T) \quad (7.29)$$

Então, aplicando a equação 7.26 e combinando com 7.25, obtemos:

$$c_n = \left[\frac{1}{s} - \frac{2e^{-(T/2)s}}{s} + \frac{e^{-Ts}}{s} \right]_{s=i\omega_n} = \left[\frac{(1 - e^{-(T/2)s})^2}{s} \right]_{s=i\omega_n} = \frac{T(1 - e^{-i\pi n})^2}{i2\pi n} \quad (7.30)$$

Da equação A.5 (Euler) vemos que:

$$e^{-i\pi n} = \cos(\pi n) - i\operatorname{sen}(\pi n) = \begin{cases} -1 & \text{para } n \text{ ímpar} \\ +1 & \text{para } n \text{ par} \end{cases} \quad (7.31)$$

Logo:

$$c_n = \begin{cases} \frac{2T}{i\pi n} & \text{para } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases} \quad (7.32)$$

Da equação 7.25 constatamos que $\omega_{-1} = -\omega_1$, $\omega_{-3} = -\omega_3$, $\omega_{-5} = -\omega_5$, ..., então, combinando as equações 7.24 e 7.32 vem:

$$f(t) = \frac{1}{T} \left(\dots - \frac{2T}{i\pi 5} e^{i\omega_5 t} - \frac{2T}{i\pi 3} e^{i\omega_3 t} - \frac{2T}{i\pi 1} e^{i\omega_1 t} + \frac{2T}{i\pi 1} e^{i\omega_1 t} + \frac{2T}{i\pi 3} e^{i\omega_3 t} + \frac{2T}{i\pi 5} e^{i\omega_5 t} + \dots \right) \quad (7.33)$$

ou

$$f(t) = \frac{1}{T} \left(\dots - \frac{2T}{i\pi 5} e^{-i\omega_5 t} - \frac{2T}{i\pi 3} e^{-i\omega_3 t} - \frac{2T}{i\pi 1} e^{-i\omega_1 t} + \frac{2T}{i\pi 1} e^{i\omega_1 t} + \frac{2T}{i\pi 3} e^{i\omega_3 t} + \frac{2T}{i\pi 5} e^{i\omega_5 t} + \dots \right) \quad (7.34)$$

Usando a equação de Euler (A.5), vemos que:

$$\left(-\frac{e^{-i\omega_n t}}{n} + \frac{e^{i\omega_n t}}{n} \right) = \frac{2i}{n} \text{sen}(\omega_n t) \quad (7.35)$$

então, aplicando esta igualdade aos pares correspondes da (7.34), obtemos:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\text{sen}(\omega_1 t) + \frac{\text{sen}(\omega_3 t)}{3} + \frac{\text{sen}(\omega_5 t)}{5} + \dots \right) \quad (7.36)$$

que é a série de Fourier da função onda quadrada dada na Figura 7.21.

Portanto, a disponibilidade de tabelas da Transformada de Laplace pode tornar a determinação dos coeficientes da série de Fourier mais fácil que a resolução das integrais dadas nas equações 7.22 e 7.23.

7.6.2 – RESPOSTA EM REGIME PERMANENTE QUANDO A ENTRADA É PERIÓDICA

Quando um sistema linear é submetido a uma entrada periódica, a resposta em regime permanente é também periódica. Dentre os métodos que possibilitam a obtenção desta resposta, o que utiliza a Resposta em Freqüência se mostra o mais conveniente e o seu desenvolvimento tem os seguintes passos:

(i) Obtenção do Espectro de Fourier (espectro em freqüência) da entrada periódica.

A determinação do espectro pode ser feita analítica, numérica ou experimentalmente. Para descrever analiticamente o espectro, a função $f(t)$ precisa ser escrita da seguinte forma:

$$f(t) = A_0 + A_1 \text{sen}(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots \quad (7.37)$$

Chegamos a esta equação utilizando as equações A.11 e 7.21, portanto, as constantes A_n e α_n são calculadas conforme equação A.11.

(ii) Determinação da Resposta em Freqüência.

(iii) Cálculo da saída.

A saída é calculada multiplicando a amplitude da entrada pelo módulo de $W(i\omega)$ e somando a fase da entrada com a fase de $W(i\omega)$. Em termos algébricos, a saída é então:

$$f_o(t) = \left[\begin{aligned} &A_0 |W(i0)| + A_1 |W(i\omega_1)| \text{sen}(\omega_1 t + \alpha_1 + \phi_{\omega=\omega_1}) + \\ &+ A_2 |W(i\omega_2)| \text{sen}(\omega_2 t + \alpha_2 + \phi_{\omega=\omega_2}) + \dots \end{aligned} \right] \quad (7.38)$$

Uma ilustração gráfica mostrando o procedimento aparece na Figura 7.22.

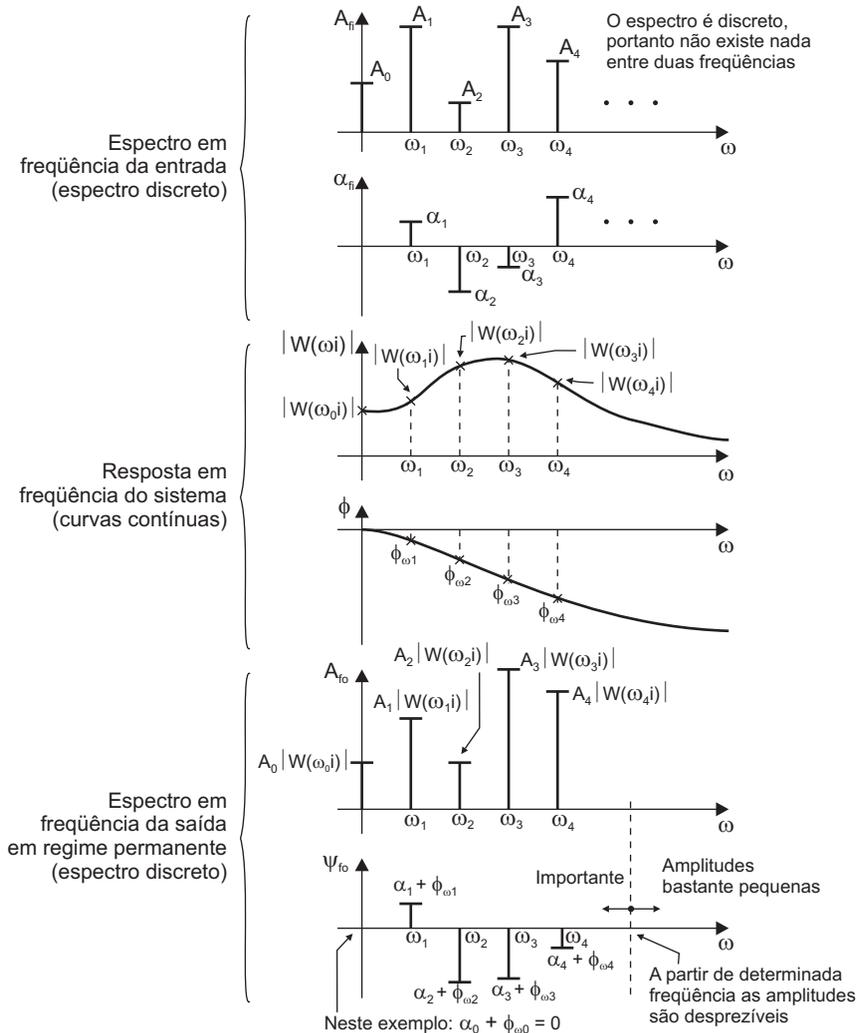


Figura 7.22 Determinação gráfica do espectro em frequência da resposta em regime permanente causada por uma entrada periódica.

7.7 – RESPOSTAS A ENTRADAS CUJAS AMPLITUDES SÃO MODULADAS

7.7.1 – SINAIS MODULADOS

Amplitudes moduladas são intencionalmente empregadas em sistemas de medida e comunicações. Em certas situações elas aparecem naturalmente em fenômenos acústicos e em outros sistemas como mecânicos e vibratórios.

Na grande maioria das vezes estes não são periódicos, isto é, somente em raríssimas situações é que eles se tornam periódicos.

Uma função modulada $q_i(t)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$q_i(t) = f_m(t) \text{sen}(\omega_c t + \phi) \quad (7.39)$$

em que:

$f_m(t) \triangleq$ uma função do tempo a ser modelada;

$\text{sen}(\omega_c t + \phi) \triangleq$ função portadora;

$\omega_c \triangleq$ frequência da portadora;

$\phi \triangleq$ ângulo de fase da portadora.

Um caso especial e simples considera $f_m(t) = A(1 + m \cdot \cos(\omega_m t))$. Esta função é bastante útil para o entendimento de sinais modulados porque é uma constante de tamanho A somada a uma variação periódica de amplitude mA . Este é o caso que será aqui estudado.

Substituindo esta função $f_m(t)$ na equação 7.39, obtemos:

$$q_i(t) = A[1 + m \cos(\omega_m t)] \text{sen}(\omega_c t + \phi) \quad (7.40)$$

em que:

$A \triangleq$ amplitude;

$m \triangleq$ fator de modulação;

$\omega_m \triangleq$ frequência do sinal a ser modulado.

Usando a igualdade trigonométrica:

$$\text{sen}(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} \text{sen}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \text{sen}(\alpha - \beta) \quad (7.41)$$

e combinando com a equação 7.40 vem:

$$q_i(t) = A \text{sen}(\omega_c t + \phi) + \frac{mA}{2} \text{sen}[(\omega_c + \omega_m)t + \phi] + \frac{mA}{2} \text{sen}[(\omega_c - \omega_m)t + \phi] \quad (7.42)$$

O espectro da função $q_i(t)$ é dado na Figura 7.23.

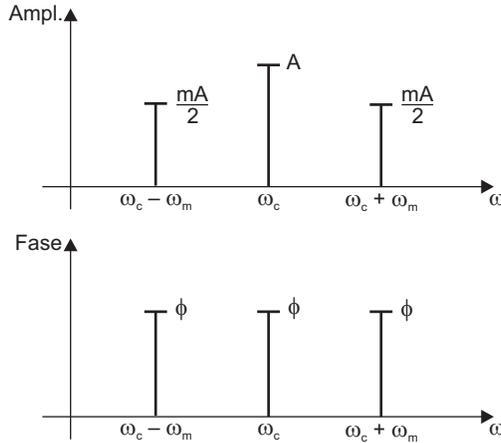


Figura 7.23 Espectro em Freqüência do sinal modulado $A[1 + m \cdot \cos(\omega_m t)] \text{sen}(\omega_c t + \phi)$.

O espectro da Figura 7.23 mostra a presença de duas freqüências, $(\omega_c - \omega_m)$ e $(\omega_c + \omega_m)$, que apareceram por causa do processo de modulação.

Isto explica a existência de freqüências aparentemente estranhas que detectamos em certos trabalhos de medição, por exemplo, quando medimos ruídos de redutores de velocidade. A freqüência produzida pelas imperfeições construtivas de uma engrenagem combinada com a rotação do seu respectivo eixo gera um sinal de amplitude modulada e isto resulta em um espectro semelhante ao da Figura 7.23.

7.7.2 – RESPOSTA DO SINAL MODULADO

O objetivo é determinar o espectro da resposta quando a entrada do sistema linear é um sinal modulado.

Quando a entrada é um sinal modulado de espectro discreto, obtemos o espectro da resposta em regime permanente aplicando procedimentos idênticos aos dos sinais periódicos.

Se a função $f_m(t)$ da equação 7.39 for um transiente, uma modulação muito usada em Sistemas de Medidas, a sistemática para encontrar o espectro é semelhante, mas o estudo de *modulação* e *demodulação* de sinais está além dos objetivos deste texto.

Quando a entrada for apenas um transiente (o espectro é contínuo), o espectro da saída é obtido através do procedimento descrito a seguir, seção 7.8.

7.8 – DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA QUANDO A ENTRADA É UM TRANSIENTE ARBITRÁRIO E A RESPOSTA EM FREQUÊNCIA É CONHECIDA

Na seção 7.2 deste capítulo foi visto como determinar a resposta em função do tempo (equação 7.5) quando a entrada era uma função $f_i(t)$ qualquer, o que significa que pode ser um transiente.

A determinação da resposta, quando a entrada é um transiente arbitrário e a Resposta em Frequência é conhecida, é desenvolvida nesta seção de outra maneira, ou seja, no domínio da frequência. Assim, se a entrada de um sistema é uma função $f_i(t)$, Figura 7.24, a Transformada de Laplace da saída pode ser escrita como sendo:

$$F_o(s) = W(s)F_i(s) \quad (7.43)$$



Figura 7.24 Sistema $W(s)$ com entrada $F_i(s)$ e saída $F_o(s)$.

Se $f_i(t)$ for um transiente, podemos determinar $f_o(t)$ a partir de $F_o(s)$ ou, também, a partir de $F_o(i\omega)$. Da equação 7.43 temos:

$$F_o(i\omega) = W(i\omega)F_i(i\omega) \quad (7.44)$$

Sendo, por definição:

$$F_i(s) = \int_{0^+}^{\infty} f_i(t)e^{-st} dt \quad (7.45)$$

então, substituindo s por $i\omega$ e usando a equação de Euler (A.5), vem:

$$F_i(i\omega) = \int_{0^+}^{\infty} f_i(t)\cos(\omega t) dt - i \int_{0^+}^{\infty} f_i(t)\sen(\omega t) dt \quad (7.46)$$

Chamando as integrais de $a(\omega)$ e $b(\omega)$, então:

$$F_i(i\omega) = a(\omega) - ib(\omega) \quad (7.47)$$

Usando esta equação podemos obter a densidade espectral do transiente $f_i(t)$, Figura 7.25.

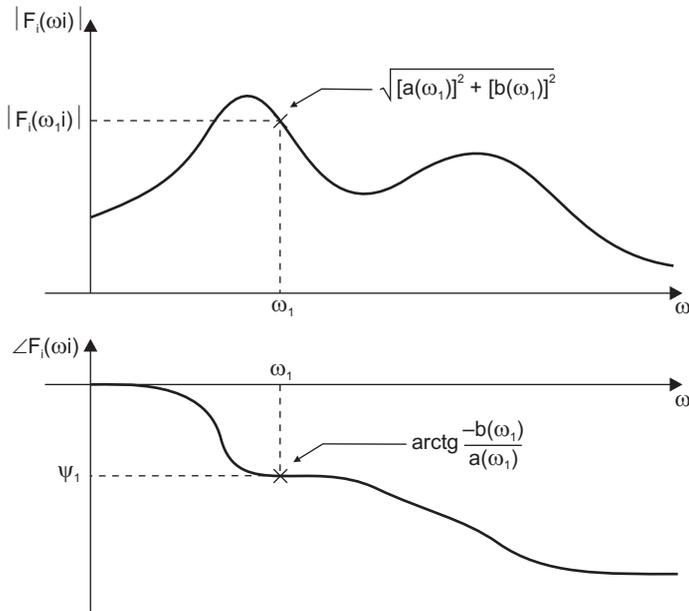


Figura 7.25 Exemplo de densidade espectral de um transiente $f_i(t)$.

Alguns pontos importantes referentes à Figura 7.25 devem ser observados.

- (i) As curvas do espectro (módulo e fase) são contínuas.
- (ii) A função $F_i(i\omega)$ deve ser entendida como uma quantidade de sinal por unidade de incremento de frequência. Por exemplo, se $f_i(t)$ for pressão com unidade lb/in^2 , então, $F_i(i\omega)$ tem unidades $(lb/in^2)/(rad/seg)$.
- (iii) O sinal $f_i(t)$ jamais pode ser obtido através de uma soma de senos tal como é feito no espectro de um sinal periódico. Este espectro tem um conceito diferente: \rightarrow é *densidade*. Para um valor específico de ω , um ponto, a amplitude senoidal é nula. O conceito é análogo ao de *carga distribuída* estudada em Resistência dos Materiais, a força em um ponto é nula.
- (iv) Este espectro é relativo a $F_i(i\omega)$, que é a transformada de $f_i(t)$, enquanto o espectro de uma função periódica é relativo à própria função do tempo $f(t)$.

Voltando à equação 7.44, se as expressões matemáticas da densidade espectral da entrada $F_i(i\omega)$ e da Resposta em Frequência $W(i\omega)$ forem conhecidas, a densidade espectral $F_o(i\omega)$ pode ser determinada analiticamente através da multiplicação destes números complexos. Da mesma forma, se os gráficos de $F_i(i\omega)$ e $W(i\omega)$ (Figuras 7.25, 7.26 e 7.27) forem conhecidos, o gráfico de $F_o(i\omega)$ pode ser determinado ponto por ponto.

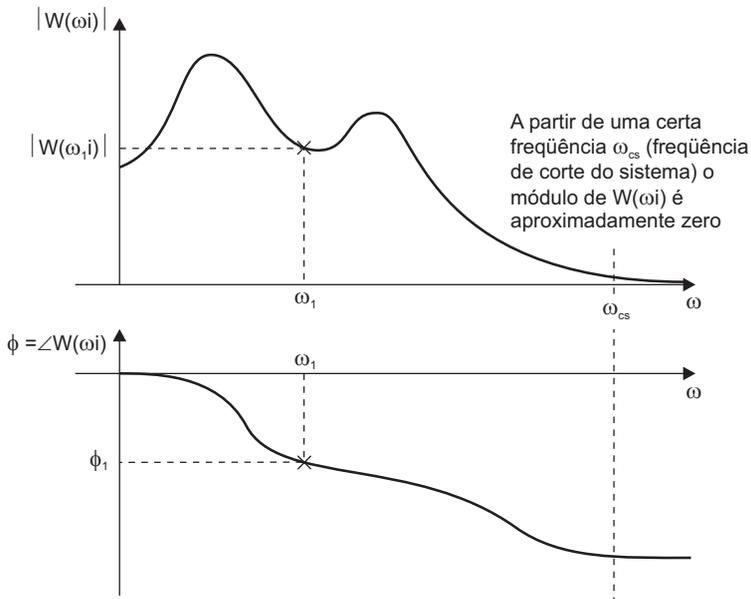


Figura 7.26 Gráfico da Resposta em Frequência do sistema $W(i\omega)$.

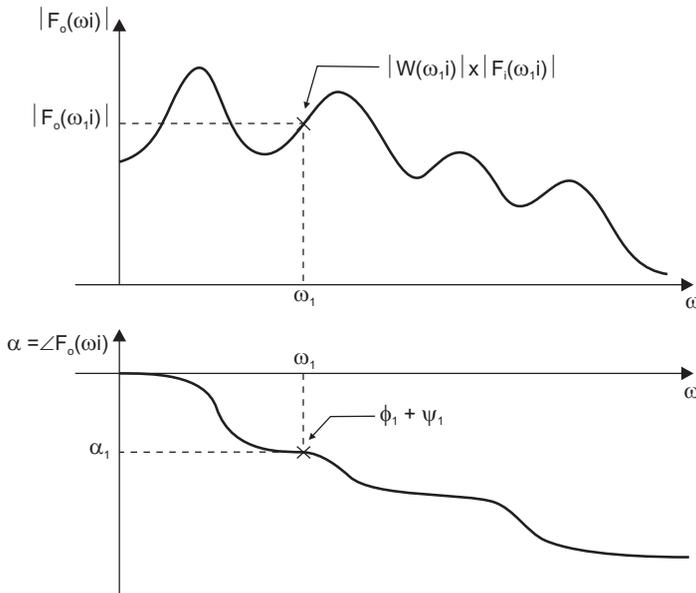


Figura 7.27 Densidade espectral da saída $F_o(i\omega)$.

Quando queremos determinar a função $f_o(t)$ a partir da sua densidade espectral, devemos realizar a transformação inversa de $F_o(i\omega)$. Para tal operação utilizamos a fórmula da Transformada Inversa de Laplace (vide seção 4.2), ou seja:

$$f_o(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_o(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} F_o(s) e^{st} ds, \text{ para } t > 0 \quad (7.48)$$

Manipulando esta equação vamos obter o seguinte resultado:

$$f_o(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0^+}^{\infty} |F_o(i\omega)| \cos(\alpha) \cos(\omega t) d\omega \quad (7.49)$$

em que $|F_o(i\omega)|$ e α são valores (módulo e fase) da densidade espectral da saída $F_o(i\omega)$.

Ainda, continuando com a manipulação matemática, da equação 7.49 vem:

$$f_o(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0^+}^{\infty} \{ \text{Re}[F_o(i\omega)] \} \cos(\omega t) d\omega \quad (7.50)$$

em que $\text{Re}[F_o(i\omega)]$ é a parte real de $F_o(i\omega)$.

A inversão pode ser realizada por meios gráficos também, porém, neste caso, a solução baseia-se na equação 7.49. Escolhendo um valor de t , seja $t = t_1$, e aplicando graficamente a equação 7.49, encontramos o valor de $f_o(t_1)$, Figura 7.28.

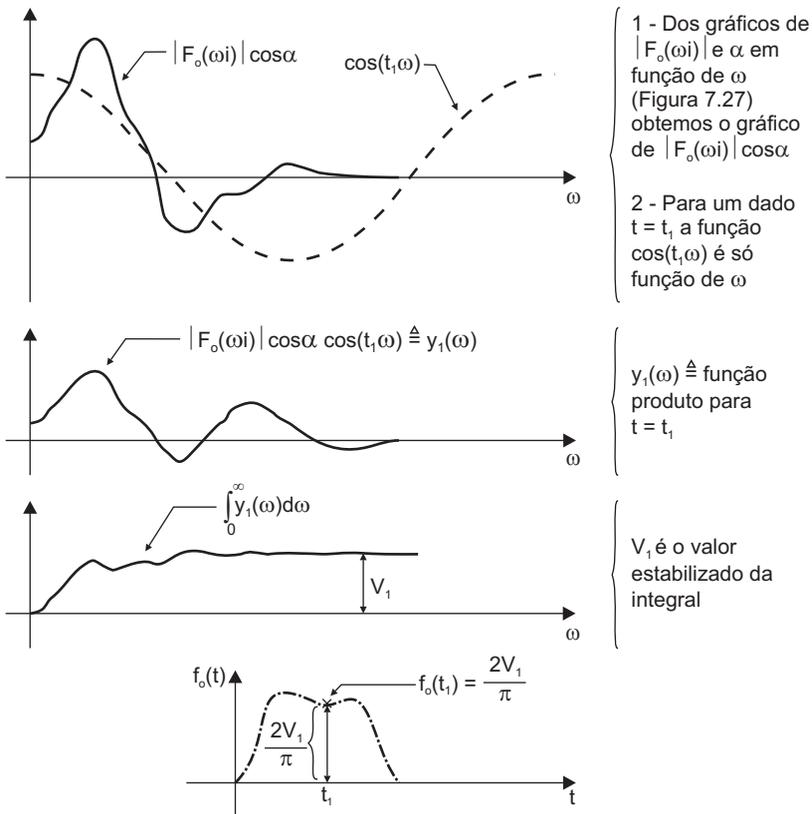


Figura 7.28 Processo gráfico para obtenção de $f_o(t)$ a partir da densidade espectral $F_o(i\omega)$.

7.9 – REQUISITOS A UM “IMPULSO” REALIZÁVEL PARA O TESTE DO IMPULSO

Se o transiente $f_i(t)$ for um impulso perfeito $\delta_+(t)$, então, da definição da Transformada de Laplace, substituindo s por $i\omega$, obtemos:

$$F_i(i\omega) = \int_{0^+}^{\infty} \delta_+(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{0^+}^{\infty} \delta_+(t) \text{sen}(\omega t) dt \quad (7.51)$$

Da definição da multiplicação de uma função pela função impulso vem:

$$F_i(i\omega) = \cos(\omega 0^+) \int_{0^+}^{\infty} \delta_+(t) dt - i \text{sen}(\omega 0^+) \int_{0^+}^{\infty} \delta_+(t) dt \quad (7.52)$$

Logo, colocando o número complexo $F_i(i\omega)$ na forma polar, resulta:

$$F_i(i\omega) = 1 \angle 0^\circ \quad (7.53)$$

A equação 7.53 mostra que $F_i(i\omega)$ é uma constante, ou seja, o módulo é igual a 1 e a fase igual a **zero** para todas as frequências, Figura 7.29.

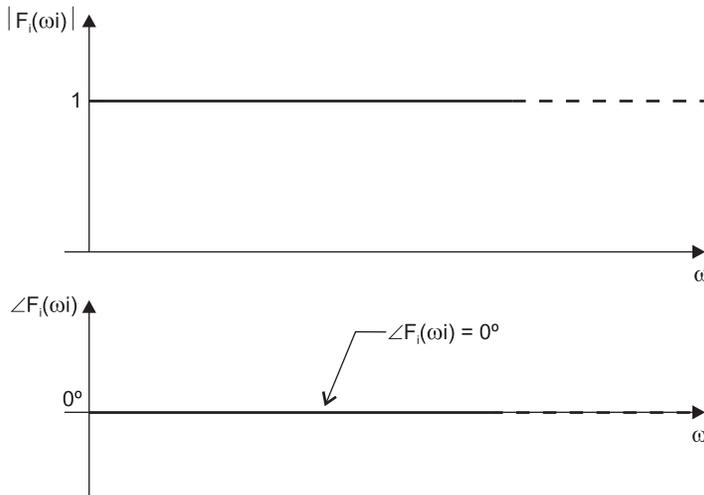


Figura 7.29 Densidade espectral do impulso unitário.

Agora, para o caso do impulso realizável, $f_i(t)$ é um transiente (pulso), portanto, a expressão da densidade espectral $F_i(i\omega)$ é:

$$F_i(i\omega) = \int_{0^+}^{\infty} f_i(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{0^+}^{\infty} f_i(t) \text{sen}(\omega t) dt \quad (7.54)$$

Fazendo a interpretação gráfica das funções dentro das integrais, vemos que as integrais dependem da frequência ω , Figura 7.30.

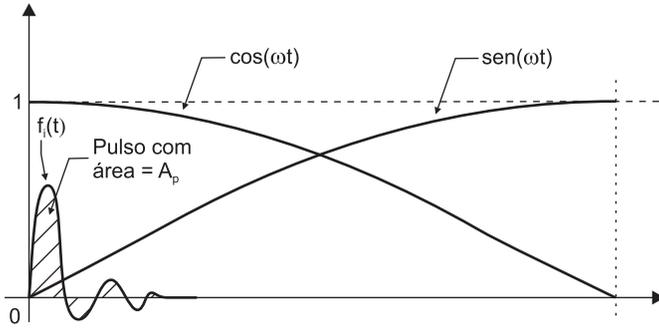


Figura 7.30 Ilustração gráfica das funções $f_i(t)$, $\cos(\omega t)$ e $\text{sen}(\omega t)$ quando ω é pequeno.

Se o valor de ω for bastante pequeno ($\omega \rightarrow 0$, $\omega = 0^+$) então, $\cos(\omega t) \approx 1$ e $\text{sen}(\omega t) \approx 0$. Logo, substituindo $\omega = 0^+$ na (7.54) resulta:

$$F_i(0^+) \equiv \int_{0^+}^{\infty} f_i(t) dt = A_p = \text{área do pulso} \quad (7.55)$$

Assim, para freqüências baixas:

$$F_i(i\omega) \equiv A_p \angle 0^\circ \quad (7.56)$$

Quando as freqüências são altas, isto é, a partir de algum valor de ω , a equação 7.56 passa a não representar mais uma boa aproximação para a equação 7.54. Isto significa que, a partir de algum valor de ω , $|F_i(i\omega)|$ é bastante diferente de A_p e a fase de $F_i(i\omega)$ bastante diferente de zero . É por essa razão que o espectro em freqüência de um pulso tem configuração típica, conforme ilustrado na Figura 7.31.

Agora, suponha que este pulso seja usado para teste em um sistema cuja Resposta em Freqüência está ilustrada na Figura 7.26.

Se a freqüência de corte do pulso ω_{cp} for maior que a freqüência de corte do sistema ω_{cs} ($\omega_{cp} > \omega_{cs}$), o sistema não consegue detectar a diferença entre um “impulso” real (pulso) e o impulso perfeito de área A_p . Isto é facilmente entendido pelo fato de o sistema não responder às freqüências maiores que ω_{cs} e fazer a densidade espectral da saída ter módulo aproximadamente igual a zero para freqüências maiores que ω_{cs} .

Voltando à Figura 7.31, observamos que na região de freqüências relativamente baixas o módulo de $F_i(i\omega)$ é igual à área do pulso A_p . Isto significa que, se um pulso for usado como entrada e for suficientemente curto em duração, os detalhes com respeito à sua forma não têm influência alguma, somente a sua *área* é que importa. Por exemplo, se as entradas dadas pelos pulsos $p_1(t)$ e $p_2(t)$ da Figura 7.32 forem suficientemente curtos, as respostas do sistema serão idênticas, possuirão o mesmo espectro e o mesmo gráfico em função do tempo.

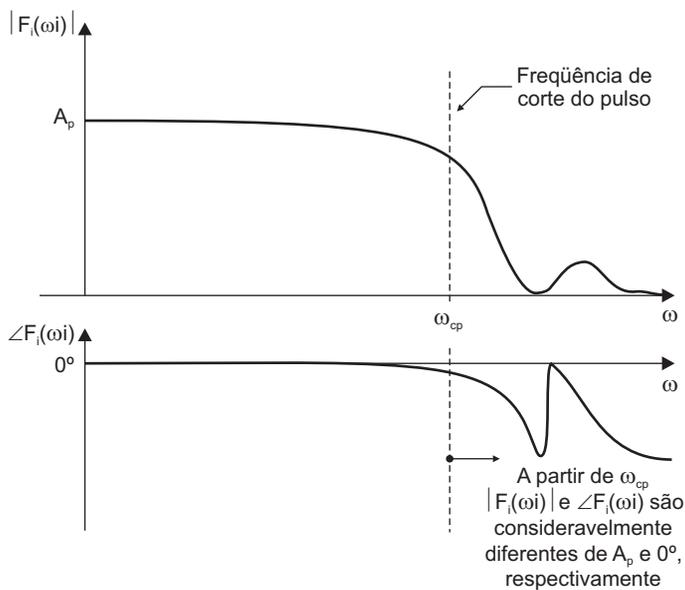


Figura 7.31 Exemplo de uma densidade espectral de um “impulso” realizável (pulso).

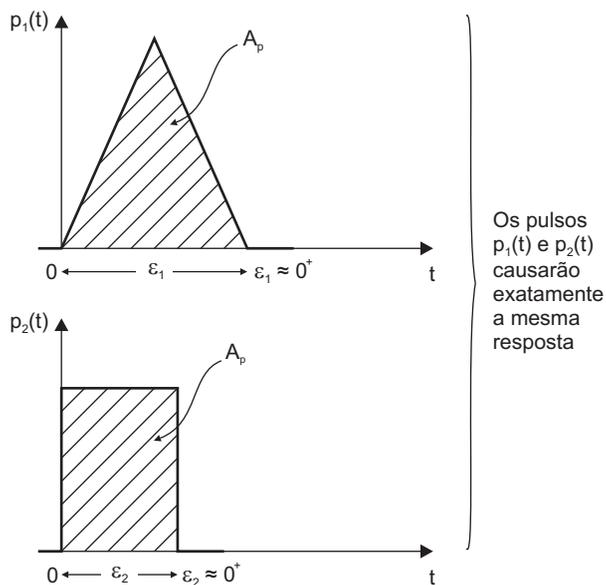


Figura 7.32 Pulsos $p_1(t)$ e $p_2(t)$ de mesma área e de curta duração.

Na realização prática de testes experimentais com pulsos objetivando o levantamento da Resposta em Freqüência do sistema, o espectro da entrada $|F_i(i\omega)|$

não precisa ser necessariamente plano, mas ter magnitude suficiente quando $\omega = \omega_{cs}$. Um critério aceitável seria adotar a magnitude maior que 20% dos valores que ocorrem nas baixas frequências, Figura 7.33. Neste caso consideramos que o teste do pulso não corresponde à realização do teste do impulso, mas sim ao teste cuja entrada é um transiente arbitrário. Neste tipo de teste, a determinação da dinâmica do sistema é feita utilizando a definição de função de transferência, pois a Resposta em Frequência do sistema, $W(i\omega)$, é o resultado da divisão (divisão de números complexos) dos espectros da saída pelo da entrada.

$$W(i\omega) = \frac{F_o(i\omega)}{F_i(i\omega)} \quad (7.57)$$

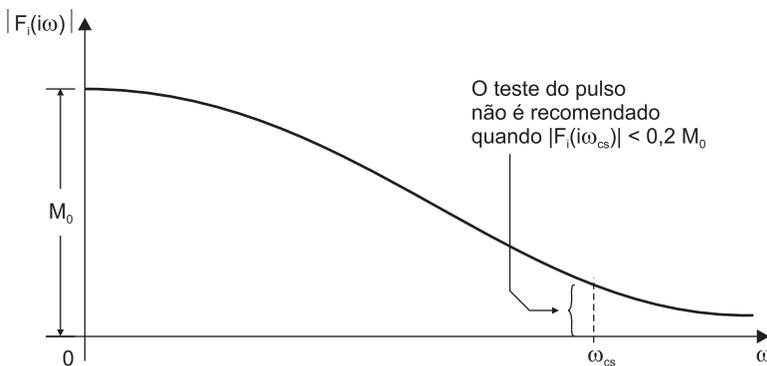


Figura 7.33 Para o teste do pulso, $|F_o(i\omega)|$ não precisa necessariamente ser plano.

A diferença entre os testes do impulso aproximado e do transiente arbitrário não é um ponto significativo. Na verdade, eles são conceitualmente idênticos, pois ambos obedecem a equação 7.57 e ambos são transientes. Apenas como observação, se a entrada for um impulso aproximado, o espectro da saída é igual à curva da Resposta em Frequência do sistema.

7.10 – RESPOSTA DE UM SISTEMA LINEAR QUANDO A ENTRADA É UM SINAL ALEATÓRIO

7.10.1 – CARACTERÍSTICAS DE UM SINAL ALEATÓRIO

Chamamos de sinal aleatório aquele que pode, antes de o sinal realmente ocorrer, ser descrito apenas estatisticamente. Isto significa que um sinal aleatório não é determinístico, pois não pode ser descrito por um modelo função do tempo antes de sua ocorrência, Figura 7.34.

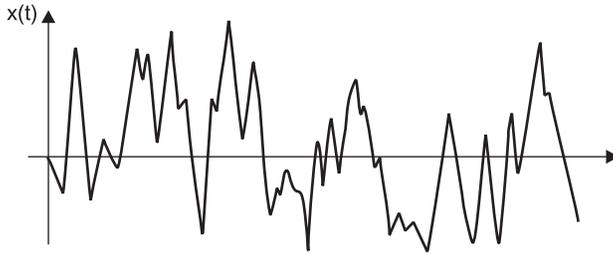


Figura 7.34 O sinal aleatório não é determinístico.

Estes sinais são importantes porque todos os sinais reais possuem algum “grau de aleatoriedade”.

Uma maneira de tratar sinal aleatório é definindo-o como se fosse uma função que é identicamente igual a *zero* a partir de determinado tempo t_0 e considerá-lo como se fosse um transiente. Uma dificuldade deste procedimento recai na escolha de t_0 , para que tenhamos uma amostragem estatística representativa da função aleatória. Por exemplo, se t_0 fosse escolhido tal como ilustrado na figura 7.35, as altas freqüências não seriam consideradas.

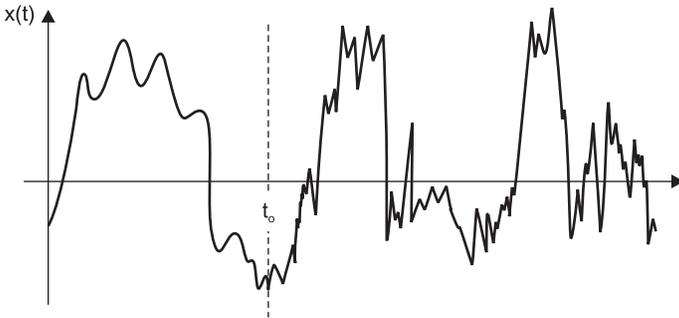


Figura 7.35 Tempo t_0 escolhido erradamente.

A existência de um valor mínimo válido para t_0 implica que o processo é estacionário, isto é, suas propriedades estatísticas não se modificam com o tempo. Quando isto for verdade, então há um valor t_0 correspondente a um nível de confiança escolhido.

Devemos entender claramente que, em se tratando de sinal aleatório, teoricamente é necessária coleta infinita de dados para chegar a resultados precisos. Resultados baseados em tomadas finitas de dados devem sempre ser especificados por meios estatísticos, referindo-se a uma probabilidade de os resultados estarem corretos dentro de certa percentagem de confiança.

Esta observação é importante porque geralmente não é possível coletar dados durante um longo intervalo de tempo, mesmo se o investigador desejasse pagar o custo elevado de um longo ensaio.

7.10.2 – CARACTERIZAÇÃO DA MAGNITUDE DO SINAL ALEATÓRIO

a) Valor Médio

O valor médio de um sinal aleatório $q_i(t)$ é definido da seguinte forma:

$$\overline{q_i(t)} \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \right) \int_0^T q_i(t) dt \quad (7.58)$$

em que T é o intervalo de tempo que $q_i(t)$ é analisado.

O valor médio $\overline{q_i(t)}$ é um valor constante para um dado sinal aleatório. Considerando que o valor médio é entendido como uma componente constante do sinal, e constantes são facilmente tratadas (e não são sinais aleatórios), este valor é sempre subtraído do sinal aleatório. Portanto, neste estudo consideraremos apenas sinais aleatórios com valores médios iguais a *zero*.

b) Valor da Média Quadrada

$$\overline{q_i^2(t)} \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \right) \int_0^T q_i^2(t) dt \quad (7.59)$$

A interpretação gráfica da equação 7.59 está na Figura 7.36.

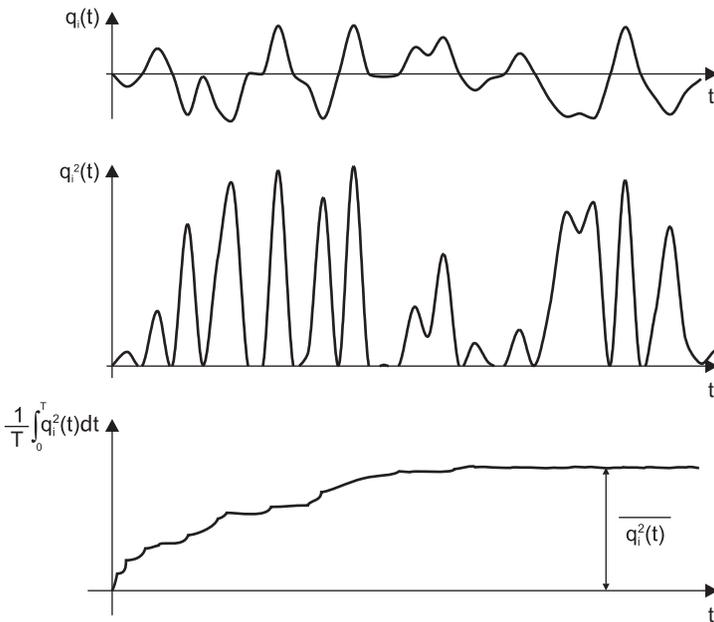


Figura 7.36 Interpretação gráfica do valor da média quadrada $\overline{q_i^2(t)}$.

c) Raiz Média Quadrada

A raiz média quadrada é normalmente chamada de RMS por causa de seu nome em inglês: “root mean square” (RMS).

Ela pode ser calculada através da seguinte equação:

$$q_i(t)_{RMS} \triangleq \sqrt{q_i^2(t)} \quad (7.60)$$

d) Função de Distribuição de Amplitudes

Em inglês, a função de distribuição de amplitudes é chamada de “amplitude-distribution function” ou “probability density function”.

O seu conceito é melhor entendido se desenvolvido através de um gráfico.

Seja um sinal aleatório $q(t)$ dado conforme a Figura 7.37 e seja q_1 um valor escolhido qualquer.

Agora, definindo $P[q_1, q_1 + \Delta q]$ como sendo a probabilidade da função $q(t)$ se encontrar no intervalo entre q_1 e $q_1 + \Delta q$, então:

$$P[q_1, q_1 + \Delta q] \triangleq \text{probabilidade de } [q_1 < q(t) < q_1 + \Delta q] \quad (7.61)$$

Observando a Figura 7.37 e supondo que temos n intervalos Δt 's, podemos escrever:

$$P[q_1, q_1 + \Delta q] \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{\sum_{k=1}^n \Delta t_k}{T} \right] \quad (7.62)$$

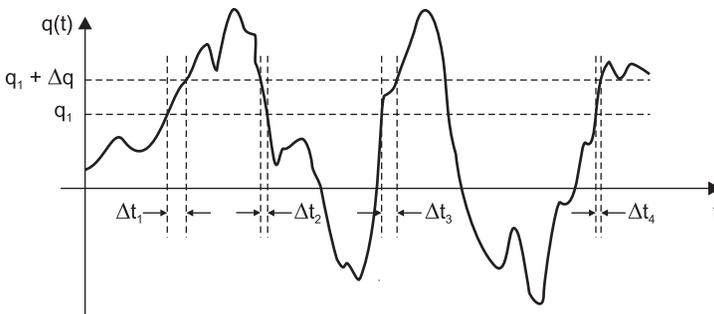


Figura 7.37 Sinal aleatório $q(t)$ e ilustração de q_1 , $q_1 + \Delta q$ e Δt_k .

A equação 7.62 está de acordo com a definição comum de probabilidade, pois seus valores variam de 0 a 1 e é a relação entre atributos ocorridos sobre o número total de eventos. Neste problema a atribuição desejada é $q(t)$ estar entre q_1 e $q_1 + \Delta q$; e a fração $(\sum \Delta t_k)/T$ é a fração de T em que $q(t)$ se encontra naquela faixa de “amplitude” entre q_1 e $q_1 + \Delta q$. Se $q(t)$ permanecer todo o tempo T naquela faixa, P será igual a 1, e se $q(t)$ não permanecer nenhum tempo, P será igual a zero.

Para definir a função $f(q)$, *função distribuição de amplitudes*, é necessário fazer Δq tender a zero:

$$f(q) \triangleq \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{\sum_{k=1}^n \Delta t_k / T}{\Delta q} \right] \quad (7.63)$$

Quando $\Delta q \rightarrow 0$ e $T \rightarrow \infty$, ambos, o numerador e denominador da equação 7.63, tendem para zero, porém a relação tende para um valor numérico específico.

Com $f(q)$ definido desta maneira, vemos claramente que:

$$f(q) dq = \left[\begin{array}{l} \text{Probabilidade de } q \\ \text{estar em } dq \end{array} \right] \quad (7.64)$$

$$\int_{q_a}^{q_b} f(q) dq = \left[\begin{array}{l} \text{Probabilidade de } q(t) \\ \text{estar entre } q_a \text{ e } q_b \end{array} \right] \quad (7.65)$$

Concluimos, portanto, que a área total sob a função $f(q)$ é igual a 1, Figura 7.38.

No caso de utilização prática, não vamos conseguir implementar a equação 7.63 porque o termo T tende a infinito. Por esta razão, em aplicações práticas a função $f(q)$ pode ser apenas estimada.

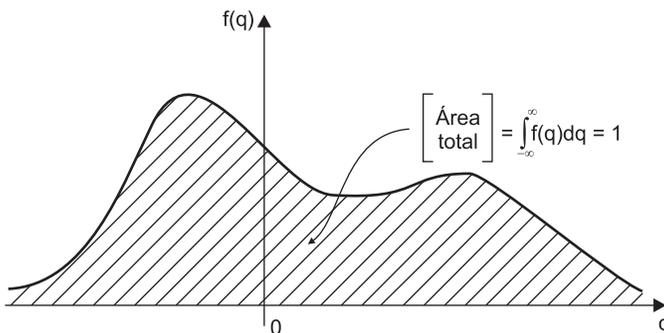


Figura 7.38 A área total da função $f(q)$ é sempre igual a 1.

Para funções $f(q)$ gausseanas, temos:

$$f(q) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{q^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (7.66)$$

em que a média do sinal é zero e σ é o desvio-padrão (igual ao $q(t)_{RMS}$). A Figura 7.39 ilustra duas funções $f(q)$ gausseanas.

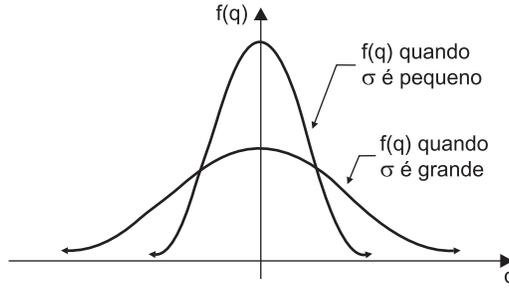


Figura 7.39 Funções $f(q)$ gausseanas.

7.10.3 – CARACTERIZAÇÃO DA “RAPIDEZ” DO SINAL ALEATÓRIO

a) Função Autocorrelação

A função autocorrelação $R(\tau)$ é definida da seguinte forma:

$$R(\tau) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T q_i(t) q_i(t + \tau) dt \right) \quad (7.67)$$

Através da equação 7.67 observamos que a função $R(\tau)$ é o valor médio do produto $q_i(t)$ e $q_i(t + \tau)$. Uma característica importante da função $R(\tau)$ é que:

$$R(0) = \overline{q_i^2(t)} \quad (7.68)$$

ou seja, no ponto em que $\tau = 0$, a função autocorrelação é igual ao valor da média quadrada. Este é o valor mais alto da função $R(\tau)$, isto é: $R(0) \geq R(\tau)$.

Outra propriedade de $R(\tau)$ é que ela é uma função par, o que significa que $R(\tau) = R(-\tau)$.

A função $R(\tau)$ pode ser obtida analiticamente ou através de processo gráfico (ou numérico por meio de computador). Se o trabalho for analítico, utilizamos a equação 7.67 e, se o processo for gráfico, obtemos um ponto de $R(\tau)$ de cada vez. Por exemplo, fazemos $\tau = 0$ e depois igual a τ_1, τ_2, τ_3 , etc. A Figura 7.40 ilustra o processo gráfico para a determinação de $R(\tau)$.

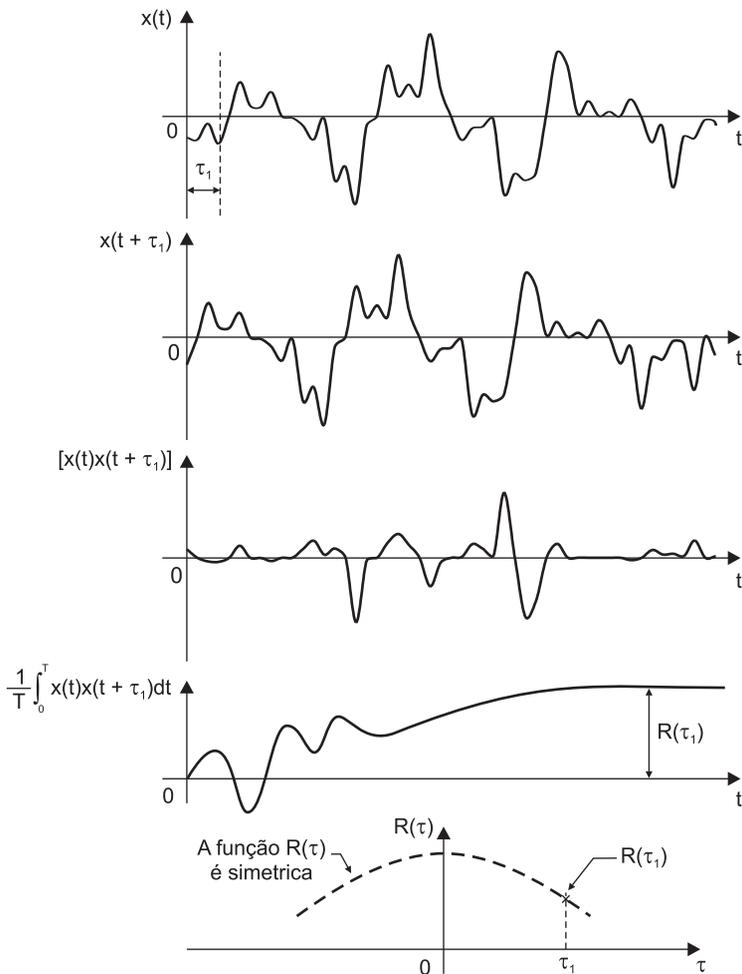


Figura 7.40 Determinação de $R(\tau)$ através de processo gráfico.

A “rapidez” ou “lentidão” de um sinal aleatório pode ser detectada através da forma da função $R(\tau)$, pois, para sinais rápidos, a função $R(\tau)$ é bastante esbelta, Figura 7.41.

A função $R(\tau)$ é também utilizada para detectar a existência de alguma parcela de variação periódica “escondida” no sinal aleatório. Quando variações periódicas existem somadas ao sinal aleatório, a função $R(\tau)$ apresenta uma série de picos, distanciados entre si do período correspondente à parcela periódica, Figura 7.42. A função $g(t)$ da Figura 7.42a foi gerada em computador, fazendo a soma de um sinal aleatório com uma onda periódica igual a $0,3\text{sen}(2\pi t)$. Como esta parcela tem $\omega = 2\pi \text{ rad/seg}$, a frequência em ciclos por segundo é $f = 1 \text{ Hz}$, o que corresponde a um período $T = (1/f) = 1 \text{ seg}$. A autocorrelação de $g(t)$, Figura 7.42b, mostra uma série

de picos distanciados de 1 seg. , comprovando que no sinal $g(t)$ existe uma parcela cíclica de período igual a 1 seg.

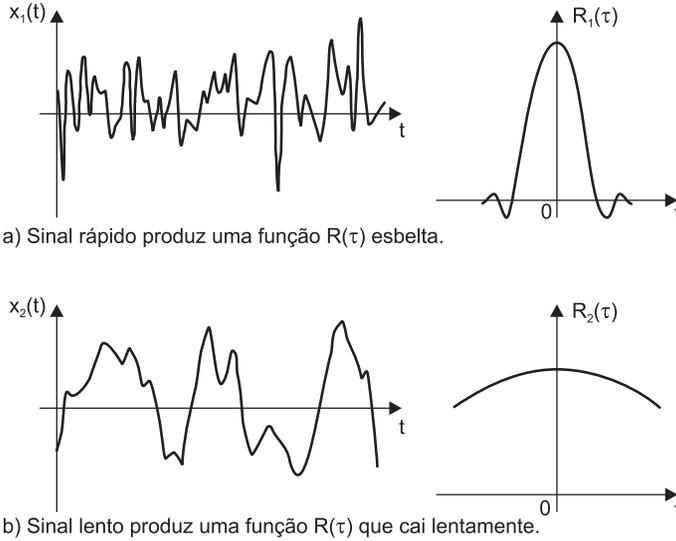


Figura 7.41 A forma da função autocorrelação caracteriza se o sinal é rápido ou lento.

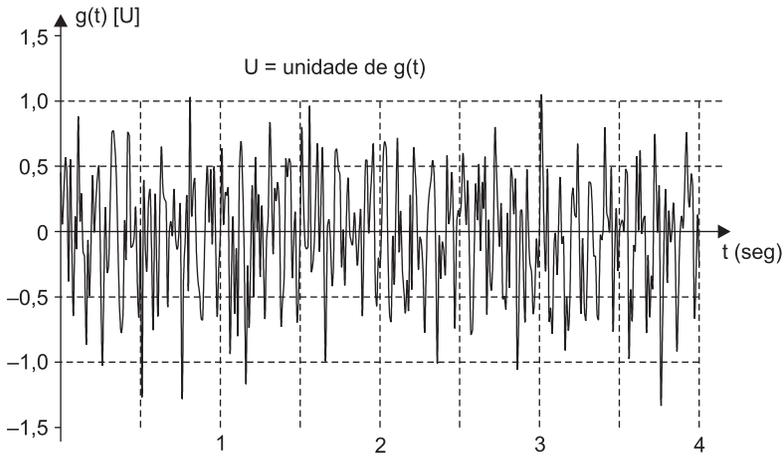
b) Densidade Espectral Média Quadrada

Podemos desenvolver o conceito de Densidade Espectral Média Quadrada determinando-a através de um diagrama de blocos operacionais. Antes, porém, vamos observar os blocos operacionais que seriam necessários para calcular o valor da média quadrada, Figura 7.43.

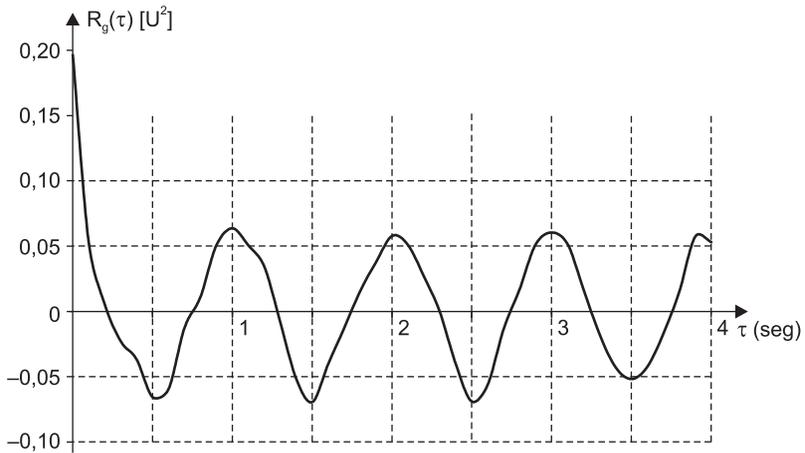
O sinal primeiramente entra em um dispositivo (QUAD) que tem, como na saída, o quadrado da entrada e é conectado a um dispositivo que calcula a média. Com o passar do tempo, a saída do dispositivo que calcula a média tende ao valor da média quadrada.

A determinação da densidade espectral média quadrada utiliza, na primeira etapa, um processo bastante semelhante, com exceção da existência de um filtro colocado antes da operação de elevação ao quadrado, Figura 7.44. Na saída do dispositivo para calcular a média sai o valor da média quadrada relativo ao valor de $\Delta\omega$, ou seja, relativo ao sinal que passa pela janela $\Delta\omega$ do filtro. Agora, dividindo este valor $\overline{x_{\omega c}^2}$ (Figura 7.44) pelo valor de $\Delta\omega$, determinamos a densidade espectral média quadrada $\phi(\omega)$ para $\omega = \omega_c$, isto é:

$$\phi(\omega_c) \triangleq \frac{\overline{x_{\omega c}^2}}{\Delta\omega} \quad (7.69)$$



a) Função: $g(t) = \text{aleatório} + 0,3\text{sen}(2\pi t)$



b) Autocorrelação mostrando existência de sinal cíclico em $g(t)$, de período $T = 1$ segundo.

Figura 7.42 Autocorrelação de uma função $g(t)$ gerada em computador.

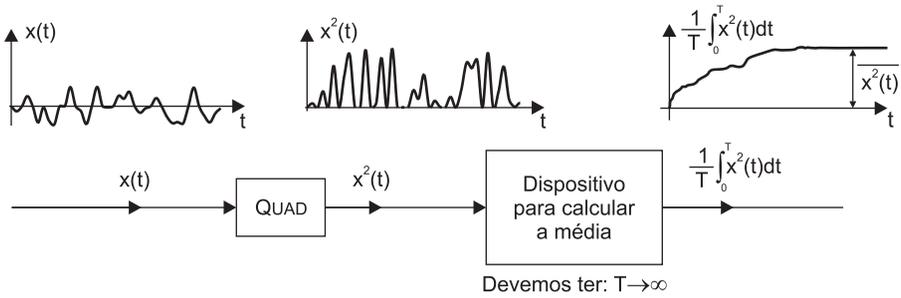


Figura 7.43 Blocos operacionais para a determinação do valor da média quadrada $\overline{x^2(t)}$.

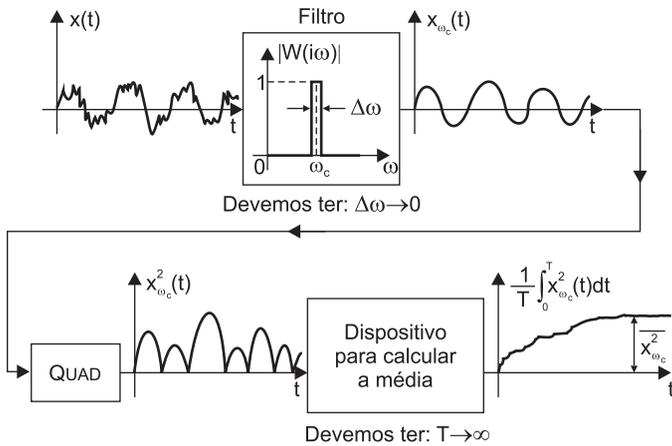


Figura 7.44 Valor da média quadrada relativo ao sinal que passa pela janela $\Delta\omega$ centrada em ω_c .

Repetindo o processo para outros valores de ω_c determinamos a função $\phi(\omega)$, Figura 7.45.

Para a definição formal da função $\phi(\omega)$ devemos escrever:

$$\phi(\omega) \triangleq \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \frac{(1/T) \int_0^T \overline{x_{\omega}^2} dt}{\Delta\omega} \quad (7.70)$$

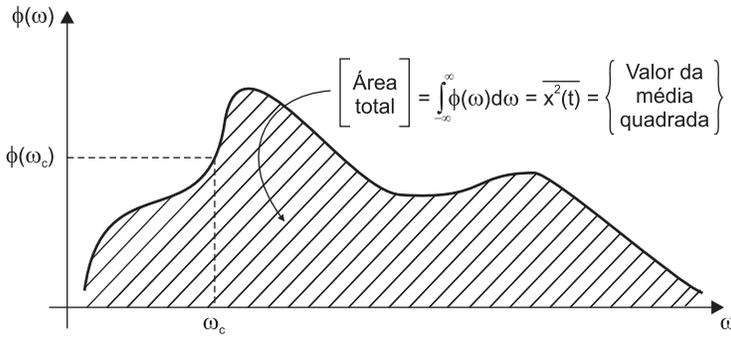


Figura 7.45 A função densidade espectral média quadrada $\phi(\omega)$.

NOTAS:

1. A função densidade espectral média quadrada $\phi(\omega)$ é contínua.
2. Se $x(t)$ tem unidade $\equiv \mu$, então $\phi(\omega)$ tem unidade $\equiv [\mu^2/(\text{rad}/\text{seg})]$. Por exemplo, se $x(t)$ for pressão expressa em kgf/cm^2 , então $\phi(\omega)$ tem unidade: $(\text{kgf}^2/\text{cm}^4)/(\text{rad}/\text{seg})$.
3. A Densidade Espectral Média Quadrada é também chamada de “Power Spectral Density” por motivos históricos. Em engenharia elétrica, área na qual seu estudo foi iniciado, a unidade obtida de $\phi(\omega)$ foi: $(\text{potência})/(\text{rad}/\text{seg})$. A denominação Densidade Espectral Média Quadrada é mais adequada porque na grande maioria das vezes a função $\phi(\omega)$ nada tem haver com *potência*.

c) Relação entre $\phi(\omega)$ e $R(\tau)$

Definindo a grandeza $\Psi(\omega)$, também chamada de densidade espectral, tal que:

$$\Psi(\omega) \triangleq \pi \phi(\omega) \tag{7.71}$$

Então $R(\tau)$ e $\Psi(\omega)$ estão relacionados entre si pela Transformada de Fourier, ou seja:

$$\Psi(\omega) = \mathcal{F} [R(\tau)] \tag{7.72}$$

$$R(\tau) = \mathcal{F}^{-1} [\Psi(\omega)] \tag{7.73}$$

A definição da Transformada de Fourier é:

$$\mathcal{F} [g(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \triangleq G(\omega)$$

e sua inversa:

$$\mathcal{F}^{-1} [G(\omega)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega = g(t), \text{ sendo: } \omega = 2\pi f$$

Assim, das equações 7.72 e 7.74 vem:

$$\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (7.74)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega) e^{+i\omega\tau} d\omega \quad (7.75)$$

Desenvolvendo estas equações com o objetivo de encontrar as relações entre $\phi(\omega)$ e $R(\tau)$, lembrando que $R(\tau)$ e $\phi(\omega)$ são funções pares, chegamos aos seguintes resultados:

$$\phi(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (7.76)$$

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} \phi(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \quad (7.77)$$

7.10.4 – “WHITE NOISE”

Um sinal aleatório que tem uma Densidade Espectral Média Quadrada plana é chamado de *ruído branco* (“white noise”), Figura 7.46.

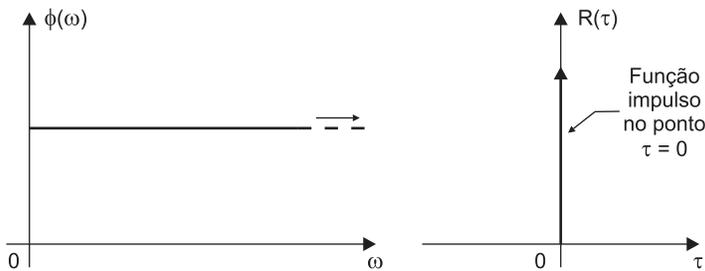


Figura 7.46 Funções $\phi(\omega)$ e $R(\tau)$ do “white noise”.

Uma Densidade Espectral Média Quadrada plana de 0 até ∞ não é possível na prática; o que podemos obter está ilustrado na Figura 7.47.

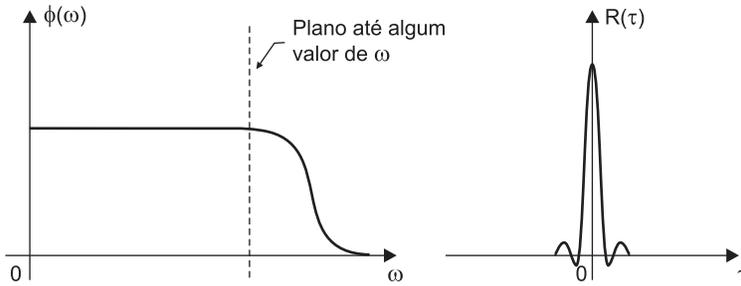


Figura 7.47 Densidade Espectral Média Quadrada de um “white noise” fisicamente realizável.

7.10.5 – DENSIDADE ESPECTRAL CRUZADA

Esta função é também chamada de “Cross – Spectral – Density”.

A Densidade Espectral Cruzada $\phi_{q_1 q_2}(\omega)$, relativa à dois sinais aleatórios $q_1(t)$ e $q_2(t)$, é definida como sendo:

$$\phi_{q_1 q_2}(\omega) \triangleq C_{q_1 q_2}(\omega) - i Q_{q_1 q_2}(\omega) \quad (7.78)$$

em que:

$C_{q_1 q_2}(\omega) \triangleq$ co-espectro;

$Q_{q_1 q_2}(\omega) \triangleq$ quad-espectro.

Podemos determinar experimentalmente o co-espectro e o quad-espectro conforme o diagrama ilustrado na Figura 7.48. Matematicamente estes são determinados através das seguintes expressões:

$$C_{q_1 q_2}(\omega) \triangleq \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \frac{\frac{1}{T} \int_0^T (q_{1\Delta\omega})(q_{2\Delta\omega}) dt}{\Delta\omega} \quad (7.79)$$

$$Q_{q_1 q_2}(\omega) \triangleq \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \frac{\frac{1}{T} \int_0^T (q_{1\Delta\omega 90^\circ})(q_{2\Delta\omega}) dt}{\Delta\omega} \quad (7.80)$$

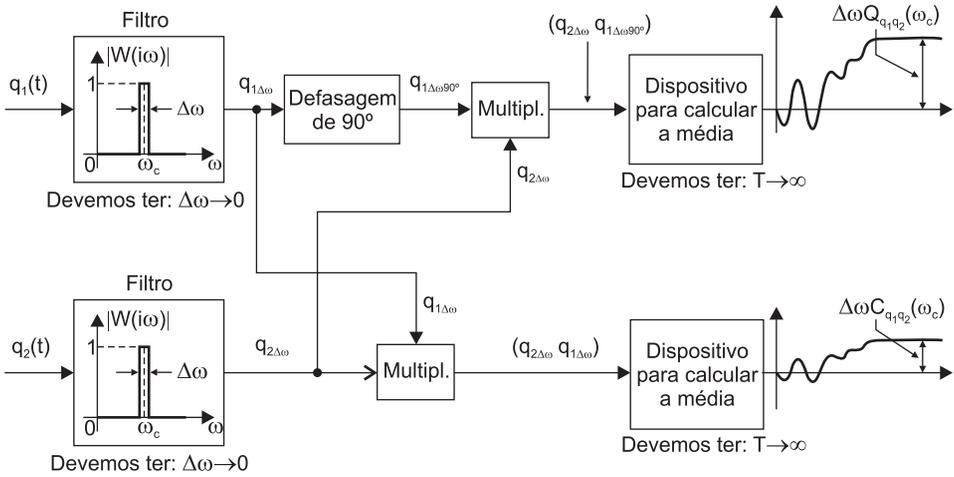


Figura 7.48 Determinação experimental da Densidade Espectral Cruzada.

7.10.6 – CONSIDERAÇÕES QUANDO A ENTRADA DO SISTEMA É UM SINAL ALEATÓRIO

a) Determinação da Densidade Espectral Média Quadrada da Resposta

Se $q_i(t)$ for a entrada de um sistema que tem função de transferência $W(s)$, Figura 7.49, então:

$$\phi_o(\omega) = \phi_i(\omega) (|W(i\omega)|)^2 \quad (7.81)$$

em que:

$\phi_i(\omega) \triangleq$ densidade espectral média quadrada da entrada $q_i(t)$;

$\phi_o(\omega) \triangleq$ densidade espectral média quadrada da saída $q_o(t)$;

$|W(i\omega)| =$ relação de amplitudes da Resposta em Freqüência do sistema.

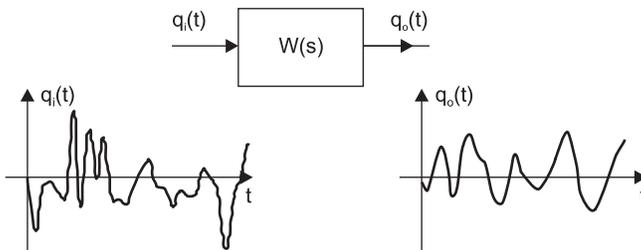


Figura 7.49 Sistema linear $W(s)$ com entrada aleatória $q_i(t)$ e saída $q_o(t)$.

Conforme mostra a equação 7.81, a densidade espectral média quadrada da saída $\phi_o(\omega)$ é calculada multiplicando a densidade espectral média quadrada da entrada $\phi_i(\omega)$ pelo quadrado da relação de amplitudes da resposta em frequência do sistema.

b) Determinação da Função de Transferência

A função de transferência de um sistema pode também ser encontrada através de sinais aleatórios, Figura 7.50. Considerando o sistema linear, então $W(i\omega)$ pode ser escrito como sendo a relação entre densidade espectral cruzada $\phi_{q_i q_o}(\omega)$ e densidade espectral média quadrada da entrada $\phi_{q_i}(\omega)$. Matematicamente:

$$W(i\omega) = \frac{\phi_{q_i q_o}(\omega)}{\phi_{q_i}(\omega)} \quad (7.82)$$

em que:

$\phi_{q_i}(\omega) \triangleq$ densidade espectral média quadrada da entrada $q_i(t)$;

$\phi_{q_i q_o}(\omega) \triangleq$ densidade espectral cruzada de $q_i(t)$ e $q_o(t)$.



Figura 7.50 Um dos problemas típicos de dinâmica de sistemas: conhecemos a entrada $q_i(t)$ e a saída $q_o(t)$ e queremos determinar $W(i\omega)$.

Além da aplicação normal desta equação 7.82 em máquinas, equipamentos, sistemas e dispositivos, ela tem uso bastante especial na determinação de funções de transferências relativas às reações humanas. Por exemplo, a determinação de um modelo dinâmico relativo aos tempos de reação de um piloto de avião.

7.11 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

EX1 – Sendo $\frac{Y}{F}(s) = \frac{1}{s+3}$ e $f(t) = \delta_+^*(t)$, determine $y(t)$.

EX2 – Para o sistema da Figura E7.1, determine $e_o(t)$ sabendo que as condições iniciais são zero e $e_i(t)$ segue o gráfico.

Dados: $R = 500 \text{ k}\Omega$ e $C = 1,0 \text{ }\mu\text{F}$.

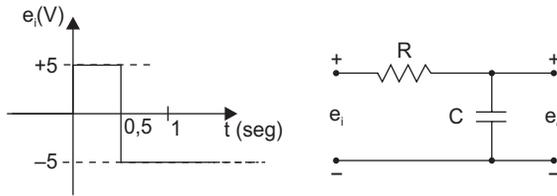


Figura E7.1

EX3 – Para o sistema da Figura E7.2, determine $e_o(t)$. As condições iniciais são zero, a entrada $e_i(t)$ é uma função conforme o gráfico e os parâmetros são: $R = 125k\Omega$ e $C = 4,0 \mu F$.

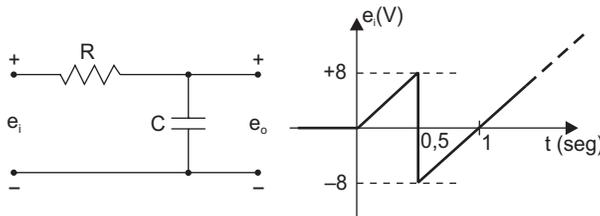


Figura E7.2

EX4 – Determine $q_o(t)$ para o sistema da Figura E7.3.

Sugestão: Escreva para $q_i(t)$ uma expressão conveniente para a aplicação do teorema do defasamento.

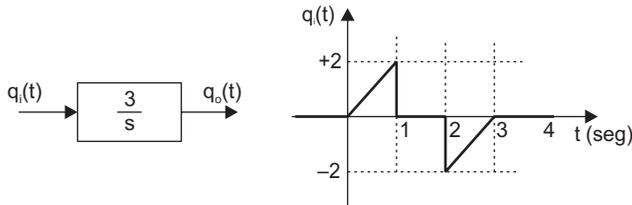


Figura E7.3

EX5 – Para o sistema da Figura E7.4, obtenha:

- Sua resposta impulsiva.
- Sua resposta quando $q_i(t)$ é a função indicada na Figura E7.4. Considerar as condições iniciais iguais a zero.

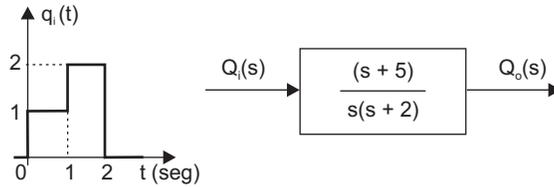


Figura E7.4

EX6 – Um microfone e seu amplificador foram construídos para medir o pulso da pressão de ar causado por um “boom” sônico. A forma da onda de pressão $p_i(t)$ está ilustrada na Figura E7.5.

O valor do ganho é $K = 1 \text{ volt}/(\text{lbt}/\text{ft}^2)$.

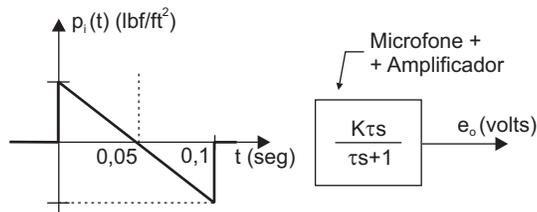


Figura E7.5

Estude dinamicamente a precisão do microfone e amplificador para aquela entrada, atendendo aos seguintes itens:

- Para $\tau = 0,1 \text{ seg}$, determine $e_o(t)$.
- Faça o gráfico $e_o(t)$ para $t = 0^+; 0,02; 0,05; 0,08; 0,10; 0,15; \text{ e } 0,20 \text{ seg}$, superpondo sobre o gráfico de $p_i(t)$.
- Das curvas da parte b, determine o ponto de máximo erro (através da observação visual) e o erro percentual neste ponto em relação ao valor de pico.
- Repita as partes a, b e c se o amplificador agora tem $\tau = 1,0 \text{ seg}$.

EX7 – Usando o método da transformada, calcule os valores numéricos da média e a amplitude da primeira harmônica de $x_o(t)$. Considere a entrada e o sistema dados na Figura E7.6.

Dados: $B = 1,0 \text{ Nseg}/\text{m}$ e $K_s = 1,0 \text{ N}/\text{m}$.

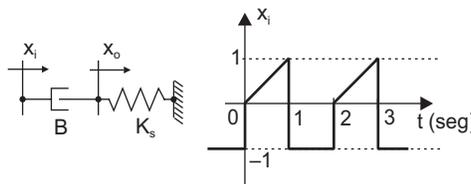


Figura E7.6

EX8 – Se a amplitude da primeira harmônica de $e_i(t)$ é **3 volts**, determine a amplitude da primeira harmônica de $e_o(t)$ para o sistema da Figura E7.7. Dado: $RC = 2 \text{ seg}$.

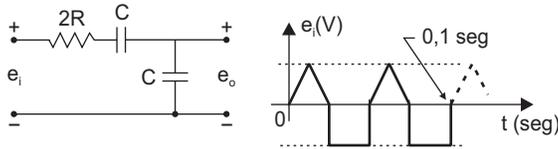


Figura E7.7

EX9 – Determine a amplitude das três primeiras harmônicas da saída do filtro RC quando a entrada é a onda quadrada dada na Figura E7.8.

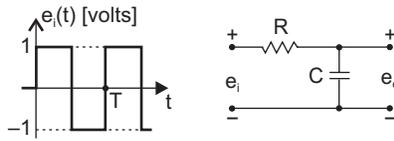


Figura E7.8

EX10 – Sabendo que $W(i\omega) = \frac{1}{i\omega + 1}$, use

$$h(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \int_0^{\infty} |W(i\omega)| \cos \Psi \cos \omega t \, d\omega \text{ para determinar } h(t).$$

EX11 – Dado $h(t) = e^{-\alpha t}$, use $W(i\omega) = \int_0^{\infty} \cos(\omega t) h(t) \, dt - i \int_0^{\infty} \sin(\omega t) h(t) \, dt$ para determinar $W(i\omega)$.

EX12 – Um sistema tem a função de transferência dada na Figura E7.9. Escolha o pulso retangular de mais longa duração ($A = ?$ e $T = ?$) que seria ainda uma boa aproximação para o teste do impulso.

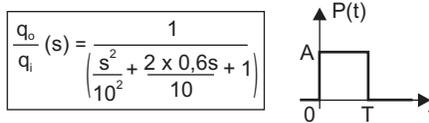


Figura E7.9

Considere:

$$a) \left| \frac{q_o(\omega)}{q_i} \right|_{\omega=\omega_{cs}} = \frac{\left| \frac{q_o(\omega)}{q_i} \right|_{\omega=0}}{99,725}$$

b) O espectro da Figura E7.10:

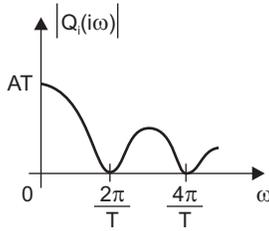


Figura E7.10

$$c) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos \alpha}}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

EX13 – Para sistema da figura E7.11, determine a densidade espectral média quadrada de $e_o(t)$.

Dado: $RC = 3 \text{ seg.}$

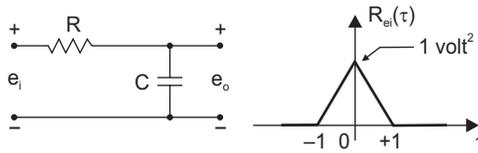


Figura E7.11

EX14 – Determine a densidade espectral da saída dos filtros dados na Figura E7.12, se a entrada for um ruído com densidade espectral: $\phi_i(\omega) = \frac{N_o}{1 + \omega^2}$.

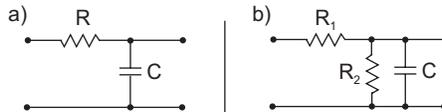


Figura E7.12

EX15 – A Figura E7.13 mostra um modelo cuja entrada $x_i(t)$ é um sinal aleatório com $\phi_{x_i}(\omega) = 100 + \omega^2$ para $0 \leq \omega \leq 100$ e zero para os demais valores de ω . Calcule o valor numérico do RMS de $x_o(t)$.

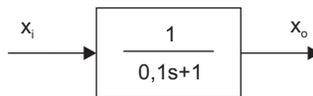


Figura E7.13

TÉCNICAS PARA TRATAMENTO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

8.1 – INTRODUÇÃO

Conforme já foi mencionado no Capítulo 1, o mundo real é sempre não-linear, pelo menos em pequeno grau. O estudo das influências das não-linearidades na resposta do sistema é importante para que o engenheiro possa interpretar certos comportamentos observados experimentalmente. O objetivo deste capítulo é ajudar compreender esses fenômenos que podem ocorrer e provocam diferenças entre as respostas dos sistemas reais e as esperadas da modelagem linear.

Para melhor visualização do contexto geral, antes de discutirmos propriamente as não-linearidades, vamos rever sinteticamente as particularidades dos sistemas lineares.

Sistemas lineares, por definição, têm elementos descritos por equações diferenciais lineares ordinárias com coeficientes constantes. As suas características são:

(i) Soluções Analíticas Gerais

Em razão da teoria matemática existente para resolver as equações diferenciais lineares ordinárias com coeficientes constantes, todos os aspectos de desempenho, como tempo de resposta, estabilidade, resposta em frequência e outros, são previsíveis.

A obtenção de solução analítica, possível em sistemas lineares, permite melhor entendimento do sistema, com a verificação de como cada parâmetro influencia o seu desempenho. Podemos ponderar, por exemplo, como o coeficiente de uma mola, o diâmetro de um furo, um vazamento interno, etc., afetam a resposta do sistema.

(ii) Princípio da Superposição

Usando o princípio da superposição obtemos a resposta do sistema às diversas entradas pela adição das respostas individuais, Figura 8.1.

Uma decorrência do princípio da superposição é a *proporcionalidade*. A proporcionalidade refere-se à propriedade que mantém a característica do tamanho da saída proporcional à entrada. Por exemplo, se a entrada dobrar, a saída também dobra. Isto pode ser visualizado através da Figura 8.1, fazendo $q_{i1} = q_{i2}$.

Esta propriedade está subentendida nos capítulos 5 e 6. Na curva de Resposta em Frequência (Capítulo 6), em um dos eixos temos a relação de amplitudes (A_o/A_i), ficando evidente que, se a entrada aumenta, a amplitude A_o aumentará na mesma

proporção. No Capítulo 5 vimos que as expressões matemáticas das funções respostas sempre contêm os parâmetros que caracterizam o tamanho da entrada. No caso da rampa, por exemplo, o coeficiente angular da entrada aparece multiplicando a saída.

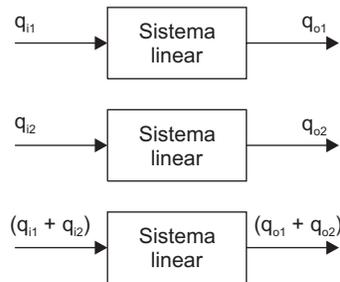


Figura 8.1 Diagramas ilustrando o princípio da superposição.

O princípio da superposição é utilizado para identificar se um sistema é *linear* ou *não-linear*. Em outras palavras, um sistema é não-linear se o princípio da superposição não se aplicar, evidentemente dentro das tolerâncias especificadas.

(iii) Funções de Transferência

Os sistemas lineares são completamente descritos pelas funções de transferência. Com a função de transferência obtemos facilmente o modelo matemático (equações diferenciais) e a resposta em frequência.

Tanto as equações diferenciais como a função de transferência ou a resposta em frequência podem ser usadas para a determinação das respostas dos mais diversos tipos de entrada.

(iv) Simplicidade e Técnicas de Projeto

Sistemas lineares significam simplicidade para análise e também disponibilidade de muitas técnicas de projeto. A teoria linear é fundamental para o entendimento do sistema, análise e projeto. Ainda, fornece uma metodologia para comparar o desempenho dos sistemas. Mesmo se a solução não-linear for facilmente encontrada para uma entrada particular, ainda haverá a necessidade de usar critérios para comparar os desempenhos dos sistemas.

Estes quatro itens anteriores caracterizam a importância do sistema linear. São por estas razões que o projetista prefere desenvolver modelos lineares, mas os fenômenos não-lineares podem se pronunciar, exigindo os seus tratamentos.

Diversos fenômenos são diretamente atribuídos às não-linearidades do sistema. Em testes, estes fenômenos se identificam da seguinte forma:

(1) Influência do Tamanho da Entrada

Em sistemas não-lineares, geralmente a forma e as características dinâmicas da resposta são dependentes dos valores (tamanho ou amplitude) da entrada. Por

exemplo, um sistema não-linear pode ter uma resposta para entrada com valor alto, outra resposta para entrada com valor menor e, em decorrência do atrito, o sistema pode nem responder se a entrada for muito pequena.

(2) Ciclo-limite

Com a entrada fixa, a saída pode oscilar com amplitude e frequência fixas. Esta condição é referida como oscilações do ciclo-limite.

Teoricamente, se um sistema linear é instável, a saída aumenta sem fronteiras. Entretanto, em um sistema real não é possível as grandezas tenderem a infinito. Quando as grandezas atingem altos valores, seus componentes podem sofrer sérios danos, como a quebra de um eixo, a explosão de uma tubulação, a queima de circuitos elétricos, etc. Se nenhum acidente ocorrer, uma vibração pode surgir com uma amplitude limitada por conta da saturação de elementos, o que significa um comportamento não-linear.

(3) Saltos de Amplitude na Ressonância

Com uma entrada senoidal podem ocorrer saltos na amplitude da saída, mesmo quando a entrada tem a amplitude ou frequência mudadas continuamente. Este fenômeno é conhecido como saltos de amplitudes e ocorrem quando as frequências estão na região da ressonância.

(4) Super-harmônicos

Com a entrada senoidal de frequência ω_I , a saída pode oscilar com frequências $\omega_I; 2\omega_I; \dots; n\omega_I$. Este fenômeno é conhecido como a geração de super-harmônicos de ordem n .

(5) Sub-harmônicos

Com a entrada senoidal de frequência ω_I , a saída pode oscilar nas frequências $\omega_I; \omega_I/2; \dots; \omega_I/n$. Este fenômeno é chamado de gerador de sub-harmônicos de ordem $1/n$.

(6) Oscilações Diversas

Com a entrada senoidal, a saída pode oscilar com a combinação da frequência da entrada e alguma outra frequência não presente na entrada.

Esta listagem de seis itens reúne os principais fenômenos atribuídos às não-linearidades, mas não tem a pretensão de esgotar todas as inúmeras possibilidades.

Agora, deixando a visualização geral e entrando no específico, vamos observar os modelos de blocos não-lineares.

A saída de um elemento não-linear pode depender do valor presente da entrada, das histórias passadas da entrada e da saída, da derivada da entrada e até dos valores de alguma outra variável. Felizmente, muitas das não-linearidades de interesse são completamente descritas pelas características da entrada e saída. Algumas não-

linearidades típicas estão ilustradas nas Figuras 8.2 e 8.3, e as Figuras de 8.4 a 8.6 mostram os efeitos de certas não-linearidades sobre a onda senoidal. Muitas destas não-linearidades, especialmente aquelas que têm multivalores, podem provocar instabilidade.

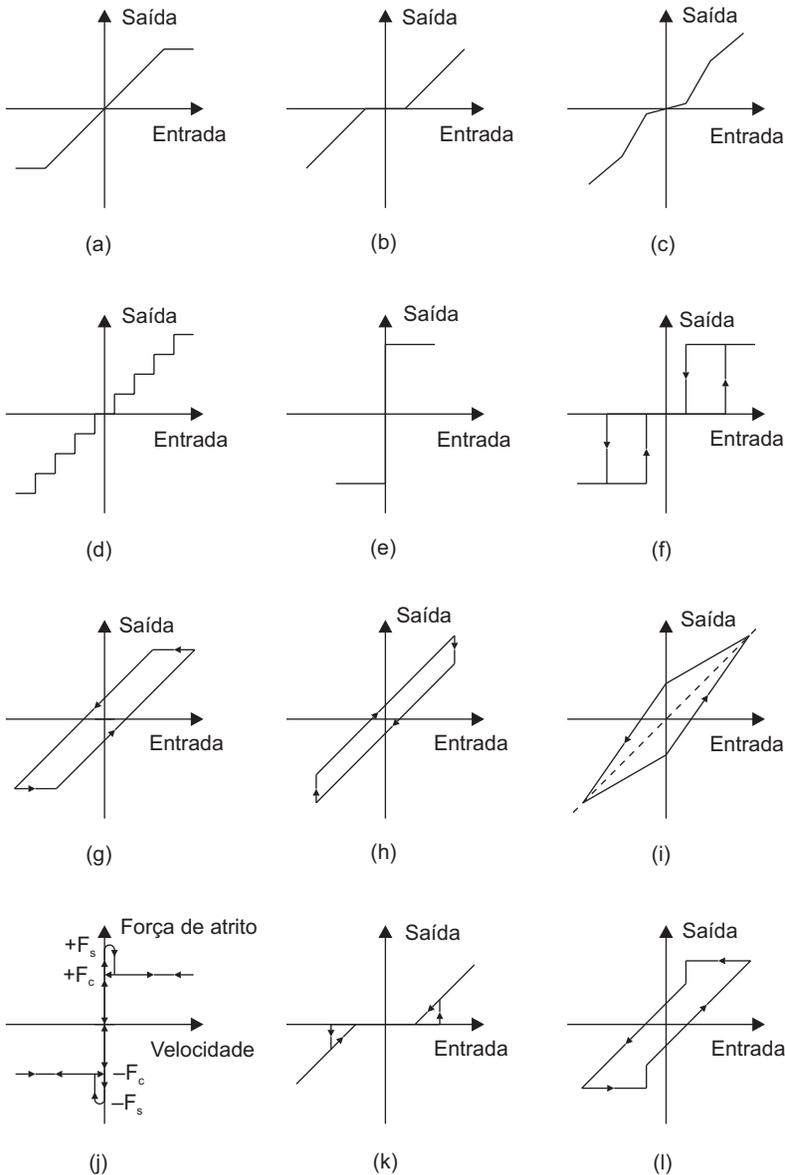
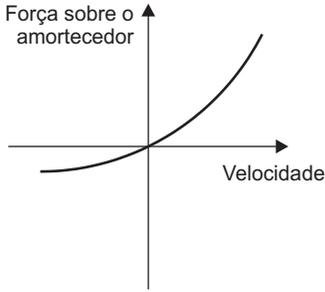
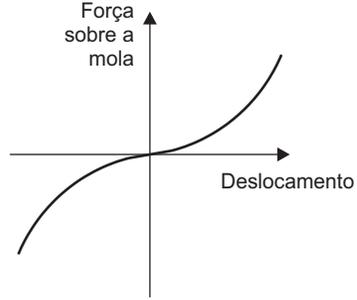


Figura 8.2 Características típicas de entrada-saída: (a) saturação; (b) espaço morto; (c) ganho não-linear; (d) granularidade; (e) relé ideal; (f) relé com espaço morto; (g) folga (*backlash*); (h) folga inversa; (i) histerese elétrica; (j) atrito de Coulomb e estático; (k) forças viscosas e de atrito; (l) forças de mola e de atrito.

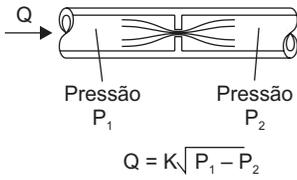
Amortecedor não-linear



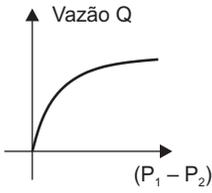
Mola não-linear



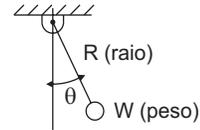
Vazão no orifício



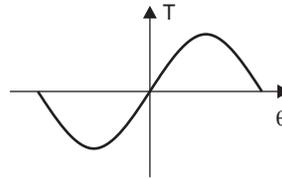
$$Q = K\sqrt{P_1 - P_2}$$



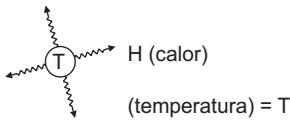
Torque no pêndulo simples



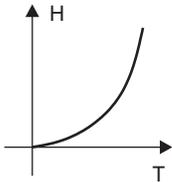
$$\text{Torque} = T = WR\text{sen}\theta$$



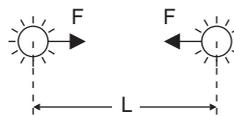
Radiação de calor



$$H = kT^4$$



Força eletrostática



$$\text{Força} = F = k/L^2 \quad (L > 0)$$

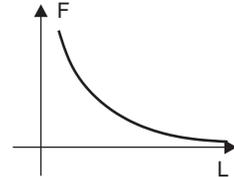


Figura 8.3 Relações não-lineares suaves e contínuas.

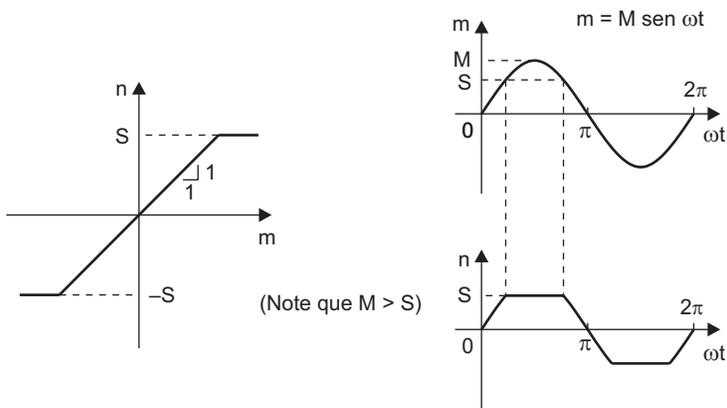


Figura 8.4 Não-linearidade de saturação, resposta à entrada senoidal.

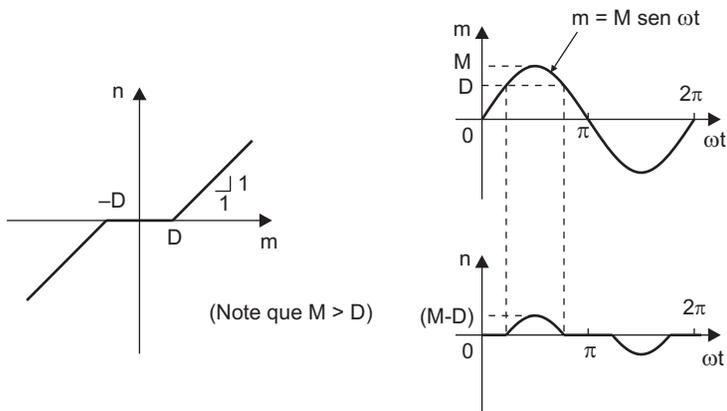


Figura 8.5 Não-linearidade de espaço morto, resposta à entrada senoidal.

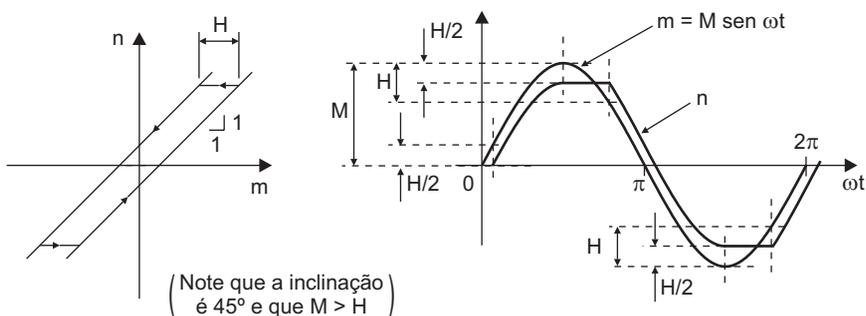


Figura 8.6 Não-linearidade de folga (*backlash*), resposta à entrada senoidal.

Apesar de todos os sistemas reais serem não-lineares em alguma extensão, determinado sistema em uma condição específica pode operar em uma região linear. Contudo, alguns elementos, como relés, são não-lineares de tal maneira que nenhuma região linear existe.

Em muitos sistemas não-lineares o problema é avaliar o efeito da não-linearidade na resposta. Como nenhuma teoria não-linear geral existe, utilizamos algumas técnicas que são aplicadas a certas classes de problemas:

a) **Linearização ou Análise de Sinal Pequeno**

Considerando pequenas excursões das variáveis ao redor de um ponto de operação, o sistema pode ser tratado como linear. A resposta é computada para cada ponto de operação.

Esta técnica não é um método para resolver equações diferenciais não-lineares. Como ela é freqüentemente utilizada, será estudada na seção 8.2.

b) **Análise Linear por Partes**

Esta técnica é útil quando o sistema é descrito por equações lineares válidas para certos intervalos. Pela inserção de condições iniciais apropriadas nas equações diferenciais, uma solução global pode ser obtida juntando as partes.

c) **Análise pela Função Descritiva**

Esta técnica é um método aproximado para determinar a resposta senoidal, o fenômeno do salto de ressonância e, possivelmente, do ciclo-limite. Quando ainda na fase de cálculos e estudos, mesmo sem a construção de protótipo, ela nos permite extrair muitos benefícios.

O conceito de função descritiva é útil no projeto de sistemas e testes. Uma discussão deste assunto está apresentada na seção 8.3.

d) **Análise do Plano de Fase**

É uma técnica gráfica para resolver equações diferenciais não-lineares e muito útil para a determinação do ciclo-limite e da resposta da função de grau.

e) **Análise em Computador Analógico**

Esta técnica consiste em fazer um modelo eletrônico (com componentes) da equação diferencial e registrar a solução gráfica (função do tempo) em um oscilógrafo. É bastante geral nas aplicações, sendo conveniente para análise e projeto.

Em razão do custo de componentes, aliado aos custos de calibração e de manutenção, esta metodologia foi perdendo espaço para os computadores digitais.

f) **Análise em Computador Digital**

Atualmente existem muitos programas desenvolvidos para resolver equações diferenciais não-lineares.

Como presentemente temos altas velocidades de processamento, as integrações numéricas e outros cálculos são executados rapidamente.

Alguns destes programas tiveram origem no conceito básico da computação analógica, como é o caso do “simulink”, mas ultrapassando em muito o uso do analógico porque contém uma “biblioteca” de blocos funcionais.

Este assunto está descrito em dois locais, na seção 8.4 e no Apêndice C.

A seguir são apresentados estudos de três métodos para tratamento de sistemas não-lineares: Linearização ao Redor de um Ponto de Operação; Função Descritiva; e Simulação Digital.

8.2 – LINEARIZAÇÃO AO REDOR DE UM PONTO DE OPERAÇÃO

Modelagens com este procedimento de linearização são chamadas de *Análise de Perturbação*.

A linearização é um processo de aproximação que efetuamos para que possamos utilizar todas as propriedades e vantagens dos sistemas lineares.

Quando o sistema contém fenômenos físicos que apresentam relações não-lineares entre suas grandezas, a sua modelagem leva a equações diferenciais não-lineares, de difícil resolução e de resultados específicos. Para relações não-lineares cujas curvas têm variações suaves e contínuas, a aproximação linear (linearização) pode ser viável. As não-linearidades da Figura 8.3 correspondem a esta situação.

O conceito básico desta aproximação linear é que uma curva contínua e suave não difere muito da sua linha tangente, se as grandezas variarem em torno do ponto de tangência. Assim, se a região de operação for uma faixa estreita, nós podemos substituir a função não-linear por uma reta. Para certos processos industriais ou sistemas automatizados em que normalmente a condição de trabalho é quase uniforme, este procedimento representa uma boa aproximação. É evidente que quanto maior a excursão da grandeza, maior será o erro, Figura 8.7.

Quando temos apenas dados experimentais estabelecendo a relação entre as grandezas, a função linear pode ser obtida graficamente, traçando uma reta tangente e determinando a equação desta reta tangente.

Se a relação entre as grandezas tiver uma expressão analítica, aplicamos a série de Taylor truncada.

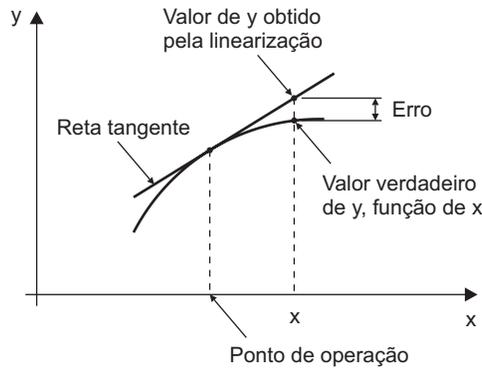


Figura 8.7 O erro da linearização depende da distância entre a grandeza e o ponto de operação.

Vamos supor uma função $y = f(x)$ expandida em série de Taylor em torno de um ponto de operação x_o , em que $y(x)$ é suave e contínua na região próxima de x_o . Então:

$$y = f(x_o) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_o} (x - x_o) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_o} (x - x_o)^2 + \dots \quad (8.1)$$

Se as variações de x em torno de x_o forem pequenas, podemos desprezar os termos $(x - x_o)^n$, com $n \geq 2$, então obtemos:

$$y \approx f(x_o) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_o} (x - x_o) \quad (8.2)$$

Agora, definindo as variáveis de perturbação y_p e x_p tal que:

$$x \triangleq x_o + x_p; \text{ e}$$

$$y \triangleq y_o + y_p$$

em que o índice “ o ” significa o valor da grandeza no ponto de operação e o índice “ p ”, a variação de perturbação da grandeza ao redor do ponto de operação.

Logo, as perturbações são escritas:

$$x_p = x - x_o \quad (8.3)$$

$$y_p = y - y_o \quad (8.4)$$

Sendo $y_o = f(x_o)$, combinando (8.2), (8.3) e (8.4) vem:

$$y_p = K_x x_p \quad (8.5)$$

em que:

$K_x \triangleq \left. \frac{df}{dx} \right|_o$; coeficiente angular da reta tangente no ponto de operação.

É importante destacar que em modelagem devemos definir o parâmetro K_x sempre positivo. Se a derivada for negativa, a definição de K_x deve ser mudada, isto é:

$$K_x \triangleq - \left(\left. \frac{df}{dx} \right|_o \right); \text{ se } \left(\left. \frac{df}{dx} \right|_o \right) < 0$$

Neste caso, com a derivada negativa, introduzimos um sinal negativo na equação 8.5. Desta forma:

$$y_p = -K_x x_p; \text{ para } \left. \frac{df}{dx} \right|_o < 0 \quad (8.6)$$

A Figura 8.8 ilustra graficamente a linearização feita através da equação 8.5, inclusive mostrando o erro.

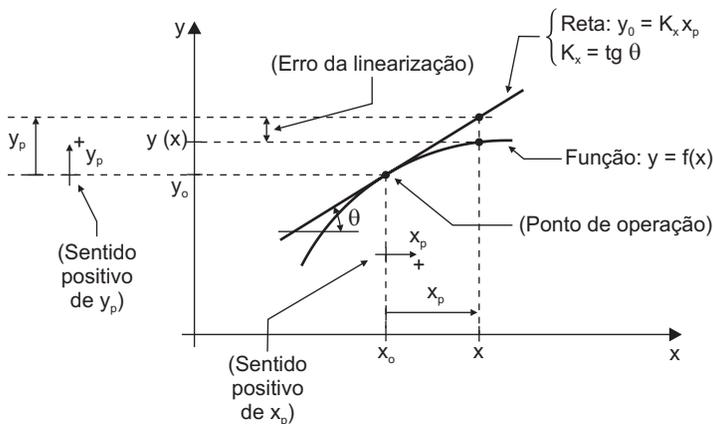


Figura 8.8 Interpretação da linearização através da série de Taylor.

No caso de y ser função de duas variáveis x_1 e x_2 , $y = f(x_1, x_2)$, a expansão em série de Taylor resulta:

$$y = y_o + \left[\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_o x_{1p} + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_o x_{2p} \right] + \frac{1}{2!} \left[\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|_o x_{1p}^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_o x_{1p} \cdot x_{2p} + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right|_o x_{2p}^2 \right] + \dots \quad (8.7)$$

em que o índice “o” significa o valor da grandeza no ponto de operação e o índice “p”, a variação de perturbação da grandeza ao redor do ponto de operação.

Agora, supondo que x_{1p} e x_{2p} tenham valores pequenos, de tal forma que os termos de ordens superiores sejam desprezíveis, então é possível escrever uma relação linear aproximada entre as grandezas, isto é:

$$y_p = K_{x_1} x_{1p} + K_{x_2} x_{2p} \quad (8.8)$$

em que:

$$K_{x_1} \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_o; \text{ para } \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_o > 0;$$

$$K_{x_2} \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_o; \text{ para } \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_o > 0;$$

Se as derivadas forem negativas, as definições dos coeficientes devem mudar para:

$$K_{x_1} \triangleq - \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_o; \text{ para } \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_o < 0; \text{ e}$$

$$K_{x_2} \triangleq - \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_o; \text{ para } \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_o < 0$$

Constatamos que estas definições levam sempre a coeficientes K_{x_1} e K_{x_2} positivos. Então, se as derivadas forem negativas, a equação 8.8 deve ser escrita da seguinte forma:

$$y_p = -K_{x_1} x_{1p} - K_{x_2} x_{2p} \quad (\text{para ambas derivadas negativas}) \quad (8.9)$$

Para exemplificar, vamos fazer a linearização da função $y = C x_1/x_2$, em que $C > 0$; $x_{1o} > 0$; e $x_{2o} > 0$.

Iniciamos a resolução calculando as derivadas no ponto de operação. Assim:

- Cálculo dos coeficientes:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_o = \left. \frac{C}{x_2} \right|_o = \frac{C}{x_{2o}} \triangleq K_{x_1} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_o = - \left. \frac{C x_1}{x_2^2} \right|_o \triangleq - \frac{C x_{1o}}{x_{2o}^2} \triangleq -K_{x_2} \end{cases} \quad (8.10)$$

- Equação linearizada:

$$y_p = K_{x_1} x_{1p} - K_{x_2} x_{2p} \quad (8.11)$$

Sendo ambos os coeficientes K_{x_1} e K_{x_2} positivos, conforme mostra a (8.10).

- Equação linearizada com valores:

Vamos supor que $C = 10$; $x_{1o} = 2$; e $x_{2o} = 4$. Então, $K_{x_1} = (10/4) = 2,5$ e $K_{x_2} = (10 \times 2/16) = 1,25$. Logo, a (8.11) fica:

$$y_p = 2,5 x_{1p} - 1,25 x_{2p} \quad (8.12)$$

- Erro devido à linearização:

Para visualizarmos o erro, vamos supor as perturbações: $x_{1p} = +1$ e $x_{2p} = +1$. Assim calculando y_p linearizado resulta:

$$y_p = 2,5 - 1,25 = 1,25$$

No ponto de operação temos:

$$y_o = \frac{C x_{1o}}{x_{2o}} = \frac{10 \times 2}{4} = 5$$

Chamando o valor linearizado de y_L , que de acordo com a Figura 8.8 é igual à soma de y_o e y_p , isto é: $y_L = y_o + y_p$, então:

$$y_L = 5 + 1,25 = 6,25$$

Agora, calculando o y verdadeiro através da função, obtemos: $y = C x_1/x_2 = 10 \times 3/5 = 6$. Determinando o erro percentual de y_L em relação a y resulta:

$$\text{Erro \%} = 100 \times \frac{(6,25 - 6)}{6} = 4,17 \%$$

O erro pode ser considerado satisfatório se observarmos que x_1 variou 50% e x_2 , 25%.

Voltando agora a outras maneiras de linearização, podemos sugerir os procedimentos ilustrados na Figura 8.9a se o modelo exige maior precisão no começo e no final, ou usando uma regressão linear, conforme Figura 8.9b.

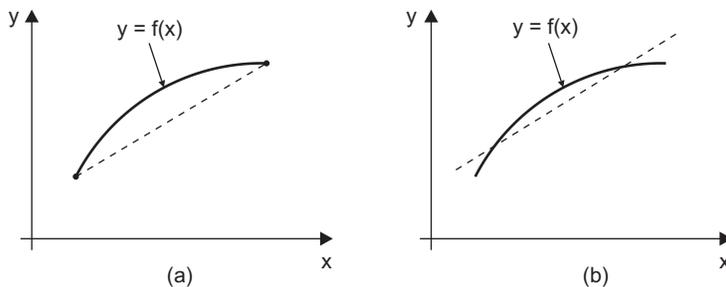


Figura 8.9 Duas alternativas de linearização quando temos maiores excursões de x .

8.3 – FUNÇÃO DESCRITIVA

Uma técnica muito usada na prática para análise de sistemas não-lineares, incluindo os com características descontínuas como os da Figura 8.2, é o método da função descritiva. Cabe salientar que este é também um método aproximado, portanto, algumas de suas previsões podem ser questionadas. Contudo, em muitas aplicações encontramos excelentes concordâncias com resultados teóricos computacionais e também com dados medidos em testes de sistemas reais.

O método da função descritiva é entendido como sendo uma extensão do conceito da resposta em frequência, aplicado a sistemas não-lineares. Em um sistema linear, a resposta no regime permanente a uma entrada senoidal é também uma onda senoidal e tem a mesma frequência da entrada, (vide Capítulo 6). Em um sistema não-linear, geralmente a saída é distorcida pela presença de harmônicos, mas a fundamental tem frequência igual à da entrada. Vide, por exemplo, a Figura 8.4, na qual a saída é periódica não-senoidal, portanto, possível de ser representada por uma série de Fourier, com uma frequência fundamental e suas harmônicas.

O método da função descritiva é baseado em duas hipóteses:

1. O espectro da periódica não-senoidal tem a amplitude da fundamental maior que as amplitudes harmônicas.
2. Os elementos lineares do sistema atuam como um filtro das harmônicas.

Diante destas colocações, definimos função descritiva como a resposta em frequência do sistema, considerando como entrada a onda senoidal e como saída a componente fundamental da resposta periódica, no regime permanente. Esta é também chamada de *função de transferência senoidal efetiva*. Geralmente, ela depende da *frequência* e da *amplitude* da entrada, o que difere da função de transferência de sistema linear, que independe da amplitude da entrada.

A precisão deste método depende do cumprimento das hipóteses, isto é, do espectro em frequência (discreto) da saída do elemento não-linear e da capacidade de filtragem dos demais componentes lineares do sistema. O espectro em frequência da saída pode ser obtido através da análise da série de Fourier, que nos dá a componente da fundamental, necessária para a determinação da função descritiva. As características de filtragem dos elementos lineares são verificadas através das respectivas curvas de resposta em frequência, Figura 8.10.

Como um exemplo, vamos considerar um sistema com somente um elemento não-linear, um relé ideal (sem espaço morto), denominado bloco G, Figura 8.11.

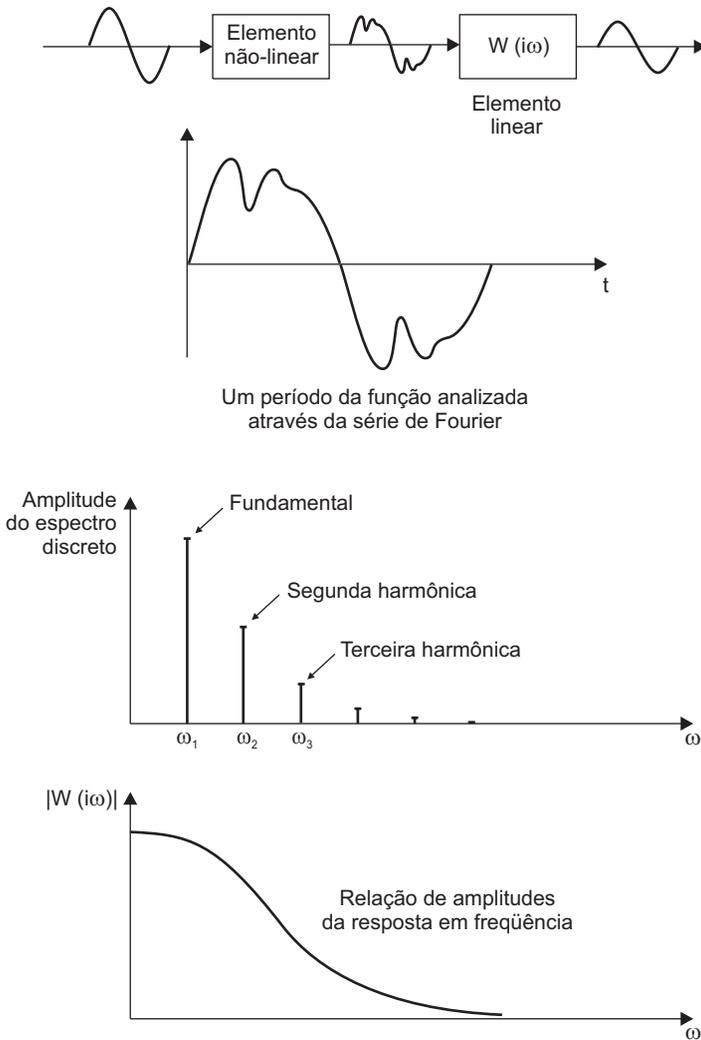


Figura 8.10 O espectro tem a fundamental mais significativa e o sistema linear filtra as harmônicas.

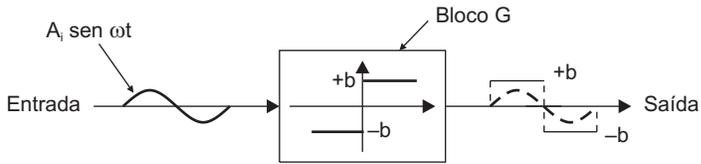
No Capítulo 7 (equações 7.21, 7.22 e 7.23) vimos que a expansão em série de Fourier é dada por:

$$f(t) = \frac{a_0}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \text{sen} \frac{2\pi n}{T} t \right) \quad (7.21) \quad (\text{repetida})$$

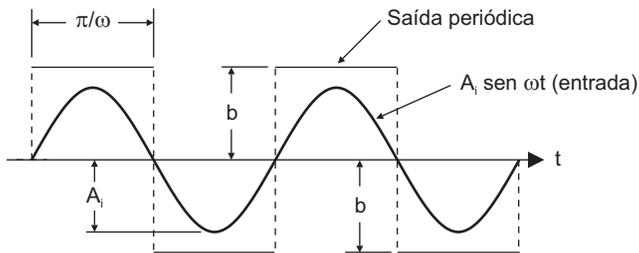
em que:

$$a_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.22) \quad (\text{repetida})$$

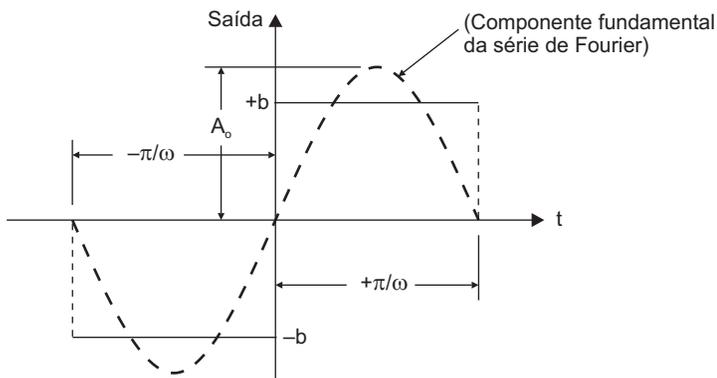
$$b_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.23) \quad (\text{repetida})$$



(a) Relé ideal (sem espaço morto)



(b) Caracterização da entrada e saída



(c) Saída e a componente fundamental

Figura 8.11 Estudo gráfico da resposta de um relé ideal, denominado bloco G.

Determinando os coeficientes da série de Fourier da saída, considerando o sinal da Figura 8.11 resulta:

$$a_0 = 0 \quad (8.13)$$

$$a_n = 0; \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.14)$$

$$b_n = \int_0^T f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.15)$$

Da equação 8.15, fazendo $n = 1$ determinamos a amplitude da componente fundamental A_0 sen ωt , isto é:

$$A_0 = \frac{4b}{\pi} \quad (8.16)$$

Este resultado já era esperado, pois já efetuamos a expansão em série de Fourier da onda quadrada, dada pela Figura 7.21, variando de -1 a $+1$. Multiplicando a primeira componente da equação 7.36 por b obtemos o resultado dado pela equação 8.16.

Chamando de $G_d(i\omega)$ a função descritiva do bloco G (Figura 8.11), então:

$$|G_d(i\omega)| = \frac{4b}{\pi A_i} \quad (8.17)$$

$$\angle G_d(i\omega) = \angle 0^\circ \quad (8.18)$$

Das equações 8.17 e 8.18 vemos que o módulo e a fase de $G_d(i\omega)$ independem da frequência, mas $|G_d(i\omega)|$ depende da amplitude A_i da entrada. Esta independência da frequência é uma característica de elementos não-lineares que não armazenam energia nem têm histerese.

O exemplo acima discutido determina a função descritiva de forma analítica, usando as equações dos coeficientes da série de Fourier. Em muitas ocasiões não temos a expressão, mas sim dados medidos adquiridos digitalmente de experimentos ou uma matriz (vetores) gerada através de cálculos computacionais. Neste caso a relação de amplitudes e a fase podem ser obtidas utilizando o filtro de Fourier.

Mesmo em sistemas supostamente lineares, há razão para usar o filtro de Fourier. As distorções presentes nos sistemas reais são de dois tipos: (i) harmônicos com frequências múltiplas inteiras da frequência de excitação; e (ii) ruídos aleatórios sempre presentes nas medições. Quando fazemos medições em sistemas reais, a saída e, às vezes, também a entrada não são sinais senoidais puros e perfeitos.

Assim, usamos também para sistemas lineares o conceito de função descritiva, isto é, a relação de amplitudes e a fase são determinadas através das componentes da frequência fundamental da entrada e da saída.

A concepção do filtro de Fourier é baseada nas seguintes equações:

$$\frac{I}{N_c T} \int_0^{N_c T} \text{sen}(\omega t + \phi) \text{sen}(\omega t) dt = \frac{\cos\phi}{2} \quad (8.19)$$

$$\frac{I}{N_c T} \int_0^{N_c T} \text{sen}(\omega t + \phi) \cos(\omega t) dt = \frac{\text{sen}\phi}{2} \quad (8.20)$$

$$\frac{I}{N_c T} \int_0^{N_c T} \text{sen}(n \omega t + \phi) \text{sen}(\omega t) dt = 0; \quad n = 2, 3, \dots \quad (8.21)$$

$$\frac{I}{N_c T} \int_0^{N_c T} \text{sen}(n \omega t + \phi) \cos(\omega t) dt = 0; \quad n = 2, 3, \dots \quad (8.22)$$

em que:

$N_c \triangleq$ número de ciclos considerados;

$\omega \triangleq$ frequência da oscilação considerada;

$T \triangleq$ período da oscilação considerada ($T = 2\pi/\omega$);

$\phi \triangleq$ ângulo de fase.

O estudo deste filtro mostra que a precisão melhora com o aumento de ciclos N_c . Por exemplo, para $N_c = 1000$, todas as entradas com frequências fora do intervalo $\omega \pm 0,06\omega$ terão na saída amplitudes multiplicadas por um fator da ordem de 0,001, ou menor.

Das equações acima podemos implementar um diagrama funcional para o filtro de Fourier, Figura 8.12.

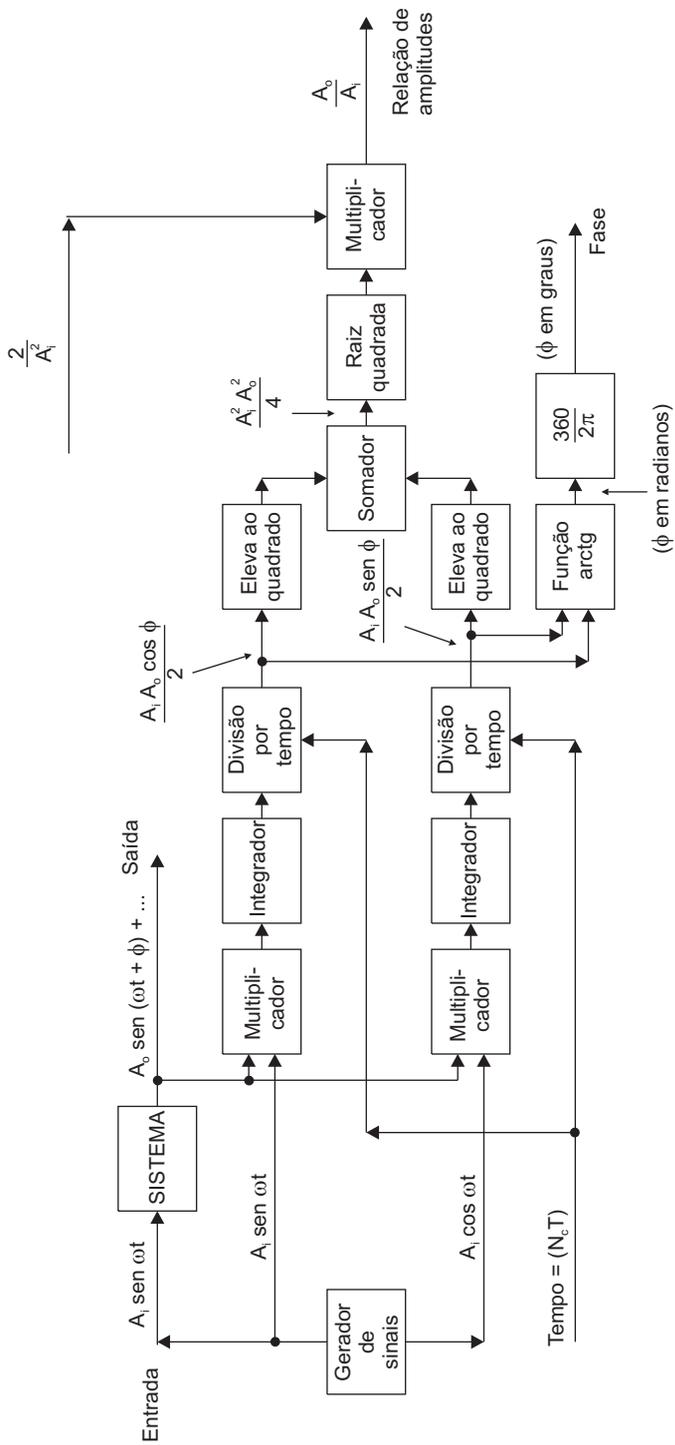


Figura 8.12 Diagrama de blocos para o filtro de Fourier.

8.4 – SIMULAÇÃO DIGITAL

Há programas de simulação já desenvolvidos para aplicações específicas. Alguns destes contêm componentes virtuais como molas, amortecedores, cilindros hidráulicos, etc., para montagem, a partir das quais, com comandos, observamos o funcionamento do sistema e registramos seu comportamento. Sob o ponto de vista de informática, estes programas são de alto nível.

O objetivo desta seção não é discutir estes programas, mas apresentar os fundamentos da simulação digital da dinâmica de um sistema.

A simulação digital é um procedimento muito eficiente que resolve com relativa facilidade sistemas complexos, tanto lineares como não-lineares. A solução obtida é na forma gráfica e/ou tabelas numéricas. Soluções na forma de expressões matemáticas, como, por exemplo, funções do tempo, não são determinadas pela simulação. Em caso de necessidade, nada impede que uma expressão seja obtida indiretamente, a partir dos dados da simulação.

O foco da simulação digital da dinâmica de sistemas é a resolução numérica de equações diferenciais pelos algoritmos de integração. Muitos destes algoritmos estão disponíveis e se diferenciam pela velocidade de execução, precisão e complexidade de programação.

Os métodos foram desenvolvidos para resolver um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem obtido através da reformulação de um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Assim, aplicamos o procedimento de integração numérica em cada uma das equações diferenciais de primeira ordem.

Ilustrando o processo, vamos reformular uma equação diferencial de ordem n a um conjunto contendo n equações diferenciais de primeira ordem. Seja:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t, x, x', \dots, x^{(n)}) \quad (8.23)$$

em que:

$a_0, a_1 \dots a_n \triangleq$ coeficientes (constantes ou não);

$$x^{(n)} \triangleq \frac{d^n x}{dt^n}$$

Definindo n novas variáveis $x_{(1)}, x_{(2)} \dots x_{(n)}$, fazendo $x_{(1)} = x$, então, podemos escrever as n equações de primeira ordem:

$$\frac{d x_{(1)}}{d t} = x_{(2)} \quad (8.24)$$

$$\frac{d x_{(2)}}{d t} = x_{(3)} \quad (8.25)$$

.

.

.

$$\frac{d x_{(n-1)}}{d t} = x_{(n)} \quad (8.26)$$

$$\frac{d x_{(n)}}{d t} = \frac{1}{a_n} \left[\bar{f} \left(t, x_{(1)}, \dots, x_{(n)} \right) - a_{n-1} x_{(n)} - \dots - a_1 x_{(2)} - a_0 x_{(1)} \right] \quad (8.27)$$

Exemplificando, seja a equação de terceira ordem:

$$\sqrt{x} \frac{d^3 x}{d t^3} + \operatorname{sen} x \frac{d^2 x}{d t^2} + 2 t \left(\frac{d x}{d t} \right)^2 + e^x = \log \left(2 t + \frac{d x}{d t} \right) \quad (8.28)$$

Adotando três novas variáveis $x_{(1)}$, $x_{(2)}$ e $x_{(3)}$ e fazendo $x_{(1)} = x$, escrevemos as três equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \frac{d x_{(1)}}{d t} &= x_{(2)} \\ \frac{d x_{(2)}}{d t} &= x_{(3)} \\ \frac{d x_{(3)}}{d t} &= \frac{1}{\sqrt{x_{(1)}}} \left[\log \left(2 t + x_{(2)} \right) - \operatorname{sen} x_{(1)} x_{(3)} - 2 t \left(x_{(2)} \right)^2 - e^{x_{(1)}} \right] \end{aligned} \quad (8.29)$$

Deste exemplo observamos que a resolução de uma equação diferencial (ou um conjunto de equações diferenciais simultâneas) se transforma em resolver um conjunto de equações simultâneas do tipo:

$$\frac{d x}{d t} = x' = f(t, x) \quad (8.30)$$

em que o termo da direita é geralmente não-linear.

O conjunto de equações será resolvido no computador e, em decorrência da natureza da computação digital, a solução de (8.30) será da forma:

$$x_i = \begin{bmatrix} \text{valor n\u00famero} \\ \text{no tempo } t_i \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

em que t_i \u00e9 o valor da vari\u00e1vel independente t no i -\u00e9simo passo computacional e t_i se distancia de t_{i-1} pelo incremento de tempo h , isto \u00e9:

$$t_i = t_{i-1} + h; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (8.32)$$

Agora, voltando aos algoritmos de integra\u00e7\u00e3o, para entender o conceito do procedimento, vamos estudar o m\u00e9todo de Euler, o mais simples dos algoritmos. Este se baseia na s\u00e9rie de Taylor truncada, ou seja:

$$y_1 = y_0 + h \left. \frac{d y}{d t} \right|_0 \quad (8.33)$$

em que:

$y(t) \triangleq$ vari\u00e1vel dependente (uma fun\u00e7\u00e3o do tempo); e

$y_k \triangleq y(kh) \triangleq$ valor da fun\u00e7\u00e3o $y(t)$ no instante $t = kh$.

Da s\u00e9rie de Taylor e da (8.33) observamos que o valor previsto para y_1 ter\u00e1 um erro ε dado por:

$$\varepsilon = \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2 y}{d t^2} \right|_0 + \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3 y}{d t^3} \right|_0 + \dots \quad (8.34)$$

Um erro similar ocorrer\u00e1 a cada passo do c\u00e1lculo. Enquanto o \u00fanico erro da (8.33) \u00e9 dado pela (8.34), esta express\u00e3o n\u00e3o ser\u00e1 v\u00e1lida para o c\u00e1lculo do erro de y_2 , y_3 , etc. Na (8.33) o termo y_0 \u00e9 conhecido com precis\u00e3o (condi\u00e7\u00e3o inicial), mas os termos correspondentes nos c\u00e1lculos subseq\u00fcentes v\u00e3o se tornando cada vez mais imprecisos. Portanto, o erro em raz\u00e3o do truncamento tende a se acumular no decorrer do c\u00e1lculo e pode alcan\u00e7ar um n\u00edvel que ultrapasse o limite toler\u00e1vel. Entretanto, por sua simplicidade, o m\u00e9todo de Euler \u00e9 muito usado em aplica\u00e7\u00f5es nas quais o aumento do erro pode ser monitorado.

O m\u00e9todo de Euler, expresso matematicamente pela equa\u00e7\u00e3o 8.33, tem um conceito que deve ser observado. Ele calcula o futuro com base no presente, isto \u00e9, usando os valores presentes da fun\u00e7\u00e3o e da sua derivada, ele calcula o valor futuro da fun\u00e7\u00e3o.

Para ilustrar o procedimento do método de Euler, vamos aplicá-lo à resolução da equação diferencial:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + y = \text{sen}(\omega t) \quad (8.35)$$

considerando $w = 1 \text{ rad/seg}$ e as condições iniciais: $\left. \frac{dy}{dt} \right|_0 = 5$ e $y(0) = 7$.

A equação 8.35 é de segunda ordem, portanto, será reduzida a duas equações diferenciais de primeira ordem, introduzindo uma variável auxiliar x , isto é:

$$\frac{dy}{dt} = x \quad (8.36)$$

$$\frac{dx}{dt} = \text{sen}(\omega t) - 3x - y \quad (8.37)$$

Aplicando Euler para y e x no ponto $t_i = h$, então:

$$y_i = y_0 + h \left. \frac{dy}{dt} \right|_0 \quad (8.38)$$

$$x_i = x_0 + h \left. \frac{dx}{dt} \right|_0 \quad (8.39)$$

Utilizando os dados e condições iniciais vemos que:

$$\begin{cases} y_0 = 7 \\ \left. \frac{dy}{dt} \right|_0 = x_0 = 5 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_0 = 0 - 3 \times 5 - 7 = -22 \end{cases} \quad (8.40)$$

Adotando $h = 10^{-2} \text{ seg}$ e substituindo (8.40) em (8.38) e (8.39) vem:

$$y_i = 7 + 10^{-2} \times 5 = 7,05 \quad (8.41)$$

$$x_i = 5 - 10^{-2} \times 22 = 4,78 \quad (8.42)$$

Continuando com a sistemática determinamos y_2 e x_2 , y_3 e x_3 , etc., até completar o tempo total desejado de simulação T .

Em termos de rotina computacional, a programação tem o diagrama conforme a Figura 8.13.

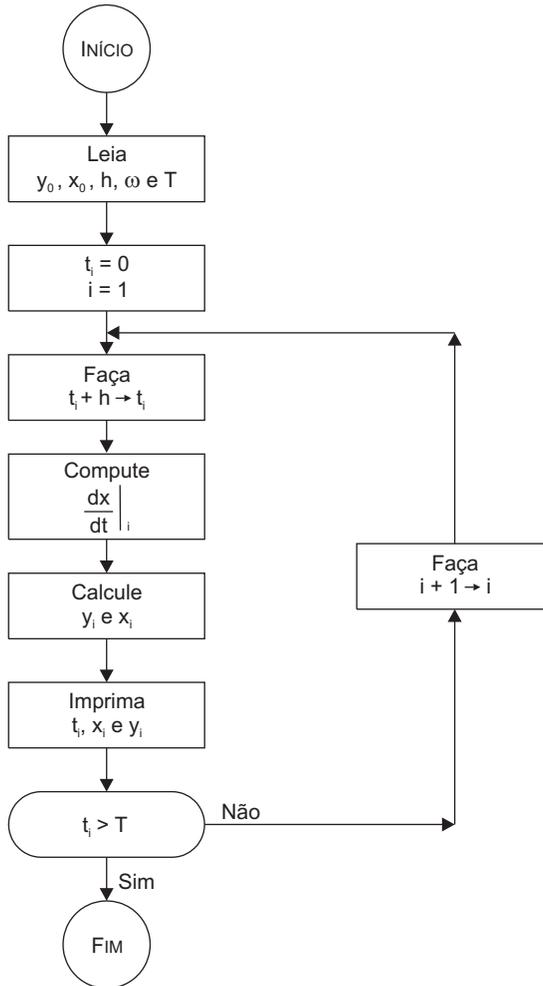


Figura 8.13 Diagrama ilustrando as etapas da rotina computacional para resolver a equação.

Vimos neste exemplo que o uso direto de algoritmo de integração exige a elaboração de um programa. À medida que programas computacionais vão sendo executados, mais sub-rotinas, em forma de blocos, vão sendo armazenadas para eventuais usos futuros. Após determinado tempo, a quantidade de tipos de blocos chega a ser apreciável.

Paralelamente à criação de blocos, aparece sempre a preocupação em tornar mais amigável a interface do programa com o usuário, facilitando as interconexões entre os blocos e as entradas e saídas das informações do algoritmo. Quando a implementação prossegue, o material atinge uma situação em que se torna um programa de alto nível, apropriado para executar simulações da dinâmica de sistemas. Temos então disponíveis programas de alto nível, como, por exemplo, o Simulink, que é um aplicativo do Matlab.¹ Uma introdução ao estudo do Simulink está apresentada no Apêndice C.

Agora, supondo que temos à nossa disposição um programa com inúmeros blocos, vamos resolver um modelo não-linear de vibração. Seja o sistema massa–mola–amortecedor da figura 8.14, com as curvas da mola e do amortecedor conforme ilustradas. Os dados são fictícios.

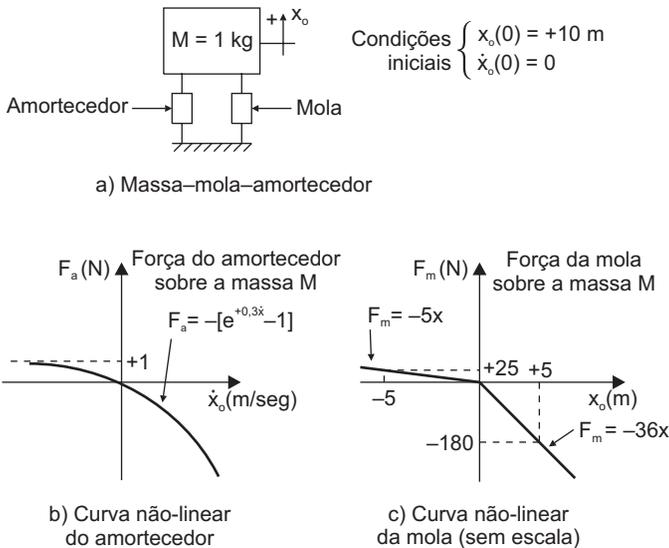


Figura 8.14 Sistema massa–mola–amortecedor sendo a mola e amortecedor não-lineares (dados hipotéticos).

Aplicando a Lei de Newton à massa M obtemos:

$$F_m + F_a = M \ddot{x}_o \tag{8.43}$$

em que:

F_m e $F_a \triangleq$ forças da mola e do amortecedor sobre a massa M , respectivamente (unidade de ambas: N).

1. Vide “Introdução ao Matlab”, no Apêndice B.

De acordo com a Figura 8.14, estas forças são dadas pelas relações:

$$F_m = \begin{cases} -36x_o; & \text{para } x_o \geq 0 \\ -5x_o; & \text{para } x_o < 0 \end{cases} \quad (8.44)$$

$$F_a = -[e^{+0,3x_o} - 1] \quad (8.45)$$

O desenvolvimento da modelagem, neste caso, se resume em escrevermos a lista completa das expressões matemáticas, isto é, as equações advindas das leis e as relações entre as variáveis. O conjunto das expressões é utilizado para elaborar o diagrama.

O primeiro passo para gerar o conjunto é modificar a forma das equações diferenciais: deixar em cada equação a grandeza de maior derivada no lado esquerdo da igualdade. Assim, da (8.43) obtemos:

$$\ddot{x}_o = \frac{1}{M}[F_m + F_a] \quad (8.46)$$

Elaborando o diagrama de blocos da (8.46) e também integrando todas as derivadas obtemos a Figura 8.15.

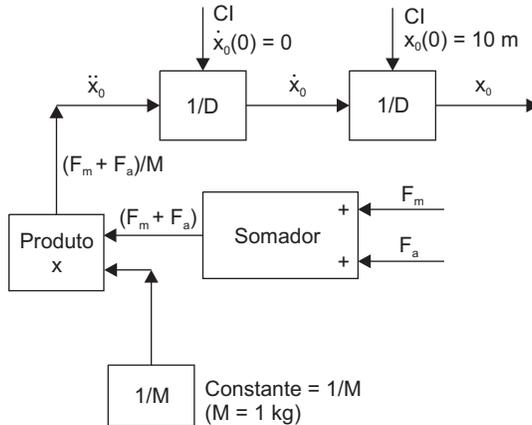


Figura 8.15 Equação 8.46 na forma de diagrama de bloco, com integração das derivadas (dados hipotéticos).

Agora, podemos fazer os diagramas para gerar F_m e F_a , Figuras 8.16 e 8.17.

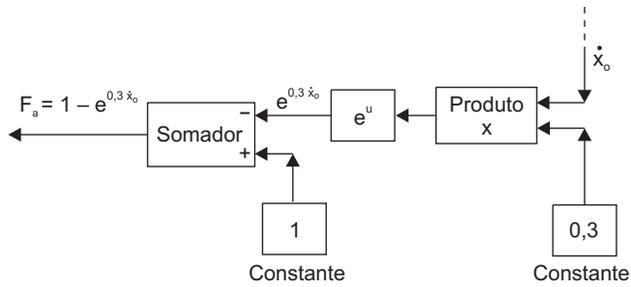


Figura 8.16 Diagrama para gerar F_a conforme função dada na Figura 8.14b.

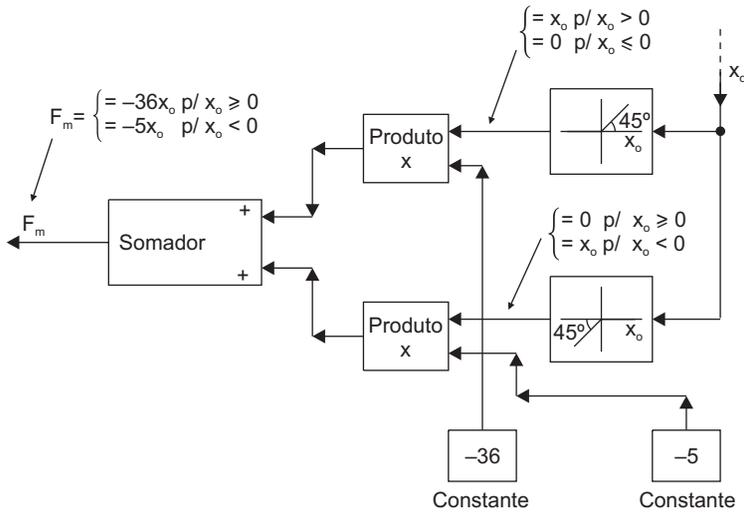


Figura 8.17 Diagrama para gerar F_m conforme função dada na Figura 8.14c.

O diagrama completo, Figura 8.18, é obtido juntado os diagramas das Figuras 8.15, 8.16 e 8.17.

Implementando o diagrama da Figura 8.18 no Simulink² observamos a resposta x_o (deslocamento da massa M) dentro de dois intervalos de tempo, de 0 a 25 segundos e de 0 a 10 segundos, Figuras 8.19 e 8.20.

2. Vide “Introdução ao Simulink” no Apêndice C.

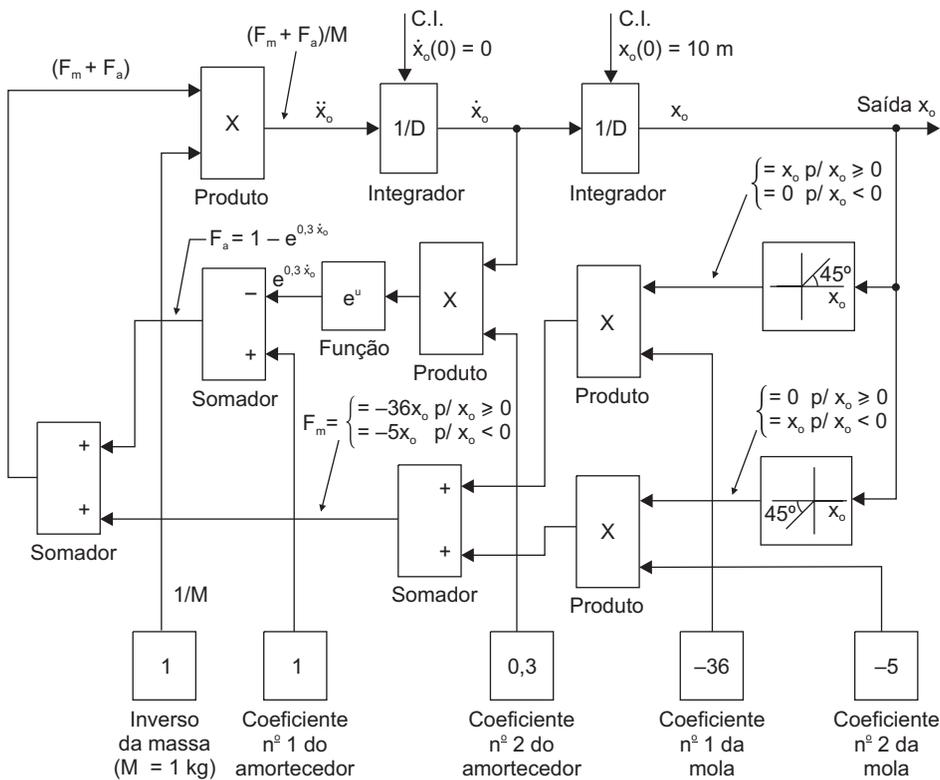


Figura 8.18 Diagrama completo para observar a dinâmica da massa M (saída = x_o), conforme dados da Figura 8.14.

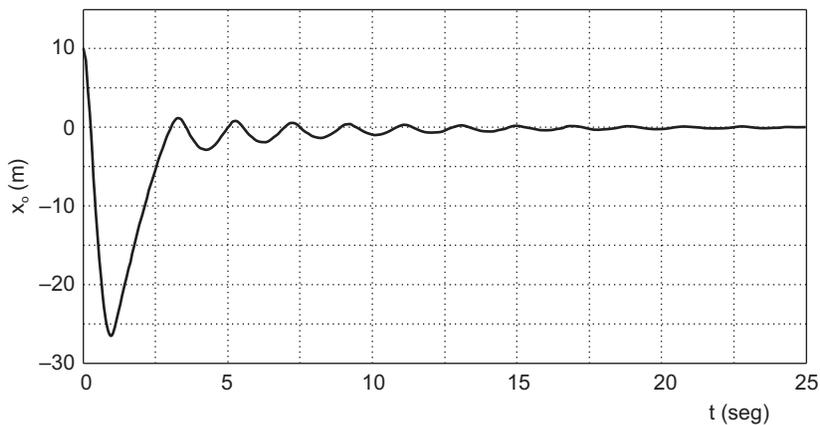


Figura 8.19 Resposta da simulação no Simulink, para o sistema, condições e dados da Figura 8.14, no tempo de **zero** a **25** segundos.

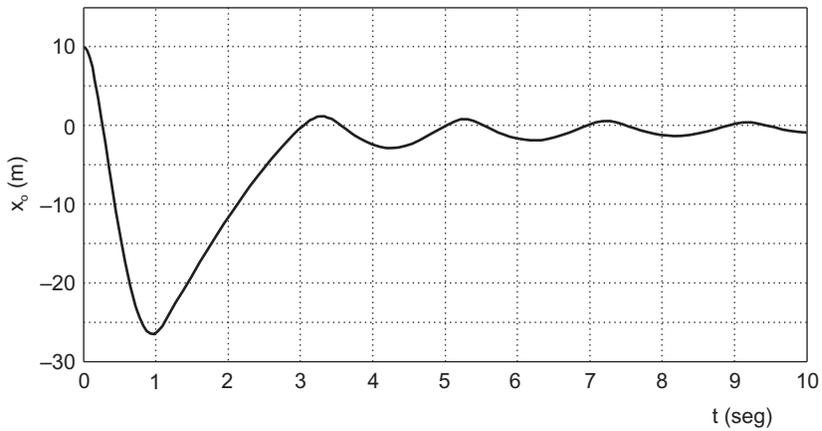


Figura 8.20 Resposta da simulação no Simulink, para o sistema, condições e dados da Figura 8.14, no tempo de **zero** a **10** segundos.

Outras simulações podem facilmente ser feitas mudando as condições iniciais e/ou parâmetros.

Sob o ponto de vista de simulação, o exemplo acima é bastante simples, mas o suficiente para mostrar a grande versatilidade e capacidade desta ferramenta.

MODELAGEM DE SISTEMAS – EXEMPLOS

Neste capítulo estão desenvolvidas modelagens de uma maneira mais natural, não em um formato com muitas subdivisões, conforme apresentadas no Capítulo 3.

Em alguns exemplos, além das modelagens são também estudados outros aspectos, como a Densidade Espectral, Resposta em Frequência, Sensibilidade e Estabilidade.

O capítulo está dividido em três seções: Sistemas Mecânicos; Sistemas Hidráulicos – Óleo; e Sistemas Pneumáticos – Ar. Dentre os dez sistemas modelados, oito contêm partes mecânicas, portanto, a Lei de Newton é a mais empregada nos exemplos.

9.1 – SISTEMAS MECÂNICOS

9.1.1 – EXEMPLO Nº 1: SISTEMA MECÂNICO COM ENTRADA DESLOCAMENTO E CÁLCULO DO MÓDULO DA DENSIDADE ESPECTRAL

a) Proposição

Determinar a função de transferência $\frac{X_o}{X_i}(s)$ do sistema da Figura 9.1a. Dese-

jamos também saber o valor da Densidade Espectral $X_o(i\omega)$ (módulo somente) no ponto cuja frequência é $f = 5 \text{ Hz}$, quando a entrada é um transiente conforme Figura 9.1b.

b) Resolução

Iniciando a modelagem, vamos enunciar algumas hipóteses:

H1: O corpo de inércia J é rígido.

H2: A mola de coeficiente constante K_{s2} é pura e linear.

H3: Os dois amortecedores são iguais, têm coeficientes B constantes e são puros e lineares.

H4: As variações de θ são tão pequenas que podemos considerar os movimentos dos pontos A e C somente na horizontal.

H5: Condições iniciais são nulas.

H6: Na condição de equilíbrio (repouso) a linha \overline{AC} está na vertical.

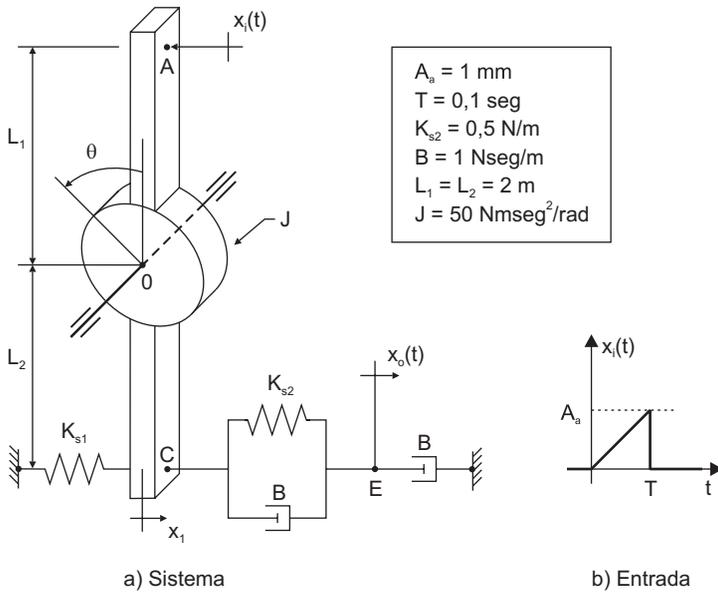


Figura 9.1 Sistema mecânico com entrada deslocamento e transiente de entrada.

Um dos propósitos deste exemplo é reforçar o conceito de entrada (input). Observe que, se a inércia é rígida e $L_1 = L_2$, então $x_1 = x_i$ e o atrito nos mancais e a mola K_{s1} não influem na função de transferência $\frac{X_o}{X_i}(s)$. Por esta razão, o sistema da Figura 9.1 se reduz ao da Figura 9.2.

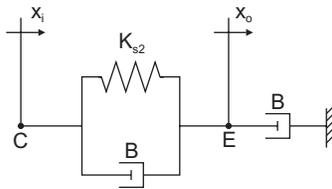


Figura 9.2 Sistema equivalente ao da Figura 9.1a.

Assim, aplicando a Lei de Newton ao ponto E obtemos:

$$-B(\dot{x}_o - \dot{x}_i) - K_{s2}(x_o - x_i) - B\dot{x}_o = 0 \quad (9.1)$$

que transformando vem:

$$(Bs + K_{s2})X_i = (2Bs + K_{s2})X_o \quad (9.2)$$

Logo:

$$\frac{X_o}{X_i}(s) = \frac{\tau s + 1}{2\tau s + 1} \quad (9.3)$$

em que:

$$\tau \triangleq \frac{B}{K_{s2}}$$

Substituindo os valores resulta:

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{2s+1}{4s+1} \quad (9.4)$$

A segunda parte do exemplo é obter o valor do módulo da densidade espectral $|X_o(i\omega)|$ quando a frequência é $f = 5 \text{ Hz}$, que significa $\omega = 10\pi \text{ rad/seg}$, para a entrada dada.

Da Figura 9.1b vemos que:

$$x_i(t) = \frac{A}{T}t = 10^{-2}t; \text{ para } 0 \leq t \leq 0,1 \quad (9.5)$$

e, fora deste intervalo, $x_i(t)$ é zero.

Transformando:

$$\mathcal{L}[x_i(t)] = \int_{0^+}^{\infty} x_i(t)e^{-st} dt \quad (9.6)$$

Lembrando que $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$ (equação A.5 do Apêndice A), então:

$$X_i(i\omega) = \int_{0^+}^{\infty} x_i \cos(\omega t) dt - i \int_{0^+}^{\infty} x_i \sin(\omega t) dt \quad (9.7)$$

Combinando (9.5) e (9.7) resulta:

$$X_i(i\omega) = 10^{-2} \left[\int_{0^+}^{0,1} t \cos(\omega t) dt - i \int_{0^+}^{0,1} t \sin(\omega t) dt \right] \quad (9.8)$$

Definindo:

$$a(\omega) \triangleq 10^{-2} \left(\int_{0^+}^{0,1} t \cos(\omega t) dt \right)$$

$$b(\omega) \triangleq 10^{-2} \left(\int_{0^+}^{0,1} t \sin(\omega t) dt \right)$$

Das equações A.28 e A.29 do Apêndice A vêm:

$$\begin{aligned} a(\omega)\Big|_{\omega=10\pi} &= \left[\frac{1}{\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{t}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) \right]_{0^+}^{0,1} \cdot 10^{-2} \Big|_{\omega=10\pi} = \\ &= 10^{-2} \left(\frac{1}{\omega^2} \cos(0,1\omega) + \frac{0,1}{\omega} \operatorname{sen}(0,1\omega) - \frac{1}{\omega^2} \right) \Big|_{\omega=10\pi} = \frac{-2 \times 10^{-2}}{(10\pi)^2} \end{aligned} \quad (9.9)$$

e

$$\begin{aligned} b(\omega)\Big|_{\omega=10\pi} &= \left[\frac{1}{\omega^2} \operatorname{sen}(\omega t) - \frac{t}{\omega} \cos(\omega t) \right]_{0^+}^{0,1} \cdot 10^{-2} \Big|_{\omega=10\pi} = \\ &= 10^{-2} \left(\frac{1}{\omega^2} \operatorname{sen}(0,1\omega) - \frac{0,1}{\omega} \cos(0,1\omega) \right) \Big|_{\omega=10\pi} = \frac{+0,1 \times 10^{-2}}{10\pi} \end{aligned} \quad (9.10)$$

Substituindo (9.9) e (9.10) em (9.8) vem:

$$X_i(i\omega)\Big|_{\omega=10\pi} = \frac{-2 \times 10^{-2}}{(10\pi)^2} - i \frac{0,1 \times 10^{-2}}{10\pi} \quad (9.11)$$

Combinando (9.4) e (9.11) para calcular a densidade espectral do x_o , no ponto $\omega = 10\pi \text{ rad/seg}$, então:

$$X_o(i\omega)\Big|_{\omega=10\pi} = \frac{2(i\omega) + 1}{4(i\omega) + 1} \Big|_{\omega=10\pi} \cdot \left(\frac{-2 \times 10^{-2}}{(10\pi)^2} - i \frac{0,1 \times 10^{-2}}{10\pi} \right) \quad (9.12)$$

Logo:

$$|X_o(i\omega)\Big|_{\omega=10\pi} = \frac{\sqrt{1 + (20\pi)^2}}{\sqrt{1 + (40\pi)^2}} \cdot \sqrt{\left[\frac{2 \times 10^{-2}}{(10\pi)^2} \right]^2 + \left(\frac{10^{-3}}{10\pi} \right)^2} \quad (9.13)$$

que resulta:

$$|X_o(i\omega)\Big|_{\omega=10\pi} = 1,887 \times 10^{-5} \frac{\text{m.seg}}{\text{rad}} \quad (9.14)$$

9.1.2 – EXEMPLO Nº 2: AMORTECEDOR MAIS REALISTA

a) Proposição

A relação Velocidade/Força de um amortecedor ideal e linear (sem massa e sem elasticidade), Figura 9.3a, é $\frac{V_o}{F_i}(s) = \frac{1}{B}$. Desejamos encontrar a função de transferência $\frac{V_o}{F_i}(s)$ para um modelo mais realista, Figura 9.3b. Devemos comparar os modelos através dos esboços das curvas de resposta em frequência de ambos os casos.

Nota: f_i é uma força externa aplicada sobre o amortecedor.

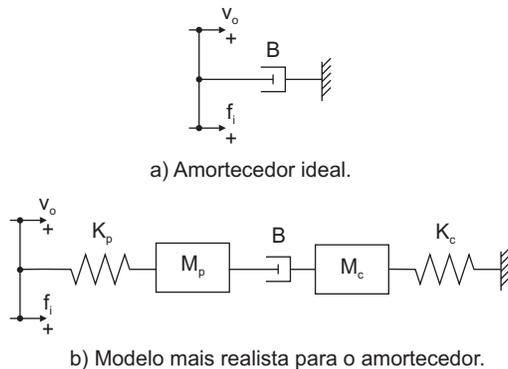


Figura 9.3 Esquemas de um amortecedor ideal e um mais realista.

b) Resolução

Vamos considerar as seguintes hipóteses:

- H1: As massas são rígidas e têm valores constantes.
- H2: As molas têm coeficientes constantes e são puras e lineares.
- H3: Os amortecedores têm coeficientes constantes e são puros e lineares.
- H4: As condições iniciais são nulas.
- H5: O sistema não tem atrito.
- H6: As origens dos deslocamentos são escolhidas nos pontos onde as massas se encontram em repouso.

Da Figura 9.3b fazemos o esquema para modelagem, Figura 9.4.

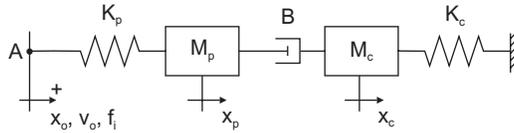


Figura 9.4 Esquema para modelagem do amortecedor mais realista.

Aplicando a Lei de Newton no ponto A e nas massas M_p e M_c do sistema da Figura 9.4 obtemos:

$$f_i - K_p(x_o - x_p) = 0 \quad (9.15)$$

$$-K_p(x_p - x_o) - B(\dot{x}_p - \dot{x}_c) = M_p \ddot{x}_p \quad (9.16)$$

$$-K_c x_c - B(\dot{x}_c - \dot{x}_p) = M_c \ddot{x}_c \quad (9.17)$$

Transformando estas três equações e organizando os seus termos, vem:

$$\begin{cases} K_p X_o - K_p X_p + 0 = F_i \\ -K_p X_o + (M_p s^2 + Bs + K_p) X_p - Bs X_c = 0 \\ 0 - Bs X_p + (M_c s^2 + Bs + K_c) X_c = 0 \end{cases} \quad (9.18)$$

Escrevendo (9.18) na forma de matriz, resulta:

$$\begin{bmatrix} K_p & -K_p & 0 \\ -K_p & (M_p s^2 + Bs + K_p) & -Bs \\ 0 & -Bs & (M_c s^2 + Bs + K_c) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_o \\ X_p \\ X_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.19)$$

Aplicando Cramer para obter X_o , então:

$$X_o(s) = \frac{\begin{vmatrix} F_i & -K_p & 0 \\ 0 & (M_p s^2 + Bs + K_p) & -Bs \\ 0 & -Bs & (M_c s^2 + Bs + K_c) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K_p & -K_p & 0 \\ -K_p & (M_p s^2 + Bs + K_p) & -Bs \\ 0 & -Bs & (M_c s^2 + Bs + K_c) \end{vmatrix}} \quad (9.20)$$

Calculando os determinantes vem:

$$X_o(s) = \frac{F_i \left[M_p M_c s^4 + B(M_p + M_c) s^3 + (K_c M_p + K_p M_c) s^2 + B(K_c + K_p) s + K_c K_p \right]}{K_p \left[M_p M_c s^4 + B(M_p + M_c) s^3 + K_c M_p s^2 + B K_c s \right]} \quad (9.21)$$

Lembrando que:

$$V_o(s) = s X_o(s) \quad (9.22)$$

então:

$$\frac{V_o(s)}{F_i} = \frac{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \quad (9.23)$$

em que:

$$\left. \begin{aligned} a_4 &\triangleq M_p M_c \\ a_3 &\triangleq B(M_p + M_c) \\ a_2 &\triangleq (K_c M_p + K_p M_c) \\ a_1 &\triangleq B(K_c + K_p) \\ a_0 &\triangleq K_c K_p \end{aligned} \right| \begin{aligned} b_3 &\triangleq K_p M_p M_c \\ b_2 &\triangleq K_p B(M_p + M_c) \\ b_1 &\triangleq K_p K_c M_p \\ b_0 &\triangleq K_p B K_c \end{aligned}$$

Observamos que, se as massas M_p e M_c forem muito pequenas e as molas rígidas, isto é:

$$\left\{ \begin{aligned} M_p = M_c &\rightarrow 0 \quad (\text{tende a zero}) \\ K_p = K_c &\rightarrow \infty \quad (\text{tende a infinito}) \end{aligned} \right. \quad (9.24)$$

então, dividindo o numerador e o denominador da (9.23) por $K_c K_p$, a (9.23) resulta na função de transferência do amortecedor ideal:

$$\frac{V_o(s)}{F_i} = \frac{I}{B} \quad (9.25)$$

O esboço do gráfico da resposta em frequência do amortecedor ideal está na Figura 9.5 e do amortecedor mais realista, na Figura 9.6. Observamos que para baixas frequências os dois casos se assemelham.

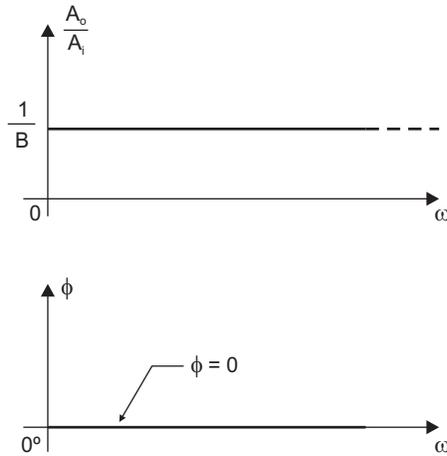


Figura 9.5 Gráfico da resposta em frequência do amortecedor ideal: $\frac{V_o}{F_i}(s) = \frac{1}{B}$.

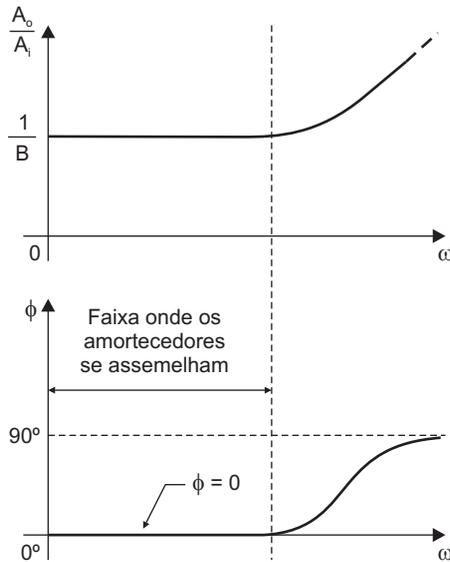


Figura 9.6 Esboço da curva da resposta em frequência do amortecedor mais realista.

9.1.3 – EXEMPLO Nº 3: SISTEMA MECÂNICO COM ACOPLAMENTO FLUÍDICO

a) Introdução

O sistema mecânico com acoplamento fluídico aqui proposto possui um engrenamento. Nesta modelagem será utilizado o conceito de inércia equivalente, que é uma característica importante. Além da sua aplicação neste problema, o cálculo de

inércia equivalente é bastante comum porque em muitos acionamentos há redutores. Nas indústrias, o uso de redutores é intenso e só isto já traduz a sua importância. A seguir será apresentado o estudo de inércia equivalente, antes do desenvolvimento da modelagem.

b) Sistema Dinâmico Equivalente de um Trem de Engrenagens

A Figura 9.7 mostra um engrenamento típico onde consideramos que eixos e engrenagens são rígidos e o engrenamento não tem folgas (backlash).

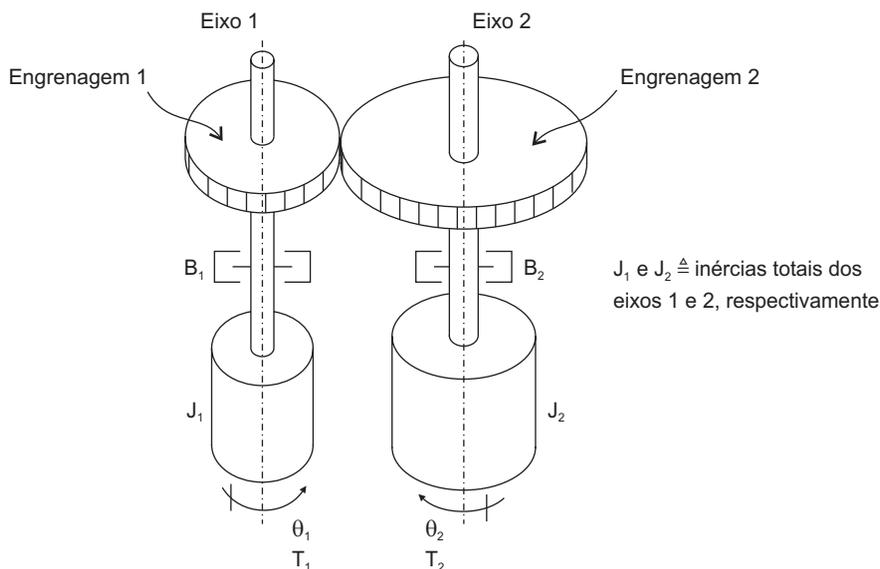


Figura 9.7 Sistema com dois eixos engrenados.

O objetivo é encontrar um sistema equivalente reduzido a uma só inércia e um só amortecedor, referidos a um só eixo. Neste caso, vamos considerar o eixo 2 como o eixo escolhido como referência.

Iniciando o processo de cálculo, definimos a *relação de transmissão* n_{12} como sendo:

$$n_{12} \triangleq \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

Geralmente, a engrenagem 2 tem um diâmetro maior e, nesta situação, gira com uma rotação menor. Se isto for verificado, n_{12} é maior do que um ($n_{12} > 1$).

Apontamos que é possível encontrar em algumas literaturas um parâmetro semelhante que tem a definição inversa de n_{12} , isto é, $N \triangleq (\theta_2 / \theta_1)$, que é também chamada de relação de transmissão.

Da definição de n_{12} podemos escrever:

$$\theta_1 = n_{12} \theta_2 \quad (9.26)$$

que derivando resulta:

$$\dot{\theta}_1 = n_{12} \dot{\theta}_2 \quad (9.27)$$

$$\ddot{\theta}_1 = n_{12} \ddot{\theta}_2 \quad (9.28)$$

Agora, isolando o eixo 1 como corpo livre e aplicando a Lei de Newton, obtemos:

$$T_1 - B_1 \dot{\theta}_1 + T_g = J_1 \ddot{\theta}_1 \quad (9.29)$$

em que T_g é o torque em que a engrenagem 2 atua sobre a engrenagem 1 .

Analogamente, para o eixo 2 vem:

$$T_2 - B_2 \dot{\theta}_2 - n_{12} T_g = J_2 \ddot{\theta}_2 \quad (9.30)$$

Substituindo (9.27) e (9.28) na (9.29) resulta:

$$T_1 - n_{12} B_1 \dot{\theta}_2 + T_g = n_{12} J_1 \ddot{\theta}_2 \quad (9.31)$$

Multiplicando (9.31) por n_{12} e somando com (9.30) obtemos:

$$(T_2 + n_{12} T_1) - (B_2 + n_{12}^2 B_1) \dot{\theta}_2 = (J_2 + n_{12}^2 J_1) \ddot{\theta}_2 \quad (9.32)$$

O formato desta equação 9.32 pode ser esquematizado como sendo:

$$\begin{bmatrix} \text{Torque} \\ \text{atuante} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Torque de} \\ \text{amortecimento} \end{bmatrix} = [\text{Inércia}] \times \begin{bmatrix} \text{Aceleração} \\ \text{angular} \end{bmatrix} \quad (9.33)$$

Então, definimos um sistema fictício dinamicamente equivalente da seguinte forma:

$$T_e - B_e \dot{\theta}_2 = J_e \ddot{\theta}_2 \quad (9.34)$$

em que:

$T_e \triangleq T_2 + n_{12} T_1 \triangleq$ torque atuante equivalente;

$B_e \triangleq (B_2 + n_{12}^2 B_1) \triangleq$ coeficiente de amortecimento equivalente;

$J_e \triangleq (J_2 + n_{12}^2 J_1) \triangleq$ inércia equivalente.

A Figura 9.8 mostra visualmente a equivalência.

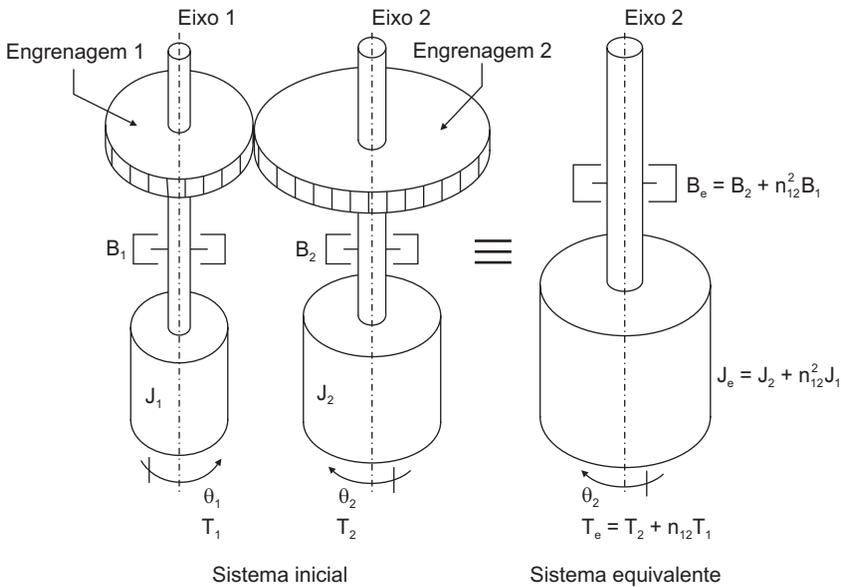


Figura 9.8 Sistema dinamicamente equivalente, referenciado ao eixo 2.

O procedimento usado para a determinação do sistema equivalente é às vezes chamado de translação da inércia equivalente de um eixo para o outro, adotado como referência.

Este processo pode ser usado para mais de um eixo, fazendo uma translação de cada vez, em forma de cascata.

No exemplo da Figura 9.9, temos três eixos e, neste caso, o eixo escolhido como referência é o eixo 1, que geralmente gira à rotação mais alta. Inicialmente faremos as translações do eixo 3 para o eixo 2 e, depois, do eixo 2 para o eixo 1, Figura 9.10.

Na Figura 9.10 temos a inércia J_e dada por:

$$J_e = \left[J_1 + \frac{1}{n_{12}^2} \left(J_2 + \frac{1}{n_{23}^2} J_3 \right) \right] \quad (9.35)$$

A parcela correspondente à translação da inércia J_3 para o eixo 1 é igual a: $J_3 / (n_{12}^2 \cdot n_{23}^2)$.

Nos sistemas reais é comum J_3 ser bem maior que J_1 , mas o denominador em decorrência da translação, $(n_{12}^2 \cdot n_{23}^2)$, diminui o efeito de J_3 e geralmente faz a própria inércia J_1 do eixo 1 ser a parcela mais significativa de J_e .

Como último comentário, o estudo aqui desenvolvido faz o tratamento de uma série de inércias girando, mas a mesma idéia pode ser aplicada quando existirem

massas em rotação e translação, como é o caso do automóvel. De maneira similar, as massas em translação e rotação são reduzidas ao eixo do motor.

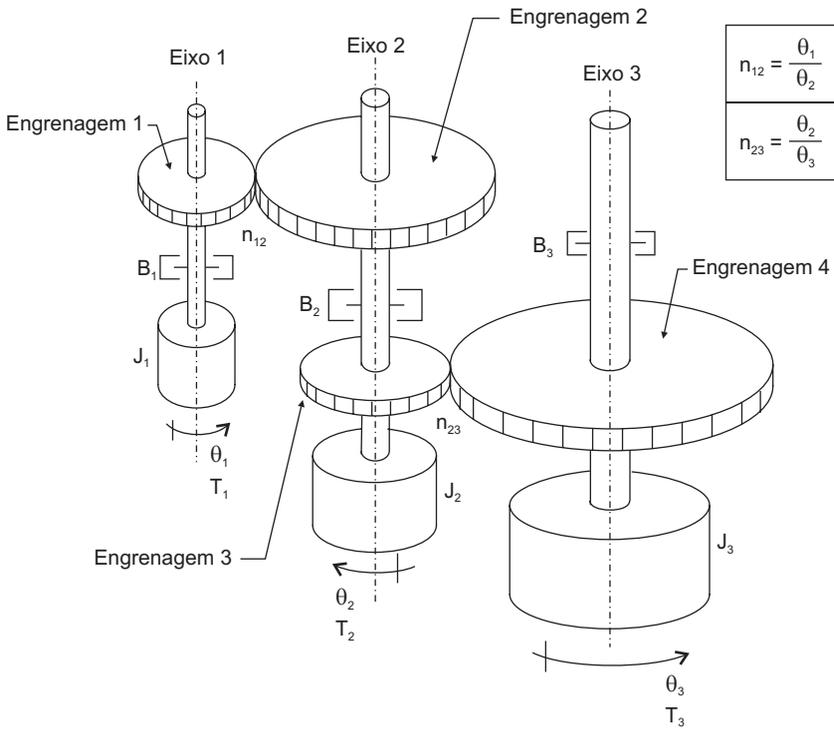


Figura 9.9 Sistema com três eixos.

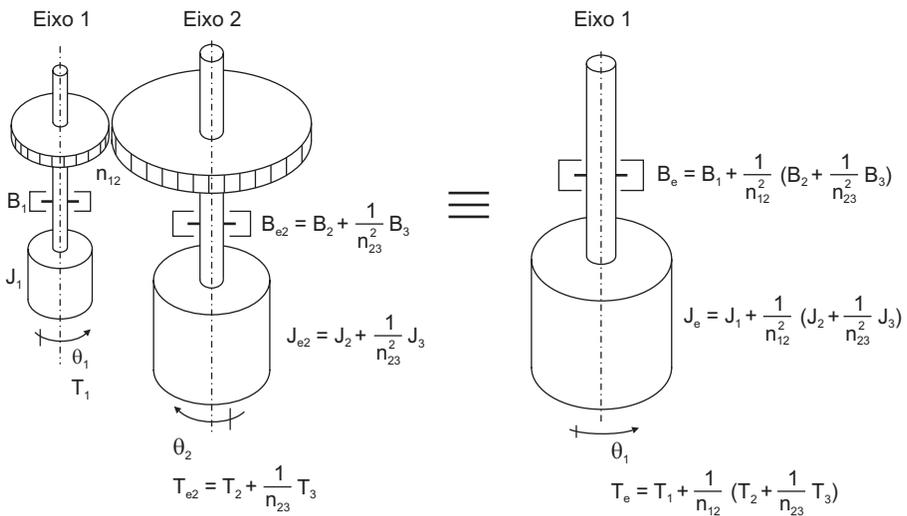


Figura 9.10 Redução de um sistema de 3 eixos ao sistema equivalente referenciado do eixo 1.

c) Sistema Mecânico Proposto

Um par de engrenagens, Figura 9.11, tem na sua entrada um eixo flexível que é acionado através de um acoplamento fluídico, modelado como um amortecedor torcional.

O objetivo é obter as equações diferenciais que relacionam a velocidade de saída ω_o com duas entradas: (i) a velocidade ω_p ; e (ii) o torque distúrbio T_d . Destas equações determine as funções de transferências: $\frac{\Omega_o}{\Omega_i}(s)$ e $\frac{\Omega_o}{T_d}(s)$.

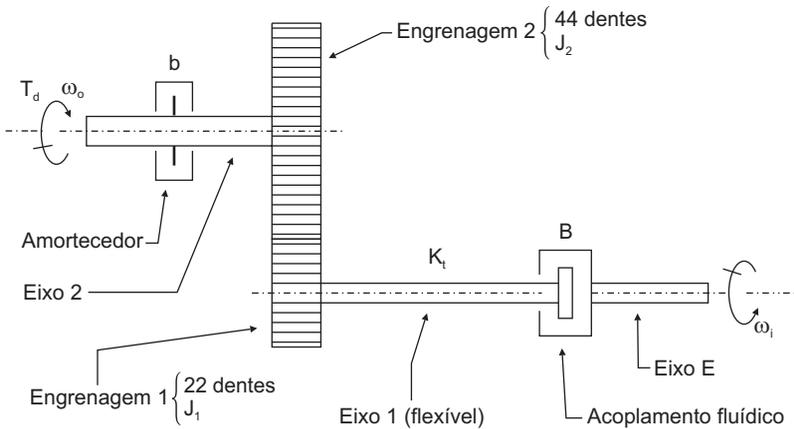


Figura 9.11 Sistema com um par de engrenagens acionado através de um acoplamento fluídico.

Para a modelagem consideraremos as seguintes hipóteses:

H1: Os dentes das engrenagens são considerados rígidos.

H2: Não existe nenhuma folga entre os dentes.

H3: A única maneira de ocorrer dissipação de energia é através do amortecedor e do acoplamento fluídico.

H4: As inércias J_1 e J_2 e os eixos 2 e E são rígidos.

H5: O amortecedor torcional é considerado ideal, com coeficiente constante.

H6: O eixo 1 é uma mola torcional ideal, com coeficiente constante.

Com base nestas hipóteses e na Figura 9.11 elaboramos o esquema para a modelagem, Figura 9.12.

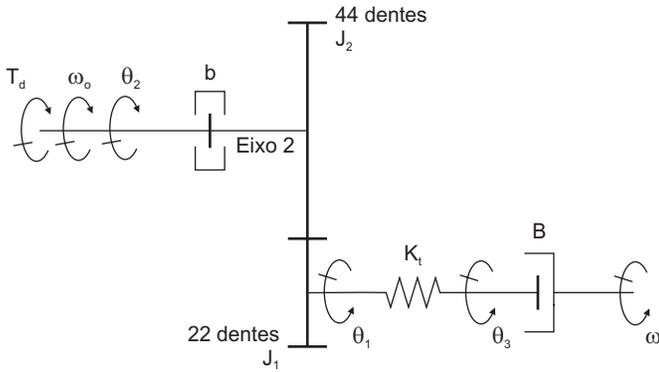


Figura 9.12 Sistema esquematizado para modelagem.

O sistema tem duas inércias, mas elas estão acopladas, e isto é uma indicação de que podemos determinar um sistema equivalente, reduzindo o sistema ao eixo 2.

A relação de transmissão é dada por:

$$n_{12} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = 2 \quad (9.36)$$

Logo:

$$\theta_1 = 2 \theta_2 \quad (9.37)$$

$$\dot{\theta}_1 = 2 \dot{\theta}_2 \quad (9.38)$$

$$\ddot{\theta}_1 = 2 \ddot{\theta}_2 \quad (9.39)$$

Definindo T_s como sendo o torque da mola (eixo 1) sobre a inércia J_1 , então:

$$T_s = -K_t (\theta_1 - \theta_3) \quad (9.40)$$

Assim, podemos obter o sistema equivalente em termos de θ_2 , conforme a Figura 9.13.

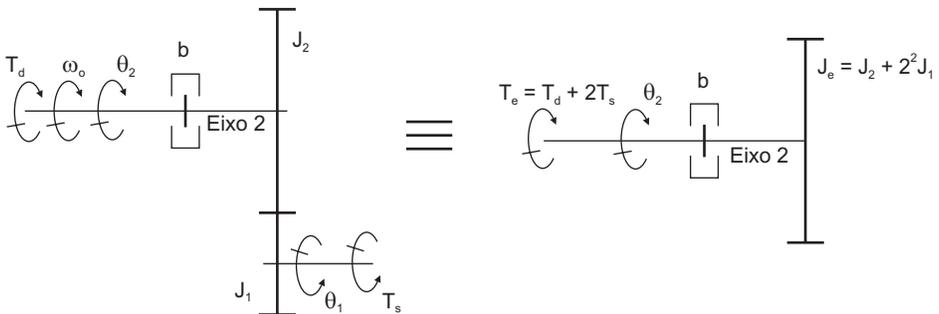


Figura 9.13 Sistema equivalente reduzido ao eixo 2.

Aplicando a Lei de Newton ao eixo 2 obtemos:

$$(T_d + 2T_s) - b\omega_o = (J_2 + 4J_1)\dot{\omega}_o \quad (9.41)$$

Agora, temos de determinar T_s e para tal vamos considerar o sistema da Figura 9.14.

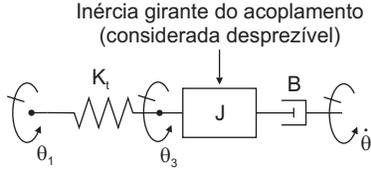


Figura 9.14 Eixo 1 e acoplamento fluido esquematizado para determinar T_s .

Aplicando a Lei de Newton à inércia J da Figura 9.14 resulta:

$$-K_t(\theta_3 - \theta_1) - B(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_i) = J\ddot{\theta}_3 \quad (9.42)$$

Considerando J desprezível ($J \approx 0$), então:

$$K_t\theta_1 + B\dot{\theta}_i = K_t\theta_3 + B\dot{\theta}_3 \quad (9.43)$$

Sendo $\dot{\theta}_i = \omega_i$ e substituindo (9.37), (9.38) e (9.39) em (9.40) e (9.43) vem:

$$T_s = -K_t(2\theta_2 - \theta_3) \quad (9.44)$$

$$K_t 2\theta_2 + B\omega_i = K_t\theta_3 + B\dot{\theta}_3 \quad (9.45)$$

Fazendo a transformada (com condições iniciais zero) das (9.44) e (9.45) obtemos:

$$T_s = -K_t(2\Theta_2 - \Theta_3) \quad (9.46)$$

$$2K_t\Theta_2 + B\Omega_i = (K_t + Bs)\Theta_3 \quad (9.47)$$

Da (9.47) determinamos Θ_3 e substituímos na (9.46), então:

$$T_s = -K_t \left[2\Theta_2 - \frac{2K_t\Theta_2 + B\Omega_i}{(K_t + Bs)} \right] = -K_t \left[\frac{2\Theta_2 K_t + 2Bs\Theta_2 - 2K_t\Theta_2 - B\Omega_i}{K_t + Bs} \right] \quad (9.48)$$

Da Figura 9.13 vemos que $\omega_o = \dot{\theta}_2$, então, $\Omega_o = \mathcal{L}[\omega_o] = s\Theta_2$, logo:

$$T_s = K_t \left[\frac{B\Omega_i - 2B\Omega_o}{Bs + K_t} \right] \quad (9.49)$$

Agora, voltando à equação 9.41, fazendo a sua transformada e substituindo T_s obtemos:

$$T_d + \frac{2K_t B}{Bs + K_t} \Omega_i - \frac{4K_t B}{Bs + K_t} \Omega_o - b \Omega_o = (J_2 + 4J_1) s \Omega_o \quad (9.50)$$

Portanto:

$$\Omega_o = \frac{T_d + \frac{2K_t B}{Bs + K_t} \Omega_i}{(J_2 + 4J_1) s + \left[b + \frac{4K_t B}{Bs + K_t} \right]} \quad (9.51)$$

ou

$$\Omega_o = \frac{(Bs + K_t) T_d + 2K_t B \Omega_i}{(J_2 + 4J_1) B s^2 + [(J_2 + 4J_1) K_t + bB] s + K_t (b + 4B)} \quad (9.52)$$

Desta equação podemos obter as funções de transferência $\frac{\Omega_o}{\Omega_i}(s)$ e $\frac{\Omega_o}{T_d}(s)$.

Assim:

$$\frac{\Omega_o}{\Omega_i}(s) = \frac{K_t}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1} \quad (9.53)$$

em que:

$$K_t \triangleq \frac{2B}{(b + 4B)} \triangleq \text{ganho de } \frac{\Omega_o}{\Omega_i}(s);$$

$$\omega_n \triangleq \sqrt{\frac{K_t (b + 4B)}{(J_2 + 4J_1) B}} \triangleq \text{frequência natural não-amortecida};$$

$$\zeta \triangleq \frac{(J_2 + 4J_1) K_t + bB}{2 \sqrt{(J_2 + 4J_1) B \cdot K_t (b + 4B)}} \triangleq \text{fator de amortecimento.}$$

E a outra função de transferência:

$$\frac{\Omega_o}{T_d}(s) = \frac{K_2(\tau s + 1)}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \quad (9.54)$$

em que:

$$K_2 \triangleq \frac{I}{(b + 4B)} \triangleq \text{ganho de } \frac{\Omega_o}{T_d}(s);$$

$$\tau \triangleq \frac{B}{K_t} \triangleq \text{constante de tempo.}$$

As equações 9.53 e 9.54 são as funções de transferências pedidas.

Como última tarefa nesta modelagem podemos efetuar a verificação das unidades dos parâmetros das funções de transferências, com o objetivo de ter a indicação de algum erro.

Os parâmetros básicos do sistema (inércia, mola, etc.) têm as unidades:

$$J_1 \text{ e } J_2 \equiv [N.m.seg^2/rad] \equiv [N.m.seg^2]$$

$$B \text{ e } b \equiv [N.m.seg/rad] \equiv [N.m.seg]$$

$$K_t \equiv [N.m/rad] \equiv [N.m]$$

Pelas funções de transferências, os parâmetros do modelo devem ter as seguintes unidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_t \equiv [\text{adimensional}] \\ \omega_n \equiv [rad/seg] \equiv [1/seg] \\ \zeta \equiv [\text{adimensional}] \\ K_2 \equiv \left[\frac{rad}{seg \ N \ m} \right] \equiv [1/seg \ N \ m] \\ \tau \equiv [seg] \end{array} \right.$$

Agora, determinando as unidades dos parâmetros através das definições obtemos:

$$K_1 \equiv \left[\frac{N.m.seg}{N.m.seg} \right] \equiv \text{adimensional} \therefore \text{verificado.}$$

$$\omega_n \equiv \sqrt{\frac{N.m.N.m.seg}{N.m.seg^2.N.m.seg}} \equiv [1/seg] \therefore \text{verificado.}$$

$$\zeta \equiv \frac{N.m.seg^2.N.m + N.m.seg.N.m.seg}{\sqrt{Nm.seg^2.Nm.seg.Nm.Nm.seg}} \equiv \frac{(N.m.seg)^2}{\sqrt{(N.m.seg)^4}} \equiv \text{adimensional} \therefore$$

verificado.

$$K_2 \equiv [1/(N.m.seg)] \therefore \text{verificado.}$$

$$\tau \equiv \left[\frac{N.m.seg}{N.m} \right] \equiv [seg] \therefore \text{verificado.}$$

A verificação das unidades dos parâmetros está, portanto, satisfeita.

9.2 – SISTEMAS HIDRÁULICOS – ÓLEO

9.2.1 – CONSIDERAÇÕES GERAIS

Sistemas hidráulicos são equipamentos que estão entre os mais utilizados. As suas aplicações são amplas, pois reúnem propriedades como sensibilidade, precisão, rigidez, velocidade, força, potência e alta capacidade de controle. Por estas razões são utilizados em acionamentos e automação nas áreas automotiva, aeroespacial, militar, naval, agrícola, mecânica, máquinas operatrizes, de elevação e nos equipamentos amplificadores de força, prensas, máquinas de ensaio, etc.

Os dispositivos hidráulicos têm sido usados pelo homem desde os tempos antigos, mas foi no início do século passado que ocorreu um grande avanço, quando o fluido foi mudado de água para óleo.

Os sistemas hidráulicos possuem diversas características próprias e uma das principais refere-se ao tipo de bomba. Nos circuitos são usadas bombas de deslocamento positivo que trabalham como “transportadores” de fluido. A bomba aprisiona um pequeno volume de óleo no lado da entrada e o transporta para o lado da saída. A bomba não é um gerador de pressão, mas sim um equipamento que transfere óleo da entrada para a saída. Se do volume da saída o óleo não escoar, a

pressão então sobe rapidamente, da ordem de milhares de libras por polegada quadrada por segundo, por exemplo, **10000** psi/seg.

A instalação de dispositivo ou meio para limitar a pressão é imperativa, caso contrário ocorrerão acidentes como quebra da bomba ou rompimento (explosão) de algum componente.

Sua maneira de trabalhar em conjunto com os seus detalhes construtivos conferem às bombas uma característica geométrica que chamamos de *deslocamento*. O deslocamento de uma bomba é o volume de óleo transportado por revolução (ou por grau ou por radiano), sob condições ideais, considerando nenhuma perda, quer por atrito ou vazamentos internos.

Os deslocamentos das bombas podem ser fixos ou variáveis, dependendo da sua concepção interna. Quando o seu deslocamento é variável, a vazão da bomba pode ser controlada através da mudança do seu deslocamento.

No caso de motores hidráulicos, sob o ponto de vista construtivo eles se assemelham às bombas, portanto o deslocamento de motores é definido de forma análoga.

Há muitas concepções e tipos de bombas para os circuitos hidráulicos, mas três são predominantes: (i) as de engrenagens; (ii) as de palhetas; e (iii) as de pistões axiais. A Tabela 9.1 contém informações para uma visualização comparativa entre estes três tipos de bombas.

Tabela 9.1 Dados gerais das bombas para efeito de comparação.

Tipo de bomba	Pressão (psi)	Rotação (rpm)	Eficiência (%)	Relação hp/lb	Ruído (db A)	Capacidade de vazão (gpm)
Engrenagem externa	2000 a 3000	1200 a 2500	80-90	2	90	1-150
Palheta	1000 a 2000	1200 a 1800	80-95	2	80	1-80
Pistões axiais	2000 a 12000	1200 a 3000	90-98	4	70	1-200

Antes de iniciarmos as modelagens dos exemplos aqui propostos, é interessante discutir alguns pontos gerais de controle hidráulico. Conceitualmente há três esquemas básicos que são utilizados para executar hidraulicamente o trabalho de controle: Controle por Válvula; Controle por Bomba; e Controle Misto – por Válvula, mas com Bomba Controlada.

a) Controle por Válvula

A Figura 9.15 mostra um esquema geral de um sistema hidráulico com controle por válvula. As principais características deste circuito é a bomba ter deslocamento

constante e a existência de uma válvula reguladora de pressão para dar descarga ao excesso de óleo que não é utilizado.

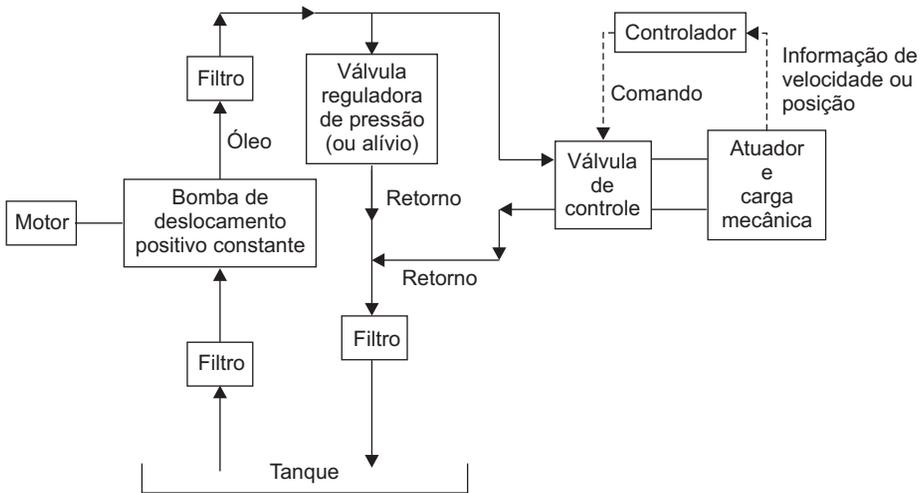


Figura 9.15 Esquema geral de um circuito hidráulico com controle por válvula.

O atuador hidráulico pode ser um cilindro ou um motor hidráulico. A Figura 9.16 mostra um esquema detalhando a válvula de controle, um atuador hidráulico tipo cilindro e uma carga mecânica.

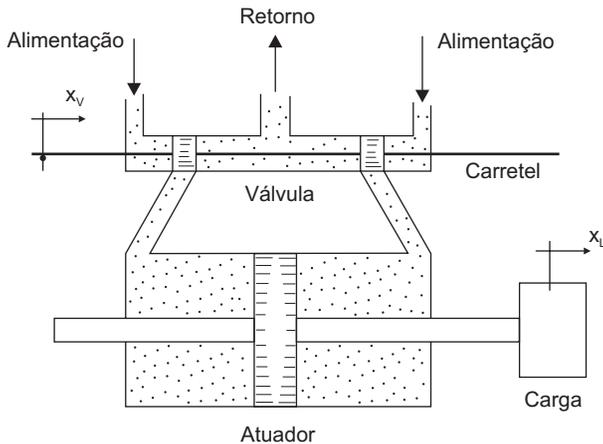


Figura 9.16 Esquema de controle de um cilindro através de válvula.

O deslocamento x_L da carga pode ser controlado através do deslocamento do carretel da válvula x_v . Com uma pequena força e alguns centésimos de milímetros do deslocamento x_v , podemos, com precisão e rapidez, posicionar a massa da carga. A amplificação de força deste dispositivo chega a ser da ordem de milhares.

Quando queremos um sistema de malha fechada, os componentes da Figura 9.16 são combinados com outros, como mostra a Figura 9.17. Esta configuração permite obter posicionamentos com precisão melhor que 0,025 mm ou velocidades controladas dentro de 0,1%.

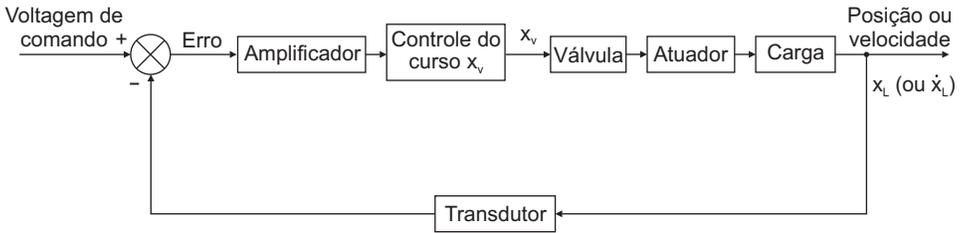


Figura 9.17 Sistema de malha fechada com válvula para controle de posição ou velocidade.

b) Controle por Bomba

A Figura 9.18 mostra uma bomba de deslocamento variável cujo acionamento tem rotação considerada constante, mantida por algum motor, por exemplo, um motor elétrico.

A alavanca de controle muda o deslocamento da bomba proporcionando variação contínua da vazão da bomba desde um valor negativo máximo, passando por *zero*, até um valor positivo máximo. O motor hidráulico e a carga podem então ser mantidos em uma posição estacionária ou acionados com velocidades variáveis em ambas as direções.

Este conjunto, motor elétrico, bomba de deslocamento variável e motor hidráulico, pode fazer parte de um sistema com realimentação, conforme mostra Figura 9.19.

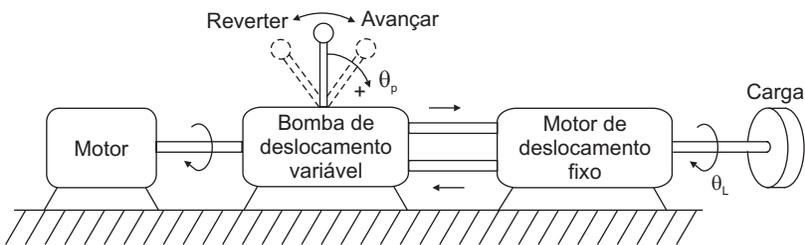


Figura 9.18 Esquema simplificado de um motor controlado por bomba.

Apesar de os objetivos dos sistemas das Figuras 9.17 e 9.19 serem similares, a força necessária para variar o deslocamento da bomba (movimento de θ_p) é muito maior que aquela requerida para movimentar o carretel da válvula (movimento x_v). Em muitas situações, o bloco de controle do curso (o que produz θ_p) é um pequeno (mas completo) servomecanismo contendo válvula e atuador como o da Figura 9.17.

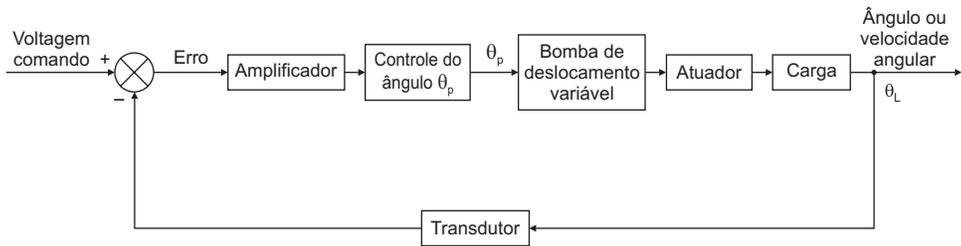


Figura 9.19 Sistema de malha fechada com bomba variável para controle de posição ou velocidade.

c) Controle Misto – por Válvula, mas com Bomba Comandada

A principal característica construtiva do controle misto é a utilização de bombas de deslocamento variável.

Estes sistemas são muito versáteis e possuem as mais diversificadas configurações, pois são concebidos em função de um objetivo e uma determinada estratégia de controle.

O atuador é comandado por uma válvula, mas a bomba é controlada em função de informações como a pressão de saída da bomba; pressão e/ou vazão na saída da válvula que alimenta o atuador; e velocidade e/ou força/torque do atuador. Uma destas grandezas ou combinações delas são usadas para estabelecer as estratégias de controle da bomba, geralmente controlando o seu deslocamento. Às vezes, até o motor que aciona a bomba pode fazer parte da estratégia de controle, assim como as características do atuador hidráulico.

A Figura 9.20 ilustra um esquema geral deste tipo de controle.

O processo de escolha em utilizar um destes três tipos de controle (válvula, bomba ou misto) envolve uma análise ampla, principalmente quanto às especificações técnicas, o investimento inicial e a economia de energia.

Durante muitos anos, até a década de 70, a grande maioria dos circuitos hidráulicos fazia a geração de energia hidráulica usando basicamente uma bomba de deslocamento fixo e uma válvula de alívio, Figura 9.15, sem grandes preocupações com a eficiência energética. O problema desta configuração ocorre quando o uso solicita uma demanda de vazão menor que a gerada pela bomba. A diferença retorna ao tanque através da válvula de alívio e isto causa desperdício de energia, desgaste dos equipamentos e aumento de custo pela necessidade de trocador de calor.

Nas últimas décadas o quesito energia tem exigido maiores eficiências não só por seus crescentes custos, mas sua própria escassez. É nesta direção que os sistemas hidráulicos vêm se desenvolvendo, procurando atender à nova realidade de economia de energia através de concepções com controle da bomba. Assim, o controle por bomba e o controle misto vão se tornando mais comuns, mas com características dinâmicas mais lentas.

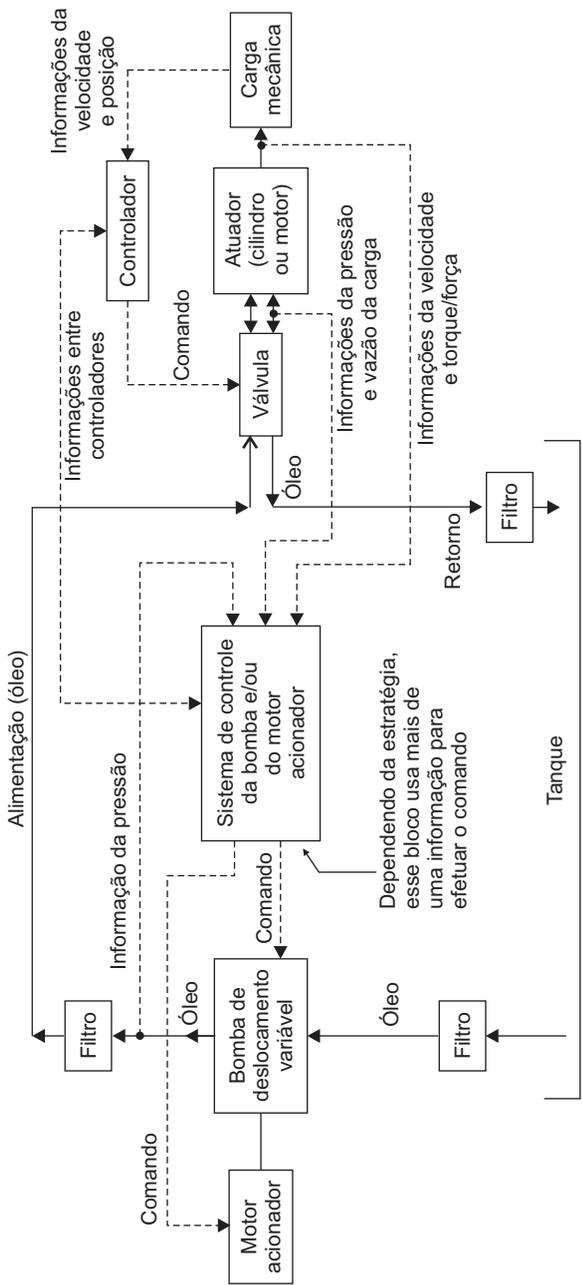


Figura 9.20 Esquema geral mostrando as possíveis combinações de um sistema de controle misto.

Em princípio, todo sistema com uma bomba de deslocamento variável tem um tempo de resposta mais lento do que usa uma bomba de deslocamento fixo. As bombas de deslocamento variável têm peças móveis que podem demorar centésimos ou décimos de segundos para adequar o seu deslocamento às condições solicitadas pelo trabalho.

Diante dessas considerações, torna-se necessário examinar o tempo de resposta que o serviço solicita. Se as exigências técnicas para realizar o trabalho são satisfeitas, a escolha de uma concepção de controle passa a depender de uma análise econômica, levando em conta o investimento inicial, o custo de manutenção, o custo operacional, a economia de energia, etc.

Quanto a atender aos requisitos técnicos, a modelagem dinâmica torna-se uma ferramenta fundamental de projeto.

Em algumas aplicações práticas podemos ter sistemas hidráulicos que dispensam o conhecimento profundo do seu comportamento dinâmico, como, por exemplo, os sistemas para descarregar caminhões de areia, elevadores de automóveis e outros. Em aplicações tecnicamente avançadas (robôs, máquinas operatrizes, aplicações militares, etc.), os componentes hidráulicos são os músculos dos sistemas de controle, e o conhecimento de suas propriedades dinâmicas torna-se indispensável. Em outras palavras, é imperativo dominar a técnica de modelagem dinâmica de sistemas hidráulicos para a realização de tais projetos.

Nesta seção estão apresentados quatro exemplos que representam uma introdução ao assunto. A primeira modelagem (exemplo 4) é relativamente simples e foi proposta para dar início à aplicação de leis e relações. As segunda e terceira (exemplos 5 e 6) são modelagens de sistema com controle por válvula e por bomba. A quarta, (exemplo 7) contém a modelagem de uma bomba autocompensada por pressão, com controle proporcional, tipo palheta, bastante usada em circuitos com controle tipo misto.

Antes, porém, é necessário observar as equações e as relações específicas da área, apresentadas a seguir, seção 9.2.2.

9.2.2 – HIPÓTESES, EQUAÇÕES E RELAÇÕES ESPECÍFICAS DA MODELAGEM DE SISTEMAS HIDRÁULICOS

a) Equações e Relações

Quando queremos descrever analiticamente o escoamento de um fluido estudamos o movimento de um pequeno cubo de fluido. Este volume infinitesimal de fluido pode ser completamente definido usando oito grandezas: as coordenadas do elemento x , y e z , a *pressão*, a *temperatura*, a *densidade*, a *viscosidade* do elemento

e o *tempo*. Portanto, precisamos de sete expressões matemáticas (equações e relações) independentes para obter qualquer grandeza como função de outra ou, como o caso usual, encontrarmos qualquer grandeza como função do tempo.

As sete expressões (equações e relações) são:

1. Lei de Newton em x (Navier-Stokes em x).
2. Lei de Newton em y (Navier-Stokes em y).
3. Lei de Newton em z (Navier-Stokes em z).
4. Lei da Conservação da Massa.
5. Lei da Conservação de Energia.
6. Relação $\rho = f_1(T, P)$ (massa específica em função da temperatura e pressão).
7. Relação $\mu = f_2(T, P)$ (viscosidade em função da temperatura e pressão).

A complexidade em resolver um problema com estas sete equações fica consideravelmente reduzida se o fluido for líquido e se forem desprezados alguns efeitos não significativos que ocorrem em sistemas hidráulicos.

As três primeiras equações, as de Navier-Stokes, são reduzidas à aplicação de certas fórmulas de escoamento unidirecional. Contudo, é regra geral em sistema hidráulico de óleo que somente as expressões que descrevem as resistências hidráulicas inseridas intencionalmente são usadas em análise dinâmica. Isto se deve ao fato de elas serem as restrições dominantes. As resistências causadas por escoamento em tubos, curvas e conexões são freqüentemente desprezadas. Portanto, as fórmulas comumente usadas são as do orifício dadas por:

$$Q = C_d A_o \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_1 - P_2)}; \text{ para regime turbulento} \quad (9.55)$$

$$Q = \frac{l}{R_f} (P_1 - P_2); \text{ para regime laminar} \quad (9.56)$$

em que:

$C_d \triangleq$ coeficiente de descarga do orifício;

$A_o \triangleq$ área do orifício;

$P_1 - P_2 \triangleq$ diferença de pressão através do orifício;

$R_f \triangleq$ resistência fluídica.

Estas relações vêm da Mecânica dos Fluidos e foram obtidas para as condições de escoamento em regime permanente, contudo, em modelagem elas são usadas para

a condição de transientes também, sob a hipótese de que a inércia do fluido seja desprezível na região do orifício.

A equação 9.55, para o orifício em regime turbulento, é aplicada em aberturas de válvulas, enquanto a (9.56), para regime laminar, em vazamentos que ocorrem nas folgas entre as peças, Figura 9.21.

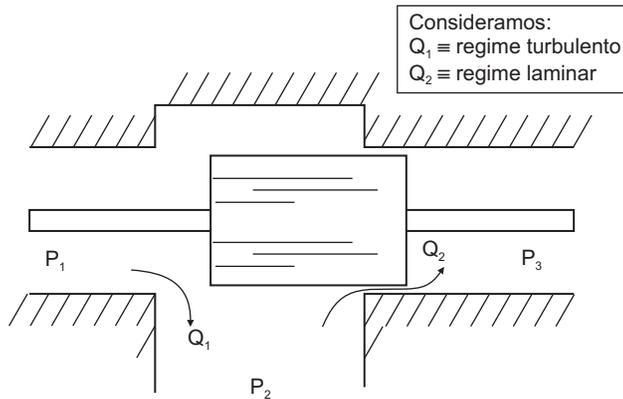


Figura 9.21 Exemplo dos locais onde aplicamos as equações 9.55 e 9.56.

Outra aproximação adotada em sistemas hidráulicos refere-se à temperatura.

Como o coeficiente de expansão volumétrica de líquido é pequeno, o efeito direto da temperatura na massa específica é geralmente desprezado. No sistema hidráulico em regime há gradientes de temperatura, mas tem pouca influência nas condições de escoamento. Nas modelagens dinâmicas tem sido suficiente avaliar as propriedades na temperatura de operação. Assim, é geralmente considerado que condições isotérmicas existam no escoamento. Esta hipótese de temperatura constante elimina a necessidade de aplicar a Lei da Conservação de Energia. Elimina também a relação da viscosidade. Dados experimentais mostram que μ varia pouco com a pressão, portanto, como a temperatura é constante, consideramos μ constante.

Com respeito à massa específica, esta passa a depender apenas da pressão, que é ponderada através do “Bulk-Modulus”.

No Capítulo 2, seção 2.4.4, foi apresentada a definição de *Bulk-Modulus* dada pela equação 2.45, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\beta = -V \frac{\Delta P}{\Delta V} \quad (9.57)$$

em que:

$\Delta P \triangleq$ variação de pressão;

$\Delta V \triangleq$ variação de volume;

$V \triangleq$ volume inicial.

A Figura 9.22 ilustra as definições destas grandezas.

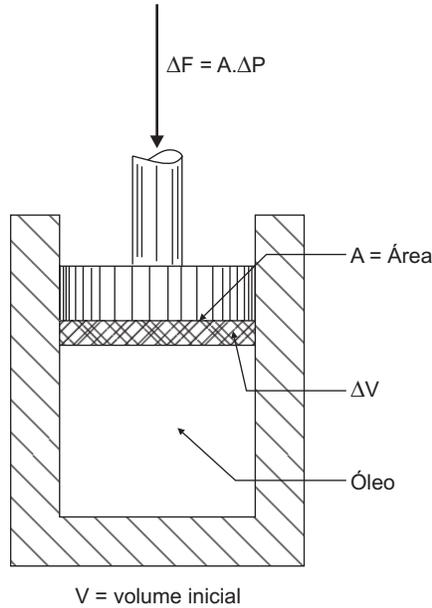


Figura 9.22 Esquema ilustrando as grandezas envolvidas na definição do *Bulk-Modulus*.

Valores de β tabelados para fluidos hidráulicos comuns estão entre **200000** e **300000** psi. Para sistemas em operação o *Bulk-Modulus* efetivo (β_e) é menor em decorrência principalmente das bolhas de ar e flexibilidade das paredes. Um valor prático de β_e seria **100000** psi.

O *Bulk-Modulus* é o inverso da compressibilidade. Isto significa que, se o *Bulk-Modulus* fosse infinito ($\beta \rightarrow \infty$), o fluido seria incompressível.

Para modelagem dinâmica é interessante fazer uma segunda interpretação do *Bulk-Modulus*. Esta seria considerar ΔV como sendo um pequeno volume de óleo acrescentado ao volume V_e do líquido, Figura 9.23.

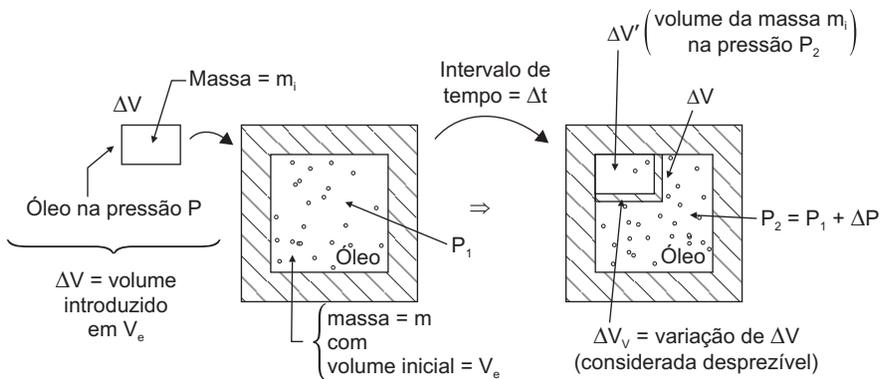


Figura 9.23 Esquema ilustrando a definição do *Bulk-Modulus*.

Considerando desprezível a variação de ΔV introduzido, em decorrência da variação de pressão de P para P_2 , uma variação de segunda ordem que é $\Delta V_v = \Delta V' - \Delta V$, então, $\Delta V \approx \Delta V'$ e podemos escrever que a variação de V_e , volume do óleo de massa m , é:

$$\Delta V = + \frac{V_e}{\beta} \Delta P \quad (9.58)$$

em que admitimos na (9.58) que ΔV *acrescentado* é positivo.

Agora, vamos focar outra condição na qual ocorrem escoamentos de óleo entrando e saindo de um volume de controle e também variação do volume de controle, Figura 9.24.

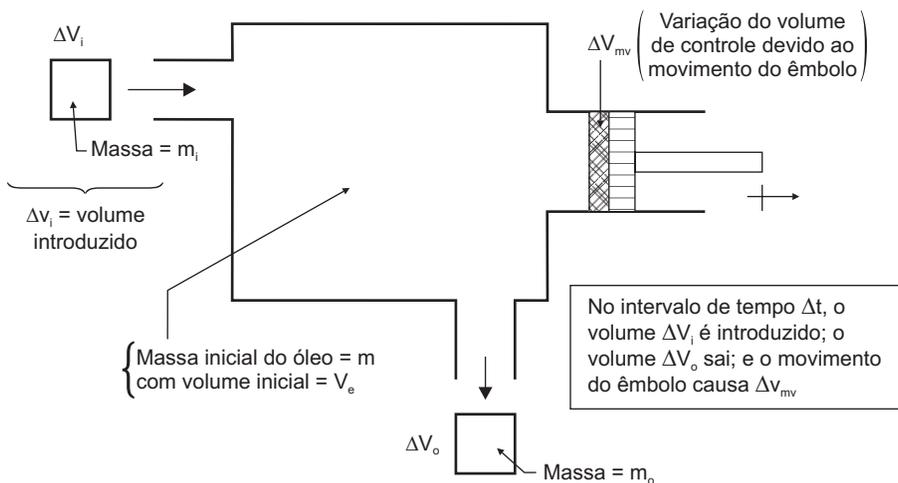


Figura 9.24 Sistema com entrada e saída de óleo e com variação do volume de controle.

De forma similar ao caso anterior, vamos desprezar as variações de segunda ordem, isto é, as variações que os pequenos volumes ΔV_p , ΔV_o e ΔV_{mv} sofrem com a variação de pressão. Então, da Figura 9.24 podemos escrever:

$$\Delta V_i - \Delta V_o - \Delta V_{mv} = [\text{variação do volume } V_e] \quad (9.59)$$

em que a convenção de sinais é a comum, o que entra é positivo, o que sai é negativo e ΔV_{mv} é negativo se o movimento do êmbolo aumenta o volume de controle.

Agora, usando o resultado da (9.58), em que ΔV é a variação de V_e , então a (9.59) fica:

$$\Delta V_i - \Delta V_o = \Delta V_{mv} + \frac{V_e}{\beta} \Delta P \quad (9.60)$$

Dividindo a equação 9.60 por Δt obtemos:

$$\frac{\Delta V_i}{\Delta t} - \frac{\Delta V_o}{\Delta t} = \frac{\Delta V_{mv}}{\Delta t} + \frac{V_e}{\beta} \frac{\Delta P}{\Delta t} \quad (9.61)$$

Fazendo o limite $\Delta t \rightarrow 0$ obtemos da definição de derivada que resulta na equação diferencial:

$$Q_i - Q_o = \frac{dV_{mv}}{dt} + \frac{V_e}{\beta} \frac{dP}{dt} \quad (9.62)$$

Observe, através da Figura 9.24, que a derivada $\frac{dV_{mv}}{dt}$ é igual à derivada do volume de controle.

Generalizando a (9.62) para mais de uma entrada e mais de uma saída, obtemos uma equação importante para a modelagem de sistemas hidráulicos.

$$\boxed{\sum_{k=1}^n (Q_{in})_k - \sum_{j=1}^r (Q_{out})_j = \frac{dV_{mv}}{dt} + \frac{V_e}{\beta} \frac{dP}{dt}} \quad (9.63)$$

em que n é a quantidade de entradas e r , a quantidade de saídas.

Uma análise desta equação nos diz que ela é a Lei da Conservação da Massa combinada com a função de estado da massa específica, $\rho = f(P)$, considerando a temperatura constante.

Concluindo, da lista de *sete* expressões (equações e relações) mencionadas no início, chegamos a *três*: os modelos para os orifícios dados pelas (9.55) e (9.56) e a equação de balanço dada pela (9.63).

b) Vazão de Bombas e Motores

A vazão teórica de uma bomba ou motor é decorrente da definição do deslocamento, ou seja:

$$Q_{th} = D \cdot \omega \quad (9.64)$$

em que:

$Q_{th} \triangleq$ vazão teórica (ideal, perdas nulas);

$D \triangleq$ deslocamento (unidade: volume/rad);

$\omega \triangleq$ rotação (rad/seg).

A vazão real que sai da bomba Q_{rb} é a vazão teórica menos a vazão das perdas Q_{pb} , isto é:

$$Q_{rb} = Q_{th} - Q_{pb} \quad (9.65)$$

Para o caso do motor, a vazão total real Q_{rm} que o motor recebe na sua entrada é igual à vazão teórica mais a vazão das perdas Q_{pm} , isto é:

$$Q_{rm} = Q_{th} + Q_{pm} \quad (9.66)$$

Ambas as vazões de perdas, Q_{pb} e Q_{pm} , ocorrem em decorrência de atritos, vazamentos internos, etc.

c) Torque de Motores e Bombas

Suponha uma máquina ideal (sem perdas) que converte energia fluídica em mecânica, (ou o inverso), Figura 9.25. Os dutos das seções de entrada e saída têm áreas A_1 e A_2 , respectivamente.

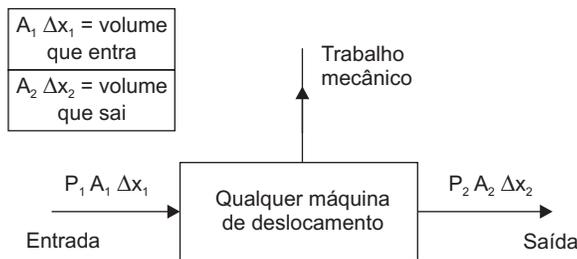


Figura 9.25 Esquema geral do fluxo de trabalho em uma máquina de deslocamento.

Em um intervalo de tempo Δt , o volume de fluido $A_1 \Delta x_1$ entra na máquina e o volume $A_2 \Delta x_2$ sai, em que Δx_1 e Δx_2 são as dimensões dos respectivos volumes nas direções axiais.

Para fluidos incompressíveis (a parcela em razão da compressibilidade está sendo desprezada), os valores $A_1 \Delta x_1$ e $A_2 \Delta x_2$ são iguais ($A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 = \Delta V$).

O pequeno volume (ΔV) que passa através da máquina realiza trabalho mecânico ΔW que deve ser igual à diferença entre o “trabalho de fluxo” colocado dentro do sistema na entrada e o “trabalho de fluxo” retirado do sistema na saída, então:

$$P_1 A_1 \Delta x_1 - P_2 A_2 \Delta x_2 = (P_1 - P_2) \Delta V = \Delta W \quad (9.67)$$

em que P_1 e P_2 são pressões estáticas na entrada e na saída, respectivamente.

Observe na (9.67) que PA é força e que Δx é deslocamento. O produto escalar de força e deslocamento é trabalho, mas não há necessidade de tratamento vetorial porque força e deslocamento têm a mesma direção.

Agora, lembrando que trabalho mecânico é o produto do momento multiplicado pelo deslocamento angular, então o trabalho mecânico realizado no intervalo de tempo Δt é:

$$\Delta W = \left(\begin{array}{l} \text{torque} \\ \text{teórico} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{l} \text{variação} \\ \text{do ângulo} \end{array} \right) = T_{th} \Delta \theta_m \quad (9.68)$$

em que $\Delta \theta_m$ é a variação angular do eixo da máquina, no intervalo Δt .

Com base na definição do deslocamento D podemos calcular ΔV , isto é:

$$\Delta V = D \Delta \theta_m \quad (9.69)$$

Assim, substituindo (9.69) em (9.67) e combinando com (9.68) vem:

$$(P_1 - P_2) D \Delta \theta_m = T_{th} \Delta \theta_m \quad (9.70)$$

que resulta:

$$\boxed{T_{th} = D \Delta P} \quad (9.71)$$

É evidente que (9.71) exprime o torque teórico. Se queremos uma expressão para o torque aplicado ao eixo da bomba, T_{eb} , então:

$$T_{eb} = T_{th} + \left[\begin{array}{l} \text{torque em razão} \\ \text{das perdas} \end{array} \right] \quad (9.72)$$

Para o caso do motor, o torque fornecido pelo eixo do motor T_{em} será:

$$T_{em} = T_{th} - \left[\begin{array}{l} \text{torque em razão} \\ \text{das perdas} \end{array} \right] \quad (9.73)$$

9.2.3 – EXEMPLO Nº 4: TANQUE PRESSURIZADO COM VÁLVULA, ORIFÍCIOS E PISTÃO

a) Proposição

Determinar a função de transferência $\frac{X_o}{X_i}(s)$ para o sistema da Figura 9.26 e fazer o esboço do gráfico da resposta em frequência.

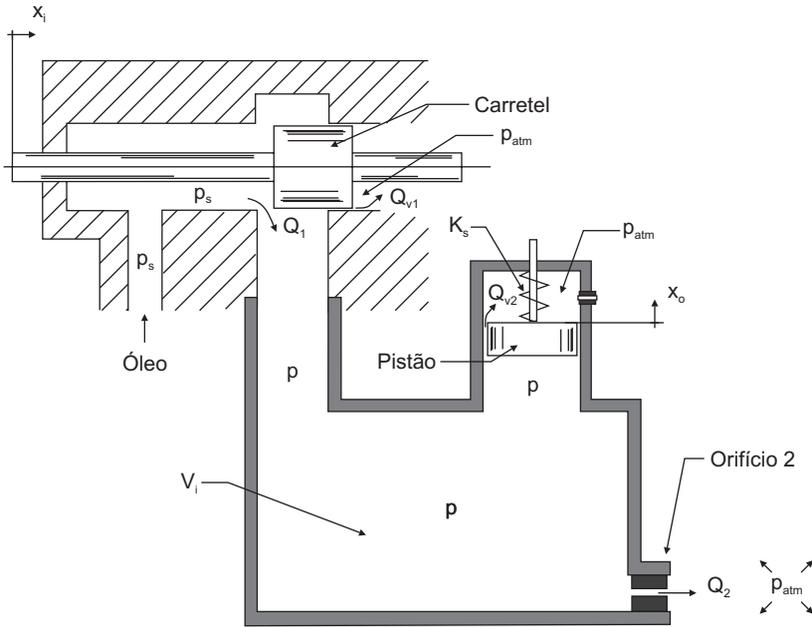


Figura 9.26 Caixa-tanque com válvula, orifícios e pistão.

b) Resolução

Na Figura 9.26 vemos que aplicaremos duas leis: a Lei da Conservação da Massa ao tanque e Lei de Newton ao pistão.

O sistema tem orifícios cujas relações são não-lineares entre vazão e pressão, portanto, para obter a função de transferência pedida usaremos análise de perturbação em torno do ponto de operação.

Quanto ao gráfico da resposta em frequência, será possível fazer apenas o seu esboço, porque o problema é literal.

Inicialmente definimos a nomenclatura utilizada, considerando as respectivas unidades e também algumas hipóteses. Assim:

$x_i \triangleq$ deslocamento do carretel (entrada); tem origem no ponto de operação, $[m]$.

$x_o \triangleq$ deslocamento do pistão (saída); tem origem no ponto de operação, $[m]$.

$p_{atm} \triangleq$ pressão atmosférica, considerada constante, $[Pa]$.

$p_s \triangleq$ pressão absoluta que abastece o sistema, considerada constante, $[Pa]$.

$p \triangleq$ pressão absoluta dentro do tanque, considerada uniforme dentro do tanque, $[Pa]$.

$Q_1 \triangleq$ vazão que alimenta o tanque, da região sob p_s para p , $\left[\frac{m^3}{seg} \right]$.

$Q_2 \triangleq$ vazão que sai do tanque através do orifício 2, da região sob p para a atmosfera, $\left[\frac{m^3}{seg} \right]$.

$Q_{v1} \triangleq$ vazão de vazamento do tanque em decorrência das folgas do carretel, de p para a atmosfera, $\left[\frac{m^3}{seg} \right]$.

$Q_{v2} \triangleq$ vazão de vazamento do tanque em decorrência das folgas do pistão, de p para a atmosfera, $\left[\frac{m^3}{seg} \right]$.

$K_s \triangleq$ coeficiente de elasticidade da mola acoplada ao pistão, considerado constante, $\left[\frac{N}{m} \right]$.

$m \triangleq$ massa do pistão, considerada rígida, $[kg]$.

$A \triangleq$ área da seção transversal do pistão, $[m^2]$.

$F_r \triangleq$ força resultante da pressão p sobre a área A do pistão, $[N]$.

$F_s \triangleq$ força da mola sobre o pistão, $[N]$.

$F_v \triangleq$ força de atrito viscoso sobre o pistão, $[N]$.

$B \triangleq$ coeficiente de atrito viscoso, considerado constante. Relaciona linearmente a força F_v com a velocidade do pistão \dot{x}_o , $\left[\frac{N \cdot \text{seg}}{m} \right]$.

$\beta_{eq} \triangleq$ Bulk Modulus equivalente, considerado constante, $[Pa]$.

$C_{G1} \triangleq$ constante do orifício do carretel, em que ocorre Q_1 , $\left[\frac{m^2}{\text{seg} \sqrt{N}} \right]$.

$C_{G2} \triangleq$ constante do orifício 2, em que ocorre Q_2 , $\left[\frac{m^2}{\text{seg} \sqrt{N}} \right]$.

$A_{O2} \triangleq$ área do orifício 2, em que ocorre Q_2 , $[m^2]$.

K_{v1} e $K_{v2} \triangleq$ coeficientes fluídicos (inverso das resistências fluídicas) relativos aos vazamentos Q_{v1} e Q_{v2} , respectivamente, $\left[\frac{m^5}{N \cdot \text{seg}} \right]$.

$d_c \triangleq$ diâmetro do carretel, $[m]$.

$V_i \triangleq$ volume inicial de óleo no tanque, $[m^3]$.

Além das hipóteses já mencionadas, vamos acrescentar as seguintes:

- H1: Coeficientes fluídicos K_{v1} e K_{v2} são constantes.
- H2: As variações de temperatura no sistema são desprezíveis.
- H3: Não há evaporação do óleo na temperatura e nas pressões a que o sistema está submetido.
- H4: Os escoamentos de vazamentos Q_{v1} e Q_{v2} estão em regime laminar.
- H5: Os escoamentos das vazões Q_1 e Q_2 estão em regime turbulento.
- H6: A inertância do fluido é desprezível.
- H7: A força do atrito seco sobre o pistão é desprezível.
- H8: A mola é pura e linear, ou seja, não há perda de energia e não possui massa.

Agora, aplicando a Lei da Conservação da Massa combinada com a função de estado da massa específica, equação 9.63, escrevemos:

$$\sum Q_{in} - \sum Q_{out} = \frac{dV_i}{dt} + \frac{V_i}{\beta_{eq}} \frac{dp}{dt} \quad (9.74)$$

ou

$$Q_1 - (Q_2 + Q_{v1} + Q_{v2}) = A \cdot \dot{x}_o + \frac{V_i}{\beta_{eq}} \frac{dp}{dt} \quad (9.75)$$

A Lei de Newton aplicada ao pistão resulta:

$$\sum F = m \ddot{x}_o \quad (9.76)$$

ou

$$F_r + F_s + F_v = m \ddot{x}_o \quad (9.77)$$

Obtendo as relações ligadas à Lei de Conservação da Massa, vem:

$$Q_1 = C_{G1} \pi d_c x_i \sqrt{p_s - p} \quad (9.78)$$

em que $\pi d_c x_i$ é a área de abertura do carretel, supondo orifício retangular.

$$Q_2 = C_{G2} A_{O2} \sqrt{p - p_{atm}} \quad (9.79)$$

$$Q_{v1} = K_{v1} \cdot (p - p_{atm}) \quad (9.80)$$

$$Q_{v2} = K_{v2} \cdot (p - p_{atm}) \quad (9.81)$$

Para as relações ligadas à Lei de Newton temos:

$$F_r = (p - p_{atm}) \cdot A \quad (9.82)$$

$$F_s = -K_s \cdot x_o \quad (9.83)$$

$$F_v = -B \cdot \dot{x}_o \quad (9.84)$$

Em decorrência dos escoamentos em regime turbulento na válvula e no orifício 2, as equações 9.78 e 9.79 são não-lineares, portanto, aplicaremos análise de perturbação em torno de um ponto de operação. Assim, definindo:

$$Q_1 \hat{=} Q_{1o} + Q_{1p}$$

$$Q_2 \hat{=} Q_{2o} + Q_{2p}$$

$$x_i \hat{=} x_{io} + x_{ip}$$

$$p \hat{=} p_o + p_p$$

em que o índice “o” significa o valor da grandeza no ponto de operação e o índice “p”, o valor de perturbação da respectiva grandeza ao redor do ponto de operação.

A vazão Q_1 depende de duas grandezas: x_i e p . Assim, aplicando a Série de Taylor truncada (vide equação A.38 do Apêndice A) para a sua linearização, obtemos:

$$Q_1 \cong Q_{1o} + \left. \frac{\partial Q_1}{\partial x_i} \right|_{\substack{p_o \\ x_{io}}} \cdot (x_i - x_{io}) + \left. \frac{\partial Q_1}{\partial p} \right|_{\substack{p_o \\ x_{io}}} \cdot (p - p_o) \quad (9.85)$$

ou

$$Q_1 - Q_{1o} \cong \left. \frac{\partial Q_1}{\partial x_i} \right|_{\substack{p_o \\ x_{io}}} \cdot (x_i - x_{io}) + \left. \frac{\partial Q_1}{\partial p} \right|_{\substack{p_o \\ x_{io}}} \cdot (p - p_o) \quad (9.86)$$

que resulta:

$$Q_{1p} \cong \left. \frac{\partial Q_1}{\partial x_i} \right|_{\substack{p_o \\ x_{io}}} \cdot x_{ip} + \left. \frac{\partial Q_1}{\partial p} \right|_{\substack{p_o \\ x_{io}}} \cdot p_p \quad (9.87)$$

Logo:

$$Q_{1p} \cong C_{1x} \cdot x_{ip} - C_{1p} \cdot p_p \quad (9.88)$$

em que os coeficientes C_{1x} e C_{1p} são positivos, isto é:

$$C_{1x} \triangleq C_{G1} \pi d_c \sqrt{p_s - p_o}$$

$$C_{1p} \triangleq \frac{C_{G1} \pi d_c x_{io}}{2 \sqrt{p_s - p_o}}$$

Para linearizar Q_2 , aplicamos Taylor à (9.79), então:

$$Q_2 \cong Q_{2o} + \left. \frac{dQ_2}{dp} \right|_{p_o} p_p \quad (9.89)$$

Logo:

$$Q_{2p} \cong C_{2p} p_p \quad (9.90)$$

em que o coeficiente C_{2p} é positivo, isto é:

$$C_{2p} \triangleq \frac{C_{G2} A_{O2}}{2 \sqrt{p_o - p_{atm}}}$$

Em termos das variáveis de perturbação, as vazões de vazamentos e as forças F_p , F_s e F_v ficam:

$$Q_{v1o} + Q_{v1p} = K_{v1}(p_o + p_p - p_{atm}) \quad (9.91)$$

$$Q_{v2o} + Q_{v2p} = K_{v2}(p_o + p_p - p_{atm}) \quad (9.92)$$

$$F_{ro} + F_{rp} = (p_o + p_p - p_{atm})A \quad (9.93)$$

$$F_{so} + F_{sp} = -K_s(x_{oo} + x_{op}) \quad (9.94)$$

$$F_{vo} + F_{vp} = -B(\dot{x}_{op}) \quad (9.95)$$

em que o índice “*o*” significa o valor da grandeza no ponto de operação e o índice “*p*”, o valor de perturbação da respectiva grandeza ao redor do ponto de operação.

No ponto de operação sabemos que todas as grandezas de perturbação são nulas e também a velocidade e a aceleração de *m*, ou seja: $\dot{x}_{oo} = \ddot{x}_{oo} = 0$. Então, das equações de 9.91 a 9.95 obtemos:

$$Q_{v1o} = K_{v1}(p_o - p_{atm}) \quad (9.96)$$

$$Q_{v1p} = K_{v1} p_p \quad (9.97)$$

$$Q_{v2o} = K_{v2}(p_o - p_{atm}) \quad (9.98)$$

$$Q_{v2p} = K_{v2} p_p \quad (9.99)$$

$$F_{ro} = A(p_o - p_{atm}) \quad (9.100)$$

$$F_{rp} = A p_p \quad (9.101)$$

$$F_{so} = -K_s x_{oo} \quad (9.102)$$

$$F_{sp} = -K_s x_{op} \quad (9.103)$$

$$F_{vo} = 0 \quad (9.104)$$

$$F_{vp} = -B \dot{x}_{op} \quad (9.105)$$

Agora, escrevendo as equações das Leis, (9.75) e (9.77), considerando as parcelas do ponto de operação e de perturbação vem:

$$Q_{1o} + Q_{1p} - Q_{2o} - Q_{2p} - Q_{v1o} - Q_{v1p} - Q_{v2o} - Q_{v2p} = A \dot{x}_{op} + \frac{V_i}{\beta_{eq}} \frac{dp_p}{dt} \quad (9.106)$$

$$F_{ro} + F_{rp} + F_{so} + F_{sp} + F_{vo} + F_{vp} = m \ddot{x}_{op} \quad (9.107)$$

Como no equilíbrio (ponto de operação) as variáveis de perturbação são nulas, então, das (9.106) e (9.107) obtemos:

$$Q_{1o} - Q_{2o} - Q_{v1o} - Q_{v2o} = 0 \quad (9.108)$$

$$F_{ro} + F_{so} + F_{vo} = 0 \quad (9.109)$$

As equações (9.108) e (9.109) já eram conceitualmente esperadas, pois, no equilíbrio, a vazão que entra é igual à que sai, a pressão do tanque não varia e as forças sobre o êmbolo se equilibram, resultando em velocidade e aceleração nulas.

Voltando à modelagem, subtraindo (9.108) da (9.106) e (9.109) da (9.107), obtemos as equações em termos das variáveis de perturbação, ou seja:

$$Q_{1p} - Q_{2p} - Q_{v1p} - Q_{v2p} = A \dot{x}_{op} + \frac{V_i}{\beta_{eq}} \frac{dp_p}{dt} \quad (9.110)$$

$$F_{rp} + F_{sp} + F_{vp} = m \ddot{x}_{op} \quad (9.111)$$

Substituindo as relações nas (9.110) e (9.111), ou seja, as equações 9.88, 9.90, 9.97, 9.99, 9.101, 9.103 e 9.105 nas 9.110 e 9.111, obtemos:

$$C_{1x} x_{ip} - C_{1p} p_p - C_{2p} p_p - K_{v1} p_p - K_{v2} p_p = A \dot{x}_{op} + \frac{V_i}{\beta_{eq}} \frac{dp_p}{dt} \quad (9.112)$$

$$A p_p - K_s x_{op} - B \dot{x}_{op} = m \ddot{x}_{op} \quad (9.113)$$

Como as condições iniciais são nulas, aplicando Laplace e organizando em forma de matriz, vem:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{V_i}{\beta_{eq}} s + C_{1p} + C_{2p} + K_{v1} + K_{v2} \right) & As \\ -A & ms^2 + Bs + K_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_p \\ X_{op} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1x} X_{ip} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.114)$$

Aplicando Cramer para determinarmos X_{op} resulta:

$$X_{op} = \frac{AC_{1x} X_{ip}}{\left(\frac{V_i}{\beta_{eq}} s + C_{1p} + C_{2p} + K_{v1} + K_{v2} \right) \cdot (ms^2 + Bs + K_s) + A^2 s} \quad (9.115)$$

Logo:

$$\frac{X_{op}}{X_{ip}}(s) = \frac{K}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1} \quad (9.116)$$

em que:

$$K \triangleq \frac{AC_{1x}}{K_s (C_{1p} + C_{2p} + K_{v1} + K_{v2})} \triangleq \text{ganho};$$

$$a_3 \triangleq \frac{V_i m}{K_s (C_{1p} + C_{2p} + K_{v1} + K_{v2}) \beta_{eq}};$$

$$a_2 \triangleq \frac{1}{K_s (C_{1p} + C_{2p} + K_{v1} + K_{v2})} \left[\frac{V_i B}{\beta_{eq}} + m (C_{1p} + C_{2p} + K_{v1} + K_{v2}) \right];$$

$$a_1 \triangleq \frac{1}{K_s (C_{1p} + C_{2p} + K_{v1} + K_{v2})} \left[\frac{V_i K_s}{\beta_{eq}} + B (C_{1p} + C_{2p} + K_{v1} + K_{v2}) + A^2 \right].$$

Neste ponto podemos verificar as unidades dos parâmetros da função de transferência, equação 9.116.

O ganho K deve ter a dimensão: (unidade de saída)/(unidade da entrada). Como neste caso temos (*metro/metro*), então K deve ser adimensional. Assim, verificando K :

$$[K] \equiv \frac{m^2 \left(\frac{m^2}{seg} \right)}{\frac{N}{m} \frac{m^5}{N \cdot seg}} = \frac{m^4}{m^4} = \text{adimensional} \therefore \text{verificado.}$$

O coeficiente a_3 deve ter dimensão [*seg*³], então, verificando:

$$[a_3] \equiv \frac{\frac{m^3 \cdot kg}{N} \frac{kg}{m^5}}{\frac{N}{m} \frac{seg}{m^2}} = \frac{\frac{m^3 \cdot kg}{kg} \frac{kg}{m^3}}{\frac{kg}{seg^2} \frac{m^3}{seg}} = \text{seg}^3 \therefore \text{verificado.}$$

O coeficiente a_2 deve ter dimensão [*seg*²], então, verificando:

$$[a_2] \equiv \frac{1}{\frac{N}{m} \frac{m^5}{N.seg}} \left[\frac{m^3 \left(\frac{N.seg}{m} \right)}{\left(\frac{N}{m^2} \right)} + \frac{N.seg^2}{m} \frac{m^5}{N.seg} \right] =$$

$$= \frac{seg}{m^4} [m^4 .seg + seg.m^4] = seg^2 \therefore \text{verificado.}$$

O coeficiente a_1 deve ter dimensão [seg], então:

$$[a_1] \equiv \frac{1}{\frac{N}{m} \frac{m^5}{N.seg}} \left[\frac{m^3 \left(\frac{N}{m} \right)}{\left(\frac{N}{m^2} \right)} + \frac{N.seg}{m} \frac{m^5}{N.seg} + m^4 \right] =$$

$$= \frac{seg}{m^4} [m^4 + m^4 + m^4] = seg \therefore \text{verificado.}$$

Portanto, a verificação das unidades dos parâmetros está satisfeita.

A última tarefa deste exemplo é fazer o esboço do gráfico da resposta em frequência.

O denominador da função de transferência é de terceira ordem. Isto significa que podemos fatorá-lo em um sistema de primeira e um de segunda ordem, podendo o sistema de segunda ordem ser subamortecido, criticamente amortecido e superamortecido. No caso de o sistema de segunda ordem ser criticamente amortecido ou superamortecido, equivaleria dizer que o denominador seria fatorado em três sistemas de primeira ordem.

A função de transferência em termos de um sistema de primeira ordem e de segunda ordem fica:

$$\frac{X_{op}}{X_{ip}}(s) = \frac{K}{[\tau s + 1] \cdot \left[\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1 \right]} \quad (9.117)$$

em que os parâmetros τ , ω_n e ζ seriam determinados em função dos valores de a_1 , a_2 e a_3 .

Para elaborar o esboço do gráfico da resposta em frequência suporemos que o sistema de segunda ordem seja subamortecido, com o valor de ζ entre 0,4 e 0,5.

Desta forma, iniciando o procedimento para elaboração da resposta em frequência, vamos dividir a função de transferência em 3 funções: Ganho, Sistema de 1^a ordem (denominador) e Sistema de 2^a ordem (denominador). Estudando cada uma destas funções temos:

Função #1 – Ganho:

O ganho é calculado na escalada de *db*.

$$\left. \frac{A_o}{A_i} \right|_{db} = 20 \cdot \log K = K_{db} \quad (9.118)$$

O gráfico da relação de amplitude, $\frac{A_o}{A_i}$ é uma linha horizontal e o da fase ϕ é sempre 0° .

Função #2 – Sistema de 1^a ordem:

A relação de amplitude $\frac{A_o}{A_i}$ do sistema de 1^a ordem no denominador tem uma assíntota com inclinação negativa de 20 db/década a partir da frequência de corte que é igual a $\frac{1}{\tau}$. A sua fase ϕ começa em *zero* e tende para -90° quando as frequências são altas.

Em torno de $\frac{1}{\tau}$ existem correções negativas, conforme ilustram as Figuras 9.27 e 9.28.

Função #3 – Sistema de 2^a ordem:

A relação de amplitude $\frac{A_o}{A_i}$ do sistema de 2^a ordem no denominador tem uma assíntota com inclinação negativa de 40 db/década a partir da frequência natural ω_n (frequência de corte). A sua fase ϕ começa em *zero*, passa por -90° quando atinge a frequência natural e tende para -180° para frequências altas.

Em torno de ω_n existem correções positivas, conforme ilustram as Figuras 9.27 e 9.28.

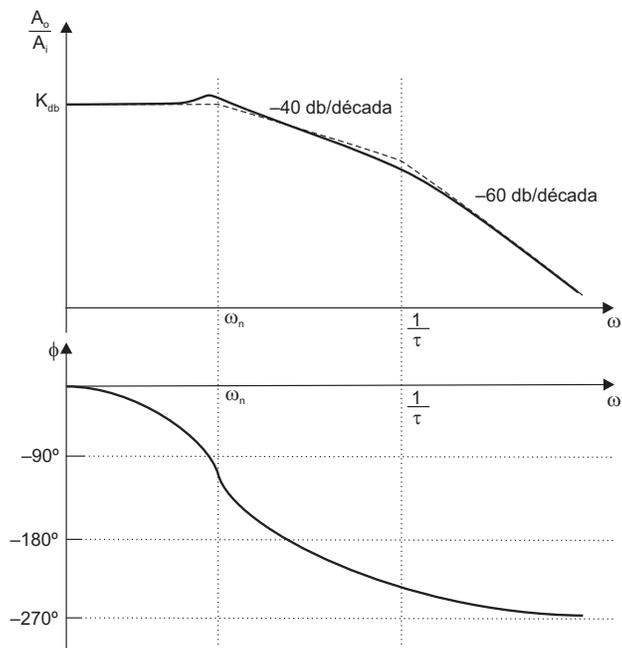


Figura 9.27 Esboço do gráfico da resposta em frequência do sistema quando $\omega_n < \frac{1}{\tau}$.

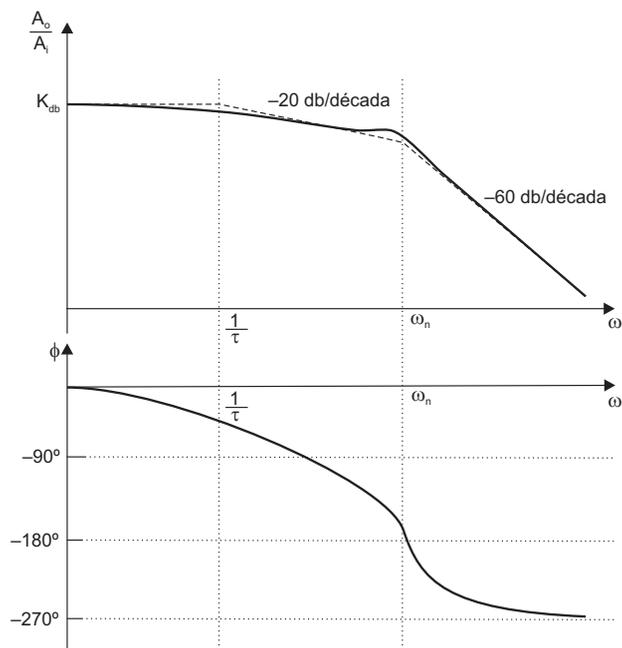


Figura 9.28 Esboço do gráfico da resposta em frequência do sistema quando $\omega_n > \frac{1}{\tau}$.

Com as informações das funções #1, #2 e #3 é possível esboçar o gráfico.

Por se tratar de um problema literal, torna-se interessante traçar dois gráficos para representar o comportamento do sistema. A Figura 9.27 apresenta o esboço para $\omega_n < \frac{1}{\tau}$ e a Figura 9.28 quando $\omega_n > \frac{1}{\tau}$.

9.2.4 – EXEMPLO Nº 5: ANÁLISE DE UM SISTEMA COM BOMBA CONTROLADA E COM MOTOR

a) Introdução

A combinação simplificada de bomba e motor hidráulico da Figura 9.18 não é viável na prática por conta principalmente de dois fatores. O primeiro é a impossibilidade de operar um sistema hidráulico sem nenhum vazamento. Mesmo iniciando as operações com o sistema cheio de óleo, depois de algum tempo ele passará a ficar parcialmente vazio. O segundo ocorre quando a bomba é solicitada para acelerar rapidamente a carga. Nesta condição a pressão na tubulação de sucção da bomba pode cair a níveis muito baixos, causando cavitação, grande ruído e desgaste. Para suplantar estas dificuldades, os sistemas práticos normalmente incluem um esquema de reposição, conforme mostra a Figura 9.29.

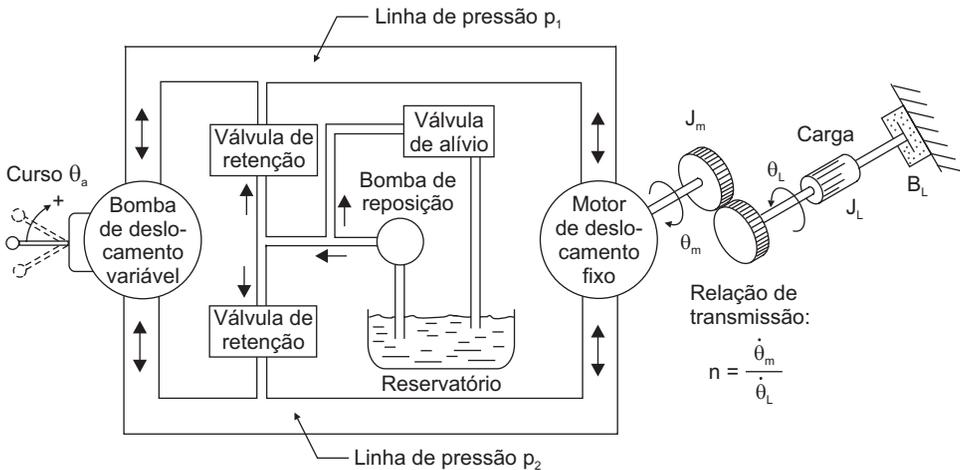


Figura 9.29 Esquema mais realista de um sistema controlado por bombas.

O sistema da Figura 9.29 possui dois tipos de válvulas: de alívio e de retenção comum. Às vezes a válvula de alívio é também chamada de válvula de segurança, porque ela se abre quando a pressão na sua entrada atinge valores próximos do preestabelecido e ajustado para a válvula. O segundo tipo, a válvula de retenção comum, é unidirecional, pois permite vazão em uma só direção.

No circuito da Figura 9.29, a pequena bomba de reposição trabalha o tempo todo e mantém o sistema com uma pressão mínima, estabelecida pela regulação da válvula de alívio. Se a pressão em qualquer uma das linhas for menor que o valor da pressão regulada pela válvula de alívio, a válvula de retenção do trecho correspondente se abre para que o fluido de reposição entre naquela respectiva linha. Considerando que as válvulas de retenção não permitem vazão no sentido inverso, a bomba de deslocamento variável pode desenvolver qualquer valor de pressão necessária para acionar o motor e a carga.

b) Proposição

Para o sistema da Figura 9.29, determine a função de transferência considerando como saída a rotação do motor ($\dot{\theta}_m$) e como entrada o ângulo de alavanca (θ_a) que controla o deslocamento da bomba.

c) Resolução

Iniciamos a modelagem declarando as seguintes hipóteses:

- H1: As variações de temperatura no sistema são desprezíveis.
- H2: Não há evaporação do óleo na temperatura e nas pressões a que o sistema está submetido.
- H3: São laminares os escoamentos dos vazamentos internos da bomba e do motor, da região de alta para baixa pressão.
- H4: A inertância do fluido é desprezível.
- H5: As vazões dos drenos¹ da bomba e do motor são desprezíveis.
- H6: As forças de atrito seco são desprezíveis.
- H7: O amortecedor linear de coeficiente B_L é o único amortecimento viscoso considerável no sistema, todos os demais são desprezíveis.
- H8: Todas as partes e peças do sistema são rígidas, inclusive os dentes das engrenagens.
- H9: Não existe nenhuma folga entre os dentes das engrenagens.
- H10: As inércias J_m e J_L correspondem às inércias totais relativas a cada respectivo eixo, do motor e da carga.

A bomba do circuito da Figura 9.29 tem deslocamento variável e é controlado pelo ângulo da alavanca θ_a . Considerando que a relação entre o deslocamento e o ângulo seja linear, então:

$$D_b = D_{max} \theta_a \quad (9.119)$$

1. Drenos são vazamentos internos que vão diretamente para o reservatório de óleo.

em que:

$D_b \triangleq$ descolamento da bomba, função de θ_a ;

$D_{max} \triangleq$ deslocamento máximo da bomba;

$\theta_a \triangleq$ fração decimal do curso ($-1,0 \leq \theta_a \leq 1,0$).

Ainda para a bomba, a sua vazão ideal e a de vazamento interno são:

$$Q_{ib} = \omega_b D_{max} \theta_a \quad (9.120)$$

$$Q_{vb} = K_{vb} (p_2 - p_1) \quad (9.121)$$

em que:

$Q_{ib} \triangleq$ vazão ideal (sem perdas) da bomba; é considerada positiva no sentido de p_1 para p_2 ;

$\omega_b \triangleq$ rotação da bomba (considerada constante);

$Q_{vb} \triangleq$ Vazão de vazamento da bomba; é considerada positiva no sentido de p_2 para p_1 ;

$K_{vb} \triangleq$ coeficiente de vazamento da bomba; a constante K_{vb} é em geral determinada experimentalmente.

$(p_2 - p_1) \triangleq$ diferença entre as pressões das linhas; para $\theta_a > 0$, p_2 é a pressão na saída da bomba.

As vazões para o motor de deslocamento fixo são:

$$Q_{im} = \omega_m D_m \quad (9.122)$$

$$Q_{vm} = K_{vm} (p_2 - p_1) \quad (9.123)$$

em que:

$Q_{im} \triangleq$ vazão ideal (sem perdas) do motor; é considerada positiva no sentido de p_2 para p_1 ;

$\omega_m \triangleq \dot{\theta}_m \triangleq$ rotação angular do motor;

$D_m \triangleq$ deslocamento do motor (considerado constante);

$K_{vm} \triangleq$ coeficiente de vazamento do motor, constante.

Bombas e motores usados em sistemas deste tipo são comumente máquinas rotativas multicilíndricas que produzem vazões com pequenos pulsos. Estas pequenas pulsações estão sendo desprezadas e por esta razão obtivemos as equações 9.120 e 9.122.

Do estudo de sistema dinâmico equivalente (seção 9.1.3, item b) podemos escrever:

$$J_e = J_m + \left(\frac{I}{n^2} \right) J_L \quad (9.124)$$

$$B_e = \left(\frac{I}{n^2} \right) B_L \quad (9.125)$$

em que:

$J_e \triangleq$ inércia equivalente do motor e carga, referida ao eixo do motor;

$J_m \triangleq$ inércia total das massas girantes acopladas ao eixo do motor;

$J_L \triangleq$ inércia total das massas girantes acopladas ao eixo da carga;

$\omega_L \triangleq \dot{\theta}_L \triangleq$ rotação angular da carga;

$n \triangleq \frac{\theta_m}{\theta_L} = \frac{\dot{\theta}_m}{\dot{\theta}_L} = \frac{\omega_m}{\omega_L} \triangleq$ relação de transmissão;

$B_e \triangleq$ coeficiente de amortecimento equivalente, referido ao eixo do motor;

$B_L \triangleq$ coeficiente do amortecedor torcional linear da carga, constante.

As linhas hidráulicas que conectam a bomba e o motor são consideradas curtas, tal que as quedas de pressão em decorrência do atrito e inércia do fluido são desprezíveis, portanto, podemos considerar que os comprimentos inteiros das linhas estão, respectivamente, sob as pressões p_1 e p_2 .

Quando a bomba está trabalhando em uma direção, a linha com alta pressão (p_2 na Figura 9.29) atinge o valor necessário para mover a carga.

A linha de baixa pressão (p_1 na Figura 9.29) praticamente se mantém na pressão básica, mantida pela bomba de reposição. Esta pressão p_1 será considerada constante. Esta hipótese não elimina a possibilidade de reversão da bomba; pressões p_1 e p_2 são notações intercambiáveis, dependendo do sentido da vazão.

A análise envolve basicamente duas equações. A primeira é o balanço de massa e a segunda, a Lei de Newton, aplicada ao eixo do motor.

Considerando o balanço de massa, a vazão que aciona o motor é aquela produzida pela bomba menos os vazamentos e a parcela em decorrência da compressibilidade.

Assim, aplicando a Lei da Conservação da Massa combinada com a função de estado da massa específica, equação 9.63, na linha sob pressão p_2 , obtemos:

$$\omega_b D_{max} \theta_a - K_{vb} (p_2 - p_1) - K_{vm} (p_2 - p_1) - D_m \omega_m = \frac{V}{\beta} \frac{d(p_2 - p_1)}{dt} \quad (9.126)$$

em que:

$V \triangleq$ volume inicial do óleo sob a pressão p_2 ;

$\beta \triangleq$ Bulk Modulus.

Lembrando que o torque ideal do motor é o deslocamento multiplicado pela diferença de pressão (equação 9.71), a Lei de Newton aplicada ao eixo motor resulta:

$$D_m (p_2 - p_1) - B_e \frac{d\theta_m}{dt} = J_e \frac{d^2\theta_m}{dt^2} \quad (9.127)$$

Notamos que nas equações 9.126 e 9.127 as pressões aparecem como $(p_2 - p_1)$, o que nos permite definir uma variável p como sendo $p \triangleq (p_2 - p_1)$. Isto produz um conjunto de duas equações com duas incógnitas p e ω_m .

Realizando a Transformada de Laplace na equação 9.126 e 9.127, considerando condições iniciais iguais a **zero**, resulta:

$$K_{vb} P(s) + K_{vm} P(s) + \left(\frac{V}{\beta} \right) s P(s) + D_m \Omega_m(s) = \omega_b D_{max} \Theta_a(s) \quad (9.128)$$

$$D_m P(s) - B_e \Omega_m(s) = J_e s \Omega_m(s) \quad (9.129)$$

Podemos resolver o sistema para qualquer uma das variáveis $P(s)$ ou $\Omega_m(s)$. Neste caso, a nossa atenção está voltada para $\Omega_m(s)$, portanto, da equação 9.129 temos:

$$P(s) = \left[\frac{J_e}{D_m} s + \frac{B_e}{D_m} \right] \Omega_m(s) \quad (9.130)$$

Substituindo na equação 9.128 vem:

$$D_m \Omega_m(s) + \left[K_{vb} + K_{vm} + \frac{V}{\beta} s \right] \left[\frac{J_e}{D_m} s + \frac{B_e}{D_m} \right] \Omega_m(s) = \omega_b D_{max} \Theta_a(s) \quad (9.131)$$

Reescrevendo a equação 9.131 obtemos:

$$\left[\frac{VJ_e}{\beta D_m} s^2 + \left(\frac{J_e}{D_m} (K_{vb} + K_{vm}) + \frac{VB_e}{\beta D_m} \right) s + \frac{(K_{vb} + K_{vm})B_e + D_m^2}{D_m} \right] \Omega_m(s) = (\omega_b D_{max}) \Theta_a(s) \quad (9.132)$$

Logo:

$$\frac{\Omega_m}{\Theta_a}(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1} \quad (9.133)$$

em que:

$$K \triangleq \frac{\omega_b D_{max} D_m}{(K_{vb} + K_{vm})B_e + D_m^2} \triangleq \text{ganho, [(rad/seg)/(% do curso)];}$$

$$\omega_n \triangleq \sqrt{\frac{\beta [(K_{vb} + K_{vm})B_e + D_m^2]}{VJ_e}} \triangleq \text{freqüência natural não-amortecida, [rad/seg];}$$

$$\zeta \triangleq \frac{B_e + \frac{\beta J_e}{V} (K_{vb} + K_{vm})}{2\sqrt{\frac{\beta J_e}{V} [B_e (K_{vb} + K_{vm}) + D_m^2]}} \triangleq \text{fator de amortecimento.}$$

d) Discussão do modelo examinando as expressões dos coeficientes: K , ω_n e ζ

Observando a definição do ganho, se os vazamentos forem nulos, então $K = \omega_b D_{max} / D_m$. Isto coincide com a intuição, pois, se $D_{max} = D_m$ e $\theta_a = 1,0$, o motor rodará na mesma velocidade da bomba.

Altos valores de K (desejáveis em sistemas de controle) são obtidos por intermédio de altos valores de ω_b e/ou D_{max} e com pequenos valores para os vazamentos e B_e . A variação do ganho em função de D_m passa por um máximo (vide estudo semelhante feito para a equação 3.221), portanto, a sensibilidade do ganho em função de D_m depende de valores numéricos.

Altos valores da freqüência natural não-amortecida ω_n (também desejáveis em sistemas de controle) são obtidos por meio de altos valores de β e D_m e pequenos

valores de V e J_e . Valores altos de vazamento e do coeficiente B_e aumentam ω_n , mas com prejuízo do K e desperdício de energia.

O fator de amortecimento ζ não pode ser nem muito pequeno nem muito grande, ou seja, valores entre 0,5 e 0,7 são sempre desejáveis. Note que, se B_e for *nulo*, ainda existirá amortecimento, e isto se deve aos vazamentos relativos aos coeficientes K_{V_b} e K_{V_m} . Algumas vezes um vazamento intencional (por meio de uma válvula de agulha) é colocado entre a entrada e saída das máquinas para ajustar o fator de amortecimento de uma forma bastante simples e barata. Entretanto, esta solução pode tornar-se dispendiosa em razão da perda de energia na válvula de agulha. Outro inconveniente desta solução é que o vazamento diminui o ganho e reduz a rigidez às cargas de distúrbio (torques externos imprevistos que atuam no sistema).

9.2.5 – EXEMPLO Nº 6: MODELAGEM DINÂMICA DE UM CILINDRO HIDRÁULICO CONTROLADO POR VÁLVULA

a) Proposição

A Figura 9.30 ilustra um sistema composto por um cilindro hidráulico controlado por uma válvula. O objetivo da modelagem é obter a função de transferência considerando como entrada o deslocamento do carretel x_V e como saída o deslocamento do pistão x_P .

O sistema com esta configuração, composto da massa M e do atrito viscoso B , representa muitas situações práticas.

b) Resolução

Inicialmente consideramos as seguintes hipóteses:

H1: As variações de temperatura no sistema são desprezíveis.

H2: Não há evaporação do óleo na temperatura e nas pressões a que o sistema está submetido.

H3: A inertância do fluido é desprezível.

H4: As forças de atrito seco são desprezíveis.

H5: O amortecedor linear de coeficiente B é o único amortecimento viscoso considerável no sistema, todos os demais são desprezíveis.

H6: Todas as partes e peças do sistema são rígidas.

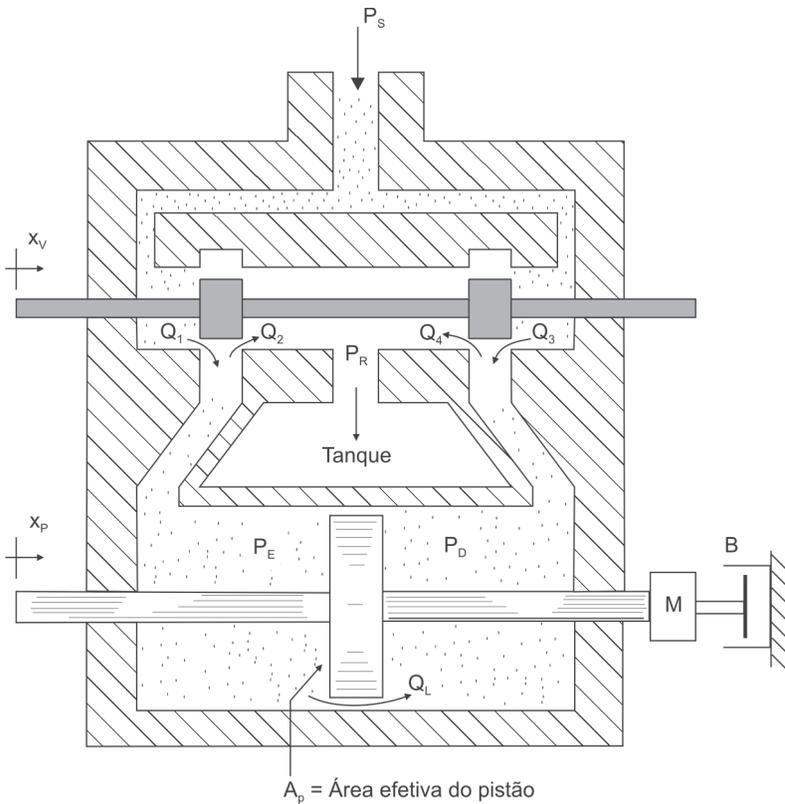


Figura 9.30 Esquema de um cilindro comandado por válvula.

As variáveis e parâmetros da Figura 9.30, incluindo mais algumas hipóteses são:

$x_v \triangleq$ deslocamento do carretel da válvula;

$x_p \triangleq$ deslocamento do pistão;

$P_s \triangleq$ pressão manométrica que alimenta o sistema, considerada constante;

$P_R \triangleq$ pressão manométrica de retorno, considerada constante;

$P_E \triangleq$ pressão manométrica na câmara do lado esquerdo do cilindro, considerada uniforme;

$P_D \triangleq$ pressão manométrica na câmara do lado direito do cilindro, considerada uniforme;

$A_p \triangleq$ área efetiva de trabalho do pistão; é a área do pistão menos a área da haste;

Q_1 e $Q_3 \triangleq$ vazões da região sob P_S para os volumes sob P_E e P_D , respectivamente;

Q_2 e $Q_4 \triangleq$ vazões da região sob P_E e P_D , respectivamente, para o retorno sob P_R ;

$M \triangleq$ massa total acoplada à haste do cilindro (inclui a massa do pistão, do amortecedor, etc.);

$B \triangleq$ coeficiente de atrito viscoso, considerado amortecedor linear.

Em situação de trabalho, o nível da força e, conseqüentemente, o diferencial de pressão ($P_E - P_D$) podem causar vazamento de um lado para o outro do atuador. A Figura 9.30 mostra a folga entre pistão e cilindro através da qual o vazamento pode fluir. Como normalmente esta folga é pequena, consideramos a vazão de vazamento no regime laminar. Assim:

$$Q_L = C_L A_L (P_E - P_D) \quad (9.134)$$

ou

$$Q_L = K_L (P_E - P_D) \quad (9.135)$$

em que:

$Q_L \triangleq$ vazão de vazamento entre as câmaras (considerada positiva de P_E para P_D);

$C_L \triangleq$ coeficiente da vazão laminar para o vazamento;

$A_L \triangleq$ área efetiva onde ocorre o vazamento;

$K_L \triangleq C_L A_L \triangleq$ coeficiente de vazamento do pistão.

Para a modelagem será considerada como condição inicial a posição do pistão no centro do cilindro, portanto, o volume da esquerda do cilindro é igual ao volume da direita, ambos designados V .

A condição inicial para a válvula é o carretel estar na posição neutra ($x_V = 0$). Mesmo quando a válvula está na sua posição neutra, a área de vazão não é em geral *zero*. Isto ocorre porque os carretéis e os assentos não podem ser fabricados com

cantos vivos perfeitos. As válvulas reais são do tipo *centro aberto* (*underlapped*), *centro crítico* ou *centro fechado* (*overlapped*), Figura 9.31.

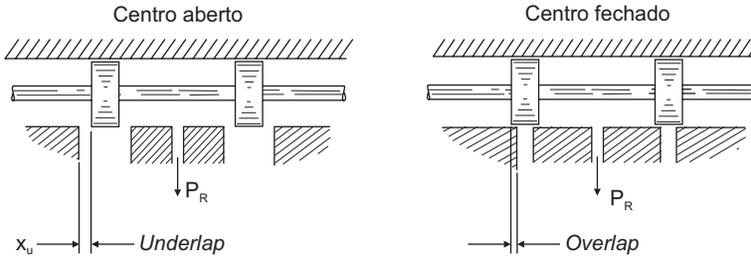


Figura 9.31 Válvulas de centro aberto e centro fechado.

As válvulas do tipo centro fechado têm uma “zona morta” que é indesejável em controle e, por esta razão, as válvulas de centro aberto são preferidas em certas aplicações. Nesta modelagem a válvula considerada é a do tipo centro aberto, com orifícios iguais e simétricos, o que significa que os coeficientes dos quatro orifícios são idênticos, que denominamos de K_V . Nestas condições, com a válvula de centro aberto na sua posição neutra, as pressões dos cilindros P_E e P_D tornam-se idênticas, iguais à metade da pressão P_S . Isto ocorre pelo fato de a vazão que entra na câmara do cilindro esquerdo, por exemplo, ser proporcional a $(P_S - P_E)^{1/2}$ e a vazão que sai desta câmara ser proporcional a $(P_E - P_R)^{1/2}$. Como na prática a pressão de retorno é desprezível, $P_R \approx 0$, então:

$$K_V x_u \sqrt{P_S - P_E} = K_V x_u \sqrt{P_E - P_R} \quad (9.136)$$

em que x_u é a abertura do orifício da válvula quando $x_V = 0$.

Logo:

$$P_E = \frac{P_S}{2} \quad (9.137)$$

Conforme foi dito, considerando orifícios iguais e simétricos, a mesma relação ocorrerá na câmara da direita para P_D , isto é:

$$P_D = \frac{P_S}{2} \quad (9.138)$$

A condição assim descrita será tomada como sendo o ponto de operação, e a análise de perturbação será desenvolvida ao redor deste ponto. Note que no ponto de operação Q_L é zero porque as pressões P_E e P_D são iguais.

Agora, variando a entrada do sistema, vamos supor que o carretel da válvula seja movido a pequena distância x_V para a direita, a partir da sua posição neutra, tal

que x_v seja menor que x_u ($x_v < x_u$). Apesar de esta análise estar restrita a movimentos do carretel menores que x_u , indicando uma limitação da modelagem, ainda podemos obter muitas informações do sistema.

Se o carretel se move conforme descrito, a vazão Q_1 que entra na câmara esquerda do cilindro aumenta, enquanto a vazão Q_2 que sai desta câmara diminui. O oposto ocorre com a câmara da direita. Portanto, há um saldo positivo de vazão que entra na câmara esquerda e esta moverá o pistão para a direita.

O saldo de vazão Q_{VE} , produzido pela válvula, que entra na câmara esquerda é dado por:

$$Q_{VE} = Q_1 - Q_2 \quad (9.139)$$

ou

$$Q_{VE} = \left[K_V (x_u + x_v) \sqrt{P_S - P_E} \right] - \left[K_V (x_u - x_v) \sqrt{P_E - P_R} \right] \quad (9.140)$$

Considerando o valor de P_R desprezível, então:

$$Q_{VE} = K_V (x_u + x_v) \sqrt{P_S - P_E} - K_V (x_u - x_v) \sqrt{P_E} \quad (9.141)$$

Linearizando a equação 9.141 ao redor do ponto de equilíbrio $P_E = \frac{P_S}{2}$ e $x_v = 0$, sendo:

$Q_{VEo} \triangleq$ valor de Q_{VE} no ponto de operação (que é igual a *zero*); e

$Q_{VEp} \triangleq$ valor de perturbação de Q_{VE} ao redor Q_{VEo} .

Então:

$$Q_{VE} = 0 + \left. \frac{\partial Q_{VE}}{\partial x_v} \right|_{0, \frac{P_S}{2}} x_{vp} + \left. \frac{\partial Q_{VE}}{\partial P_E} \right|_{0, \frac{P_S}{2}} P_{Ep} \quad (9.142)$$

em que o subscrito “o” indica o valor da variável no ponto de operação e o subscrito “p” indica a perturbação da respectiva variável ao redor do ponto de operação.

Calculando a primeira derivada obtemos:

$$\left. \frac{\partial Q_{VE}}{\partial x_v} \right|_{0, \frac{P_S}{2}} = \left[K_V \sqrt{P_S - P_E} + K_V \sqrt{P_E} \right]_{0, \frac{P_S}{2}} = K_V \sqrt{\frac{P_S}{2}} + K_V \sqrt{\frac{P_S}{2}} = 2 K_V \sqrt{\frac{P_S}{2}} \quad (9.143)$$

Então, definimos o coeficiente C_x como sendo:

$$\left. \frac{\partial Q_{VE}}{\partial x_v} \right|_{0, \frac{P_S}{2}} = \sqrt{2} K_V \sqrt{P_S} \triangleq C_x$$

Para a outra derivada:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial Q_{VE}}{\partial P_E} \right|_{0; \frac{P_s}{2}} &= \left[K_V (x_u + x_v) \frac{1}{2} (P_S - P_E)^{-1/2} (-1) - K_V (x_u - x_v) \frac{1}{2} (P_E)^{-1/2} \right] \Big|_{0; \frac{P_s}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} K_V x_u \left(P_S - \frac{P_S}{2} \right)^{-1/2} - \frac{1}{2} K_V x_u \left(\frac{P_S}{2} \right)^{-1/2} = -\frac{K_V x_u}{\sqrt{P_S/2}} \end{aligned} \quad (9.144)$$

Então, definimos o coeficiente C_p (positivo) como sendo:

$$\left. \frac{\partial Q_{VE}}{\partial P_E} \right|_{0; \frac{P_s}{2}} = -\sqrt{2} \frac{K_V x_u}{\sqrt{P_S}} \stackrel{\Delta}{=} -C_p$$

Substituindo C_x e C_p na (9.142) obtemos:

$$Q_{VE} = Q_{VEp} = C_x x_{Vp} - C_p P_{Ep} \quad (9.145)$$

Agora, equacionando para a câmara direita, o saldo de vazão Q_{VD} , produzido pela válvula, que entra nesta câmara é dado por:

$$Q_{VD} = Q_3 - Q_4 \quad (9.146)$$

ou

$$Q_{VD} = \left[K_V (x_u - x_v) \sqrt{P_S - P_D} \right] - \left[K_V (x_u + x_v) \sqrt{P_D - P_R} \right] \quad (9.147)$$

Linearizando:

$$Q_{VD} = 0 + \left. \frac{\partial Q_{VD}}{\partial x_V} \right|_{0; \frac{P_s}{2}} x_{Vp} + \left. \frac{\partial Q_{VD}}{\partial P_D} \right|_{0; \frac{P_s}{2}} P_{Dp} \quad (9.148)$$

Calculando a primeira derivada obtemos:

$$\left. \frac{\partial Q_{VD}}{\partial x_V} \right|_{0; \frac{P_s}{2}} = -K_V \sqrt{P_S - P_D} \Big|_{0; \frac{P_s}{2}} - K_V \sqrt{P_D} \Big|_{0; \frac{P_s}{2}} = -\sqrt{2} K_V \sqrt{P_S} \quad (9.149)$$

Logo:

$$\left. \frac{\partial Q_{VD}}{\partial x_V} \right|_{0; \frac{P_s}{2}} = -\sqrt{2} K_V \sqrt{P_S} = -C_x \quad (9.150)$$

Desenvolvendo a outra derivada:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial Q_{VD}}{\partial P_D} \right|_{0; \frac{P_s}{2}} &= \left[-K_V (x_u - x_v) \frac{1}{2} (P_S - P_D)^{-1/2} - K_V (x_u + x_v) \frac{1}{2} (P_D)^{-1/2} \right]_{0; \frac{P_s}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} K_V x_u \left(\frac{P_S}{2} \right)^{-1/2} - \frac{1}{2} K_V x_u \left(\frac{P_S}{2} \right)^{-1/2} = -K_V x_u \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{P_S}} \end{aligned} \quad (9.151)$$

que é igual ao coeficiente C_p , ou seja:

$$\left. \frac{\partial Q_{VD}}{\partial P_D} \right|_{0; \frac{P_s}{2}} = -\sqrt{2} K_V x_u \frac{1}{\sqrt{P_S}} = -C_p \quad (9.152)$$

Combinando as equações 9.148, 9.150 e 9.152 resulta:

$$Q_{VD} = Q_{VDp} = -C_x x_{vp} - C_p P_{Dp} \quad (9.153)$$

Agora, aplicando a Lei da Conservação da Massa, combinada com a função de estado da massa específica, equação 9.63, aos volumes dos lados esquerdo e direito do cilindro, obtemos:

$$Q_{VEo} + Q_{VEp} - Q_{Lo} - Q_{Lp} = A_p \frac{dx_{pp}}{dt} + \frac{V}{\beta} \frac{dP_{Ep}}{dt} \quad (9.154)$$

$$Q_{VD0} + Q_{VDp} + Q_{Lo} + Q_{Lp} = -A_p \frac{dx_{pp}}{dt} + \frac{V}{\beta} \frac{dP_{Dp}}{dt} \quad (9.155)$$

em que β é o *Bulk Modulus*.

Como no ponto de operação Q_{VEo} , Q_{VD0} e Q_{Lo} são nulos, e $P_{Eo} = P_{D0}$, então substituindo (9.135), (9.145) e (9.153) em (9.154) e (9.155) vem:

$$C_x x_{vp} - C_p P_{Ep} - K_L P_{Ep} + K_L P_{Dp} = A_p \frac{dx_{pp}}{dt} + \frac{V}{\beta} \frac{dP_{Ep}}{dt} \quad (9.156)$$

$$-C_x x_{vp} - C_p P_{Dp} + K_L P_{Ep} - K_L P_{Dp} = -A_p \frac{dx_{pp}}{dt} + \frac{V}{\beta} \frac{dP_{Dp}}{dt} \quad (9.157)$$

Ordenando e fazendo a Transformada de Laplace, considerando as condições iniciais já enunciadas, obtemos:

$$[A_p s] X_{Pp} + \left[\frac{V}{\beta} s + (K_L + C_p) \right] P_{Ep} - [K_L] P_{Dp} = C_x X_{Vp} \quad (9.158)$$

$$[A_p s] X_{Pp} + [K_L] P_{Ep} - \left[\frac{V}{\beta} s + (K_L + C_p) \right] P_{Dp} = C_x X_{Vp} \quad (9.159)$$

que são duas equações do modelo.

Agora, aplicando a Lei de Newton à massa M , vem:

$$A_p (P_{Ep} - P_{Dp}) - B \dot{x}_{Pp} = M \ddot{x}_{Pp} \quad (9.160)$$

ou

$$[M s^2 + B s] X_{Pp} - [A_p] P_{Ep} + [A_p] P_{Dp} = 0 \quad (9.161)$$

que é a terceira equação do modelo.

Organizando (9.158), (9.159) e (9.161) na forma de matriz, obtemos:

$$\begin{bmatrix} A_p s & \frac{V}{\beta} s + K_L + C_p & -K_L \\ A_p s & K_L & -\left(\frac{V}{\beta} s + K_L + C_p \right) \\ M s^2 + B s & -A_p & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{Pp} \\ P_{Ep} \\ P_{Dp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x X_{Vp} \\ C_x X_{Vp} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.162)$$

Aplicando Cramer para determinarmos $X_{Pp}(s)$ vem:

$$X_{Pp}(s) = \frac{\begin{vmatrix} C_x X_{Vp} & \frac{V}{\beta} s + K_L + C_p & -K_L \\ C_x X_{Vp} & K_L & -\left(\frac{V}{\beta} s + K_L + C_p \right) \\ 0 & -A_p & A_p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_p s & \frac{V}{\beta} s + K_L + C_p & -K_L \\ A_p s & K_L & -\left(\frac{V}{\beta} s + K_L + C_p \right) \\ M s^2 + B s & -A_p & A_p \end{vmatrix}} \quad (9.163)$$

ou

$$X_{Pp}(s) = \frac{2C_x A_p \left[\frac{V}{\beta} s + C_p \right] X_{Vp}}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s} \quad (9.164)$$

em que:

$$a_4 \triangleq \left[M \frac{V^2}{\beta^2} \right]$$

$$a_3 \triangleq \left[B \frac{V^2}{\beta^2} + 2M \frac{V}{\beta} (K_L + C_p) \right]$$

$$a_2 \triangleq \left[MC_p^2 + 2B \frac{V}{\beta} (K_L + C_p) + 2MC_p K_L + 2A_p^2 \frac{V}{\beta} \right]$$

$$a_1 \triangleq \left[C_p^2 B + 2K_L C_p B + 2A_p^2 C_p \right]$$

Dividindo o numerador e o denominador da (9.164) por $\left(\frac{V}{\beta} s + C_p \right)$ resulta:

$$\frac{X_{Pp}(s)}{X_{Vp}} = \frac{+2C_x A_p}{\left(M \frac{V}{\beta} s^3 + \left(B \frac{V}{\beta} + 2MK_L + MC_p \right) s^2 + (2BK_L + BC_p + 2A_p^2) s \right)} \quad (9.165)$$

que resulta:

$$\frac{X_{Pp}(s)}{X_{Vp}} = \frac{(2C_x A_p) / \left[2A_p^2 + B(2K_L + C_p) \right]}{s \left[\left[\frac{MV}{\beta [2A_p^2 + B(2K_L + C_p)]} \right] s^2 + \left[\frac{BV + \beta M(2K_L + C_p)}{\beta [2A_p^2 + B(2K_L + C_p)]} \right] s + 1 \right]} \quad (9.166)$$

Definindo:

$$K \triangleq \frac{2C_x A_p}{2A_p^2 + B(2K_L + C_p)}; \text{ ganho integral (unidade: [1/seg])};$$

$$\omega_n \triangleq \sqrt{\frac{\beta [2A_p^2 + B(2K_L + C_p)]}{MV}}; \text{ frequência natural não-amortecida, [(rad/seg)];}$$

$$\zeta \triangleq \frac{BV + \beta M(2K_L + C_p)}{2\sqrt{MV\beta [2A_p^2 + B(2K_L + C_p)]}}; \text{ fator de amortecimento.}$$

Então, substituindo estes parâmetros na (9.166) vem:

$$\frac{X_{pp}(s)}{X_{vp}(s)} = \frac{K}{s \left[\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1 \right]} \quad (9.167)$$

que é a função de transferência pedida.

A equação 9.167 mostra que a função de transferência é um sistema de segunda ordem combinado com um integrador. A integração já era esperada, pois observando a Figura 9.30 vemos que se x_v for um degrau, x_p cresce linearmente (rampa), é claro, dentro dos limites do sistema.

9.2.6 – EXEMPLO Nº 7: MODELAGEM DINÂMICA DE UMA BOMBA AUTOCOMPENSADA POR PRESSÃO, TIPO PROPORCIONAL

a) Princípio de operação na condição de regime

A Figura 9.32 mostra um esquema da bomba de palhetas com compensação por pressão, tipo proporcional, para auxiliar a explicação do princípio de operação na condição de regime. Os componentes que geram vazão são: o rotor, as palhetas e o anel. A mola entre a carcaça e o anel tem a função de aplicar uma força sobre o anel com o objetivo de deslocá-lo até uma posição excêntrica em relação ao rotor. Com o giro do rotor, as extremidades das palhetas seguem a excentricidade do anel. Uma abertura lateral para a entrada de óleo na bomba está localizada na região em que os volumes entre as palhetas aumentam com o giro do rotor, causando sucção do óleo para dentro destes espaços. Continuando com o giro do rotor, estas porções de óleo são transportadas para a abertura lateral da saída e, como nesta região o volume entre as palhetas é decrescente, o fluido é forçado a sair da bomba para o circuito.

Para mudar o deslocamento da bomba e, conseqüentemente, a vazão de saída da bomba, a excentricidade do anel pode ser mudada desde o seu máximo valor, correspondendo à máxima vazão, até a posição concêntrica que corresponde à vazão *zero*. Quando o anel está concêntrico, os volumes entre as palhetas são todos iguais, e isto proporciona vazão *nula*.

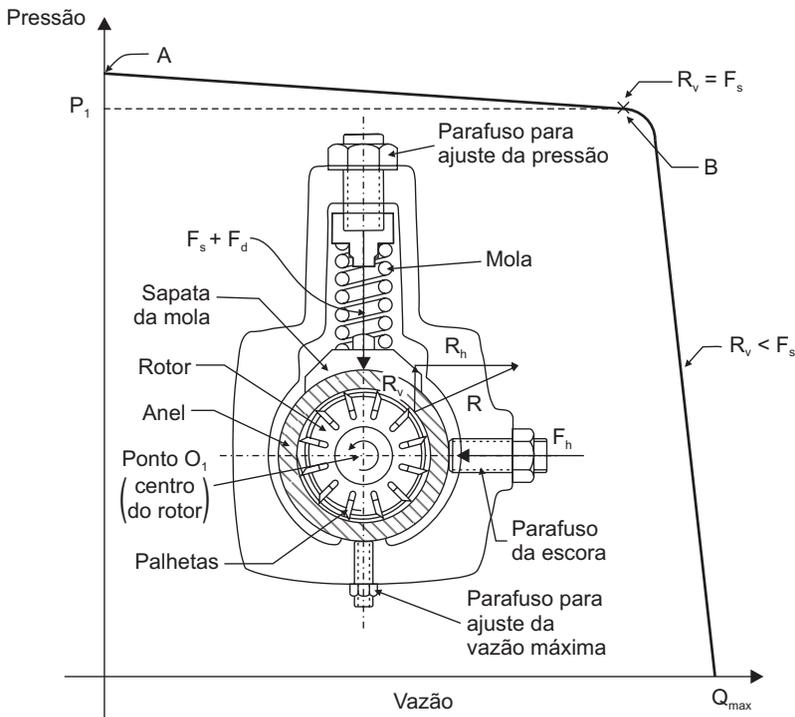


Figura 9.32 Esquema da Bomba de palhetas compensada por pressão, tipo proporcional.

A força da mola que atua sobre o anel determina o valor da pressão máxima do sistema. Se a carga externa sobre o sistema hidráulico aumenta, a bomba percebe esta mudança através do aumento da pressão de saída que atua sobre o anel. Em termos do diagrama de forças, a Figura 9.32 mostra a força R , resultante das forças em decorrência da pressão do óleo sobre o anel e as forças de equilíbrio F_b , F_s e F_d . A força R sobre o anel tem as componentes R_h e R_v .

O parafuso de escora é fixo e gera a força estabilizadora horizontal F_b . F_s é a força de pré-carga da mola que mantém o anel na máxima excentricidade até que a força vertical da pressão R_v se iguale a F_s . Na região entre os pontos B e Q_{max} (vide a curva da pressão contra a vazão na Figura 9.32), a bomba opera com o máximo deslocamento teórico, pois o anel não se move em consequência de a força sobre o anel R_v ser menor que a pré-carga da mola F_s .

Quando a saída é totalmente aberta, a pressão de operação é quase igual à pressão atmosférica e o valor da vazão fica próximo de Q_{max} . Nesta situação a força R_v é aproximadamente zero. Partindo da condição do ponto de Q_{max} , se a saída for levemente fechada, a pressão aumenta um pouco e isto provoca:

- (i) diminuição da vazão real pelo aumento do vazamento interno (escoamento da saída para a entrada, dentro da bomba, através das folgas entre as peças); e
- (ii) a força R_v assume valor pouco maior.

Continuando a fechar vagarosamente a saída da bomba, o ponto de operação mudará lentamente de Q_{max} até o ponto **B**, Figura 9.32. Nesta região, entre Q_{max} e **B**, apesar de a bomba operar com o seu deslocamento máximo, a vazão real não tem o valor constante Q_{max} por conta do aumento do vazamento interno em função da pressão.

Quando a pressão do sistema for maior que P_I , Figura 9.32, a força vertical R_v será maior que F_s . Este fato faz o anel comprimir a mola e mudar para uma posição onde a força da mola $F_d + F_s$ torna-se igual a R_v . Nesta região de operação, em que $R_v = F_d + F_s$, o movimento do anel faz a bomba variar o seu deslocamento de tal forma que a pressão de saída da bomba venha a permanecer em um valor relativamente constante.

O diagrama de blocos na Figura 9.33 ilustra o princípio de operação da bomba compensada por pressão e deixa claro que é um sistema com realimentação.

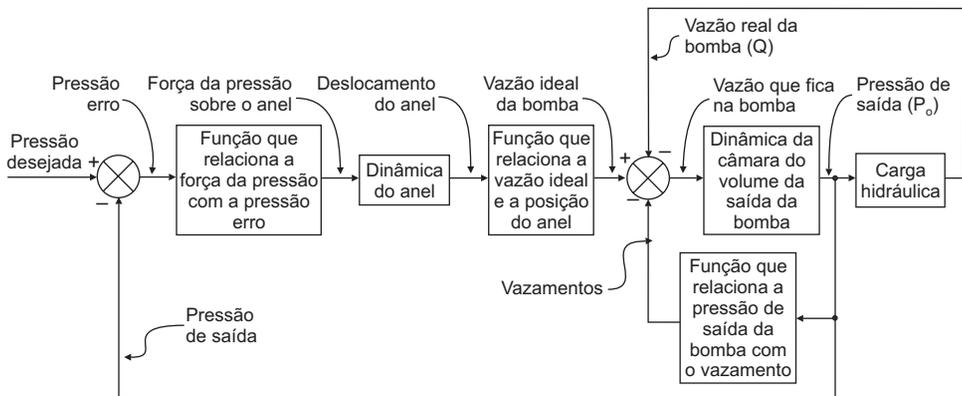


Figura 9.33 Diagrama funcional para a bomba compensada por pressão, com controle tipo proporcional.

b) Proposição

Neste exemplo pretendemos atingir alguns objetivos, que são:

1. Obter um modelo não-linear da bomba usando variáveis de perturbação e elaborar o diagrama de blocos do respectivo modelo.
2. Partindo do modelo não-linear, obter um modelo aproximado linear e fazer a análise de estabilidade.
3. Estudar o sistema considerando como entrada o distúrbio, vazão Q da carga, e como saída a pressão de saída da bomba P_o .

c) Modelo dinâmico

Quando esta modelagem foi desenvolvida, foram realizadas em paralelo investigações experimentais para fundamentar as considerações e hipóteses. Uma seqüência de fatos e tarefas foram ocorrendo naturalmente, mas, se esquematizados, concretizam o diagrama da Figura 9.33.

O modelo pretendido é não-linear, por esta razão, usamos o operador “*D*”, pois a Transformada de Laplace não pode ser aplicada.

A aplicação da Lei de Newton ao anel (Figura 9.34) resulta:

$$\sum(\text{forças verticais}) = M D^2 e \tag{9.168}$$

$$\sum(\text{forças horizontais}) = 0 \tag{9.169}$$

em que:

$M \triangleq$ massa das partes móveis que têm movimento na direção vertical.

$e \triangleq$ deslocamento do anel em relação ao centro do rotor.

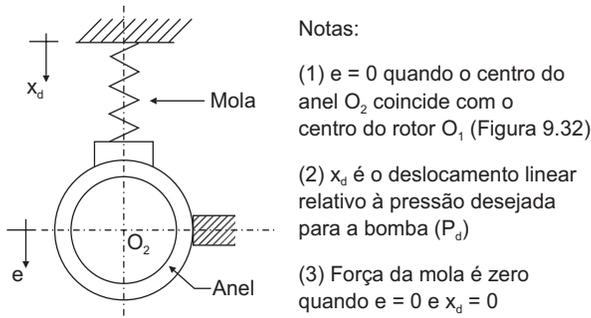


Figura 9.34 Sistema massa-mola.

As forças sobre o anel podem ser identificadas como sendo:

$F_{sp} \triangleq$ força da mola;

R_v e $R_h \triangleq$ componente vertical e horizontal da força R , respectivamente, causada pela pressão do óleo sobre o anel e sobre a base das palhetas (pressões nas ranhuras do rotor);

$F_{pe} \triangleq$ resultante da força da pressão que existe na carcaça da bomba (pressão de dreno) sobre a superfície externa do anel;

$F_h \triangleq$ força horizontal do parafuso de apoio;

$F_{vR} \triangleq$ forças radiais das palhetas em razão da inércia das palhetas;

$F_{vT} \triangleq$ forças tangenciais das palhetas;

$F_{sr} \triangleq$ forças de cisalhamento do óleo sobre a superfície interna do anel;

$F_f \triangleq$ força de atrito seco na direção vertical;

$F_{vf} \triangleq$ força vertical de atrito viscoso, considerada como sendo proporcional à velocidade do anel.

A equação 9.169 mostra que as forças horizontais estão em equilíbrio, então, observando somente as forças na direção vertical, resulta:

$$F_{sp} - R_v + F_{pev} + F_{vRv} + F_{vTv} + F_{srv} + F_f + F_{vf} = MD^2 e \quad (9.170)$$

em que F_{pev} , F_{vRv} , F_{vTv} e F_{srv} são, respectivamente, as componentes verticais de F_{pe} , F_{vR} , F_{vT} e F_{sr} .

Considerando que os efeitos de F_{pev} , F_{vRv} , F_{vTv} e F_{srv} são desprezíveis, a equação 9.170 fica:

$$F_{sp} - R_v + F_f + F_{vf} = MD^2 e \quad (9.171)$$

Os termos da equação 9.171 podem ser desenvolvidos da seguinte forma:

(i) F_{sp} :

$$F_{sp} = -K_{sp} (e - x_d) \quad (9.172)$$

em que consideramos mola ideal e K_{sp} constante.

(ii) R_v :

$$R_v \cong K_{pv} (P_o - P_i) \quad (9.173)$$

em que:

$P_o \triangleq$ pressão na câmara de saída da bomba;

$P_i \triangleq$ pressão na câmara de entrada da bomba.

Experimentos mostram que a relação entre ΔP e R_v é não-linear. O coeficiente K_{pv} é função de P_o e da excentricidade e , isto é:

$$K_{pv} = K_{pv} (P_o, e); \text{ (função de } P_o \text{ e } e) \quad (9.174)$$

(iii) F_f :

Dados experimentais mostram que F_f é uma função de P_o , da excentricidade e e do sinal da velocidade \dot{e} .

$$F_f = F_f(P_o, e, \dot{e}); \text{ (função de } P_o, e \text{ e } \dot{e}) \quad (9.175)$$

(iv) F_{vf} :

$$F_{vf} = -B_{vf}(D e) \quad (9.176)$$

em que:

$B_{vf} \triangleq$ coeficiente da força de atrito viscoso. É considerado constante para um dado óleo e uma temperatura constante.

Voltando à equação 9.171 e substituindo estas forças resulta:

$$-K_{sp}(e - x_d) - K_{pv}(P_o - P_i) + F_f - B_{vf}D e = M D^2 e \quad (9.177)$$

que pode ser reescrita:

$$-K_{pv}(P_o - P_i) + F_f + K_{sp}x_d = K_{sp} \left[\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} D + 1 \right] e \quad (9.178)$$

em que:

$\omega_n \triangleq \sqrt{K_{sp}/M}$; frequência natural não-amortecida da mola-anel;

$\zeta \triangleq \frac{B_{vf}}{2\sqrt{K_{sp}M}}$; fator de amortecimento.

Na condição de equilíbrio, considerando $e = 0$ e também $F_f = 0$, temos, sob o ponto de vista de controle:

$$P_o|_{e=0} = P_d \quad (9.179)$$

em que:

$P_d \triangleq$ pressão desejada (entrada do sistema de controle).

Sabemos que na prática $P_i \approx 0$, então, na condição de equilíbrio, a equação 9.178 fica:

$$-K_{pv}P_o|_{e=0} + K_{sp}x_d = 0 \quad (9.180)$$

Combinando as equações 9.179 e 9.180 vem:

$$\frac{K_{sp}}{K_{pv}} x_d = P_d \quad (9.181)$$

Agora, para outras condições, consideramos:

$$P_e = P_d - P_o \quad (9.182)$$

em que:

$P_e \triangleq$ pressão erro.

Então, substituindo (9.181) e (9.182) em (9.178), obtemos:

$$-K_{pv}(P_o) + F_f + K_{sp} \left(\frac{K_{pv}}{K_{sp}} P_d \right) = K_{sp} \left[\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} D + I \right] e \quad (9.183)$$

ou

$$K_{pv} P_e + F_f = K_{sp} \left[\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} D + I \right] e \quad (9.184)$$

que resulta:

$$\left[K_{pv} P_e + F_f \right] \frac{1/K_{sp}}{\left[\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} D + I \right]} = e \quad (9.185)$$

Representando as equações 9.181, 9.182 e 9.185 na forma de diagrama de blocos obtemos a Figura 9.35.

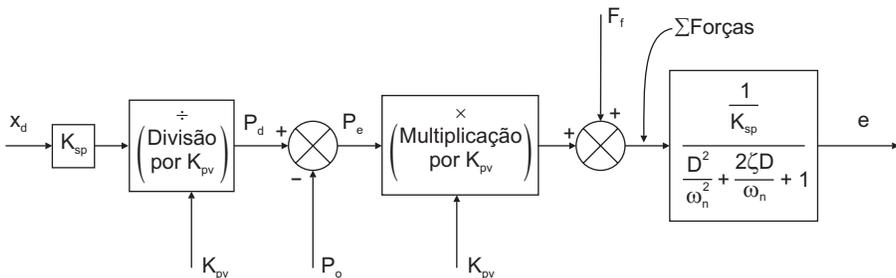


Figura 9.35 Equações 9.181, 9.182 e 9.185 na forma de diagrama de blocos.

Agora, vamos considerar as vazões. Se o valor de e for conhecido, a determinação da vazão teórica da bomba (vide equação 9.64) pode ser encontrada através da equação:

$$Q_{th} = ND_{th} \triangleq NK_e e \quad (9.186)$$

em que:

$K_e \triangleq$ coeficiente constante que relaciona o deslocamento teórico da bomba e a excentricidade e ;

$N \triangleq$ rotação da bomba.

Aplicando a Lei da Conservação da Massa, combinada com a função de estado da massa específica, equação 9.63, ao volume da câmara de saída da bomba, obtemos:

$$Q_{th} - Q - K_{lk1}(P_o - P_c) - K_{lk2}(P_o - P_i) = C_c DP_o \quad (9.187)$$

em que os vazamentos são considerados no regime laminar e as grandezas da equação 9.187 são:

$Q \triangleq$ vazão real que sai da bomba;

$K_{lk1} \triangleq$ coeficiente de vazamento da câmara sob P_o para a carcaça da bomba sob P_c .

$P_c \triangleq$ pressão na carcaça da bomba, considerada uniforme (pressão do dreno).

$K_{lk2} \triangleq$ coeficiente de vazamento entre as câmaras de saída e entrada da bomba.

$C_c \triangleq \frac{V_{po}}{\beta_e} \triangleq$ “compliance” relativa ao volume V_{po} sob pressão P_o , considerada

constante para um ponto de operação. O *Bulk Modulus* efetivo β_e é também considerado constante.

Se as variações de P_p , N e P_c são desprezíveis e, considerando variáveis de perturbação, as equações 9.178, 9.186 e 9.187 podem ser reescritas como sendo:

$$-K_{pv} P_{op} + F_f + K_{sp} x_{dp} = K_{sp} \left[\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} D + I \right] e_p \quad (9.188)$$

$$Q_{thp} = NK_e e_p \quad (9.189)$$

$$Q_{thp} - Q_p - K_{lk} P_{op} = C_c DP_{op} \quad (9.190)$$

em que P_{op} , x_{dp} , e_p , Q_{thp} e Q_p são, respectivamente, valores de perturbação de P_o , x_d , e , Q_{th} e Q , sendo o coeficiente K_{lk} :

$$K_{lk} \triangleq K_{lk1} + K_{lk2}$$

De acordo com a explicação descrita no item *a* desta modelagem, com a bomba na condição quase-estática podemos conceitualmente perceber que, se a mola for “macia” (baixo K_{sp}), a regulação da pressão é melhor porque a linha entre os pontos *A* e *B*, Figura 9.32, tende a ser horizontal. Contudo, sob o ponto de vista dinâmico, esta recomendação tem de ser analisada. Ambos os parâmetros, a frequência natural ω_n e o ganho da malha aberta do sistema, são funções de K_{sp} . O ganho da malha aberta é inversamente proporcional a K_{sp} e ω_n diminui para molas “macias”, portanto, uma mola muito macia pode causar instabilidade.

Se a força de atrito seco F_f for desprezada, a vazão Q_p for zero e o coeficiente K_{pv} , constante, o diagrama de blocos da Figura 9.36 fica reduzido à Figura 9.37.

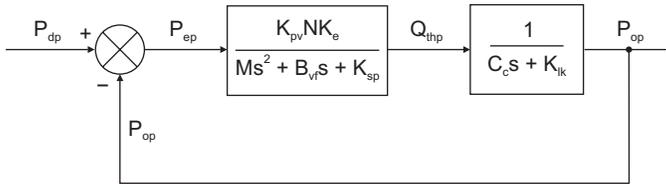


Figura 9.37 Diagrama de blocos do modelo linearizado.

Assim, a função de transferência $\frac{P_{op}}{P_{dp}}(s)$ pode ser escrita diretamente deste diagrama de blocos.

$$\frac{P_{op}}{P_{dp}}(s) = \frac{K_{pv} N K_e}{(Ms^2 + B_{vf}s + K_{sp})(C_c s + K_{lk}) + K_{pv} N K_e} \quad (9.191)$$

ou:

$$\frac{P_{op}}{P_{dp}}(s) = \frac{K_{pv} N K_e}{(K_{pv} N K_e + K_{sp} K_{lk})} \left[\frac{M C_c}{K_{pv} N K_e + K_{sp} K_{lk}} s^3 + \frac{(B_{vf} C_c + M K_{lk})}{K_{pv} N K_e + K_{sp} K_{lk}} s^2 + \frac{(B_{vf} K_{lk} + K_{sp} C_c)}{K_{pv} N K_e + K_{sp} K_{lk}} s + 1 \right] \quad (9.192)$$

Aplicando o Critério de Estabilidade de Routh à equação característica da (9.192) obtemos a seguinte condição de estabilidade:

$$(B_{vf} C_c + M K_{lk})(B_{vf} K_{lk} + K_{sp} C_c) - M C_c (K_{pv} N K_e + K_{sp} K_{lk}) > 0 \quad (9.193)$$

da qual pode ser reescrita:

$$K_{sp} C_c (B_{vf} C_c + MK_{lk} - MK_{lk}) - (MC_c K_{pv} NK_e - B_{vf}^2 C_c K_{lk} - MB_{vf} K_{lk}^2) > 0 \quad (9.194)$$

Se $B_{vf} C_c^2 \neq 0$, então:

$$K_{sp} > \frac{MC_c K_{pv} NK_e - B_{vf}^2 C_c K_{lk} - MB_{vf} K_{lk}^2}{B_{vf} C_c^2} \quad (9.195)$$

A equação 9.195 mostra uma relação aproximada entre a constante da mola e os outros parâmetros da bomba para satisfazer a condição de estabilidade de uma bomba compensada por pressão, com controle do tipo proporcional.

e) Análise de distúrbio

Quando uma bomba autocompensada por pressão com controle do tipo proporcional está em condições normais de trabalho, a entrada desejada do sistema (x_d ou P_d) é geralmente mantida constante. A dinâmica da bomba é então exercitada pela entrada distúrbio Q_d de acordo com a demanda que o sistema conectado solicita da bomba. Portanto, sob o ponto de vista de utilização prática, a função de transferência $\frac{P_o}{Q}(s)$ torna-se importante.

Se a força de atrito seco F_f for desprezada, o valor de x_{dp} considerado *zero* e o coeficiente K_{pv} constante, o diagrama da Figura 9.36 é reduzido ao ilustrado na Figura 9.38.

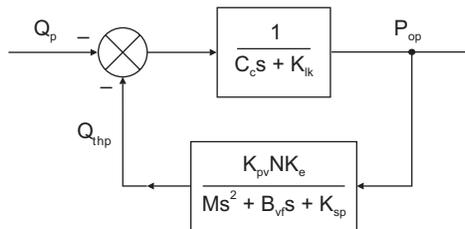


Figura 9.38 Diagrama de blocos do modelo linearizado da bomba, considerando a variável de distúrbio Q_p como entrada.

A função de transferência $\frac{P_{op}}{Q_p}(s)$ é então obtida diretamente deste diagrama de blocos.

$$\frac{P_{op}}{Q_p}(s) = \frac{-(M s^2 + B_{vf} s + K_{sp})}{(MC_c) s^3 + (B_{vf} C_c + MK_{lk}) s^2 + (B_{vf} K_{lk} + K_{sp} C_c) s + (K_{pv} NK_e + K_{sp} K_{lk})} \quad (9.196)$$

Mudando a forma da equação 9.196 obtemos:

$$\frac{P_{op}}{Q_p}(s) = \frac{\frac{-K_{sp}}{K_{pv}NK_e + K_{sp}K_{lk}} \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1 \right)}{\left[\frac{MC_c}{K_{pv}NK_e + K_{sp}K_{lk}} \right] s^3 + \left[\frac{B_{vf}C_c + MK_{lk}}{K_{pv}NK_e + K_{sp}K_{lk}} \right] s^2 + \left[\frac{B_{vf}K_{lk} + K_{sp}C_c}{K_{pv}NK_e + K_{sp}K_{lk}} \right] s + 1} \quad (9.197)$$

que é a função de transferência do sistema considerando como entrada a vazão distúrbio $Q_p(s)$

Podemos ampliar nosso estudo observando a variação de $P_{op}(s)$ em função da vazão distúrbio $Q_p(s)$, na condição quase-estática. Assim, da (9.197) vem:

$$P_{ops}(s) = \frac{-K_{sp}}{K_{pv}NK_e + K_{sp}K_{lk}} Q_{ps}(s) \quad (9.198)$$

em que:

$P_{ops} \triangleq$ variação quase-estática de P_{op} ;

$Q_{ps} \triangleq$ variação quase-estática de Q_p .

Da equação 9.198 podemos observar que P_{ops} é uma função linear de Q_{ps} , com inclinação negativa, conforme ilustra a Figura 9.39.

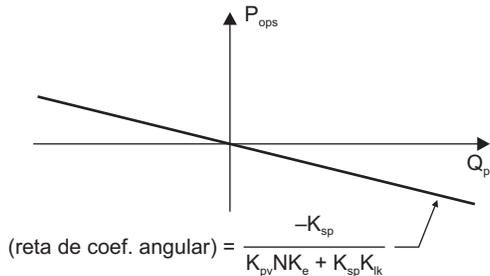


Figura 9.39 Gráfico mostrando a variação de P_{ops} em função de Q_{ps} .

O resultado acima sugere que, quanto menor for o coeficiente K_{sp} , melhor será a bomba sob o ponto de vista de erro estático. Entretanto, tal como foi dito anteriormente, deve existir um compromisso entre o erro estático e a estabilidade, equação 9.195.

É importante observar que esta análise de sistema linear foi desenvolvida considerando K_{pv} constante.

Experimentos mostram que K_{pv} é função da excentricidade e e do valor da pressão de saída da bomba P_o . Por conta dessa característica de K_{pv} é possível observar experimentalmente, para uma mesma bomba, três tipos de inclinações: horizontal, positiva e negativa, dependendo do valor da pressão de operação.

9.3 – SISTEMAS PNEUMÁTICOS

9.3.1 – EXEMPLO Nº 8: MODELAGEM DINÂMICA DE UM TRANSDUTOR DE DESLOCAMENTO PARA PRESSÃO

a) Introdução

O sistema bocal–anteparo (*nozzle-flapper*) é amplamente utilizado em pneumática e hidráulica para transformar pequenos deslocamentos em pressão. Movimentos muito pequenos, da ordem de 0,0003 mm, podem ser detectados através deste dispositivo. A capacidade de efetuar a medição sem contato representa também importante característica do sistema. Algumas aplicações são estritamente voltadas para medição, por exemplo, em Controle de Qualidade, enquanto em outras o sinal de pressão é diretamente usado para realizar a realimentação em sistemas de controle. Quase todos os componentes pneumáticos existentes no mercado contêm internamente um ou mais conjuntos bocal–anteparo (*nozzle-flapper*). Em razão do uso intenso deste dispositivo, a sua modelagem torna-se importante.

b) Proposição

O estudo aqui apresentado está desenvolvido para o ar como fluido, conforme mostra o esquema da Figura 9.40.

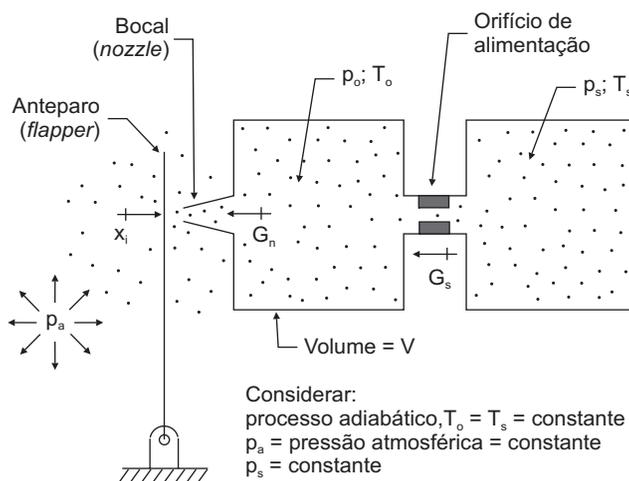


Figura 9.40 Esquema do transdutor de deslocamento-para-pressão.

O objetivo é determinar a função de transferência considerando como saída a pressão p_o e como entrada o deslocamento x_i .

c) Modelagem dinâmica

Observando conceitualmente o funcionamento do sistema da Figura 9.40, quando o anteparo (*flapper*) é deslocado para a direita e fecha completamente o bocal, a pressão de saída (*output*) p_o aumenta até se igualar à pressão constante de alimentação p_s . Se o anteparo for deslocado a uma grande distância para a esquerda, deixando o bocal amplamente aberto, então p_o abaixará, tendendo a se igualar a p_a . Na verdade, p_o será sempre um pouco maior que p_a , mas se o diâmetro do bocal for muito maior que o diâmetro do orifício de alimentação (Figura 9.40), então o valor de p_o ficará muito próximo ao de p_a , quando o bocal estiver completamente aberto. Desta forma, entre as condições de completamente fechado e completamente aberto, a pressão p_o é controlada pela posição x_i do anteparo. Experimentos mostram que apenas alguns milésimos de milímetros de variação em x_i causam variação relativamente grande em p_o , resultando em alta sensibilidade do transdutor deslocamento-para-pressão. Entretanto, uma brusca mudança em x_i não será acompanhada instantaneamente por p_o , pois é necessário certo tempo para que o volume V seja carregado ou descarregado até atingir o novo nível de pressão.

O dispositivo bocal-anteparo (*nozzle-flapper*) é não-linear, e isto significa que a sua sensibilidade é variável. Estudos mostram que a sensibilidade mais alta ocorre no ponto $x_i = 0,14 \frac{d_s^2}{d_n}$, em que d_s é o diâmetro do orifício de alimentação e d_n é o diâmetro do bocal. Neste ponto de operação a sensibilidade é dada por:

$$\text{Sensibilidade} = \frac{2,6 d_n}{d_s^2} P_s \quad (9.199)$$

Com o objetivo de obtermos um modelo linear deste sistema não-linear, a análise de perturbação é desenvolvida ao redor de um ponto de operação. Em certos controladores pneumáticos comerciais, por exemplo, o ponto médio da faixa de operação é 9 psig e a variação máxima se estende a ± 6 psig, resultando em um campo de 3 a 15 psig.

Tal como em toda análise de perturbação, no desenvolvimento da modelagem as grandezas recebem índices “o” e “p”. O índice “o” indica o valor da grandeza no seu ponto de operação e o índice “p”, o valor de perturbação da respectiva grandeza ao redor do ponto de operação.

Para obtermos a relação entre a pressão de perturbação p_{op} e o deslocamento x_{ip} é necessário aplicar a Lei da Conservação da Massa ao volume V . Antes, porém, vamos linearizar as expressões das descargas G_s e G_n .

Considerando p_s e T_s constantes, então G_s depende somente de p_o , mas esta função é não-linear. Usando a da série de Taylor truncada (equação A.37, Apêndice A) para pequenas variações de p_{op} ao redor do ponto de operação p_{oo} , então, para a descarga G_s temos:

$$G_s = G_s(p_o) \approx G_{so} + \left. \frac{dG_s}{dp_o} \right|_{p_o=p_{oo}} (p_o - p_{oo}) \quad (9.200)$$

ou:

$$G_s \approx G_{so} - K_{sf} p_{op} \quad (9.201)$$

em que K_{sf} é um coeficiente positivo dado por:

$$K_{sf} \triangleq - \left. \frac{dG_s}{dp_o} \right|_{p_o=p_{oo}}$$

A função $G_s(p_o)$ pode ser determinada teoricamente através da Mecânica dos Fluidos e Termodinâmica (com o auxílio do valor experimental do coeficiente de descarga do orifício) ou ser inteiramente determinado por meios experimentais para um dado orifício. Estão ilustrados na Figura 9.41 o aspecto geral da curva e a determinação experimental de K_{sf} .

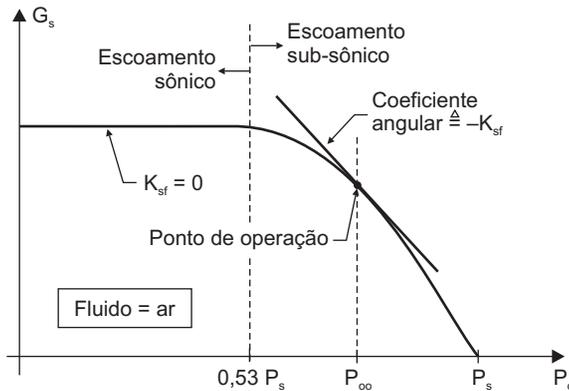


Figura 9.41 Curva de G_s contra p_o e a determinação experimental de K_{sf} .

Quanto à descarga G_n , para encontrarmos a sua equação consideramos que o ar seja um gás perfeito, que o processo de p_s, T_s para p_o, T_o não realiza trabalho e que seja um processo adiabático. Adicionalmente, a velocidade do gás no volume sob a pressão p_o é admitida como *zero*. Portanto, o gás sob p_o está essencialmente no estado de estagnação e, desde que a entalpia de estagnação para o gás perfeito, livre de trabalho no processo adiabático, é constante, a temperatura T_o é aproximadamente

a mesma de T_s ; assim, mantêm-se aproximadamente constante. Na prática realmente verificamos que as temperaturas do gás e das paredes do dispositivo estão bastante próximas da temperatura ambiente. Além disso, se eventualmente a temperatura variasse 10°C (o que não ocorre), a variação da temperatura absoluta seria um pequeno percentual. Por exemplo, mudando de 300 K para 310 K , a mudança em T_o é da ordem de $3,3\%$ e tem pequeno efeito na densidade.

Assim, considerando $T_o = T_s = \text{constante}$, G_n depende somente de p_o e de x_i . A relação entre G_n , p_o e x_i pode ser encontrada teoricamente (com correções experimentais) ou através de experimento feito para um bocal específico. A relação é não-linear e da série de Taylor (vide equação A.38, Apêndice A) obtemos:

$$G_n(p_o, x_i) \approx G_{no} + \left. \frac{\partial G_n}{\partial p_o} \right|_{p_{oo}, x_{io}} (p_o - p_{oo}) + \left. \frac{\partial G_n}{\partial x_i} \right|_{p_{oo}, x_{io}} (x_i - x_{io}) \quad (9.202)$$

ou:

$$G_n \approx G_{no} + K_{np} p_{op} - K_{nx} x_{ip} \quad (9.203)$$

em que os coeficientes K_{np} e K_{nx} são positivos e dados por:

$$K_{np} \triangleq \left. \frac{\partial G_n}{\partial p_o} \right|_{p_{oo}, x_{io}}$$

$$K_{nx} \triangleq - \left. \frac{\partial G_n}{\partial x_i} \right|_{p_{oo}, x_{io}}$$

A Figura 9.42 mostra como K_{np} e K_{nx} podem ser obtidos experimentalmente.

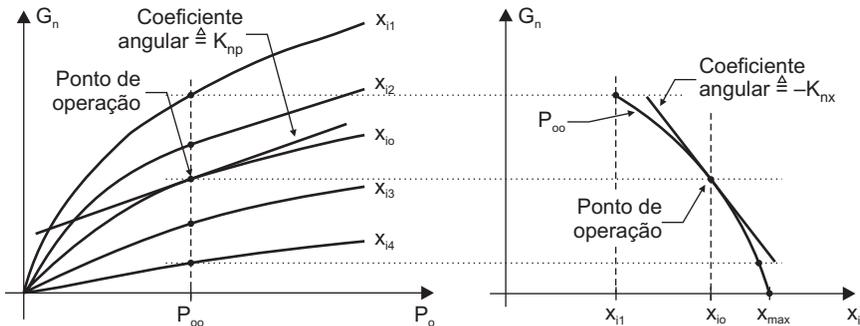


Figura 9.42 Determinação experimental de K_{np} e K_{nx} .

Na busca da relação entre M , massa “armazenada” no volume V , e a pressão p_o , utilizamos a relação de estado dos gases perfeitos. Assim:

$$p_o V = MRT_o \quad (9.204)$$

em que:

$R \triangleq$ constante do respectivo gás em particular, no caso o ar (Tabela 2.2, seção 2.4.4).

Como consideramos R , T_o e V constantes, então a (9.204) fica:

$$p_{oo} + p_{op} = \frac{RT_o}{V} (M_o + M_p) \quad (9.205)$$

Derivando (9.205) resulta:

$$\frac{V}{RT_o} \frac{dp_{op}}{dt} = \frac{dM_p}{dt} \quad (9.206)$$

Agora, aplicando a conservação da massa ao volume V , obtemos:

$$G_s - G_n = \frac{dM_p}{dt} \quad (9.207)$$

Substituindo (9.201) e (9.203) em (9.207) resulta:

$$(G_{so} - K_{sf} p_{op}) - (G_{no} + K_{np} p_{op} - K_{nx} x_{ip}) = \frac{dM_p}{dt} \quad (9.208)$$

Lembrando que no ponto de operação $G_{so} = G_{no}$ e substituindo (9.206) em (9.208), vem:

$$(-K_{sf} - K_{np}) p_{op} + K_{nx} x_{ip} = \frac{V}{RT_o} \frac{dp_{op}}{dt} \quad (9.209)$$

ou

$$\frac{V}{RT_o} \frac{dp_{op}}{dt} + (K_{sf} + K_{np}) p_{op} = K_{nx} x_{ip} \quad (9.210)$$

Aplicando a Transformada de Laplace em (9.210), para condições iniciais iguais a zero, chegamos à função de transferência:

$$\frac{P_{op}}{X_{ip}}(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (9.211)$$

em que:

$$K \triangleq \frac{K_{nx}}{K_{sf} + K_{np}}; \text{ ganho};$$

$$\tau \triangleq \frac{V}{RT_o (K_{sf} + K_{np})}; \text{ constante de tempo.}$$

A função de transferência dada pela equação 9.211 é o modelo dinâmico linearizado do transdutor deslocamento para pressão.

9.3.2 – EXEMPLO Nº 9: MODELAGEM DINÂMICA DE UM CONTROLADOR PROPORCIONAL, INTEGRAL E DERIVATIVO PNEUMÁTICO

a) Introdução

Em geral, um sistema de controle clássico segue o diagrama-padrão ilustrado na Figura 9.43a. Neste diagrama temos a variável C que é controlada em função da variável de referência R . O distúrbio U atua sobre o sistema e pode interferir na variável controlada.

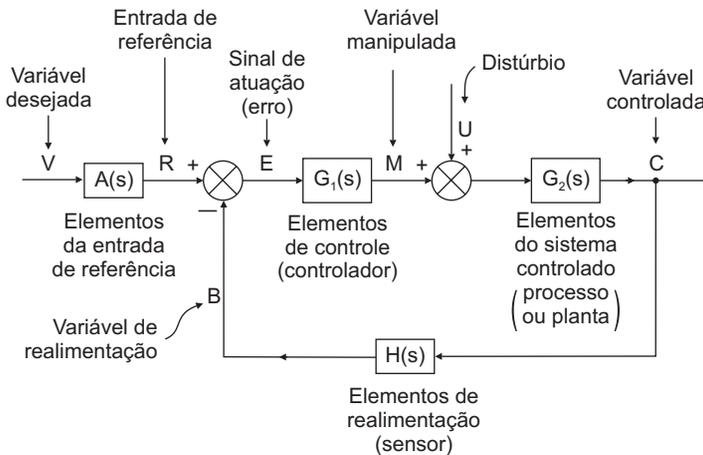
Em certas aplicações o controlador é apenas um amplificador e tem como função de transferência um ganho. Quando no controlador são também implementadas as operações de integração e de derivação, o controlador é então chamado de Proporcional, Integral e Derivativo, ou seja, Controlador PID , figura 9.43b.

A Figura 9.44 mostra um método para implementar um controlador PID inteiramente pneumático. Há muitas décadas esse controlador pneumático não é mais usado, pois atualmente essa tarefa é realizada digitalmente. Contudo, sua modelagem tem aspectos interessantes e vale como exercício. Eventualmente, até poderá fazer jus a uma aplicação onde exista intenso campo magnético que inviabilize o uso de placas eletrônicas ou em local cuja temperatura é inadequada para processadores digitais.

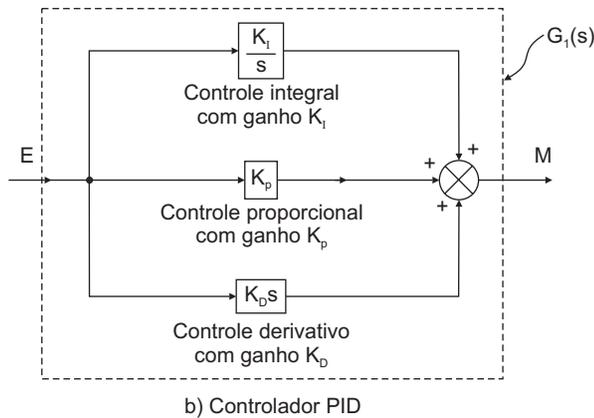
b) Proposição

O objetivo é determinar a função de transferência $\frac{P_m}{P_r}(s)$ e comparar a resposta em frequência deste sistema com o PID ideal.

Detalhando o objetivo, para este dispositivo serão desenvolvidas duas análises. A primeira considerará ganho infinito para o bocal-anteparo (*nozzle-flapper*) que produzirá um modelo perfeito de sistema proporcional, integral e derivativo. Na segunda análise (mais realista) será admitido ganho finito. Este produzirá um modelo que tem boa aproximação com a resposta em frequência do PID para uma faixa intermediária de frequências, mas tem desvios para as frequências baixas e altas.



a) Diagrama-padrão para um sistema de controle.



b) Controlador PID

Figura 9.43 Diagramas de um sistema de controle e de um controlador PID.

c) Modelagem

Iniciando a modelagem, vamos considerar primeiramente os componentes bocal-anteparo (vide seção 9.3.1) e o amplificador de isolamento de ganho unitário, Figura 9.44. As constantes de tempo destes dois componentes serão consideradas desprezíveis quando comparadas com a dinâmica dos demais componentes do controlador. Isto significa que a pressão p_m (saída do controlador) acompanha as variações do movimento do anteparo (flapper) x_e instantaneamente, obedecendo a relação:

$$p_m = K' x_e \quad (9.212)$$

em que:

$K' \triangleq$ ganho do conjunto bocal-anteparo e amplificador unitário.

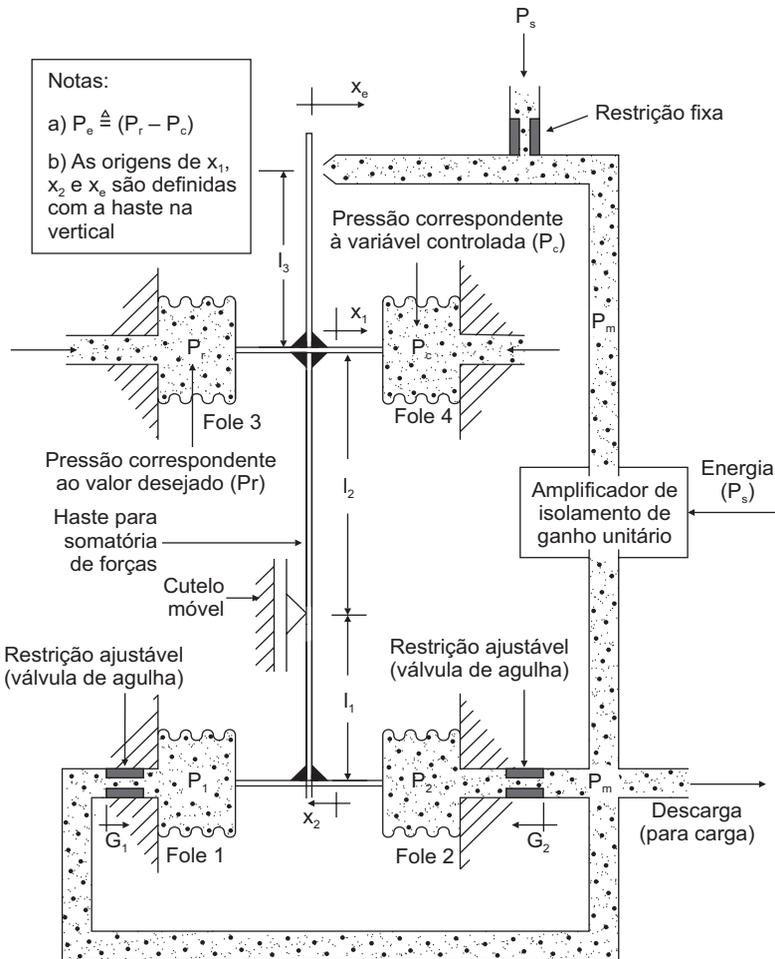


Figura 9.44 Controlador PID (Proporcional, Integral e Derivativo) Pneumático.

Com relação aos componentes foles e barra para somatória das forças, Figura 9.44, este conjunto é modelado como um sistema de molas sem inércia e sem atrito. Desprezamos também a força do jato de ar do bocal sobre a haste (anteparo). Assim, os movimentos seguem as pressões instantaneamente.

Os movimentos x_1 , x_2 e x_e são bastante pequenos, portanto, vamos considerar a angularidade da barra desprezível e as relações *movimento/pressão* lineares. Levando em conta apenas a diferença de pressão ($p_r - p_c$), o movimento no ponto x_1 é então:

$$x_1 = K_{b1}(p_r - p_c) \quad (9.213)$$

em que:

$K_{b1} \triangleq$ constante (compliance) que relaciona x_1 e ($p_r - p_c$); depende da posição do cutelo e da rigidez e geometria dos foles 3 e 4;

$p_r \triangleq$ pressão no fole 3; é a pressão desejada do sistema global de controle (Figura 9.43);

$p_c \triangleq$ pressão no fole 4; é a pressão controlada do sistema global de controle (Figura 9.43).

Determinando de forma análoga x_2 , considerando somente a diferença de pressão $(p_2 - p_1)$, o movimento no ponto x_2 é dado por:

$$x_2 = K_{b2} (p_2 - p_1) \quad (9.214)$$

em que:

$K_{b2} \triangleq$ constante (compliance) que relaciona x_2 e $(p_1 - p_2)$; depende da posição do cutelo e da rigidez e geometria dos foles 1 e 2.

p_1 e $p_2 \triangleq$ pressões nos foles 1 e 2, respectivamente.

Agora, fazendo a superposição destas duas ações para obtermos o movimento x_e do anteparo:

$$x_e = K_{b1} \frac{l_2 + l_3}{l_2} (p_r - p_c) + K_{b2} \frac{l_2 + l_3}{l_1} (p_2 - p_1) \quad (9.215)$$

em que:

l_1, l_2 e $l_3 \triangleq$ comprimentos definidos na Figura 9.44.

Observando a Figura 9.44 e a equação 9.215 notamos que há muitas combinações de valores que podem fazer x_e ser *nulo*, mas é evidente no caso de simetria, isto é, $K_{b1} = K_{b2}$, $l_1 = l_2$, $p_r = p_1$ e $p_c = p_2$.

Para relacionar as pressões p_1 e p_2 com a p_m devemos levar em conta o processo de troca de massas, aplicando a conservação da massa e as relações dos orifícios.

Considerando escoamento subsônico e pequenas perturbações ao redor de um ponto de operação, as descargas G_{1p} e G_{2p} (Figura 9.44) podem ser aproximadas às seguintes equações lineares:

$$G_{1p} = K_{f1} (p_{mp} - p_{1p}) \quad (9.216)$$

$$G_{2p} = K_{f2} (p_{mp} - p_{2p}) \quad (9.217)$$

em que:

K_{f1} e $K_{f2} \triangleq$ coeficientes lineares de descarga relativos a G_{1p} e G_{2p} , respectivamente.

Agora, considerando o ar como gás perfeito e aplicando a relação de estado do gás perfeito aos volumes V_1 e V_2 , obtemos:

$$p_1 V_1 = RTM_1 \quad (9.218)$$

$$p_2 V_2 = RTM_2 \quad (9.219)$$

em que:

V_1 e $V_2 \triangleq$ volumes nos quais ocorrem as pressões p_1 e p_2 , respectivamente (volumes são considerados constantes em razão dos pequenos movimentos dos foles);

$R \triangleq$ constante do respectivo gás em particular, no caso o ar (Tabela 2.2, seção 2.4.4);

$T \triangleq$ temperatura absoluta (considerada constante);

M_1 e $M_2 \triangleq$ massas de ar nos volumes V_1 e V_2 , respectivamente.

Derivando (9.218) e (9.219) e combinando com (9.216) e (9.217) vem:

$$\frac{dp_{1p}}{dt} = \frac{RTK_{f1}}{V_1} (p_{mp} - p_{1p}) \quad (9.220)$$

$$\frac{dp_{2p}}{dt} = \frac{RTK_{f2}}{V_2} (p_{mp} - p_{2p}) \quad (9.221)$$

Manipulando (9.220) e (9.221) e fazendo a Transformada de Laplace obtemos:

$$\frac{P_{1p}}{P_{mp}}(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1} \quad (9.222)$$

$$\frac{P_{2p}}{P_{mp}}(s) = \frac{1}{\tau_2 s + 1} \quad (9.223)$$

em que:

$$\tau_1 \triangleq \frac{V_1}{RTK_{f1}}; \text{ constante de tempo;}$$

$$\tau_2 \triangleq \frac{V_2}{RTK_{f2}}; \text{ constante de tempo.}$$

Escrevendo (9.212) e (9.215) em termos de variáveis de perturbação e combinando com (9.222) e (9.223) resulta:

$$\frac{P_{mp}}{K'} = K_{b1} \frac{l_2 + l_3}{l_2} P_{ep} + K_{b2} \frac{l_2 + l_3}{l_1} \left[\frac{P_{mp}}{\tau_2 s + 1} - \frac{P_{mp}}{\tau_1 s + 1} \right] \quad (9.224)$$

em que:

$p_{ep} \triangleq p_{rp} - p_{cp} \triangleq$ perturbação da pressão erro, verdadeiro sinal de entrada (*input*) do controlador.

Neste ponto suporemos que K' seja suficientemente grande para que o lado esquerdo da equação 9.224 possa ser admitido como aproximadamente *zero* quando comparado com os termos do lado direito. Esta hipótese leva a um controlador proporcional, integral e derivativo perfeito, pois a equação 9.224 fica:

$$\frac{P_{mp}}{P_{ep}}(s) = \frac{K_{b1} l_1}{K_{b2} l_2} \left(\underbrace{\frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}}_{\text{Derivativo}} s + \underbrace{\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}}_{\text{Proporcional}} + \underbrace{\frac{l}{\tau_2 - \tau_1} \frac{l}{s}}_{\text{Integral}} \right) \quad (9.225)$$

O cutelo móvel permite o ajuste da relação l_1/l_2 e as válvulas de agulha, o ajuste de K_{f1} e K_{f2} (portanto, τ_1 e τ_2). Desta forma, todos os três modos do controlador PID podem ser ajustados. Quando um dos três modos não é necessário, a válvula de agulha apropriada pode ser totalmente aberta (faz $K_f \approx \infty$) ou bem fechada (faz $K_f = 0$), e assim podemos conseguir todas as combinações desejadas, mostradas na Tabela 9.2.

Tabela 9.2 Relação entre os modos de controle e os valores de K_{f1} e K_{f2} .

Modo de controle	Caso	K_{f1}	τ_1	K_{f2}	τ_2	
Proporcional mais integral	<i>a</i>	∞	0	K_{f2}	τ_2	Qualquer um destes 2 métodos aparentemente funciona, no entanto o caso <i>b</i> torna-se instável.
	<i>b</i>	K_{f1}	τ_1	∞	0	
Proporcional mais derivativo	<i>a</i>	K_{f1}	τ_1	0	∞	Qualquer um destes 2 métodos aparentemente funciona, no entanto o caso <i>b</i> torna-se instável.
	<i>b</i>	0	∞	K_{f2}	τ_2	
Proporcional somente	<i>a</i>	∞	0	0	∞	Qualquer um destes 2 métodos aparentemente funciona, no entanto o caso <i>b</i> torna-se instável.
	<i>b</i>	0	∞	∞	0	

Notas: 1 - $K_f \approx \infty \Rightarrow$ válvula totalmente aberta. 2 - $K_f = 0 \Rightarrow$ válvula totalmente fechada. 3 - O motivo da instabilidade está explicado a seguir.

Uma análise mais correta usando um ganho de amplificador finito será agora efetuada. Esta revela as instabilidades mencionadas na Tabela 9.2 e também mostra que a ação do *PID* perfeito não é efetivamente obtida. Na equação 9.224, a relação $\left(\frac{P_{mp}}{K'} \right)$ não é exatamente *zero* porque K' é muito grande, mas não infinito. Implementando a equação 9.224 na forma de diagrama de blocos obtemos a Figura 9.45, que mostra que o controlador é um sistema com realimentação.

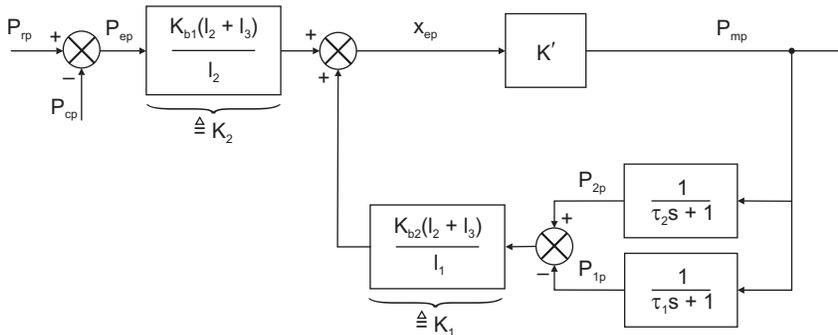


Figura 9.45 Diagrama de blocos do modelo mais realista.

Do diagrama de blocos escrevemos a equação do sistema:

$$\left\{ K_2 P_{ep} + K_1 \left[\frac{P_{mp}}{\tau_2 s + 1} - \frac{P_{mp}}{\tau_1 s + 1} \right] \right\} K' = P_{mp} \quad (9.226)$$

em que K_1 e K_2 estão definidos na Figura 9.45.

Da (9.226) vem:

$$\begin{aligned} & \left[\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 - K_1 K' (\tau_1 - \tau_2)) s + 1 \right] P_{mp} = \\ & = K_2 K' (\tau_1 s + 1) (\tau_2 s + 1) P_{ep} \end{aligned} \quad (9.227)$$

então:

$$\frac{P_{mp}}{P_{ep}}(s) = \frac{K_2 K' (\tau_1 s + 1) (\tau_2 s + 1)}{\tau_1 \tau_2 s^2 + [\tau_1 + \tau_2 + K_1 K' (\tau_2 - \tau_1)] s + 1} \quad (9.228)$$

Da equação 9.227 observamos, através do critério de Routh, que a estabilidade requer que:

$$\tau_1 + \tau_2 + K_1 K' (\tau_2 - \tau_1) > 0 \quad (9.229)$$

Se $\tau_1 = 0$ e $\tau_2 \neq 0$, a (9.229) fica satisfeita e o sistema é estável. Se $\tau_1 \neq 0$ e $\tau_1 (K_I K' - 1) \neq 0$, da (9.229) vem:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} > \frac{K_I K' - 1}{K_I K' + 1} \quad (9.230)$$

O ganho do bocal-anteparo é alto, o produto $K_I K'$ é muito maior que 1 , então podemos considerar a aproximação:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} > \frac{K_I K'}{K_I K'} = 1 \quad (9.231)$$

Portanto, τ_2 deve ser maior que τ_1 para que o sistema seja estável. Como nas entradas “b” da Tabela 9.2 a constante de tempo τ_2 é menor que τ_1 , ($\tau_2 < \tau_1$), estes casos são instáveis e não podem ser usados.

Pretendemos agora comparar a resposta do controlador real com a do modelo *PID* perfeito. Isto é melhor realizado através das curvas de resposta em frequência dos sistemas.

As funções de transferência senoidais podem ser obtidas das equações 9.225 e 9.228. Assim, para o sistema *PID* perfeito, da (9.225) vem:

$$\frac{P_{mp}}{P_{ep}}(i\omega) = \frac{K_{b1} l_1}{K_{b2} l_2 (\tau_2 - \tau_1)} \left[\frac{1}{i\omega} (\tau_1 i\omega + 1)(\tau_2 i\omega + 1) \right] \quad (9.232)$$

Para o sistema real, da (9.228) vem:

$$\frac{P_{mp}}{P_{ep}}(i\omega) = K_2 K' \frac{(\tau_1 i\omega + 1)(\tau_2 i\omega + 1)}{(\tau_3 i\omega + 1)(\tau_4 i\omega + 1)} \quad (9.233)$$

em que: $\tau_3 \tau_4 = \tau_1 \tau_2$ e $\tau_3 + \tau_4 = [\tau_1 + \tau_2 + K_I K' (\tau_2 - \tau_1)]$.

Como $\tau_3 + \tau_4 \gg \tau_1 + \tau_2$, $K_I K' \gg 1$ e $\tau_2 > \tau_1$, se for feito τ_3 muito grande para satisfazer esta exigência, então τ_4 deve ser menor que τ_1 para satisfazer a condição de $\tau_3 \tau_4 = \tau_1 \tau_2$. Assim, concluímos que $\tau_3 > \tau_4$, $\tau_3 > \tau_2$, $\tau_1 > \tau_4$ e, para estabilidade, $\tau_2 > \tau_1$, ou seja, $\tau_3 > \tau_2 > \tau_1 > \tau_4$. Sob estas condições traçamos as curvas da Figura 9.46.

Na figura temos $\left(\frac{1}{\tau_3} \right) < \left(\frac{1}{\tau_2} \right) < \left(\frac{1}{\tau_1} \right) < \left(\frac{1}{\tau_4} \right)$, que seria equivalente a $\left(\frac{1}{\tau_4} \right) < \left(\frac{1}{\tau_2} \right) < \left(\frac{1}{\tau_1} \right) < \left(\frac{1}{\tau_3} \right)$, caso fosse feito τ_4 muito grande, em vez de τ_3 .

As formas gerais das curvas de resposta em frequência usando gráficos logarítmicos e assíntotas estão na Figura 9.46. Estas curvas mostram que o contro-

lador real tem a característica da resposta em frequência correta para as frequências intermediárias, mas desvia do comportamento ideal para as frequências baixas e altas.

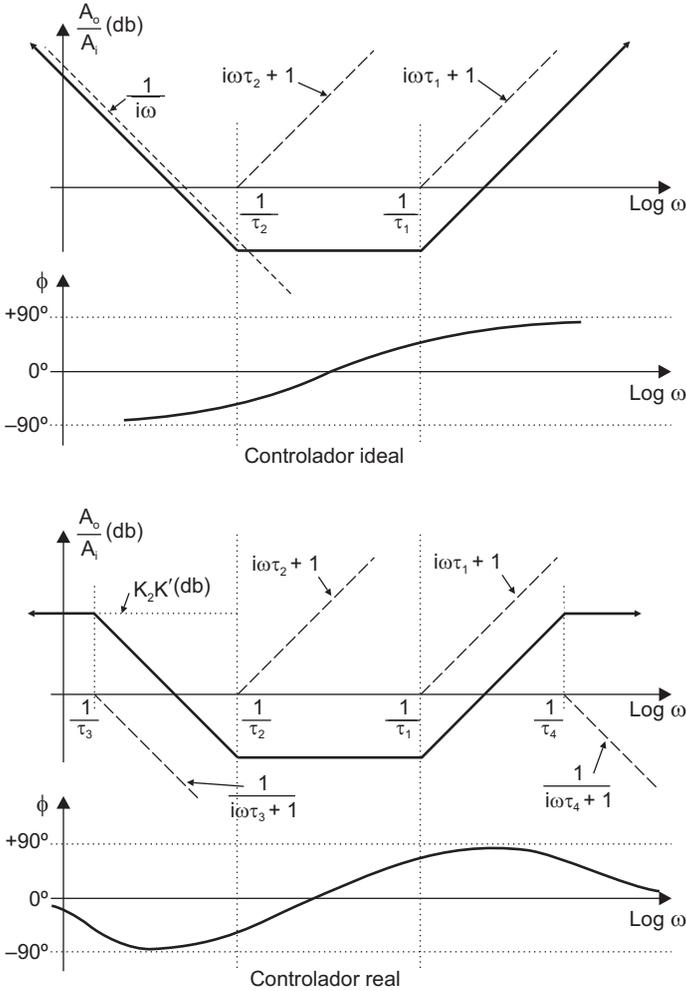


Figura 9.46 Comparação entre as formas das respostas em frequências dos controladores ideal e real.

9.3.3 – EXEMPLO Nº 10: MODELAGEM DE UM TRANSDUTOR ELETROPNEUMÁTICO

a) Introdução

Muitos sistemas de controle contêm ambas as partes, elétrica e pneumática, porque certas funções, como transmissão, tratamento e manipulação de sinais, são melhor realizadas eletricamente, enquanto outras, como atuação, são mais apro-

priadas para dispositivos pneumáticos. Quando este tipo de sistema é usado, transdutores pneumático-elétrico e eletropneumático são geralmente exigidos. Um transdutor pneumático-elétrico nada mais é do que um dispositivo de medida de pressão, como, por exemplo, um diafragma instrumentado com extensômetros. O transdutor eletropneumático, que produz uma pressão em função de um sinal elétrico, é um instrumento um pouco mais complexo.

Estes transdutores são fabricados seguindo variados projetos, mas a maior parte deles opera usando essencialmente os mesmos princípios. Experimentos realizados em sistemas bocal-anteparo (*nozzle-flapper*) mostram que é possível produzir uma pressão de ar controlável através do movimento do anteparo, aproximando ou afastando o anteparo em alguns milésimos de milímetros. Por sua vez, podemos controlar este movimento eletricamente, controlando a voltagem de uma bobina montada presa a um sistema massa-mola-amortecedor e em um campo magnético de um ímã permanente, Figura 9.47.

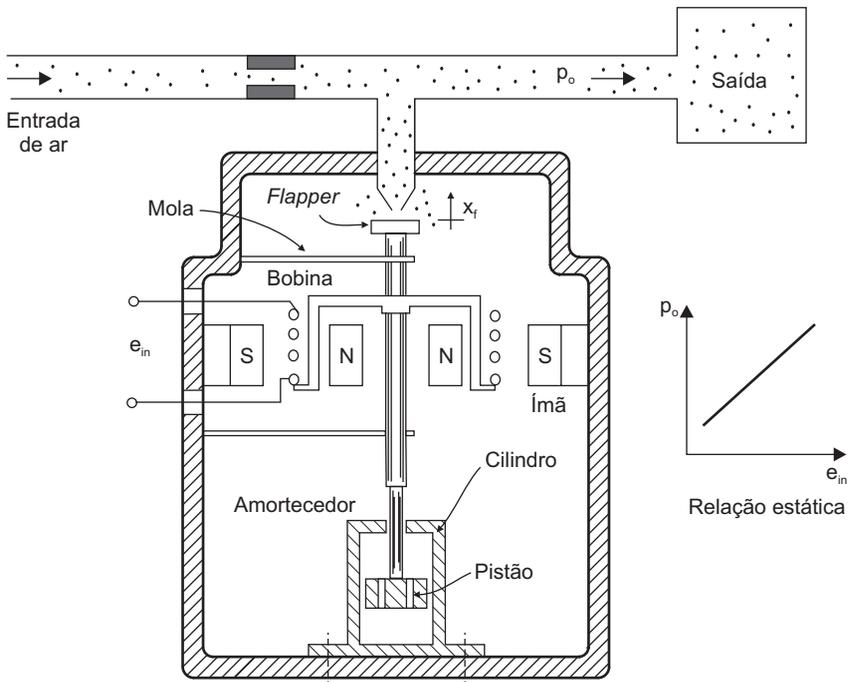


Figura 9.47 Transdutor eletropneumático.

A corrente da bobina em consequência da voltagem e_i gera uma força magnética que irá defletir a mola a uma posição tal que a força da mola, do jato de ar e magnética fiquem equilibradas.

Apesar de este esquema funcionar, para alcançar a linearidade exigida em dispositivos práticos (cerca de 99,5%), alguns valores numéricos devem ser escolhidos de tal forma que a força do jato de ar sobre o anteparo seja muito maior que a força da mola. Isto significa que a força magnética é quase equilibrada completamente pela força do jato de ar f_p , em vez da força da mola. Isto pode ser observado através da análise do modelo.

b) Proposição

Fazer a modelagem linear do transdutor eletropneumático da Figura 9.47, obter o diagrama de blocos e discutir a linearidade na condição de regime.

c) Modelagem do transdutor eletropneumático

As grandezas envolvidas nesta modelagem são variáveis de perturbação. Por motivos de simplificação na notação, o índice “*p*” não será usado.

Observando a Figura 9.47 notamos que o sistema transdutor eletropneumático pode ser dividido em três subsistemas:

- subsistema elétrico;
- subsistema mecânico; e
- subsistema pneumático.

Estes subsistemas estão interligados, mas a modelagem pode ser desenvolvida separadamente.

c.1) Modelagem do subsistema elétrico

Da Figura 9.47 fazemos o esquema do circuito elétrico conforme ilustrado na figura 9.48.

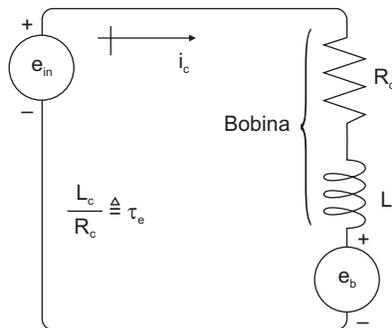


Figura 9.48 Esquema do circuito elétrico do transdutor eletropneumático.

As definições das variáveis e parâmetros do circuito da Figura 9.48 são:

$e_{in} \triangleq$ voltagem *input* (entrada);

$i_c \triangleq$ corrente elétrica do circuito;

$R_c \triangleq$ resistência da bobina;

$L_c \triangleq$ indutância da bobina;

$e_b \triangleq$ voltagem causada pela força contra eletromotriz, em resposta ao movimento da bobina.

Aplicando Kirchhoff ao circuito da Figura 9.48, já com a equação transformada, obtemos:

$$-E_{in} + R_c I_c + L_c s I_c + E_b = 0 \quad (9.234)$$

em que s é a variável de Laplace e E_{in} , I_c e E_b são, respectivamente, as transformadas de e_{in} , i_c e e_b .

Da (9.234) vem:

$$(L_c s + R_c) I_c = E_{in} - E_b \quad (9.235)$$

Logo:

$$\frac{I_c}{(E_{in} - E_b)}(s) = \frac{\frac{1}{R_c}}{\frac{L_c}{R_c} s + 1} = \frac{\frac{1}{R_c}}{\tau_e s + 1} \quad (9.236)$$

em que:

$\tau_e \triangleq \frac{L_c}{R_c}$; constante de tempo do subsistema elétrico.

Dos conceitos eletromagnéticos escrevemos:

$$e_b = K_x \dot{x}_f \quad (9.237)$$

$$f_m = K_f i_c \quad (9.238)$$

em que:

$\dot{x}_f \triangleq$ velocidade da bobina (igual à velocidade do anteparo);

$K_x \triangleq$ coeficiente de proporcionalidade entre \dot{x}_f e e_b ;

$f_m \triangleq$ força magnética;

$K_f \triangleq$ coeficiente de proporcionalidade entre i_c e f_m .

Agora, fazendo a Transformada de Laplace e organizando as equações 9.236, 9.237 e 9.238 na forma de diagrama de blocos obtemos a Figura 9.49.

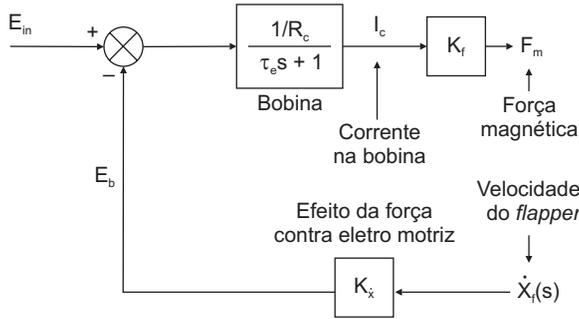


Figura 9.49 Diagrama de blocos do modelo do subsistema elétrico.

c.2) Modelagem do subsistema mecânico

O subsistema mecânico é um sistema massa–mola–amortecedor com duas forças de entrada (*input*), f_m (força magnética) e f_p (força do jato), e o deslocamento x_f como saída (*output*). Este é um sistema-padrão e sua função de transferência é conhecida (vide equação 3.95). Assim:

$$\frac{X_f}{(F_m - F_p)}(s) = \frac{\frac{I}{K_s}}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \quad (9.239)$$

em que:

$X_f \triangleq$ deslocamento do anteparo (*flapper*);

$K_s \triangleq$ coeficiente da mola, considerada constante;

$\omega_n \triangleq \sqrt{\frac{K_s}{M}}$; frequência natural não-amortecida do subsistema mecânico;

$M \triangleq$ massa total móvel do subsistema mecânico (inclui a massa da bobina, da haste, etc.);

$\zeta \triangleq$ fator de amortecimento do subsistema mecânico, considerado constante.

O sinal negativo de F_p na equação 9.239 deve-se ao fato de a força do jato de ar f_p atuar no sentido oposto de x_f .

Considerando F_p proporcional à pressão P_o (vide Figura 9.47), então:

$$f_p = A_p P_o \quad (9.240)$$

em que:

$P_o \triangleq$ pressão de saída (*output*) do transdutor eletropneumático;

$A_p \triangleq$ área equivalente da qual resulta a proporcionalidade entre P_o e f_p .

Organizando as equações 9.239 e 9.240 na forma de diagrama de blocos resulta a Figura 9.50.

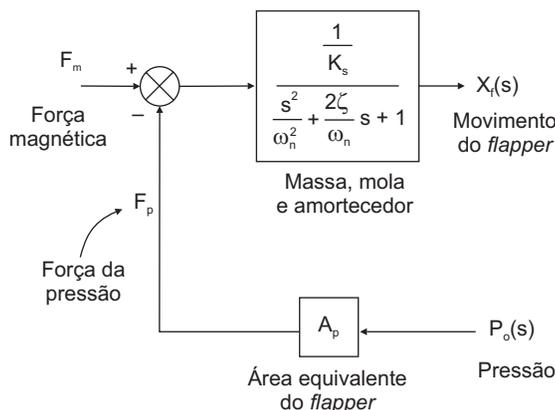


Figura 9.50 Diagrama de blocos do modelo do subsistema mecânico.

c.3) Modelagem do subsistema pneumático

O subsistema pneumático do transdutor é equivalente ao bocal-anteparo estudado na seção 9.3.1, Figura 9.51.

A função de transferência deste sistema é conhecida, dada pela equação 9.211, isto é:

$$\frac{P_o}{X_f}(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \quad (9.241)$$

em que:

$K_p \triangleq$ ganho do sistema bocal-anteparo (é função das características do orifício de alimentação e do bocal, Figura 9.51);

$\tau_p \triangleq$ constante de tempo do sistema bocal-anteparo (é função do volume V , da constante R para o ar, da temperatura e das características dos orifícios).

O diagrama de bloco da equação 9.241 está ilustrado na Figura 9.52.

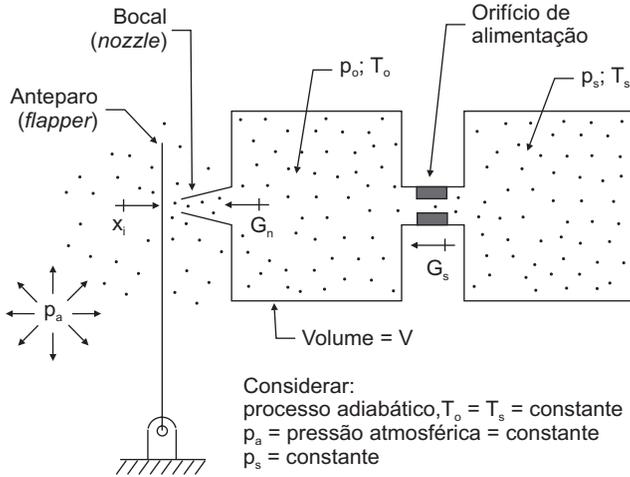


Figura 9.51 Sistema convencional bocai-anteparo.

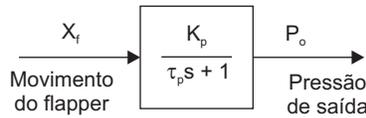


Figura 9.52 Diagrama de blocos do modelo do subsistema pneumático.

c.4) Diagrama de blocos do transdutor eletropneumático

O diagrama de blocos total está ilustrado na Figura 9.53 e foi obtido agrupando os diagramas das Figuras 9.49, 9.50 e 9.52.

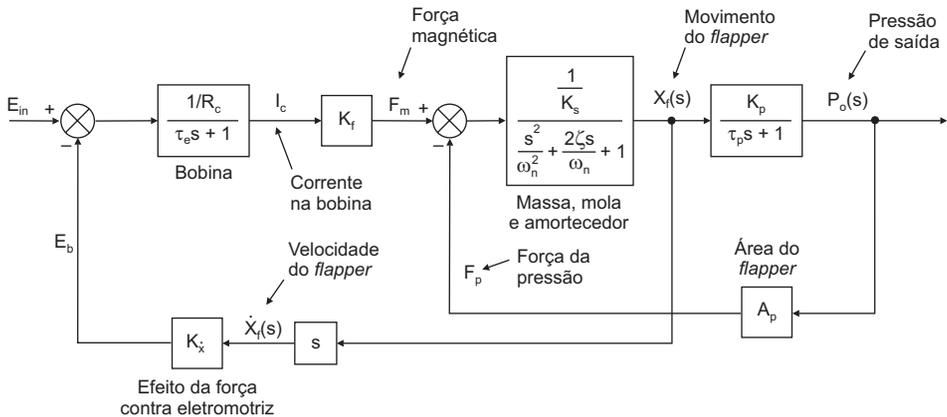


Figura 9.53 Diagrama de blocos do transdutor eletropneumático.

c.5) Modelo matemático do transdutor

O objetivo é obter a função de transferência $\frac{P_o}{E_{in}}(s)$. Isso significa obter uma equação única envolvendo apenas a entrada E_{in} e a saída P_o . Equacionando através do diagrama de bloco da Figura 9.53 vem:

$$\left\{ \left[E_{in} - K_{\dot{x}} s \left(\frac{\tau_p s + I}{K_p} \right) P_o \right] \left(\frac{I/R_c}{\tau_e s + I} \right) K_f - A_p P_o \right\} \left[\frac{K_p / K_s}{(\tau_p s + I) \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + I \right)} \right] = P_o \quad (9.242)$$

Multiplicando pelos denominadores com dinâmica e juntando os termos semelhantes resulta:

$$\left[\frac{\tau_p \tau_e}{\omega_n^2} s^4 + \left(\frac{\tau_p + \tau_e}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta \tau_p \tau_e}{\omega_n} \right) s^3 + \left(\frac{K_{\dot{x}} \tau_p K_f}{R_c K_s} + \tau_p \tau_e + \frac{I}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta (\tau_p + \tau_e)}{\omega_n} \right) s^2 + \left(\frac{K_{\dot{x}} K_f}{R_c K_s} + \frac{\tau_e A_p K_p}{K_s} + \frac{2\zeta}{\omega_n} + \tau_p + \tau_e \right) s + \left(\frac{A_p K_p}{K_s} + I \right) \right] P_o = \left[\frac{K_f K_p}{K_s R_c} \right] E_{in} \quad (9.243)$$

que é o modelo matemático do transdutor eletropneumático, considerando variáveis de perturbação.

d) Análise da linearidade na condição de regime

A especificação de desempenho citada, que considera uma linearidade de **99,5%** (0,5% não-linear), se refere à curva de calibração estática, relacionando P_o com E_{in} . Para a condição de regime, a equação 9.243 fica:

$$\left(\frac{A_p K_p}{K_s} + I \right) P_o = \left(\frac{K_f K_p}{K_s R_c} \right) E_{in} \quad (9.244)$$

ou

$$P_o = \left(\frac{K_f / R_c}{A_p + \frac{K_s}{K_p}} \right) E_{in} \quad (9.245)$$

A linearidade da relação $\frac{P_o}{E_{in}}$ depende de os valores dos parâmetros da equação

9.245, K_f , R_c , A_p , K_s e K_p permanecerem constantes.

Todos estes parâmetros mantêm-se praticamente constantes exceto K_p . Estudos do sistema bocal-anteparo mostram que o coeficiente K_p representa o coeficiente angular local (psi/in ou Pa/m) da curva de calibração estática e esta varia consideravelmente (muito mais de 0,5%) na faixa normal de operação, Figura 9.54.



Figura 9.54 Curva de calibração estática do sistema bocal-anteparo.

Através da equação 9.245 podemos observar que a variação de K_p seria tolerável se $\frac{K_s}{K_p}$ fosse sempre muito menor que A_p . Por exemplo, suponha $A_p = 0,001 \text{ in}^2$ ($0,645 \times 10^{-6} \text{ m}^2$), $K_s = 0,1 \text{ lbf/in}$ ($17,52 \text{ N/m}$) e K_p variando de 5000 psi/in ($1358 \times 10^6 \text{ Pa/m}$) até 10000 psi/in ($2715 \times 10^6 \text{ Pa/m}$). Na equação 9.245 esta grande mudança em K_p causaria apenas leve não-linearidade na relação $\frac{P_o}{E_{in}}$. Calculando:

$$\frac{P_o}{E_{in}} = \frac{K_f / R_c}{0,001 + 0,00002} ; \text{ para } K_p = 5000 \text{ psi/in}$$

$$\frac{P_o}{E_{in}} = \frac{K_f / R_c}{0,001 + 0,00001} ; \text{ para } K_p = 10000 \text{ psi/in}$$

que significa uma variação pequena da relação $\frac{P_o}{E_{in}}$.

É importante enfatizar que, ao usar este artifício muito conveniente da realimentação para melhorar a linearidade, é necessário evitar a instabilidade.

Voltando à equação 9.245, se $\frac{K_s}{K_p} \ll A_p$, então, para a condição de regime temos:

$$P_o \approx \frac{K_f / R_c}{A_p} E_{in} \quad (9.246)$$

$$P_o A_p \approx K_f \frac{E_{in}}{R_c} = K_f i_c \quad (9.247)$$

Portanto, se $\frac{K_s}{K_p} \ll A_p$, a força magnética $K_f i_c$ é praticamente equilibrada pela força da pressão $P_o A_p$, conforme foi mencionado anteriormente.

9.4 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

EX1 – O sistema da Figura E9.1 é excitado simultaneamente pelo deslocamento $x_i(t)$ e pela força $f_i(t)$. Definindo f_o como a força da mola K sobre a massa M_2 , escreva as equações básicas do sistema. Em seguida, obtenha a função de transferência $\frac{F_o}{X_i}(s)$.

O sistema é linear e tem condições iniciais iguais a *zero*.

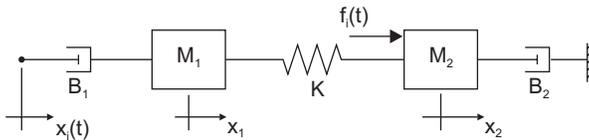


Figura E9.1

EX2 – Para o sistema da Figura E9.2 determine:

- A função de transferência $\frac{X_2}{F}(s)$.
- Se $F = 3 t u_+(t) \text{ N}$, qual seria a função de regime de $x_2(t)$?

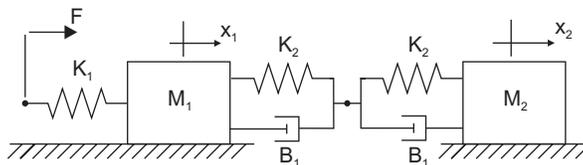


Figura E9.2

EX3 – A força externa $F_i = A_i \text{sen}(wt)$ atua na massa m_3 do sistema da Figura E9.3. Determine:

- O modelo dinâmico em forma de matriz.
- A função de transferência $\frac{\theta}{F_i}(s)$.

Considere:

m_1 e m_2 = massas pontuais;

m_3 = massa;

K_1 , K_2 e K_3 = coeficientes de molas lineares;

B_1 e B_2 = coeficientes de amortecedores lineares;

a , b , L_1 e L_2 = comprimentos;

x = deslocamento linear da massa m_3 ;

θ = deslocamento angular do pêndulo.

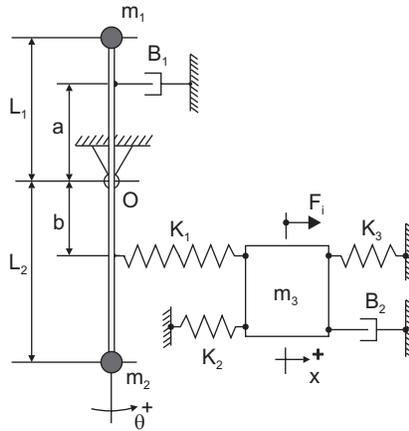


Figura: E9.3

EX4 – Para o sistema da Figura E9.4, determine:

- O modelo dinâmico linear na forma de matriz. Considere as entradas F_2 e F_3 .
- A função de transferência $\frac{x_2}{F_3}(s)$.

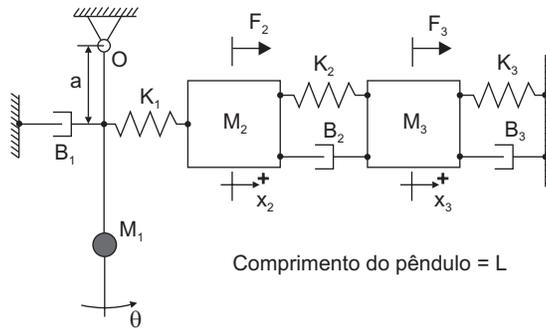


Figura E9.4

EX5 – Para o do sistema da Figura E9.5 determine:

- A frequência natural não-amortecida (em rad/seg);
- Qual o valor de θ_2 de regime se $T_i(t) = 0,5u_+(t) Nm$.

Os parâmetros do sistema têm os seguintes valores: $J_1 = 3,6 kg.m^2$; $J_2 = 7,2 kg.m^2$; $K_1 = 0,1 N.m/rad$; $K_2 = 0, 2N.m/rad$ e $n_{12} = 2$.

Sugestão: Translade a entrada (input) e os parâmetros do primeiro eixo (inércia e mola) para o último eixo.

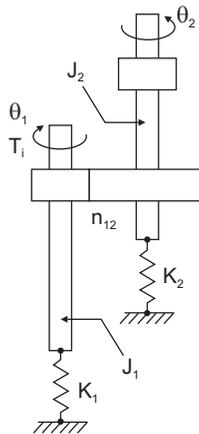


Figura E9.5

EX6 – Para o sistema da Figura E9.6, determine a função de transferência:

$$\frac{\theta_5}{T_i}(D).$$

Sugestão: Translade a entrada (input) e todos os parâmetros (inércia, mola e amortecedor) para o último eixo.

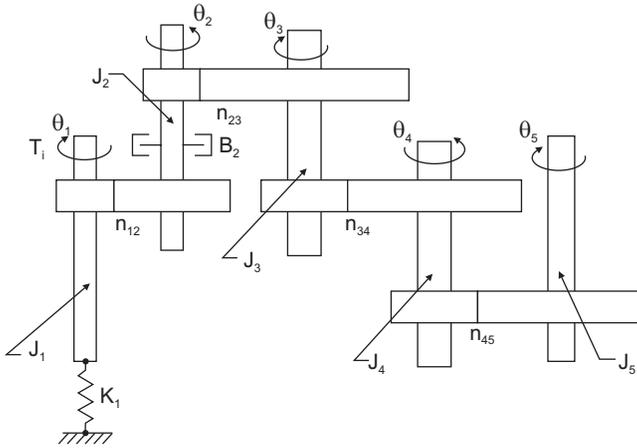


Figura E9.6

EX7 – O sistema de eixos da Figura E9.7 sofre a ação de um momento periódico T_i de amplitude 60 N.m e de frequência $1,9099 \text{ Hz}$.

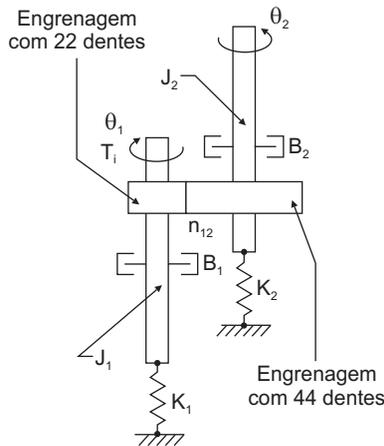


Figura E9.7

O sistema tem $J_1 = 7,5 \text{ kg.m}^2$; $J_2 = 30 \text{ kg.m}^2$; $B_1 = 70 \text{ N.m.seg/rad}$; $B_2 = 200 \text{ N.m.seg/rad}$; $K_1 = 1000 \text{ N.m/rad}$; e $K_2 = 200 \text{ N.m/rad}$.

Com o objetivo de tentar diminuir a amplitude do eixo 2, a mola acoplada ao segundo eixo foi substituída por outra de constante $K_2 = 20000 \text{ N.m/rad}$.

Determine as amplitudes (em radianos) da vibração da solução permanente do eixo 2 para ambos os casos.

EX8 – Para o sistema da Figura E9.8, determine:

a) O modelo dinâmico linear na forma de matriz.

b) As funções de transferência $\frac{\Theta_1}{M_1}(s)$ e $\frac{\Theta_2}{M_2}(s)$.

c) o diagrama de blocos do sistema.

Considere:

- (i) A força peso atua no sistema.
- (ii) Os discos são iguais, ambos têm massa M e giram respectivamente em torno dos seus centros O_1 e O_2 .
- (iii) A linha AB está na vertical.
- (iv) A barra que liga o disco 1 à massa m tem massa desprezível.
- (v) A massa m é pontual.
- (vi) Momentos de inércia:

– de um disco: $J_d = \frac{1}{2}MR^2$.

– de uma massa pontual: $J_m = mR^2$.

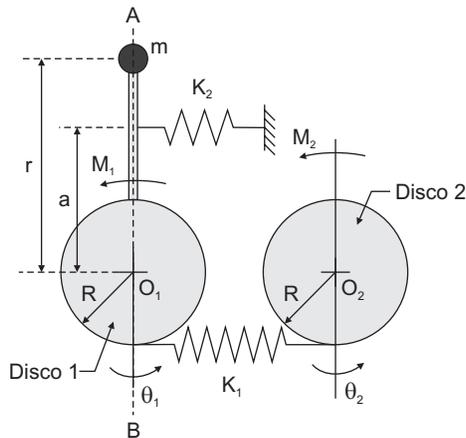


Figura E9.8

EX9 – O sistema da Figura E9.9 tem os orifícios nº 1, nº 2 e nº 3 iguais que seguem a equação geral: $Q = K\sqrt{\Delta P}$, em que $K = 1054,09 \times 10^{-9} \text{ m}^4/(\text{seg} \cdot \text{N}^{1/2})$.

A pressão de entrada P_1 barométrica é dada pela equação $P_1 = P_{1o} + P_{1p}$, em que $P_{1o} = 0,085 \text{ MPa}$ e P_{1p} é uma variação senoidal com amplitude igual a $0,002 \text{ MPa}$ e de frequência $0,1 \text{ Hz}$.

Usando análise de perturbação ao redor de um ponto de operação, determine a função transferência $\frac{H}{P_1}(s)$.

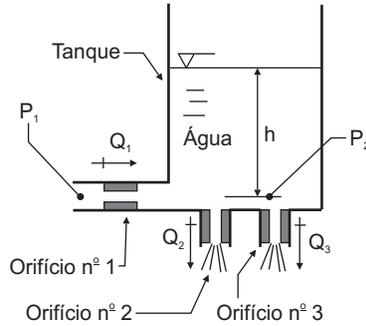


Figura E9.9

EX10 – Para o sistema da Figura E9.10.

a) Determine a função de transferência $\frac{P}{X}(s)$.

b) Faça o gráfico esquemático da resposta em frequência de $\frac{P}{X}(i\omega)$.

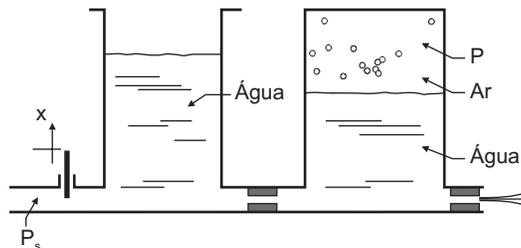


Figura E9.10

EX11 – Para o sistema da Figura E9.11, determine $\frac{P_{1p}}{P_{ip}}(D)$.

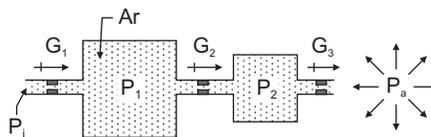


Figura E9.11

EX12 – Para o sistema da Figura E9.12, determine as funções de transferências considerando as entradas P_s e P_L ; e como saída: P_{t1} , P_{t2} e P_{t3} . Desenhe o diagrama de blocos.

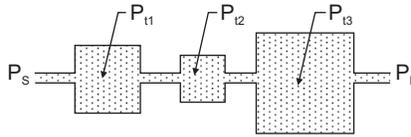


Figura E9.12

EX13 – Muitos sistemas de interesse em engenharia apresentam problemas de estabilidade. Como exemplo desta aplicação será usado um modelo simplificado do veículo de colchão ilustrado na Figura E9.13. O veículo tem massa total igual a M e a pressão P_s é constante. A válvula se abre até que P_c seja suficiente para produzir uma força que equilibre o peso e então o veículo flutua com determinada altura h_o . Estude o comportamento dinâmico para pequenas perturbações ao redor deste ponto h_o . Para obter um modelo simples e linear considere:

- i) O volume V contendo ar à pressão P_c é tomado como constante; a temperatura T neste volume é também constante.
- ii) Linearize a descarga de P_s para P_c . Obtenha esta função observando cuidadosamente os sinais dos coeficientes. Qualquer constante introduzida no equacionamento deve ser considerada como positiva. Uma análise detalhada do fluxo não é desejada.
- iii) Analogamente, a descarga de P_c para a atmosfera deve ser considerada uma função linear de P_c e h .
- iv) Considere que o movimento vertical do veículo esteja submetido a uma força viscosa proporcional à velocidade.

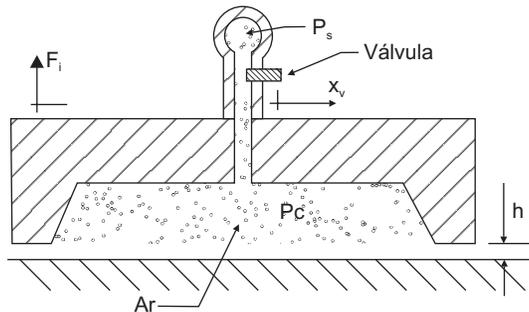


Figura E9.13

Determine:

- a) A equação linear com coeficientes constantes relacionados à posição vertical do veículo h em função das entradas F_i e x_v . Use análise de perturbações para todas as variáveis.
- b) Uma relação explícita do valor mínimo do coeficiente da força viscosa para evitar instabilidade. Aplique o critério de Routh para estudar a estabilidade.

EX14 – Para o sistema dado na Figura E9.14, determine:

- A função de transferência entre a abertura da válvula x e a voltagem e .
- Os valores de y e e no ponto de operação.
- Se $x = 0,2 u_+(t)$ mm, qual seria o valor de regime de $e(t)$?
- Qual seria a função $e(t)$ se fosse possível fazer $y(t) = \delta_+(t)$?
- Qual seria a amplitude da primeira harmônica de $e(t)$ se a massa M fosse desprezível e se $x(t)$ fosse conforme a Figura E9.15?
- Qual seria a resposta $P(t)$ se a mola fosse infinitamente rígida e $x(t)$ fosse igual $\delta_+(t)$?

Considere:

- Análise de perturbação.
- O ponto de operação é $Q_2 = 19 \times 10^{-3}$ l/seg.
- As curvas características dos orifícios estão na Figura E9.16.
- As origens de y e z : ($y = 0$ e $z = 0$), quando a força da mola é zero.
- Valores numéricos: $M = 6,25$ kg; $V = 60$ cm³ (volume no ponto de operação); $\beta = 10^5$ psi; $K_s = 400$ N/cm; $B = 600$ N/(m/seg); área do pistão = $A = 3$ cm²; $z_t = 10$ cm; $R = 10$ k Ω ; $L/R = 0,5$ seg; e $e_{ex} = 10$ V.

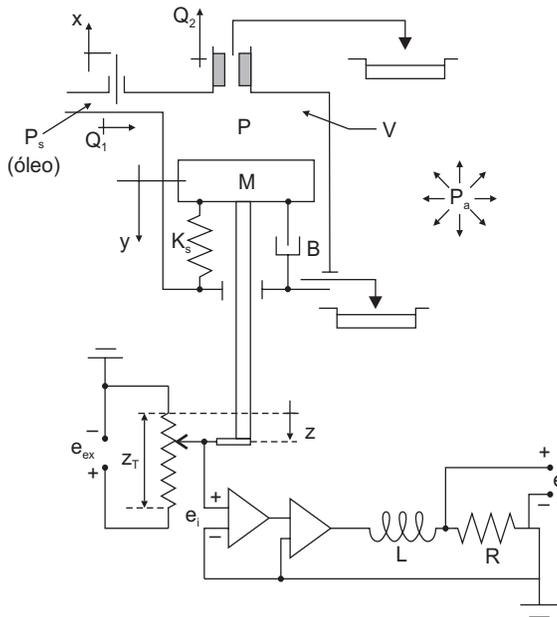


Figura E9.14

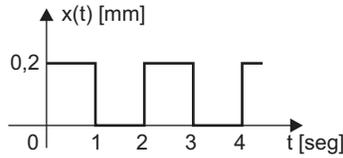


Figura E9.15

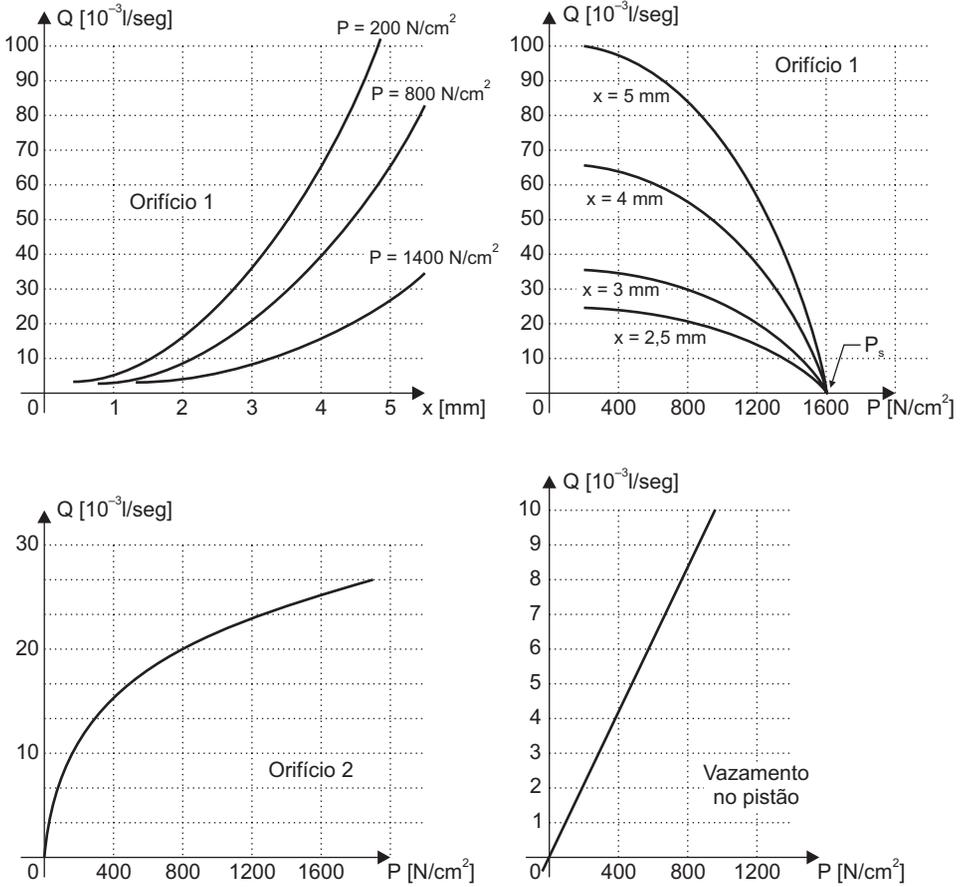


Figura E9.16

EX15 – O sistema bomba–motor dado na Figura E9.17 é uma variação do esquema apresentado na Figura 9.29 (vide seção 9.2.4). Este sistema não possui engrenagens, porém os eixos de sua carga mecânica não são rígidos. O modelo físico é considerado conforme o ilustrado na Figura E9.17. A inércia J_l representa a parte da máquina cuja velocidade angular deve seguir o comando da bomba θ_a . O objetivo

é encontrar a faixa de frequência na qual será obtida uma resposta precisa. Isto é possível de ser determinado através do exame da resposta em frequência que relaciona ω_p , velocidade angular de J_1 e entrada angular θ_a .

Determine:

- O conjunto de equações diferenciais do sistema da Figura E9.17.
- O gráfico da resposta em frequência da função de transferência $\frac{\Omega_1}{\Theta_a}(s)$, usando programa de computador (vide seção B.9, Apêndice B).
- Analise o gráfico e comente qual a faixa de frequência em que J_1 acompanha θ_a razoavelmente bem.

Considere os valores numéricos: $V = 5 \text{ in}^3$; $\beta = 10^5 \text{ psi}$; $B_M = 0,02 \text{ (in.lbf)/(rad/seg)}$; $B_1 = B_2 = 0$; $D_m = 0,4 \text{ in}^3/\text{rad}$; $(K_{Vb} + K_{Vm}) = 3 \times 10^{-4} \text{ (in}^3/\text{seg)/psi}$; $\omega_b \cdot D_{max} = 10 \text{ in}^3/\text{seg}$; $J_M = 0,0011 \text{ in.lbf.seg}^2$; $J_1 = J_2 = 1 \text{ in.lbf.seg}^2$; e $K_{S1} = K_{S2} = 3940 \text{ (in.lbf)/rad}$.

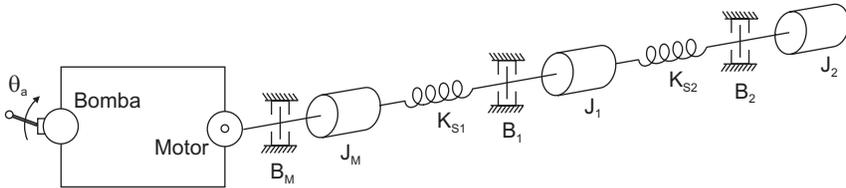


Figura E9.17

REVISÃO MATEMÁTICA

A.1 – INTRODUÇÃO

Os conceitos e detalhes matemáticos necessários para desenvolver os estudos de Dinâmica de Sistemas envolvem uma área relativamente extensa da matemática. O objetivo deste apêndice não é tentar apresentar todo o material necessário, mas sim os pontos principais e de forma expositiva, sem lançar mão de demonstrações. Este material é fundamental e pode ser encontrado em inúmeros livros, porém, uma exposição objetiva de aspectos importantes reunidos em um só local pode facilitar a revisão.

A.2 – RELAÇÕES IMPORTANTES

A.2.1 – NÚMEROS COMPLEXOS

a) Forma polar:

$$a + bi = Me^{i\theta} \quad (\text{A.1})$$

em que:

$$i \triangleq \sqrt{-1}$$

$$M \triangleq \sqrt{a^2 + b^2} \triangleq \text{módulo};$$

$$\theta \triangleq \text{arctg} \frac{b}{a} \triangleq \text{fase } (\theta \text{ em radianos}).$$

Em Dinâmica a função “*arctg*” é especial, pois:

$$\text{arctg}(b/a) \neq \text{arctg}(-b/-a) \quad (\text{A.2})$$

apesar de as calculadoras mostrarem o mesmo resultado.

Uma visualização gráfica ilustra que realmente estes ângulos são diferentes, Figura A.1.

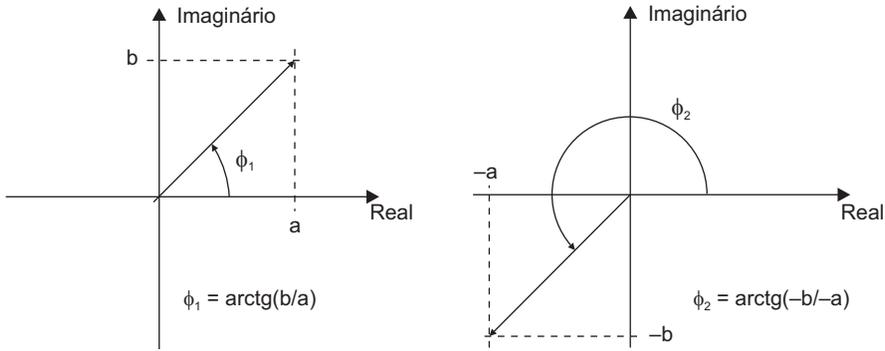


Figura A.1 Ilustração gráfica da equação A.2.

Outro detalhe de ângulos refere-se à volta completa. Em Dinâmica, uma volta completa não significa o mesmo ângulo. Por exemplo, 0 (zero), $+360$, -360 , $+620$ graus são ângulos diferentes, apesar de estarem no mesmo ponto do círculo trigonométrico. Generalizando, o ângulo θ é diferente dos ângulos: $\theta \pm 2\pi n$; $n=1, 2, \dots$

b) Divisão e multiplicação de números complexos

A forma polar pode ser usada para determinar o módulo e o ângulo (fase) de um número complexo quando este é a relação de dois outros números complexos. Por exemplo:

$$a + bi = \frac{c + di}{k + mi} = \frac{\sqrt{c^2 + d^2} e^{i\psi_1}}{\sqrt{k^2 + m^2} e^{i\psi_2}} = \sqrt{\frac{c^2 + d^2}{k^2 + m^2}} e^{(\psi_1 - \psi_2)i} \quad (\text{A.3})$$

em que:

$$\psi_1 \triangleq \text{arctg}(d/c)$$

$$\psi_2 \triangleq \text{arctg}(m/k)$$

A multiplicação é feita de forma análoga: multiplicamos os módulos e somamos as fases.

c) Soma de conjugados

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a \quad (\text{A.4})$$

A.2.2 – FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

a) Seno e cosseno em termos polares

A equação de Euler é dada por:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\theta \quad (\text{A.5})$$

em que o ângulo θ é em radianos.

Desta equação vem:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (\text{A.6})$$

$$\operatorname{cos}\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (\text{A.7})$$

b) Relações envolvendo senos e cossenos

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \quad (\text{A.8})$$

$$\operatorname{cos}(-\beta) = \operatorname{cos}\beta \quad (\text{A.9})$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{cos}^2\theta = 1 \quad (\text{A.10})$$

$$A\operatorname{cos}(bx) + B\operatorname{sen}(bx) = \sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{sen}(bx + \operatorname{arctg}(A/B)) \quad (\text{A.11})$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{cos}\beta + \operatorname{cos}\alpha \operatorname{sen}\beta \quad (\text{A.12})$$

$$\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos}\alpha \operatorname{cos}\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \quad (\text{A.13})$$

A.2.3 – DERIVADAS

$$\frac{d}{dx}(u.v.w) = v.w.\frac{du}{dx} + u.w.\frac{dv}{dx} + u.v.\frac{dw}{dx} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v.\frac{du}{dx} - u.\frac{dv}{dx}}{v^2} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dx} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{de^u}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}u) = \frac{du}{dx} \cdot \operatorname{cos}u \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\frac{du}{dx} \cdot \text{sen } u \quad (\text{A.19})$$

A.2.4 – INTEGRAIS

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (\text{A.20})$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ para } n \neq -1 \quad (\text{A.21})$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x \quad (\text{A.22})$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \quad (\text{A.23})$$

$$\int (\text{sen } ax) dx = -\frac{1}{a} \cos ax \quad (\text{A.24})$$

$$\int (\cos ax) dx = \frac{1}{a} \text{sen } ax \quad (\text{A.25})$$

$$\int (\text{sen } ax)^2 dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \text{sen } 2ax \quad (\text{A.26})$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \text{sen } 2ax \quad (\text{A.27})$$

$$\int x (\text{sen } ax) dx = \frac{1}{a^2} \text{sen } ax - \frac{x}{a} \cos ax \quad (\text{A.28})$$

$$\int x (\cos ax) dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \text{sen } ax \quad (\text{A.29})$$

Para m e n inteiros:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\theta) \cdot \text{sen}(n\theta) \cdot d\theta = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\theta) \cdot \cos(n\theta) \cdot d\theta = \begin{cases} = 2\pi & \text{se } m = n = 0 \\ = \pi & \text{se } m = n \neq 0 \\ = 0 & \text{se } m^2 \neq n^2 \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\theta) \cdot \sin(n\theta) \cdot d\theta = \begin{cases} = 0 & \text{se } m = n = 0 \\ = \pi & \text{se } m = n \neq 0 \\ = 0 & \text{se } m^2 \neq n^2 \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

A.2.5 – LIMITES

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \quad (\text{A.33})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{K}{x} \right)^x = e^K \quad (\text{A.34})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \quad (\text{A.35})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.36})$$

A.2.6 – SÉRIE DE TAYLOR

Se $f(x)$ tiver derivadas contínuas até a ordem $n + 1$ no intervalo considerado, então podemos escrever:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0 + h) &= f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \\ &+ \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

em que $h = x - x_0$ e R_n é chamado de resto (R_n tende a zero se n tende para infinito).

No caso de uma variável y ser função de duas variáveis x_1 e x_2 , $y = f(x_1, x_2)$, a expansão em série de Taylor resulta:

$$y = y_o + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_o x_{1p} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_o x_{2p} \right] + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \Big|_o x_{1p}^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_o x_{1p} x_{2p} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \Big|_o x_{2p}^2 \right] + \dots \quad (\text{A.38})$$

em que:

x_{1o} e $x_{2o} \triangleq$ valores no ponto de operação de x_1 e x_2 , respectivamente;

$x_{1p} \triangleq x_1 - x_{1o} \triangleq$ valor de perturbação de x_1 ao redor do ponto de operação x_{1o} ;

$x_{2p} \triangleq x_2 - x_{2o} \triangleq$ valor de perturbação de x_2 ao redor do ponto de operação x_{2o} ;

$y_o \triangleq f(x_{1o}, x_{2o}) \triangleq$ valor de y no ponto de operação.

A.3 – DETERMINANTES

A.3.1 – INTRODUÇÃO

Para toda matriz quadrada A existe um valor numérico específico chamado de determinante de A cuja notação é:

$$\text{determinante de } A \equiv \det A \equiv |A|$$

A definição matemática de determinantes não está aqui incluída porque a mesma envolve conhecimentos de permutação e a discussão deste assunto não faz parte dos objetivos desta revisão matemática.

A.3.2 – PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

(1) – Os determinantes de uma matriz A e de sua transposta¹ A^t são iguais:

$$|A| = |A^t| \quad (\text{A.39})$$

Por exemplo, os determinantes abaixo são iguais:

1. A transposta é obtida trocando as linhas pelas colunas.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -6 \\ 10 & 12 & -15 & 17 \\ 16 & -7 & 8 & 9 \\ 31 & 33 & -39 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 16 & 31 \\ 3 & 12 & -7 & 33 \\ 4 & -15 & 8 & -39 \\ -6 & 17 & 9 & 5 \end{vmatrix} \quad (\text{A.40})$$

(2) – Sendo A uma matriz quadrada, então:

- (i) Se A tem uma linha (ou coluna) de zeros, então $|A| = 0$;
- (ii) Se A tem duas linhas (ou colunas) idênticas, então $|A| = 0$;
- (iii) Se A for triangular, isto é, A tem **zeros** acima ou abaixo da diagonal, então $|A|$ é o produto dos elementos da diagonal.

(3) – Se B for uma matriz obtida da matriz A por meio da:

- (i) Multiplicação de uma linha (ou coluna) de A por uma constante k , então $|B| = k|A|$;
- (ii) Permutação de duas linhas (ou colunas) de A , então $|B| = -|A|$;
- (iii) Adição de valores múltiplos de uma linha (ou coluna) de A com outra linha (ou coluna), então $|B| = |A|$.

(4) – A matriz inversa de uma matriz quadrada A existe se e somente se $|A| \neq 0$, ou seja:

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1} \text{ existe} \quad (\text{A.41})$$

(5) – Se A e B são matrizes quadradas de ordem n , então:

$$|AB| = |A| |B| \quad (\text{A.42})$$

A.3.3 – CÁLCULO DE DETERMINANTES USANDO CO-FATORES

O co-fator A_{ij} de um determinante $|A|$ é definido como:

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} |M_{i,j}| \quad (\text{A.43})$$

em que M_{ij} é um determinante menor obtido de A pela eliminação da linha i e da coluna j . Por exemplo, seja:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 13 & 12 \\ 6 & 9 & 14 \\ 7 & 50 & 17 \end{vmatrix}$$

e queremos determinar o co-fator A_{23} , então:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 7 & 50 \end{vmatrix} = -[5 \times 50 - 7 \times 13] = -159$$

Lembrando que o determinante de uma matriz A com elementos a_{ij} é igual à soma dos produtos obtidos pela multiplicação dos elementos de qualquer uma das linhas (ou colunas) pelos seus respectivos co-fatores, podemos escrever:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (\text{A.44})$$

ou

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (\text{A.45})$$

Para ilustrar esta sistemática de cálculo é dado abaixo um exemplo em que é calculado o determinante A da matriz em função da segunda coluna. Então, se

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -6 \\ 10 & 12 & -15 & 17 \\ 16 & -7 & 8 & 9 \\ 31 & 33 & -39 & 5 \end{vmatrix}$$

vem:

$$\begin{aligned} |A| &= 3(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 10 & -15 & 17 \\ 16 & 8 & 9 \\ 31 & -39 & 5 \end{vmatrix} + 12(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 16 & 8 & 9 \\ 31 & -39 & 5 \end{vmatrix} + \\ &+ (-7)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 10 & -15 & 17 \\ 31 & -39 & 5 \end{vmatrix} + 33(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 10 & -15 & 17 \\ 16 & 8 & 9 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

A.3.4 – REGRA DE CRAMER

A regra de Cramer é usada para resolver sistemas de equações contendo n equações independentes com n incógnitas, tal como o dado abaixo:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{A.46}$$

Assim, a regra de Cramer pode ser matematicamente escrita (que é evidentemente a solução do sistema) da seguinte forma:

Se $\Delta \neq 0$, então:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \dots x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \tag{A.47}$$

em que:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{A.48}$$

e Δ_i é o determinante de uma matriz obtida através da substituição da coluna i da matriz A pelo vetor coluna formado pelos termos $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$. Exemplificando, seja o sistema de equações:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 \\ 3x + 5y &= 1 \end{aligned}$$

Calculando o determinante Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 9 = 19$$

Como $\Delta \neq 0$, então:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{19} = \frac{38}{19} = 2$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{19} = \frac{-19}{19} = -1$$

Portanto, a solução do sistema é $x = 2$ e $y = -1$.

A.4 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A.4.1 – INTRODUÇÃO

De maneira simplificada podemos dizer que uma equação diferencial é uma igualdade envolvendo funções e suas derivadas.

Quando as variáveis dependentes são funções de uma única variável independente, chamamos de *equação diferencial ordinária*. Se as variáveis dependentes forem funções de duas ou mais variáveis independentes, a equação é uma *equação diferencial parcial*.

A.4.2 – MÉTODOS PARA RESOLVER EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

(i) Métodos analíticos exatos

Estes métodos fornecem soluções gerais e exatas para as equações diferenciais.

(ii) Métodos numéricos

Estes métodos produzem soluções aproximadas por meio de diferenciações e integrações numéricas. Computadores digitais são utilizados na implementação destes métodos.

(iii) Método analógico

Estes métodos usam analogias físicas para obtermos a solução.

A.4.3 – MÉTODO CLÁSSICO PARA RESOLVER EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Antes de observar o método é necessário distinguir as equações diferenciais *lineares* das *não-lineares*. Uma equação diferencial é chamada linear se a variável

dependente e suas derivadas aparecem apenas em combinações lineares. Exemplificando:

a) Equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes

$$5 \frac{d^4 y}{dx^4} + 6,2 \frac{d^3 y}{dx^3} + 1,8 \frac{d^2 y}{dx^2} + 0,9 \frac{dy}{dx} + 26 y = 8x^2 + \cos x$$

$$3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 7 \frac{dy}{dx} + y = \operatorname{sen} x$$

em que y é a variável dependente e x é a variável independente.

b) Equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes variáveis

$$3x \frac{d^2 y}{dx^2} + \operatorname{sen} x \frac{dy}{dx} + e^x y = \cos^2 x$$

$$9x^3 \frac{dy}{dx} + (1 - \cos x)y = 3e^{4x}$$

c) Equações diferenciais ordinárias não-lineares

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + 7 \frac{dy}{dx} + 6y = 9x$$

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = 4x$$

$$\frac{dy}{dx} + e^y = \operatorname{sen} x$$

Diante das considerações feitas acima, a forma geral de uma equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes é:

$$A_n \frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_1 \frac{dy}{dx} + A_0 y = f(x) \quad (\text{A.49})$$

em que:

$A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_0$ são constantes;

$f(x) \triangleq$ função excitadora (entrada do sistema);

$n \triangleq$ ordem da equação diferencial (ordem da maior derivada da variável dependente).

A função excitadora $f(x)$ pode ser qualquer função de x , inclusive uma constante, como, por exemplo, o **zero**.

No caso de $f(x)$ ser **nula**, a equação A.49 é dita **homogênea**.

O método clássico para resolver a equação A.49 divide a solução y em duas partes: y_h e y_p , tal que:

$$y = y_h + y_p \quad (\text{A.50})$$

em que:

$y_h \triangleq$ solução da equação homogênea;

$y_p \triangleq$ solução da particular.

A solução da equação homogênea é muitas vezes chamada de **resposta transitória** e a solução particular, de **resposta permanente** ou de regime.

(i) Solução da Equação Homogênea

Obtemos a homogênea fazendo $f(x)$ igual a **zero** na (A.49). Assim:

$$A_n \frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_1 \frac{dy}{dx} + A_0 y = 0 \quad (\text{A.51})$$

que pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\left(A_n D^n + A_{n-1} D^{n-1} + \dots + A_1 D + A_0 \right) y = 0 \quad (\text{A.52})$$

em que o operador diferencial D é definido como sendo:

$$D^m \triangleq \frac{d^m}{dx^m}$$

Fazendo a quantidade entre parênteses da equação A.52 igual a zero chegamos à equação A.53, que é denominada **equação característica**.

$$A_n D^n + A_{n-1} D^{n-1} + \dots + A_1 D + A_0 = 0 \quad (\text{A.53})$$

Resolvendo a equação algébrica A.53 (vide discussão sobre esta equação na seção 4.4) obtemos as n raízes r_1, r_2, \dots, r_n que poderão ser reais e/ou complexas, repetidas ou não. Com estas raízes escrevemos a solução y_h com base nas seguintes regras:

Caso 1: Raízes reais não repetidas:

Para as raízes reais r_a, r_b, r_c, \dots não repetidas, a parte da solução de y_h correspondente a essas raízes, aqui denominada y_{h1} , é escrita da seguinte forma:

$$y_{h1} = C_a e^{r_a x} + C_b e^{r_b x} + C_c e^{r_c x} + \dots \quad (\text{A.54})$$

em que C_a, C_b, C_c, \dots são constantes.

Caso 2: Raízes reais repetidas:

Para cada raiz real r repetida p vezes, a parte da solução de y_h correspondente a esta raiz é:

$$y_{h2} = (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{p-1} x^{p-1}) e^{r x} \quad (\text{A.55})$$

em que C_0, C_1, C_2, \dots são constantes.

Caso 3: Raízes complexas não repetidas:

Para cada par de raízes complexas $r = a \pm bi$ não repetido, escrevemos y_{h3} como sendo:

$$y_{h3} = A e^{ax} \text{sen}(bx + \phi) \quad (\text{A.56})$$

em que A e ϕ são constantes.

Caso 4: Raízes complexas repetidas:

Para cada par de raízes complexas $r = a \pm bi$ repetido p vezes, escrevemos y_{h4} na forma:

$$y_{h4} = A_0 e^{ax} \text{sen}(bx + \phi_0) + A_1 x e^{ax} \text{sen}(bx + \phi_1) + \dots + A_{p-1} x^{p-1} e^{ax} \text{sen}(bx + \phi_{p-1}) \quad (\text{A.57})$$

em que $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{p-1}$ são constantes.

Observadas as regras e obtidas as partes da solução da homogênea ($y_{h1}, y_{h2}, y_{h3}, \dots$) correspondentes aos tipos de raízes (reais, complexas, repetidas ou não), somamos as parcelas para escrevermos a solução y_h na forma funcional, mas ainda com os coeficientes a serem determinados.

(ii) Solução Particular

O método descrito abaixo é chamado método dos coeficientes indeterminados. Este método não atende a todos os casos, porém é aplicável a um grande número de problemas de interesse prático. Para verificar se o método é aplicável ou não, devemos examinar a função $f(x)$ e suas derivadas, isto é:

a) Derivadas de ordem maior nulas

Após certa ordem de derivação, todas as derivadas de ordem maior são nulas. Por exemplo, seja a função $f(x) = 3x^2$ que derivando vem:

$$f(x) = 3x^2$$

$$f'(x) = 6x$$

$$f''(x) = 6$$

$$f'''(x) = 0$$

b) Derivadas de ordem maior repetem a forma funcional

Após certa ordem de derivação, todas as derivadas de ordem maior repetem as formas funcionais de maneira cíclica. Por exemplo: Ae^{ax} , $\text{sen}(bx)$ e $\text{cos}(dx)$ são funções que satisfazem esta condição.

Observadas as funções excitadoras, se as condições a e/ou b forem satisfeitas, então o método é aplicável.

O método é o seguinte: a solução particular é formada pela soma de todas as formas funcionais diferentes que aparecem nas funções excitadoras e suas derivadas. Cada parcela da soma é multiplicada por um coeficiente que será posteriormente determinado.

Por exemplo, seja a equação de primeira ordem:

$$(2D - 3)y = 3x^3$$

então

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$$

A determinação dos coeficientes é feita substituindo y por y_p na equação diferencial. Assim, agrupando os termos semelhantes obtemos:

$$(-3A)x^3 + (6A - 3B)x^2 + (4B - 3C)x + (2C - 3E) = 3x^3$$

que resulta nas seguintes igualdades:

$$-3A = 3$$

$$6A - 3B = 0$$

$$4B - 3C = 0$$

$$2C - 3E = 0$$

Logo, os valores dos coeficientes são:

$$A = -1$$

$$B = -2$$

$$C = -8/3$$

$$E = -16/9$$

Voltando à especificação da forma funcional da solução da particular, no caso de a equação característica possuir operadores D em evidência, o que significa que ela pode ser escrita na forma:

$$D^m (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_0) = 0 \quad (\text{A.58})$$

é necessário considerar também as formas funcionais correspondentes à primeira, segunda,... até a m -ésima integral da função excitadora. Por exemplo, seja:

$$D^2 (2D^2 + 3D + 5)y = 3x^2$$

Então, neste caso, y_p fica:

$$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Ex + F$$

(iii) Solução da Equação

Se as soluções y_h e y_p são conhecidas, a função y é obtida por meio da equação A.50, ou seja:

$$y = y_h + y_p \quad (\text{A.59})$$

A solução da equação contém n constantes a serem determinadas (vindas de y_h) cujos valores dependem das n condições iniciais (o número de condições iniciais necessárias é igual à ordem da equação). Para ilustrar, um exemplo é resolvido abaixo.

Com o ângulo $2t$ em radianos, seja a equação:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 1,25y = \cos 2t \quad (\text{A.60})$$

e com as condições iniciais:

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ e \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{array} \right\} \text{ quando } t = 0 \quad (\text{A.61})$$

1º Passo – Encontrar y_h :

A equação característica da equação diferencial é:

$$D^2 + D + 1,25 = 0$$

Suas raízes são: $r_{1,2} = -0,5 \pm i$. Portanto, a solução da homogênea é:

$$y_h = Ce^{-0,5t} \text{sen}(t + \phi)$$

2º Passo – Encontrar y_p :

Usando o método dos parâmetros indeterminados, a soma das formas funcionais resulta:

$$y_p = A \operatorname{sen} 2t + B \operatorname{cos} 2t$$

Substituindo y_p e suas derivadas na equação diferencial e agrupando os termos semelhantes, obtemos:

$$(-4A - 2B + 1,25A)\operatorname{sen} 2t + (-4B + 2A + 1,25B)\operatorname{cos} 2t = \operatorname{cos} 2t$$

Igualando os coeficientes determinamos A e B :

$$\begin{cases} A = 0,1730 \\ B = -0,2378 \end{cases}$$

Substituindo os valores de A e B na equação de y_p e aplicando a relação dada pela equação A.11, resulta:

$$y_p = 0,2941 \operatorname{sen}(2t + 5,3412)$$

3º Passo – Determinar os coeficientes de y_h :

Somando a homogênea com a particular vem:

$$y = y_h + y_p = C e^{-0,5t} \operatorname{sen}(t + \phi) + 0,2941 \operatorname{sen}(2t + 5,3412)$$

Aplicando as condições iniciais, $y = 0$ e $\frac{dy}{dt} = 0$ quando $t = 0$, obtemos duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{cases} C \operatorname{sen} \phi = 0,2378 \\ C \operatorname{cos} \phi = -0,2270 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema determinamos as constantes C e ϕ , isto é:

$$\begin{cases} \phi = 2,3329 \text{ radianos} \\ C = 0,3288 \end{cases}$$

Finalmente, podemos escrever a função y como sendo:

$$y = 0,3288 e^{-0,5t} \operatorname{sen}(t + 2,3329) + 0,2941 \operatorname{sen}(2t + 5,3412)$$

que é a solução da equação A.60 com as condições iniciais dadas pela (A.61).

A.4.4 – PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

Vamos supor que a função excitadora $f(x)$ da equação A.49 seja uma soma de funções, ou seja:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_j(x) \quad (\text{A.62})$$

O princípio da superposição diz que para determinarmos y_p consideramos uma única função de cada vez, encontrando a solução particular correspondente a cada função, e então somamos todas as funções individuais para obter y_p .

O princípio da superposição se aplica a modelos do **Tipo 30** (vide seção 1.7, Capítulo 1), que são equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes.

A.4.5 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS SIMULTÂNEAS

Sejam, por exemplo, as equações:

$$\begin{cases} Dy_1 - 5y_2 + y_3 = 2 \\ y_1 + Dy_2 + Dy_3 = x^5 \\ y_1 - Dy_2 + y_3 = \text{sen } x \end{cases} \quad (\text{A.63})$$

Usando a regra de Cramer, a função y_1 é determinada da seguinte forma:

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ x^5 & D & D \\ \text{sen } x & -D & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D & -5 & 1 \\ 1 & D & D \\ 1 & -D & 1 \end{vmatrix}} \quad (\text{A.64})$$

que desenvolvendo resulta:

$$(D^3 + D^2 - 7D + 5)y_1 = 5x^5 - 5x^4 - 6 \cos x \quad (\text{A.65})$$

Utilizando o mesmo método (Cramer) vamos obter as equações para as funções y_2 e y_3 , resultando em três equações, cada uma com uma única variável dependente:

$$(D^3 + D^2 - 7D + 5)y_1 = f(x) \quad (\text{A.66})$$

$$(D^3 + D^2 - 7D + 5)y_2 = g(x) \quad (\text{A.67})$$

$$(D^3 + D^2 - 7D + 5)y_3 = h(x) \quad (\text{A.68})$$

Agora, se o sistema de equações A.63 possui as condições iniciais:

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = 2 \\ y_3 = 0 \end{array} \right\} \text{ quando } x = 0 \quad (\text{A.69})$$

pode parecer que temos um sério problema, porque com apenas 3 condições iniciais não seria possível determinar as 9 constantes originadas nas equações A.66, A.67 e A.68. Felizmente, o problema tem solução porque somente 3 das 9 constantes são independentes.

A quantidade de condições iniciais de que um sistema linear precisa é igual ao grau da sua equação característica, que neste caso é três.

É importante observar que a equação característica para um sistema é única e é exatamente o determinante denominador “ Δ ” da regra de Cramer (ver equação A.47). É por esta razão que neste exemplo o denominador da equação A.64 aparece nas equações A.66, A.67 e A.68, resultando, portanto, uma forma única para as equações homogêneas de todas as variáveis y_1 , y_2 e y_3 .

Aplicando estas considerações ao exemplo dado concluímos que a quantidade necessária e suficiente de condições iniciais para o sistema é 3.

Vamos ilustrar este detalhe com um exemplo simples. Seja:

$$4x - Dy = 0 \quad (\text{A.70})$$

$$Dx - y = 0 \quad (\text{A.71})$$

Na forma de matriz temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -D \\ D & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.72})$$

Aplicando Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -D \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -D \\ D & -1 \end{vmatrix}} \quad (\text{A.73})$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ D & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -D \\ D & -1 \end{vmatrix}} \quad (\text{A.74})$$

Então:

$$(D^2 - 4)x = 0 \quad (\text{A.75})$$

$$(D^2 - 4)y = 0 \quad (\text{A.76})$$

A equação característica tem grau igual a dois e suas raízes são: $+2$ e -2 . Logo:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} \quad (\text{A.77})$$

$$y = C_3 e^{2t} + C_4 e^{-2t} \quad (\text{A.78})$$

Substituindo as equações A.77 e A.78 na A.70 obtemos:

$$(4C_1 - 2C_3)e^{2t} + (4C_2 + 2C_4)e^{-2t} = 0 \quad (\text{A.79})$$

Como a equação A.79 vale para qualquer valor de t , então:

$$C_3 = 2C_1 \quad (\text{A.80})$$

$$C_4 = -2C_2 \quad (\text{A.81})$$

Logo, as funções x e y resultam:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} \quad (\text{A.82})$$

$$y = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t} \quad (\text{A.83})$$

Os valores de C_1 e C_2 são determinados com *duas* condições iniciais.

A.5 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

EX1 – Determine o módulo e a fase (em rad) dos números complexos:

a) $a + bi = \frac{1 + 3i}{-3 - 4i}$

b) $c + di = \frac{-2 - 2i}{+2 + 2i}$

EX2 – Determinar M e ϕ (em rad) de:

a) $M \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = -3 \cos(\omega t) - 5 \operatorname{sen}(\omega t)$

b) $M \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = -3 \cos(\omega t) + 5 \operatorname{sen}(\omega t)$

EX3 – Usando Cramer, determine X_1 , X_2 e X_3 .

a)
$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 + 5X_3 = 21 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_3 = 16 \\ X_1 + X_2 - X_3 = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 + 5X_3 = 21 \\ 5X_1 + X_2 + X_3 = 10 \\ 8X_1 + 3X_2 - 3X_3 = -1 \end{cases}$$

EX4 – Usando Cramer, determine $\left(\frac{X}{Q}\right)$ e $\left(\frac{Y}{Q}\right)$.

$$\begin{cases} aX + bY + cZ = Q \\ dX + eY + fZ = 0 \\ gX + hY + kZ = 0 \end{cases}$$

EX5 – Quais equações abaixo são lineares?

a) $2 \frac{dy}{dt} + 3y^2 = 6t$

b) $t \frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$

c) $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y = 3t^2$

d) $\frac{dy}{dx} + e^{-y} = x$

e) $\frac{dy}{dx} + e^{-x} = x$

EX6 – Escreva a forma funcional (somente as funções, não determine os coeficientes) da solução $y = y_h + y_p$ das equações diferenciais:

a) $32 \frac{d^2 y}{dt^2} + 204,8 \frac{dy}{dt} + 2048,0 y = 3t^3 + 5 \text{sen}(\omega t)$

b) $5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 60 \frac{dy}{dt} + 260 y = 5t^2 + 12 \text{cos}(\omega t)$

INTRODUÇÃO AO MATLAB

B.1 – INTRODUÇÃO

Este apêndice é dedicado às pessoas que não conhecem o MATLAB.

A proposta é atingir dois objetivos: (i) – apresentar conhecimentos básicos do MATLAB para acelerar o início do seu uso; e (ii) – deixar implícito ao usuário a enorme potencialidade do software, servindo como estímulo para realizar estudos aprofundados.

O material deste apêndice será melhor aproveitado se todos os exemplos forem executados em computador à medida que aparecerem no texto.

B.2 – O QUE É MATLAB

O MATLAB é um software desenvolvido pela empresa The Mathworks Inc., EUA. Abreviação que vem do inglês MATrix LABoratory, é um sistema computacional baseado em matrizes para cálculos matemáticos e de engenharia. Ele integra análise numérica; cálculo com matrizes; aquisição, processamento e análise de dados e sinais; construção de gráficos; desenvolvimento de algoritmos e aplicativos; e modelagem e simulação em ambiente interativo, cujo elemento básico de informação é uma matriz que não requer dimensionamento.

Sua programação é baseada em linhas de comandos, portanto, é preciso conhecê-los, inclusive as formas como eles devem ser escritos. Fazemos as entradas dos comandos na área chamada de “*Command Window*”, Figura B.1.

Como em outros softwares, o MATLAB possui rotinas predefinidas que auxiliam e facilitam a sua programação. Para consultas, possui um sistema de ajuda que pode ser acessado a qualquer hora. O comando *help* provê informações abrangendo muitos tópicos. Assim, quando entramos com o comando `>> help` sem nenhum argumento, o computador responde mostrando uma lista de diretórios, seguidos de uma descrição do respectivo conteúdo. Alguns diretórios estão associados aos comandos básicos do MATLAB. Outros contêm “*toolboxes*” com funções adicionais, cobrindo áreas de aplicações especializadas como *control* e *signal*, assuntos ligados à área de Dinâmica.

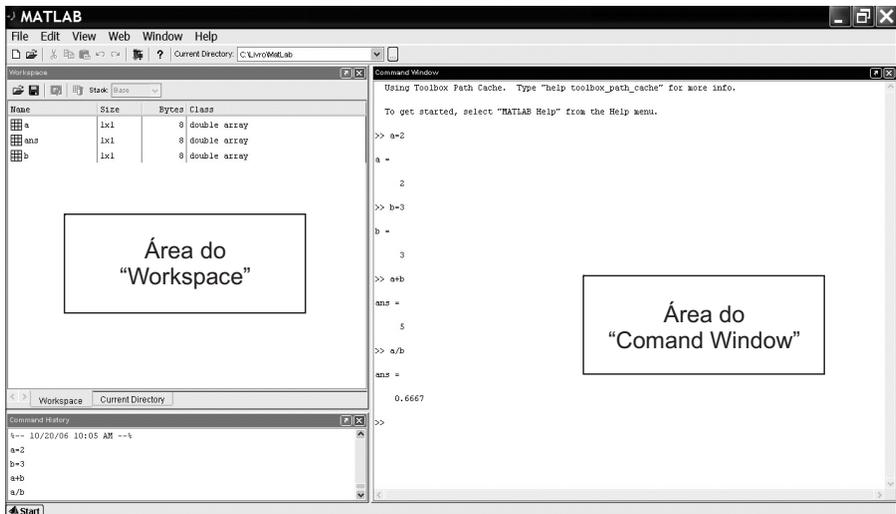


Figura B.1 Visualização da tela do MATLAB, mostrando as áreas do “Comand Window” e do “Workspace”.

Para obtermos uma lista de funções relacionadas a determinado diretório, digitamos *help* seguido do nome do assunto. Aparece então uma lista de comandos, funções e símbolos específicos do MATLAB. O comando *help* seguido desses comandos ou funções fornece informações de como utilizá-los em uma linha de comando. Por exemplo, ao digitar *help elfun*, o programa responde mostrando as funções elementares de matemática, Figura B.2.

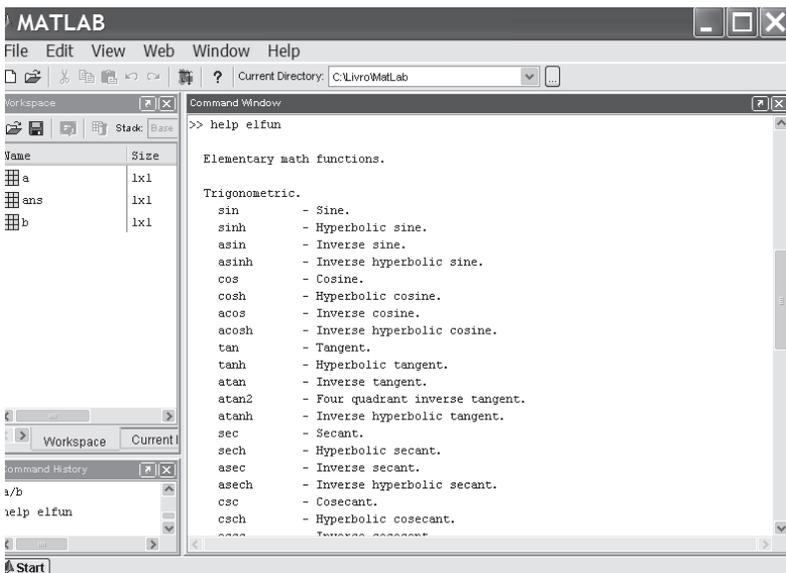


Figura B.2 Funções elementares de matemática.

B.3 – PONTOS INICIAIS

B.3.1 – VARIÁVEIS

O MATLAB trabalha essencialmente com um tipo de variável: uma *matriz* contendo números complexos ou não. Em alguns casos temos uma matriz 1×1 que é um *escalar* ou matrizes $1 \times n$ ou $n \times 1$ que são *vetores*.

As variáveis são definidas pelo usuário, mas devemos evitar o uso de palavras da língua inglesa, pois estas podem coincidir com as palavras reservadas do software. Por exemplo: *angle*, *complex*, etc.

Na tela do MATLAB, a área do “*Workspace*” contém a lista das variáveis definidas, Figuras B.1 e B.2. Os nomes das variáveis são sensíveis às letras maiúsculas e minúsculas. Por exemplo, a variável *A* e *a* são diferentes. O traço sublinhado deve ser usado para criar variável com duas ou mais palavras. Por exemplo, “*momento_fletor*” não é aceito, mas “*momento_fletor*” sim.

A Tabela B.1 resume as regras para a definição das variáveis.

Tabela B.1 Regras para a definição de variáveis.

Regras	Exemplos
Letras maiúsculas e minúsculas criam variáveis distintas.	<i>Volume</i> , <i>volume</i> , <i>voLume</i> são variáveis diferentes.
A função “ <i>namelengthmax</i> ” retorna a quantidade máxima de caracteres para os nomes das variáveis. No ambiente Windows, este valor é 63 para MATLAB 6.5 ou MATLAB 7.	<i>MomentoFletorDaViga</i> atende porque tem 19 caracteres.
As variáveis devem começar com letras e depois podemos ter letras, números ou sublinhados. Caracteres de pontuação não são permitidos.	Estas três variáveis atendem ao requisito: V2ab39_pr Cosseno_diretor_TETA_X Área_da_face1_Corpo32

B.3.2 – LINHAS DE COMANDO

A entrada de dados no MATLAB é feita através de linhas de comando que freqüentemente assumem a forma de uma variável igual a uma expressão matemática ou somente uma expressão, isto é:

```
>> variável = expressão
```

ou simplesmente

```
>> expressão
```

Podemos assim criar variáveis e atribuir a elas valores diretos ou valores calculados de expressões com operadores e outras variáveis. Exemplificando, ao entrarmos $A=35/4$, o computador responde:

```
>> A = 35/4
```

```
A =
```

```
8.75
```

atribuindo o valor $8,75$ à variável A .

Após digitarmos uma linha de comando e apertarmos a tecla *Enter*, o computador responde mostrando o valor da variável. Entretanto, se for utilizado no final da linha um *ponto-e-vírgula* (;), a variável produzida não é mostrada na tela. Assim:

```
>>B = 120;
```

atribui o valor 120 à variável B , mas não retorna o valor de B na tela.

Uma linha pode conter vários comandos desde que separados por *vírgula*. Exemplo:

```
>> ab = 10/2, ac = 30 * 2, ad = 18 + 2
```

```
ab =
```

```
5
```

```
ac =
```

```
60
```

```
ad =
```

```
20
```

Quando uma linha contém uma expressão, sua execução produz um resultado. Quando temos uma variável definida na linha de comando, esta assume o resultado e pode ser utilizada em outra situação. Se for omitida a variável, o MATLAB atribui automaticamente o valor da expressão a uma variável interna chamada *ans*. Assim, com as variáveis A e B anteriores:

```
>> A + B
```

```
ans =
```

```
128.75
```

Quando o sinal de porcentagem “%” aparece em uma linha, o MATLAB ignora o conteúdo que vem após este sinal. Por esta razão o texto que vem depois do sinal “%” é considerado um comentário. Exemplo:

```
>> N_total_AL=250 % quantidade total de alunos matriculados
```

```
N_total_AL =
```

```
250
```

O MATLAB utiliza a seguinte notação para números:

- casa decimal: ponto “.”
- número negativo: sinal “-”
- notação científica: “e”
- notação do número $\sqrt{-1}$: letra “i” ou letra “j”
- notação de um número complexo: $a + bi$ (sem espaço entre o b e o i)

Exemplificando:

```
>> A = -2.5 e-2
```

```
A =  
    - 0.0250
```

```
>> B = 30 - 5i
```

```
B =  
    30.0000    - 5.0000i
```

As expressões podem ser construídas com operadores aritméticos usuais e as regras de precedência:

^	Potência
/	Divisão à direita
\	Divisão à esquerda
*	Multiplificação
+	Adição
-	Subtração

Devemos notar que existem dois símbolos para divisão: a divisão à direita, que é a tradicional, e a divisão à esquerda. A divisão à esquerda $a \backslash b$ significa $a^{-1} * b$. Assim, no caso de escalares, as expressões $1/4$ e $4 \backslash 1$ produzem o mesmo valor numérico, isto é, 0.25.

As variáveis dos exemplos acima são na verdade matrizes escalares, ou seja, matrizes unitárias $I \times I$. Para representarmos matrizes de ordem $m \times n$ (m linhas e n colunas) ou vetores $1 \times n$ (vetor linha com n colunas) e $m \times 1$ (vetor coluna com m linhas), devemos colocar os elementos entre colchetes “[]”, separando cada elemento com um espaço e cada linha com um ponto-e-vírgula. Assim, uma matriz AB de 3×5 pode ser:

```
>> AB = [1 2 3 4 5; 6 7 8 9 10; 11 12 13 14 15]
```

```
AB =
```

```

1  2  3  4  5
6  7  8  9 10
11 12 13 14 15

```

As matrizes podem também ser introduzidas linha a linha, o que recomendamos para matrizes com grandes dimensões. Exemplificando com uma matriz 3×3 , no final de cada linha apertamos a tecla *Enter*.

```

>> B = [10 11 12
13 14 15
16 17 18]

```

```

B =
10 11 12
13 14 15
16 17 18

```

Todas as expressões acima exemplificadas criaram variáveis que são armazenadas na *Área de Trabalho* (*Workspace*) do MATLAB, Figuras B.1 e B.2. Para visualizá-las na área do “*Command Window*” basta entrar com o comando “*who*” na linha de comando ou, para informações mais detalhadas, com o comando “*whos*”.

Para eliminar uma variável do *Workspace* usamos o comando “*clear* variável”. Por exemplo, “>> *clear ab*” elimina a variável “*ab*”. Usando somente o “*clear*”, eliminamos todas as variáveis.

B.3.3 – NÚMERO E MATRIZES COMPLEXAS

Números complexos são permitidos nas operações e funções do MATLAB. Os números complexos são introduzidos usando as funções especiais *i* e *j*. Por exemplo: >> $z = 3 + 4 * i$ ou >> $z = 3 + 4i$ ou >> $z = 3 + 4 * j$ ou >> $z = 3 + 4j$ produzem o mesmo número complexo.

Outro exemplo é >> $w = r * \exp(i * \theta)$, que é a fórmula de Euler (equação A.5); $Me^{i\theta}$, em que *M* é o módulo e θ é a fase (em radianos). Exemplificando, para o número complexo $1 + i$ podemos escrever: $(2/\sqrt{2})e^{i\pi/4}$, ou seja:

```

>> w = (2/sqrt(2)) * exp(i * pi/4)

```

```

w =
1.0000 + 1.0000i

```

O sinal de multiplicação por *i* nem sempre pode ser omitido. Por exemplo: $(2 + 3)i$, $\exp(ipi/4)$, $\exp(i3.1415/4)$, $\exp(pii/4)$ não são aceitos, mas sim $(2 + 3) * i$, $\exp(i * pi/4)$, $\exp(i * 3.1415/4)$, $\exp(3.1415i/4)$, $\exp(3.1415 * i/4)$, $\exp(pi * i/4)$.

Algumas funções para números complexos estão na Tabela B.2.

Tabela B.2 Funções complexas

Função	Descrição	Exemplo: Considere $nc = -3 - 4i$
<code>abs ()</code>	Módulo	<code>abs(nc) = 5</code>
<code>angle ()</code>	Ângulo em radianos. Nem sempre válido em Dinâmica. No exemplo, a fase seria +4.0689 rad	<code>angle(nc) = -2.2143</code>
<code>real ()</code>	Parte real	<code>real(nc) = -3</code>
<code>imag ()</code>	Parte imaginária	<code>imag(nc) = -4</code>
<code>conj ()</code>	Conjugado complexo	<code>conj(nc) = -3 + 4i</code>
<code>complex(a,b)</code>	Número complexo: $a + bi$	<code>complex(-5, -9) = -5 - 9i</code>

A função `atan2(y, x)` também poderia ser usada para calcular o ângulo. Por exemplo:

```
>> atan2(-4, -3)
```

```
ans =
```

```
-2.2143
```

Ambas as funções `angle ()` e `atan2(y, x)` não garantem o cálculo correto da fase do número complexo, sob o ponto de vista de Dinâmica, isto é, pode não corresponder à fase da Resposta em Frequência (vide Apêndice A, seção A.2.1).

Quanto à introdução de matrizes complexas, as declarações abaixo mostram dois caminhos convenientes. Tanto

```
>> A = [1 2; 3 4] + i * [5 6; 7 8]
```

como

```
>> A = [1 + 5 * i 2 + 6 * i; 3 + 7 * i 4 + 8 * i]
```

produzem o mesmo resultado.

Quando as funções `i` e `j` forem declaradas como variáveis, de forma que tenham seus valores originais modificados, uma nova unidade complexa deverá ser criada. Por exemplo:

```
>>i = 2
```

```
i =
```

```
2
```

```
>> ii = sqrt(-1);
```

```
>> z = 3 + 4 * ii
```

```
z =
```

```
3.0000 + 4.0000i
```

Este exemplo mostra a inconveniência de declarar o i como uma variável porque o computador continua mostrando a parte imaginária do número complexo com a letra i , apesar de ter sido definido com valor igual à dois ($i = 2$).

B.3.4 – FUNÇÕES

No MATLAB as funções são escritas usando letras minúsculas. Elas funcionam de forma similar a uma caixa-preta, onde temos entradas e saídas. O algoritmo do cálculo executado pela função e as eventuais variáveis auxiliares utilizadas no processo são inacessíveis ao usuário. Somente observamos as entradas e as saídas.

O argumento de uma função é colocado entre *parênteses*, que pode ter uma ou mais entradas. As entradas podem conter uma variável e/ou uma expressão matemática, inclusive contendo funções. Exemplificando, sejam as funções $atan(x)$ e $atan2(y, x)$.

```
>> a = 4;
>> b = 10;
>> c = atan(sqrt(a ^ 2 + b ^ 2)/(a + b))
c =
    0.6557
>> d=atan2((a+b)-(a+b), -1*a*b/a*b)
d =
    3.1416
```

O ângulo d é a fase de um número no eixo real negativo com coordenadas $x = -1$ e $y = 0$, portanto $d = \pi$.

Na Tabela B.3 temos algumas funções básicas do MATLAB. Havendo dúvidas de como usá-las, recomendamos consultar o comando *help*.

B.3.5 – FORMATO DE SAÍDA

O formato numérico exibido na tela pode ser modificado se utilizarmos o comando *format*. Este comando afeta somente o modo como as matrizes são mostradas na tela e não como elas são computadas ou salvas. O MATLAB efetua todas as operações com dupla precisão.

Se todos os elementos da matriz são inteiros exatos, a matriz é mostrada em um formato sem qualquer ponto decimal. Por exemplo:

```
>> x = [ -1 0 1 ]
x =
    -1 0 1
```

Tabela B.3 Funções básicas do MATLAB.

Funções	Descrições
acos	Arco cosseno.
acosh	Arco cosseno hiperbólico.
asin	Arco seno.
asinh	Arco seno hiperbólico.
atan	Arco tangente.
atan2	Arco tangente (quatro quadrantes).
atanh	Arco tangente hiperbólico.
cos	Cosseno.
cosh	Cosseno hiperbólico.
sin	Seno.
sinh	Seno hiperbólico.
tan	Tangente.
tanh	Tangente hiperbólica.
exp	Exponencial.
log	Logaritmo natural.
log10	Logaritmo na base 10.
sqrt	Raiz quadrada.
round	Arredondamento para o número inteiro mais próximo.
sign	Função sinal.

Se pelo menos um dos elementos da matriz não é inteiro exato, há várias possibilidades de formatar a saída. O formato “*default*”, chamado de formato *short*, mostra aproximadamente 5 dígitos significativos ou usa notação científica. A Tabela B.4 mostra os tipos de formatos para o vetor x dado por:

```
>> x = [pi 1.2345e-6]
```

Tabela B.4 Tipos de formato.

Tipo	Formato	Exemplo
format short	Precisão simples	3.1416 0.0000
format short e	Precisão simples e base e	3.1416e+000 1.2345e-006
format long	Precisão dupla	3.14159265358979 0.00000123450000
format long e	Precisão dupla e base e	3.141592653589793e+000 1.234500000000000e-006
format hex	Hexadecimal	400921fb54442d18 3eb4b6231abfd271
format rat	Quociente	355/113 1/810045
format bank	Duas casas decimais	3.14 0.00
format +	Sinal	++

B.4 – MATRIZES E VETORES

B.4.1 – COMO DEFINIR MATRIZES E VETORES

Vetores e matrizes são definidos com a seguinte notação:

- “[” indica o início da definição dos elementos da matriz;
- “] ” indica o final da definição dos elementos da matriz;
- “ ” (branco) ou “ , ” separa elementos da mesma linha, definindo colunas;
- “ ; ” finaliza definição de uma linha. O “*Enter*” também finaliza a definição de uma linha da matriz.
- (L, C) é o endereço de um elemento, sendo L a linha e C a coluna.

Exemplificando: Seja A uma matriz de 4 por 3 (4 linhas, 3 colunas):

```
>> A = [1 2 3; 4, 5, 6; 7 8 9; 10 11 12]
```

```
A =
```

```
 1  2  3
 4  5  6
 7  8  9
10 11 12
```

```
>> A (3, 1) % localiza o elemento da terceira linha, primeira coluna
```

```
ans =
```

```
 7
```

Nos exemplos dados até este ponto as matrizes e os vetores foram introduzidos digitando todos os seus elementos. Quando o vetor ou matriz possui muitos elementos, o uso da notação de *dois-pontos* pode ser conveniente. Esta notação é essencial para criação de vetores e matrizes, no caso de a entrada ter valores ordenados. Ela possui a sintaxe $J:D:K$, em que J é o valor inicial, D é o incremento (pode ser omitido se $D = 1$) e K é o valor final. Exemplos:

```
>> w = 2:10
```

```
w =
```

```
 2  3  4  5  6  7  8  9 10
```

Com o passo diferente da unidade:

```
>> y = 0:pi/4:pi
```

```
y =
```

```
 0  0.7854  1.5708  2.3562  3.1416
```

Com passos negativos:

```
>> z = 6:-1:1
```

```
z =
```

```
6 5 4 3 2 1
```

O valor do passo pode ser qualquer número real.

Outra maneira de gerar vetores é através da função *linspace*. Por exemplo:

```
>> k = linspace (0, 1, 6)
```

```
k =
```

```
0 0.2000 0.4000 0.6000 0.8000 1.0000
```

gera um vetor linearmente espaçado de 0 a 1, contendo 6 elementos.

O uso desta notação pode também facilitar a manipulação de vetores e matrizes, através da sintaxe $M(:, k)$ ou $M(k, :)$, em que M é um vetor ou matriz e k é um índice para selecionar determinadas linhas, colunas ou elementos. Por exemplo, seja a matriz w :

```
>> w = [ 10:-1:7; [ 3 1 6 2 ]; 1:4]
```

```
w =
```

```
10 9 8 7
```

```
3 1 6 2
```

```
1 2 3 4
```

```
>> w(2,:)
```

```
ans =
```

```
3 1 6 2
```

seleciona a segunda linha da matriz e lista todas as colunas.

```
>> w(:,3)
```

```
ans =
```

```
8
```

```
6
```

```
3
```

lista todas as linhas da terceira coluna.

```
>> w(:,[2 4])
```

```
ans =
```

```
9 7
```

```
1 2
```

```
2 4
```

lista todos os elementos da segunda e quarta colunas.

B.4.2 – OPERAÇÕES COM MATRIZES

As operações com matrizes estão apresentadas na Tabela B.5. Para ilustrar os exemplos, vamos considerar as matrizes *A1* e *B1*.

>> A1 = [1 2; 3 4];

A1 =

1 2

3 4

>> B1 = [6 7; 8 9]

B1 =

6 7

8 9

Tabela B.5 Operações com matrizes.

Operação	Descrição	Exemplo
+	Soma	>> A1 + B1 ans = 7 9 11 13
-	Subtração	>> A1 - B1 ans = -5 -5 -5 -5
.*	Multiplicação escalar (elemento a elemento)	>> A1 .* B1 ans = 6 14 24 36
./	Divisão escalar (elemento a elemento)	>> A1 ./B1 ans = 0.1667 0.2857 0.3750 0.4444
.^	Potencia escalar (elemento a elemento)	>> A1 .^ B1 ans = 1 128 6561 262144
*	Multiplicação matricial	>> A1 * B1 ans = 22 25 50 57

Tabela B.5 Operações com Matrizes. (Continuação.)

Operação	Descrição	Exemplo
\wedge	Potência – matriz elevada a um escalar ($AI * AI = AI \wedge 2$)	<pre>>> AI ^ 2 ans = 7 10 15 22</pre>
$/$	Divisão matricial (AI/BI equivale a $AI * BI^{-1}$)	<pre>>> AI/BI ans = 3.5000 -2.5000 2.5000 -1.5000</pre>
\backslash	Divisão à esquerda ($AI \backslash BI$ equivale a $AI^{-1} * BI$)	<pre>>> AI \ BI ans = -4.0000 -5.0000 5.0000 6.0000</pre>
$'$	Transposta	<pre>>> AI' ans = 1 3 2 4</pre>

A seguir apresentamos comentários adicionais de algumas dessas operações.

(i) **Transposta**

O caractere apóstrofo “ ’ ” indica a transposta de uma matriz. Por exemplo:

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 0]
```

```
A =
```

```
    1    2    3
    4    5    6
    7    8    0
```

```
>> B = A'
```

```
B =
```

```
    1    4    7
    2    5    8
    3    6    0
```

Se aplicarmos o “ ’ ” a um vetor linha, obtemos um vetor coluna.

```
>> x = [-1 0 2]'
```

```
x =
```

```
   -1
    0
    2
```

Se Z for uma matriz complexa, Z' será o conjugado complexo composto. Para obtermos simplesmente a matriz transposta usamos Z' , como mostra o exemplo:

>> $Z = [1 \ 2; 3 \ 4] + [5 \ 6; 7 \ 8]*i$, $Z1 = Z'$, $Z2 = Z'$

$Z =$

$$\begin{array}{cc} 1.0000 + 5.0000i & 2.0000 + 6.0000i \\ 3.0000 + 7.0000i & 4.0000 + 8.0000i \end{array}$$

$Z1 =$

$$\begin{array}{cc} 1.0000 - 5.0000i & 3.0000 - 7.0000i \\ 2.0000 - 6.0000i & 4.0000 - 8.0000i \end{array}$$

$Z2 =$

$$\begin{array}{cc} 1.0000 + 5.0000i & 3.0000 + 7.0000i \\ 2.0000 + 6.0000i & 4.0000 + 8.0000i \end{array}$$

(ii) Adição e Subtração

A adição e subtração de matrizes são indicadas, respectivamente, por “+” e “-”. As operações são definidas somente se as matrizes tiverem as mesmas dimensões. Por exemplo, a soma com as matrizes mostradas acima, $A + x$, não é correta porque A é 3×3 e x é 3×1 . Porém, a soma é possível para as últimas matrizes A e B dadas.

>> $C = A + B$

$C =$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 0 \end{array}$$

A adição e subtração são também definidas se um dos operadores for um *escalar* (matriz 1×1). Neste caso, o escalar é adicionado ou subtraído de todos os elementos. Por exemplo:

>> $y = x - 1$

$y =$

$$\begin{array}{c} -2 \\ -1 \\ 1 \end{array}$$

(iii) Multiplicação

A multiplicação de matrizes é indicada por “*” (asterisco). Uma multiplicação $g * b$ é definida somente se a segunda dimensão de g for igual à primeira dimensão de b . Em outras palavras, se temos $A * x$, o número de colunas de A deve ser igual ao

número de linhas de x . Vamos observar alguns exemplos da multiplicação envolvendo vetores e matrizes. Assim:

```
>> x' * y
```

```
ans =
```

```
4
```

Neste caso observamos que o resultado da multiplicação $y' * x$ será o mesmo. Há dois outros produtos que resultam em transpostas um do outro.

```
>> x * y'
```

```
ans =
```

```
2 1 -1
```

```
0 0 0
```

```
-4 -2 2
```

```
>> y * x'
```

```
ans =
```

```
2 0 -4
```

```
1 0 -2
```

```
-1 0 2
```

No caso de uma matriz e um vetor, vamos efetuar o produto de $A * x$:

```
>> b = A * x
```

```
b =
```

```
5
```

```
8
```

```
-7
```

Um escalar pode multiplicar ou ser multiplicado por qualquer matriz:

```
>> pi * x
```

```
ans =
```

```
-3.1416
```

```
0
```

```
6.2832
```

(iv) Divisão

Existem dois símbolos para divisão de matrizes no MATLAB: “\” e “/”. Se A for uma matriz quadrada não singular,¹ então $A \setminus B$ e B / A correspondem, respectivamente, à multiplicação à esquerda e à direita da matriz B pela inversa da matriz

1. Uma matriz quadrada é singular quando o determinante de A é zero.

A. Explicitando, $A \setminus B$ significa $\text{inv}(A) * B$ e B / A significa $B * \text{inv}(A)$, sendo o resultado obtido diretamente. Em geral:

- $X = A \setminus B$ é a solução de $A * X = B$
- $X = B / A$ é a solução de $X * A = B$

Para as matrizes A e B dadas temos:

```
>> X = A \ B
```

```
X =
```

```
 -0.3333  -3.3333  -5.3333
  0.6667   3.6667   4.6667
         0  -0.0000   1.0000
```

```
>> X = B / A
```

```
X =
```

```
 3.6667  -0.6667   0.0000
 3.3333  -0.3333   0.0000
 4.0000  -2.0000   1.0000
```

Como outro exemplo, vamos observar o resultado de $A \setminus b$. Vimos anteriormente que o vetor b foi obtido do produto $A * x$. Então, $A \setminus b = \text{inv}(A) * b = \text{inv}(A) * A * x$, que resulta o próprio vetor x . Implementando o cálculo:

```
>> z = A \ b
```

```
z =
```

```
 -1
  0
  2
```

(v) Potência

A expressão $A ^ p$ eleva A à p -ésima potência e é definida somente se A for uma matriz quadrada e p um escalar. Se p for um inteiro maior do que um , a potência é computada como múltiplas multiplicações. Por exemplo:

```
>> A ^ 3
```

```
ans =
```

```
 279  360  306
 684  873  684
 738  900  441
```

B.4.3 – FUNÇÕES MATRICIAIS

Dada uma matriz Z , vamos observar algumas funções matriciais usadas em Dinâmica.

a) Matriz Z :

$$Z = [0 \ -1 \ 1; -1 \ 0 \ 1; 1 \ 1 \ 0]$$

$Z =$

$$\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

b) $\det(Z)$:

Para uma matriz quadrada, $\det(Z)$ calcula o determinante da matriz.

$\gg \det(Z)$

ans =

$$-2$$

c) $\text{eig}(Z)$:

Para uma matriz quadrada, $\text{eig}(Z)$ retorna um vetor com os *autovalores* da matriz.

$\gg \text{eig}(Z)$

ans =

$$\begin{array}{c} -2.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{array}$$

d) $[Cvet, Dval] = \text{eig}(Z)$

Para uma matriz quadrada, esta função retorna duas matrizes: a matriz $Cvet$ tem os *autovetores* nas colunas e a $Dval$ contém os correspondentes *autovalores* na diagonal. (Cve e $Dval$ são denominações arbitrárias.)

$\gg [Cvet, Dval] = \text{eig}(Z)$

$Cvet =$

$$\begin{array}{ccc} -0.5774 & -0.3938 & 0.7152 \\ -0.5774 & 0.8163 & -0.0166 \\ 0.5774 & 0.4225 & 0.6987 \end{array}$$

```
Dval =
  -2.0000    0    0
    0  1.0000    0
    0    0  1.0000
```

e) `inv(Z)`

Para uma matriz quadrada com determinante diferente de zero, *inv(Z)* é a matriz inversa de *Z*.

```
>> inv(Z)
ans =
  0.5000 -0.5000  0.5000
 -0.5000  0.5000  0.5000
  0.5000  0.5000  0.5000
```

Podemos ainda citar três funções especiais: (i) a função *eye(L,C)* que gera uma matriz identidade com *L* linhas e *C* colunas; (ii) a função *ones(L,C)* que gera uma matriz com todos os elementos iguais a *um*; e (iii) a função *zeros(L,C)* que produz uma matriz com todos os elementos *nulos*. Observando um exemplo para a função *eye(L,C)* temos:

```
>> eye(3,5)
ans =
  1  0  0  0  0
  0  1  0  0  0
  0  0  1  0  0
```

B.5 – OPERAÇÕES COMPARATIVAS E LÓGICAS

Para matrizes de dimensões iguais, há *seis* operações para comparação e *três* operações lógicas, Tabela B.6.

Tabela B.6 Operações comparativas e lógicas.

Comparativas		Lógicas	
<	Menor	&	E
<=	Menor ou igual		Ou
>	Maior	~	Não
>=	Maior ou igual		
==	Igual		
~=	Diferente		

A comparação é feita entre os pares de elementos correspondentes e o resultado é uma matriz composta de números *1* para valores verdadeiros e *0* (*zero*) para valores falsos. Por exemplo:

```
>> 3 >= 2
```

```
ans =
```

```
1
```

que é a resposta de uma comparação verdadeira.

Exemplificado o uso dos operadores lógicos **&** (e) e **|** (ou), então:

```
>> aL = (2 == 2 & 3 == 4)
```

```
aL =
```

```
0
```

```
>> bL = (2 == 2 | 3 == 4)
```

```
bL =
```

```
1
```

B.6 – POLINÔMIOS

B.6.1 – REPRESENTAÇÃO DE POLINÔMIOS NO MATLAB

No MATLAB os polinômios são representados como vetores de uma linha, com os coeficientes colocados em ordem decrescente, seguindo a sintaxe usual, isto é:

$$a_n \cdot X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \dots + a_2 \cdot X^2 + a_1 \cdot X^1 + a_0 \cdot X^0 \quad (\text{B.1})$$

Por exemplo, os polinômios $P = S^3 - 6S^2 - 5S - 27$ e $R = S^3 + 2S$ são representados pelos vetores:

```
>> P = [1 -6 -5 -27]
```

```
P =
```

```
1 -6 -5 -27
```

```
>> R = [1 0 2 0]
```

```
R =
```

```
1 0 2 0
```

B.6.2 – OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

Para realizar operações com polinômios usamos os operadores comuns para adição (+) e para subtração (-); já para as operações de multiplicação e divisão utilizamos os comandos especiais **conv** (multiplicação) e **deconv** (divisão).

A diferença entre esses comandos especiais e os operadores normais é que eles efetuam a operação distributiva entre os elementos do polinômio. Por exemplo, a multiplicação dos polinômios $2S^3 + 4S^2 - S$ por $3S + 5$ é feita da seguinte forma:

```
>> conv ([2 4 -1 0], [3 5])
```

```
ans =
```

```
6 22 17 -5 0
```

que representa o polinômio $6S^4 + 22S^3 + 17S^2 - 5S$.

Para realizar a divisão entre $S^3 - 10S^2 - 3S + 12$ por $S - 1$ fazemos:

```
>> deconv ([1 -10 -3 12], [1 -1])
```

```
ans =
```

```
1 -9 -12
```

que representa o polinômio $S^2 - 9S - 12$.

Algumas outras funções relacionadas com polinômios são:

- **roots** – calcula as raízes do polinômio;
- **polyval** – calcula o valor do polinômio no ponto;
- **polyder** – faz a derivada.

Para o polinômio $y = S^2 - 9S - 12$, as funções **roots** e **polyval** resultam:

```
>> y=[1 -9 -12];
```

```
>> roots(y)
```

```
ans =
```

```
10.1789
```

```
-1.1789
```

```
>> polyval(y, -2)
```

```
ans =
```

```
10
```

que é o valor de y quando $s = -2$.

B.7 – GRÁFICOS

B.7.1 – INTRODUÇÃO AOS GRÁFICOS

O MATLAB proporciona técnicas sofisticadas para visualização de dados. Ele trabalha com gráficos de linhas e superfícies.

Neste apêndice apresentamos os fundamentos para elaboração de gráficos bidimensionais (2D).

A lista abaixo contém as funções que produzem gráficos simples. Estas funções se diferem apenas na maneira pela qual as escalas dos eixos dos gráficos se apresentam. Cada uma aceita a entrada na forma de vetores ou matrizes e, automaticamente, define as escalas dos eixos de modo que os dados de entrada fiquem bem acomodados. Nesta descrição chamamos de “*eixo x*” o eixo horizontal e de “*eixo y*” o eixo vertical.

- **plot** – cria um gráfico de vetores ou de colunas de matrizes;
- **loglog** – cria um gráfico utilizando escalas logarítmicas para ambos os eixos;
- **semilogx** – cria um gráfico utilizando escala logarítmica no eixo x e escala linear no eixo y;
- **semilogy** – cria um gráfico utilizando escala logarítmica no eixo y e escala linear no eixo x.

Podemos adicionar aos gráficos: título, nome aos eixos, linhas de grade e textos. Para tal utilizamos:

- **title** – adiciona um título ao gráfico;
- **xlabel** – define um nome para a variável do eixo x;
- **ylabel** – define um nome para a variável do eixo y;
- **text** – adiciona um texto em lugar específico;
- **gtext** – adiciona um texto ao gráfico utilizando o mouse;
- **grid** – ativa as linhas de grade;
- **legend** – adiciona legenda.

B.7.2 – CONSTRUINDO GRÁFICOS

Se y for um vetor, o comando *plot(y)* produz um gráfico dos elementos de y versus o índice dos elementos de y . Quando forem especificados dois vetores, o comando *plot(a, b)* produz um gráfico colocando o vetor a no eixo horizontal (eixo x) e o vetor b no eixo vertical (eixo y).

Podemos também, com um único comando *plot*, especificar vários grupos de dados (vários y 's em função de x) e definir o estilo de linha e a cor que serão usados em cada grupo. Exemplificando:

```
>> t = 0:pi/100:2 * pi;
>> x = sin(t); y1 = sin(t + .25); y2 = sin(t + .5);
>> plot(x,y1,'r-',x,y2,'g--')
>> title('Figura de Lissajous')
>> xlabel('x=sin(t)')
>> ylabel('Variáveis y1 e y2')
```

```
>> legend('y1 = sen(t + 0.25)', 'y2 = sen(t + 0.5)')
```

O `plot` produz um gráfico com duas curvas, $y1$ versus x e $y2$ versus x , usando os mesmos eixos. O gráfico do primeiro grupo de dados ($y1$) é feito com uma linha vermelha sólida e do segundo grupo ($y2$), com uma linha verde tracejada. A Figura B.3 ilustra o gráfico gerado pelos comandos listados acima.

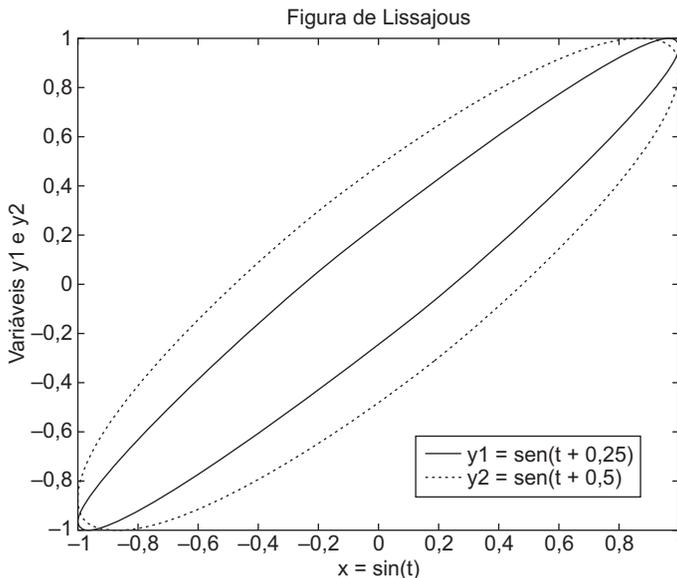


Figura B.3 Gráfico gerado pelos comandos declarados acima (`plot`, `title`, `xlabel`, `ylabel` e `legend`).

B.7.3 – ESTILOS DE LINHA, MARCADORES E COR

Conforme foi ilustrado no exemplo anterior, a função `plot` pode ter argumentos objetivando especificar vários estilos de linhas, símbolos de traçado e cores. Na linha de comando, escrevemos:

```
>> plot(X, Y, S)
```

em que S é uma seqüência de caracteres que o MATLAB interpreta como texto (string), sempre escrito entre apóstrofes e construído com os caracteres mostrados na Tabela B.7.

Por exemplo, `plot(X, Y, 'b:*')` traça o gráfico com linha pontilhada azul, colocando um asterisco azul em cada ponto dos dados.

Quando nenhuma cor é especificada, a função `plot` automaticamente utiliza as cores na ordem da Tabela B.7. Assim, se tivermos apenas uma linha, o gráfico será traçado em amarelo.

Tabela B.7 Estilos de linhas, marcadores e cor.

Símbolo	Cor	Símbolo	Estilo do marcador e da linha
y	amarelo	.	ponto
m	magenta	o	círculo (letra "o")
c	azul-claro	x	x
r	vermelho	+	sinal positivo
g	verde	*	asterisco
b	azul	s	quadrado
w	branco	d	losango
k	preto	v	triângulo para baixo
		^	triângulo para cima
		p	pentagrama
		—	linha sólida
		:	linha pontilhada
		-.	linha traço e ponto
		--	linha tracejada

B.8 – FRAÇÕES PARCIAIS

No Capítulo 4 (seção 4.8.1) foi recomendado fazer a Transformada Inversa de Laplace utilizando tabelas como a do Apêndice D. Vimos que o procedimento se constitui em realizar uma série de tarefas, sendo as mais trabalhosas fatorar o denominador e fazer a expansão em frações parciais. O MATLAB facilita estas operações com a função *residue(n, d)*, em que *n* é o polinômio do numerador e *d*, o polinômio do denominador.

Quando fazemos $[r; p, k]=\text{residue}(n, d)$, o computador responde colocando no vetor *r* os coeficientes das frações parciais, no vetor *p* os respectivos pólos e no vetor *k* os termos diretos (quociente da divisão). Para ilustrar a aplicação desta função vamos repetir os exemplos dados nas seções 4.8.3 e 4.8.4.

(1) **Exemplo 1:** Obtenha a função $f(t)$ sendo

$$F(s) = \frac{4s^4 + 32s^3 + 98s^2 + 116s + 38}{2s^3 + 12s^2 + 22s + 12}$$

Usando o MATLAB:

```
>> num=[4 32 98 116 38]; den=[2 12 22 12];
>> [r p k] = residue(num, den)
```

```
r =
    8.0000
   -3.0000
   -2.0000
```

```
p =
   -3.0000
   -2.0000
   -1.0000
```

```
k =
     2     4
```

Dos valores de k , p e r montamos a fração expandida:

$$F(s) = 2s + 4 + \frac{8}{s+3} + \frac{-3}{s+2} + \frac{-2}{s+1} \quad (\text{B.2})$$

Consultando uma tabela da Transformada obtemos $f(t)$ que é idêntica à equação 4.167, isto é:

$$f(t) = 2\delta'_+(t) + 4\delta_+(t) + (8e^{-3t} - 3e^{-2t} - 2e^{-t})u_+(t) \quad (\text{B.3})$$

(2) Exemplo 2: Obtenha $f(t)$ sendo $F(s) = \frac{18s^2 + 36s + 24}{(6s+6)(s+2)^3}$

Usando o MATLAB:

```
>> num=[18 36 24]; den = conv([6 6], conv([1 2], conv([1 2],[1 2]]));
>> [r p k] = residue(num, den)
```

```
r =
   -1.0000
    2.0000
   -4.0000
    1.0000
```

```
p =
   -2.0000
   -2.0000
   -2.0000
   -1.0000
```

$k =$

$[]$

Observando k , p e r montamos a fração expandida:

$$F(s) = \frac{-1}{(s+2)} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{-4}{(s+2)^3} + \frac{1}{(s+1)} \quad (\text{B.4})$$

Através de uma tabela da Transformada obtemos $f(t)$ que é idêntica à equação 4.176, isto é:

$$f(t) = (-1e^{-2t} + 2te^{-2t} - 2t^2e^{-2t} + e^{-t})u_+(t) \quad (\text{B.5})$$

(3) Exemplo 3: Obtenha $f(t)$ sendo $F(s) = \frac{s+3}{s^3+3s^2+6s+4}$

Usando o MATLAB:

```
>> num=[1 3]; den = [1 3 6 4];
```

```
>> [r p k] = residue(num, den)
```

$r =$

```
-0.3333 - 0.2887i
```

```
-0.3333 + 0.2887i
```

```
0.6667
```

$p =$

```
-1.0000 + 1.7321i
```

```
-1.0000 - 1.7321i
```

```
-1.0000
```

$k =$

$[]$

Observando k , p e r montamos a fração expandida:

$$F(s) = \frac{-0,3333 - 0,2887i}{(s+1-1,7321i)} + \frac{-0,3333 + 0,2887i}{(s+1+1,7321i)} + \frac{0,6667}{(s+1)} \quad (\text{B.6})$$

Combinando as duas primeiras frações, conforme mostra a equação 4.189, obtemos $F(s)$ que é idêntica à equação 4.190.

$$F(s) = -0,6667 \frac{(s-0,5)}{[(s+1)^2+3]} + \frac{0,6667}{(s+1)} \quad (\text{B.7})$$

B.9 – A RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

a) Função de Transferência

Para obtermos o gráfico da resposta em frequência no MATLAB não é necessário preparar previamente a função de transferência em termos do ganho K , conforme exigido quando fazemos o gráfico manualmente (vide seção 6.5). Contudo, se o numerador ou o denominador da função de transferência tiver multiplicações de polinômios, o primeiro passo é efetuar os produtos para resultar em somente dois polinômios, um para o numerador e outro para o denominador.

b) O Comando Bode

Quando entramos com o comando *bode* para fazer o gráfico da resposta em frequência, obtemos na tela o *gráfico* em mono-log, isto é, as variações do módulo (em db) e da fase (em graus) em função da frequência (em rad/seg) em escala logarítmica.

Quando usamos o comando *bode* para colocar em uma *matriz* os dados da resposta em frequência, a relação de amplitudes é armazenada em escala linear, ou seja, não é em db. Nesta forma o comando *bode* não traça o gráfico.

Considerado que *num* e *den* são os respectivos polinômios do numerador e denominador da função de transferência, quando usamos *bode(num, den)*, o computador faz o gráfico escolhendo a faixa de frequência. Se tivermos interesse na resposta em frequência em uma certa faixa de frequência, devemos entrar com o comando *bode(num, den, W)*. O vetor *W* pode ser facilmente criado com o comando *logspace(di, df, n)*. Este comando gera um vetor de *n* pontos igualmente espaçados em escala logarítmica, entre as décadas 10^{di} e 10^{df} . Por exemplo, para gerar 1000 pontos entre 1 rad/seg e 10000 rad/seg fazemos:

```
>>W = logspace(0, 4, 1000)
```

Os exemplos abaixo ilustram o uso do comando *bode*.

c) Exemplos de Resposta em Frequência com MATLAB

(1) Exemplo 1

Obter o gráfico e tabela da resposta em frequência da função de transferência:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{(2s^2 + 10s + 25)}{(5s + 1)(s^2 + 3s + 1)} \quad (\text{B.8})$$

No MATLAB vem:

```
>> num=[2 10 25]; % define polinômio do numerador
```

```
>> den = conv([5 1],[1 3 1]); % define polinômio do denominador
```

```
>> bode(num, den) % faz o gráfico, vide Figura B.4
>> [M Fa Fr]=bode(num, den); % colunas com módulo, fase e frequência da resp.
em freq.
```

```
>> DBM = 20 * log10(M); % calcula modulo em db
```

```
>> A=[M DBM Fa Fr] % concatena colunas na matriz A e mostra dados
```

```
A =
```

24.9601	27.9449	-4.3518	0.0100
24.9485	27.9409	-4.9414	0.0114
24.9134	27.9287	-6.4108	0.0147
24.8545	27.9081	-8.3140	0.0191
24.7560	27.8736	-10.7755	0.0248
24.5919	27.8158	-13.9510	0.0322
24.3211	27.7197	-18.0311	0.0419
23.8800	27.5607	-23.2384	0.0543
23.1765	27.3010	-29.8138	0.0705
22.0918	26.8846	-37.9802	0.0916
21.6159	26.6955	-41.1310	0.1000
20.5004	26.2353	-47.8772	0.1188
18.3230	25.2599	-59.4723	0.1543
15.6010	23.8630	-72.4831	0.2003
12.5415	21.9670	-86.3652	0.2599
9.4752	19.5317	-100.3895	0.3374
6.7319	16.5628	-113.7771	0.4380
4.5221	13.1068	-125.8392	0.5686
2.8953	9.2340	-136.0650	0.7381
1.7815	5.0158	-144.1023	0.9581
1.6395	4.2943	-145.1915	1.0000
1.0607	0.5120	-149.6160	1.2436
0.6154	-4.2174	-152.0763	1.6143
0.5603	-5.0311	-152.1334	1.6870
0.3524	-9.0582	-150.6289	2.0956
0.2054	-13.7474	-144.4549	2.7202
0.1279	-17.8624	-134.1330	3.5310
0.0878	-21.1312	-122.6346	4.5836

0.0651	-23.7300	-113.0626	5.9498
0.0500	-26.0142	-106.2779	7.7234
0.0390	-28.1874	-101.7407	10.0000
0.0389	-28.2088	-101.7042	10.0255
0.0302	-30.4005	-98.5935	13.0140
0.0234	-32.6106	-96.4162	16.8932
0.0181	-34.8393	-94.8468	21.9287
0.0140	-37.0816	-93.6892	28.4652
0.0108	-39.3331	-92.8215	36.9501
0.0083	-41.5903	-92.1641	47.9642
0.0064	-43.8510	-91.6628	62.2614
0.0049	-46.1139	-91.2790	80.8203
0.0040	-47.9618	-91.0329	100.0000

Nas colunas da matriz A temos:

- primeira coluna: relação de amplitudes em escala linear;
- segunda coluna: relação de amplitudes em db;
- terceira coluna: fase em graus;
- quarta coluna: freqüência em rad/seg.

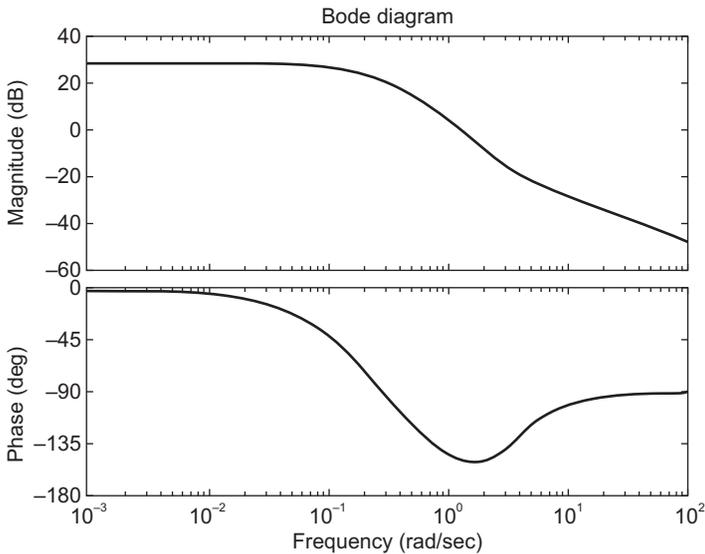


Figura B.4 Resposta em freqüência da função de transferência da equação B.8, obtida através do comando *bode*.

(2) Exemplo 2

Para a faixa de frequência de 1 rad/seg a 10 rad/seg, contendo 10 pontos espaçados em escala logarítmica, obter a tabela da resposta em frequência da função de transferência:

$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{0,694641(s^2 + 3,2s + 64)}{s(s + 2,5)} \quad (\text{B.9})$$

Neste exercício temos dois polinômios no numerador e dois no denominador.

Assim:

```
>> a = [0.694641]; b = [1 3.2 64];  
>> c = [1 0]; d = [1 2.5];  
>> N = conv(a, b); D = conv(c, d);  
>> W = logspace(0, 1, 10);  
>> [M Fa Fre] = bode(N, D, W);  
>> DBM = 20 * log10(M);  
>> A = [M DBM Fa Fre]
```

A =

16.2739	24.2298	-108.8936	1.0000
11.9399	21.5400	-113.5283	1.2915
8.5144	18.6031	-118.7294	1.6681
5.8381	15.3255	-124.1290	2.1544
3.8012	11.5984	-129.0678	2.7826
2.3119	7.2794	-132.4890	3.5938
1.2768	2.1225	-132.4104	4.6416
0.6064	-4.3446	-123.0056	5.9948
0.2768	-11.1557	-81.3925	7.7426
0.3246	-9.7732	-27.5973	10.0000

Nas colunas da matriz A temos:

- primeira coluna: relação de amplitudes em escala linear;
- segunda coluna: relação de amplitudes em db;
- terceira coluna: fase em graus;
- quarta coluna: frequência em rad/seg.

B.10 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

EX1 – Obtenha as raízes da equação abaixo, utilizando o MATLAB:

$$z^5 + 10z^4 + 35z^3 + 50z^2 + 25z + 2 = 0$$

EX2 – Usando o MATLAB, faça o gráfico da resposta em frequência (gráfico de bode) das funções de transferências:

$$\text{a) } \frac{q_o(D)}{q_i} = \frac{17,78278(0,125D + 1)}{D}$$

$$\text{b) } \frac{X}{F}(s) = \frac{2,6(0,1s + 1)}{(0,004s + 1)(0,04s^2 + 0,04s + 1)(0,0025s^2 + 0,01s + 1)}$$

EX3 – Usando o MATLAB, expanda em frações parciais e determine a Transformada Inversa de Laplace de:

$$\text{a) } F(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{(s + 3)^2 s^2}$$

$$\text{b) } G(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}{(s + 7)(s + 5)^2}$$

INTRODUÇÃO AO SIMULINK

C.1 – INTRODUÇÃO

Este apêndice apresenta aspectos básicos do Simulink. Entendemos que a leitura do Capítulo 8, em especial da seção 8.4 e do Apêndice B, deva preceder o estudo deste apêndice.

Conforme vimos no Apêndice B, o MATLAB é um programa para resolução de problemas matemáticos através de computação numérica, permitindo a visualização dos dados. Apresenta várias caixas (“boxes”) que oferecem extraordinária versatilidade e capacidade para resolver problemas de aplicações de engenharia, matemática, física, financeira, química, etc. As caixas de ferramentas (“toolboxes”) são linguagens do programa MATLAB específicas para resolver problemas de classes particulares.

Dentro do MATLAB está o Simulink (Software para Simulação de Sistemas Dinâmicos), que é utilizado para modelar e analisar sistemas dinâmicos.

A simulação gráfica pode ser feita tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência. Este apêndice tem por objetivo observar os fundamentos das simulações no domínio do tempo, no ambiente Windows.

O estudo deste apêndice deve ser feito operando o computador.

Para acessar o Simulink, digite *simulink* na linha de comando do MATLAB ou dê um clique no ícone do Simulink, Figura C.1.

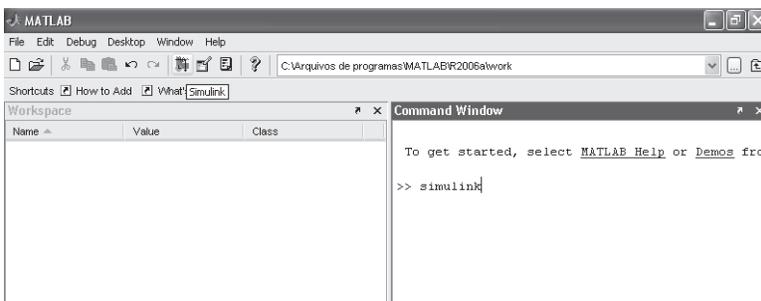


Figura C.1 Tela do MATLAB ilustrando duas maneiras de acessar o Simulink.

Após este comando, a janela do Simulink aparece na tela. Para abrir a área onde o diagrama será construído, clique em *File*, em *New e*, em seguida, em *Model*. Desta forma obtemos a área correspondente ao arquivo *untitled*, Figura C.2. Será nesta área de trabalho que o diagrama de blocos será construído.

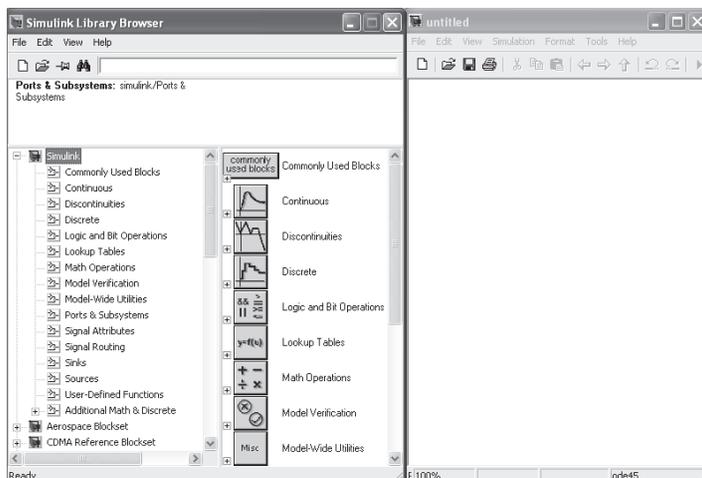


Figura C.2 Janela do *Simulink Library Browser* e da área do arquivo *untitled* em que o diagrama será construído.

É interessante adaptar os tamanhos das duas janelas para que ambas fiquem visíveis, facilitando a introdução das ferramentas e blocos no arquivo recém-criado. Com esta providência, a tela está preparada para introdução dos blocos.

C.2 – CONSTRUINDO UM DIAGRAMA

C.2.1 – PROPOSIÇÃO

Nesta seção serão ilustrados os principais procedimentos para a elaboração de um diagrama. Como exemplo, vamos elaborar um diagrama para um sistema de segunda ordem massa–mola–amortecedor e observar o comportamento do deslocamento da massa (resposta) quando a entrada é uma força degrau dada por: $10u(t - 0.4)N$. A função de transferência deste sistema foi desenvolvida na seção 3.4.1 e é dada pela equação 3.95.

Para a simulação adotaremos os valores: *massa* = 0,8 kg; *coeficiente do amortecedor* = 8 N.seg/m; e *coeficiente da mola* = 500 N/m, que resultam em: $K = 0,002 m/N$ (ganho da função de transferência); $\omega_n = 25 rad/seg$ ou $f_n = 3,979 Hz$ (frequência natural não-amortecida); e $\zeta = 0,2$.

C.2.2 – CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA

O diagrama pode ser elaborado seguindo estas etapas:

a) Nomear o Trabalho

- (1) Clique em *File* da barra de ferramentas do *untitled* e clique em *Save as*.

- (2) Aparecerá o menu para gravação. Procure a pasta desejada e entre com o nome do arquivo. Neste exemplo o nome dado foi *SegOrdem*. O arquivo será gravado como *SegOrdem.mdl*.

b) Carregar os Blocos Necessários

- (1) Dentre os itens listados da janela *Simulink Library Browser*, clique no item *Sources*.
 - (2) Aparecerão os blocos relativos à biblioteca de *Sources*. Procure o bloco *Step*. Clique no ícone e, mantendo o botão esquerdo do mouse pressionado, arraste o ícone para a área de trabalho, Figura C.3.
SUGESTÃO: Leve os blocos apenas uma vez. Cópias de blocos podem ser feitas dentro da própria janela do projeto.
 - (3) Ainda dentro do item *Sources*, procure o bloco *Constant* e arraste-o para a área de trabalho.
 - (4) Entre no item *Sinks* e arraste o ícone *Scope* para a área de trabalho.
 - (5) Entre no item *Math Operations* e arraste os ícones *Product* e *Sum* para a área de trabalho.
 - (6) Entre no item *Continuous* e arraste o ícone *Integrator* para a área de trabalho.
- NOTA: Uma vez colocados todos os tipos de blocos que serão utilizados para efetuar o diagrama do sistema, maximize a tela do arquivo *SegOrdem*.

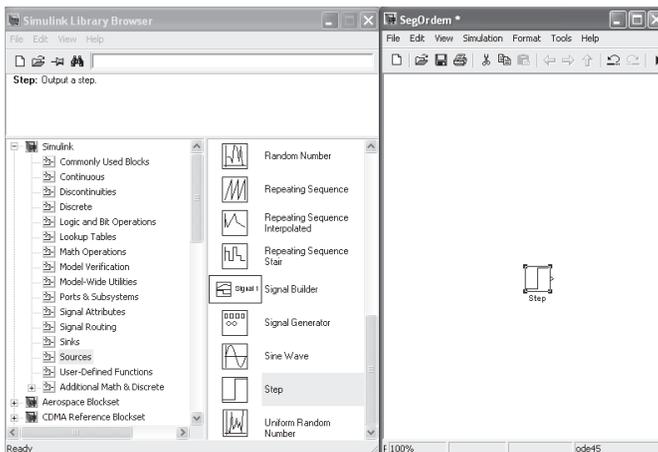


Figura C.3 Visualização da tela após arrastar o bloco *Step*.

c) Preparação dos Blocos

- (1) Para duplicar o *Integrator*, com o botão direito do mouse clique e arraste o ícone para outro local da área de trabalho, Figura C.4a. Soltando o botão, o ícone do novo *Integrator* aparece, Figura C.4b.
- (2) Repita duas vezes o processo de duplicação para o ícone *Product*, resultando em três *Products*. Idem para o ícone *Constant*, resultando também em três *Constants*.

- (3) Dê um duplo clique sobre o ícone *Sum*. Aparecerá um menu. No *Icon shape* mude *round* para *rectangular* e no *List of sign* apague o que existe e entre “ - - +” (dois sinais negativos e um positivo).
- (4) Posicione o cursor em um dos vértices do ícone *Sum* e arraste vertical e horizontalmente para mudar o tamanho do ícone.
- (5) Clique com o botão direito do mouse sobre o ícone *Sum*. Aparecerá um menu. Clique no *Format* e um novo menu aparecerá. Clique no *Flip block* para inverter o bloco, Figura C.4c.

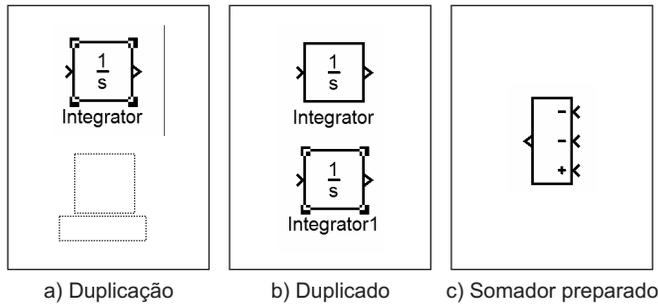


Figura C.4 Ilustração do processo de duplicação e visualização do somador com três entradas e sentido invertido.

- (6) Dê um duplo clique sobre o ícone *Scope*. Aparecerá uma janela semelhante à tela de um osciloscópio. Clique no ícone *Parameters* da barra de ferramentas da janela *Scope*. Aparecerá um menu. Apague o que está no *Number of axes* e entre o número 2.
- (7) Ainda com a janela dupla do *Scope* na tela, clique com o botão direito do mouse sobre a região preta do primeiro gráfico do *Scope*. Aparecerá um menu, Figura C.5a. Clique em *Axes properties* e então aparecerá o menu para definição dos valores máximo e mínimo do eixo *y*. Para este primeiro gráfico, entre *Ymin* = 0 e *Ymax* = 0.04, Figura C.5b. Repita o procedimento para o eixo *y* do segundo gráfico e entre *Ymin* = 0 e *Ymax* = 20, Figura C.5c.

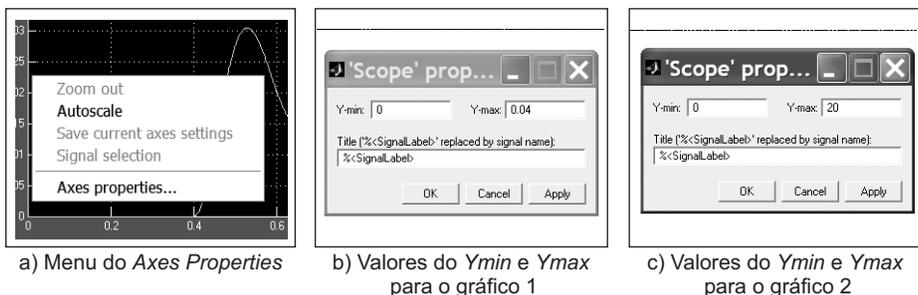


Figura C.5 Menus para as propriedades dos eixos.

- (8) Clique no nome do ícone *Step*. Digite *Step = 10N*.
- (9) Clique nos nomes dos ícones dos *Constant's* e digite nos respectivos locais: *massa*; *Coef. Amort.*; e *Coef. Mola*.
- (10) Clique com o botão direito do mouse sobre o ícone *Step*. Aparecerá um menu. Clique no *Step parameters* e um novo menu aparecerá. Entre o valor *0.4* no *Step time* e o valor *10* no *Final value*.
- (11) Clique com o botão direito do mouse sobre o ícone *Constant* de nome *massa*. Aparecerá um menu. Clique no *Constant parameters* e um novo menu aparecerá. Entre o valor *0.8* no *Constant value*. Repita o procedimento para os outros blocos *Constant's* colocando o valor *8* para o *Coef. Amort.* e o valor *500* para o *Coef. Mola*.
- (12) Arraste os blocos para posições que facilitarão as suas interligações. Procure colocar todos os blocos de entrada (neste caso o *Step*) e também os blocos que definem os parâmetros do sistema (os *Constant's*) alinhados na parte inferior. Quanto aos blocos de saída, posicione-os no lado direito do diagrama, Figura C.6. Estas disposições facilitam as localizações dos blocos quando queremos efetuar modificações das entradas e dos parâmetros para novas simulações.

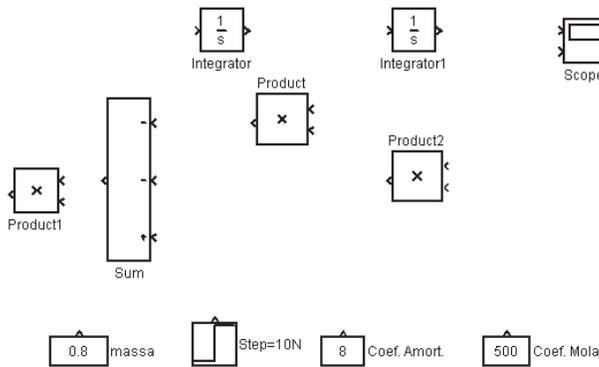


Figura C.6 Blocos preparados para realizar as interconexões.

- (13) Note que alguns blocos da Figura C.6 sofreram rotação. Para efetuar uma rotação de **90 graus**, clique no bloco e depois aperte **CTRL + R**. Se apertar novamente o **CTRL + R**, um novo giro de **90 graus** ocorrerá.
- (14) Dê um duplo clique no bloco *Product1*. Aparecerá um menu para entrada de parâmetros. No *Number of inputs* entre “*/” (asterisco e barra de divisão). Com estas informações a primeira entrada irá multiplicar e a segunda dividir.

d) Interligando os Blocos

- (1) Para conectar dois blocos, clique na saída do bloco de origem e, mantendo o botão pressionado, leve a linha que apareceu para a entrada do bloco de destino.

Há outra maneira de efetuar a conexão. Clique no bloco de origem. Em seguida aperte a tecla **CTRL** e clique no bloco de destino. Por exemplo, clique no primeiro *Integrator* (integrador da esquerda). Depois, aperte a tecla **CTRL** e clique no *Integrator1*. A conexão é realizada e fica conforme Figura C.7a.

- (2) Para criar um novo ramo de uma linha já existente, por exemplo, do *Integrator* para o *Product*, clique em um ponto da linha com o botão direito do mouse e arraste até um ponto, Figura C.7b. Para completar a conexão, clique no ponto onde parou e, mantendo o botão pressionado, leve a linha até a entrada do bloco de destino, Figura C.7c.
- (3) Repetindo os procedimentos de interconexão, faça todas as ligações até obter um diagrama conforme a Figura C.8.

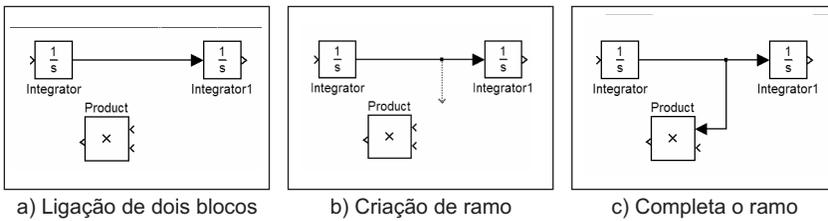


Figura C.7 Visualização da conexão entre dois blocos, criação de um ramo de uma linha existente e complementação do ramo.

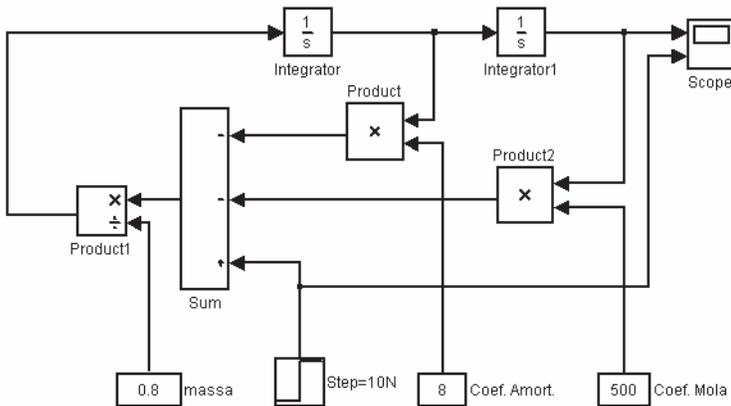


Figura C.8 Diagrama em Simulink para simulação do sistema de segunda ordem conforme parâmetros e condições propostas.

C.2.3 – SIMULAÇÃO E RESULTADO

a) Parâmetros da Simulação

- (1) Na barra principal da janela da área de trabalho do *SegOrdem*, clique sobre o ícone *Simulation*. Aparecerá um menu. Clique em *Configuration Parameters* e aparecerá uma janela conforme Figura C.9.
- (2) Entre o valor *zero* no *Start time* e o valor *2.0* no *Stop time*. No *Solver options*, entre *Variable-step* no *Type* e *ode45* no outro. Entre o valor *1 e -5* no *Relative tolerance* e *1 e -6* no *Absolute tolerance*.

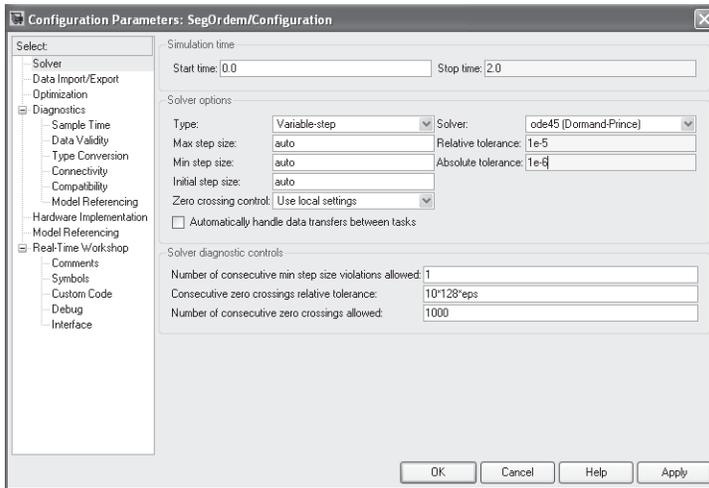


Figura C.9 Janela para entrada dos parâmetros da simulação.

b) Simulação e Resultado

- (1) Na barra de ferramenta da janela da área de trabalho aparece um triângulo escuro que é ícone do comando direto do *Start simulation*. Clique sobre esse comando para o Simulink efetuar a simulação.
- (2) Para ver as curvas de saída da simulação, dê um duplo clique no *Scope*. Aparecerá na tela o comportamento do deslocamento e no segundo gráfico a entrada degrau, Figura C.10.

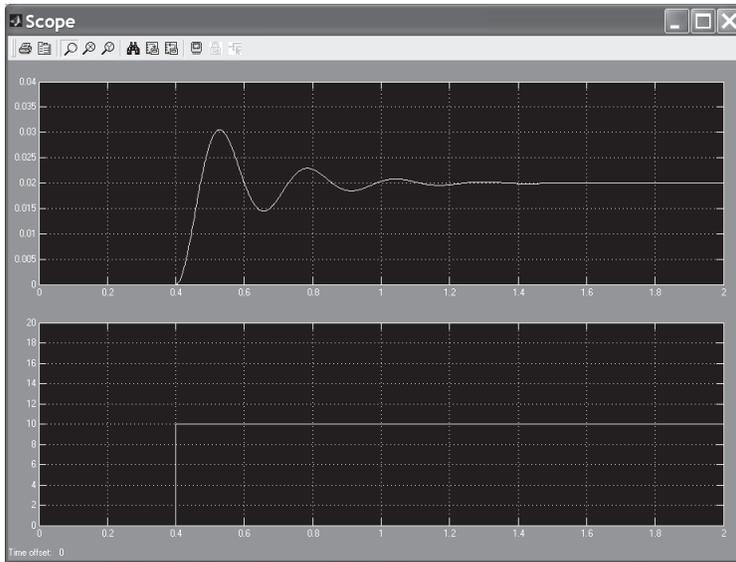


Figura C.10 Resultado gráfico da simulação do sistema de segunda ordem conforme parâmetros e condições propostas.

C.2.4 – SALVAR O SISTEMA

Na barra de ferramenta da janela do *SegOrdem* procure o ícone do desenho de um disquete e clique neste ícone. Uma outra maneira seria através das teclas *CTRL + S*.

C.3 – DESCRIÇÃO DE BLOCOS USUAIS

Os blocos do Simulink estão agrupados em classes cuja lista pode ser observada na janela do *Simulink Library Browser*, Figura C.2.

Nesta seção serão discutidos alguns blocos usuais dos grupos:

- *Continuous*;
- *Discontinuities*;
- *Math Operations*;
- *Signal Routing*;
- *Sinks*; e
- *Sources*.

As descrições dos blocos selecionados estão apresentadas abaixo. Para quase todos os blocos se faz necessária a entrada de parâmetros. Como regra geral, um duplo clique sobre o ícone do bloco abre o menu que permite efetuar a entrada dos seus respectivos parâmetros.

C.3.1 – BLOCOS USUAIS DO *CONTINUOUS*

A Figura C.11 mostra blocos usuais do *Continuous*.

Lembramos que a letra “s” destes blocos não é a variável de Laplace. O Simulink trabalha com variáveis funções do tempo e não com variáveis transformadas. A leitura da seção 4.4 esclarece em detalhes este ponto.

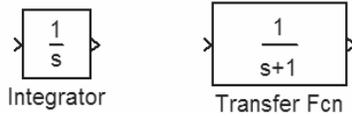


Figura C.11 Blocos mais utilizados do *Continuous*.

Abaixo temos as principais características desses blocos.

a) Integrator

Finalidade: Integrar o sinal de entrada, começando do valor inicial.

Parâmetro: *Initial condition* – Condição inicial da saída (o padrão é zero).

b) Transfer Fcn

Finalidade: Implementar uma função de transferência linear.

Parâmetros: *Numerator* – Coeficientes do numerador.

Denominator – Coeficientes do denominador.

Os parâmetros deste bloco são vetores (escritos entre colchetes) que especificam os coeficientes de s, em ordem decrescente de potência, dos polinômios do numerador e do denominador da função de transferência. Por exemplo, fazendo:

Numerador: [1 2]

Denominador: [3 2 0]

significa que a função de transferência tem a forma:

$$\text{Transfer Fcn} = \frac{s+2}{3s^2+2s} = \frac{s+2}{s(3s+2)} \quad (\text{C.1})$$

NOTA: A ordem do numerador deve ser igual ou menor que a ordem do denominador.

C.3.2 – BLOCOS USUAIS DO *DISCONTINUITIES*

A Figura C.12 mostra blocos usuais do *Discontinuities*.

Abaixo temos as principais características desses blocos.

a) Dead Zone

Finalidade: Simular fenômenos que têm zona morta, sem histerese.

Parâmetros: *Start of dead zone* – Valor do início da zona morta.

End of dead zone – Valor do fim da zona morta.

b) Saturation

Finalidade: Limitar a amplitude de um sinal.

Parâmetros: *Upper limit* – Limite superior da saída.

Lower limit – Limite inferior da saída.

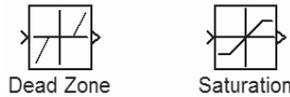


Figura C.12 Blocos usuais do *Discontinuities*.

C.3.3 – BLOCOS USUAIS DO *MATH OPERATIONS*

A Figura C.13 mostra blocos usuais do *Math Operations*.

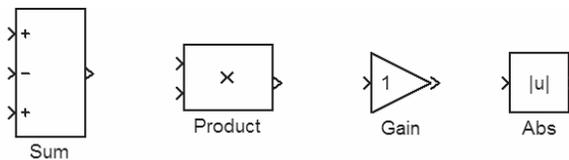


Figura C.13 Blocos usuais do *Math Operations*.

Abaixo temos as principais características desses blocos.

a) Sum

Finalidade: Somar os sinais de entrada.

Parâmetro: *List of signs* – Lista de sinais.

O bloco *Sum* faz operações matemáticas de soma e/ou subtração. Na verdade, ele sempre faz a adição, mas multiplica cada entrada por $+1$ ou -1 , de acordo com o sinal especificado na respectiva entrada.

A lista de sinais, além de implementar a lógica algébrica que será aplicada aos sinais de cada entrada para produzir a saída, estabelece a quantidade de entradas que o bloco terá. Por exemplo, “+ - +” implica um bloco preparado para três entradas, sendo duas para somar e uma para subtrair. Algebricamente seria: $(Saída) = (+1).(entrada\ 1) + (-1).(entrada\ 2) + (+1).(entrada\ 3)$.

b) Product

Finalidade: Multiplicar os sinais de entrada.

Parâmetro: *Number of inputs* – Número de entradas ou operações de multiplicação e divisão.

Se digitar um número no *Number of Inputs*, todas as variáveis entrarão multiplicando. Se digitar asterisco e barra de divisão (“*” e “/”), além de implementar a multiplicação e divisão, informa a quantidade de entradas que o bloco terá. Por exemplo, “* / *” implica um bloco preparado para três entradas, sendo duas para multiplicar e uma para dividir. Algebricamente teremos: $(Saída) = (entrada 1) * (entrada 3) / (entrada 2)$.

c) **Gain**

Finalidade: Multiplicar a entrada por uma constante.

Parâmetro: *Gain* – Valor do ganho.

d) **Abs**

Finalidade: Produzir na saída o valor absoluto da entrada.

C.3.4 – BLOCOS USUAIS DO *SIGNAL ROUTING*

A Figura C.14 mostra os blocos usuais do *Signal Routing*.

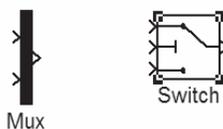


Figura C.14 Blocos usuais do *Signal Routing*.

Abaixo temos as principais características desses blocos.

a) **Mux**

Finalidade: Organizar e agrupar diversas variáveis em uma só linha.

Parâmetro: *Number of inputs* – Número de entradas.

b) **Switch**

Finalidade: Deixar passar a *entrada 1* ou a *entrada 3*, dependendo do teste condicional aplicado à *entrada 2*.

Parâmetros: *Criteria for passing first input* – Teste condicional.

Threshold – Valor de referência para o teste condicional.

Com um duplo clique no ícone *Switch* acessamos um menu para entrar o critério do teste e o parâmetro de referência. O *Switch* submete a *entrada 2* ao teste condicional que produz uma variável lógica interna. Se o resultado do teste for *verdadeiro*, o *Switch* deixa passar a *entrada 1*; se for *falso*, o *Switch* deixa passar a *entrada 3*.

C.3.5 – BLOCOS USUAIS DO *SINKS*

A Figura C.15 mostra blocos usuais do *Sinks*.

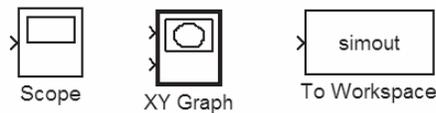


Figura C.15 Blocos usuais do *Sinks*.

Abaixo temos as principais características desses blocos.

a) Scope

Finalidade: Fazer gráficos de variáveis em função do tempo.

Parâmetros: Os principais são:

Number of axes – Número de entradas e também de gráficos.

Limit data points to last – Quantidade máxima de pontos do gráfico;

Save data to workspace – Envia dados para o Workspace do MATLAB.

Tem como submenu:

– *Variable name* – Nome da variável;

– *Format* – Formato da variável (use *Array* para matriz).

Axes properties: Valores de *Ymin* e *Ymax* do eixo do respectivo gráfico.

Para entrar no *Number of axes*, *Limit data points to last*, *Save data to workspace*, *Variable name* e *Format*, primeiramente dê um duplo clique sobre o ícone *Scope* e depois, na janela semelhante à tela de um osciloscópio, clique no ícone *Parameters* da barra de ferramentas. Aparecerá o menu *Scope Parameters* para entrada destas informações.

Para entrar no *Axes properties*, clique com o botão direito do mouse sobre a região preta do gráfico do *Scope*. Aparecerá o menu para entrar os valores máximo e mínimo do eixo *y* (vide Figura C.5).

b) XY Graph

Finalidade: Fazer o gráfico de uma variável contra outra (*Y* em função de *X*).

Parâmetros: Valores de *Xmin*, *Xmax*, *Ymin* e *Ymax* dos eixos do gráfico.

NOTA: A primeira variável corresponde ao eixo *X*.

c) To Workspace

Finalidade: Enviar dados para o *Workspace* do MATLAB.

Parâmetros: *Variable name* – Nome da variável.

Limit data points to last – Quantidade máxima de pontos a ser enviados.

Decimation – Intermitência do envio dos dados.

Save format – Formato a ser gravado (use *array* para enviar matriz).

Se entrarmos com um número pequeno no *Limit data points to last*, o *array* enviado conterá uma quantidade de linhas igual a este número e o conjunto de dados será da parte final da simulação.

O *Decimation* especifica a maneira intermitente do envio de dados. Quando usamos o formato *array*, os dados são organizados em forma de matriz, em que cada coluna corresponde a uma variável e nas linhas temos as variações das grandezas no tempo. Se chamarmos de *LE* os índices das linhas enviadas da matriz, então $LE = [1 + n \cdot (Decimation)]$, com $n = 0, 1, 2$, etc. Por exemplo, se *Decimation* for igual a *1*, as linhas serão enviados uma após a outra, em seqüência, pois $LE = 1, 2, 3...$. Contudo, as linhas armazenadas no *Workspace* dependerão do *Limit data points to last*.

NOTA: Independentemente de usar ou não o bloco *To Workspace*, um vetor chamado de “*tout*”, correspondente aos dados do tempo, é exportado para o *Workspace* do MATLAB.

C.3.6 – BLOCOS USUAIS DO SOURCES

A Figura C.16 mostra os blocos usuais do *Sources*.

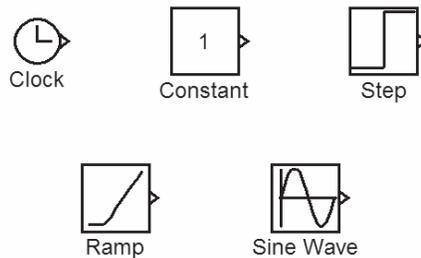


Figura C.16 Blocos usuais do *Sources*.

Abaixo temos as principais características desses blocos.

a) Clock

Finalidade: Prover o tempo de simulação.

b) Constant

Finalidade: Prover um valor constante.

Parâmetro: *Constant value* – Valor da constante (independe do tempo).

c) Step

Finalidade: Gerar uma função degrau.

Parâmetros: *Step time* – Tempo em que ocorrerá o degrau.

Initial value – Valor inicial da saída antes de ocorrer o degrau.

Final value – Valor final da saída após ocorrer o degrau.

d) Ramp

Finalidade: Gerar uma função rampa.

Parâmetros: *Slop* – Coeficiente angular.

Start time – Tempo no qual a rampa tem início.

Initial output – Valor da saída antes do início da rampa.

O Simulink aceita valores negativos para o *Start time*, porém as simulações são executadas somente para o tempo igual ou maior que zero. Normalmente o *Start time* é maior que zero e, neste caso, a função *Ramp* permanecerá constante (igual ao *Initial output*) de zero até o *Start time*.

e) Sine Wave

Finalidade: Gerar uma função senoidal.

Parâmetros: *Bias* – Valor médio da onda.

Frequency – Frequência.

Phase – Fase.

Amplitude – Amplitude do seno.

C.4 – INFORMAÇÕES PARA MANIPULAÇÃO

Conhecer os procedimentos de manipulação auxilia elaborar diagramas e realizar as simulações.

Nesta seção observaremos alguns importantes procedimentos para:

- manipulação do sistema;
- manipulação de blocos; e
- manipulação de linhas.

As manipulações aqui apresentadas estão descritas de maneira resumida e em forma de tabelas. A simbologia usada significa:

bE – botão *Esquerdo* do mouse;

bD – botão *Direito* do mouse.

Quando não for mencionado nenhum botão, fica implícito que é o botão *esquerdo* do mouse.

C.4.1 – MANIPULAÇÃO DO SISTEMA

Tabela C.1 Manipulação do sistema.

Objetivo	Procedimento
Iniciar a simulação.	Barra de ferramentas, menu <i>Simulation, Start</i> .
Parar a simulação.	Barra de ferramentas, menu <i>Simulation, Stop</i> .
Janela para entrar parâmetros para simulação.	Barra de ferramentas, menu <i>Simulation, Simulation parameters</i> .
Modo de simulação normal.	Barra de ferramentas, menu <i>Simulation, Normal</i> .
Ampliar desenho do diagrama.	Barra de ferramentas, menu <i>View, Zoom in</i> .
Diminuir desenho do diagrama.	Barra de ferramentas, menu <i>View, Zoom out</i> .
Enquadrar desenho do diagrama na tela.	Barra de ferramentas, menu <i>View, Fit system to view</i> .
Criar um texto na área de trabalho.	Dê um duplo clique no local da área de trabalho e digite o texto.
Entrar um texto enquadrado na área de trabalho	Entre no <i>Simulink Library Browser</i> , clique em <i>Model-Wide Utility</i> e arraste <i>Model Info</i> para a área de trabalho. Dê duplo clique no bloco e na área <i>Enter text</i> do menu edite o texto.

C.4.2 – MANIPULAÇÃO DE BLOCOS

Tabela C.2 Manipulação de blocos.

Objetivo	Procedimento
Selecionar um bloco.	Clique sobre o bloco.
Inverter o sentido do bloco.	Selecione o bloco, barra de ferramentas, menu <i>Format, Flip block</i> .
Rodar 90 graus o bloco.	Selecione o bloco, barra de ferramentas, menu <i>Format, Rotate block</i> ou teclas <i>CTRL + R</i> .
Mover bloco de local.	<i>bE</i> e mantendo pressionado arraste para novo local.
Copiar bloco da biblioteca para a área de trabalho.	<i>bE</i> e mantendo pressionado arraste para um local da área de trabalho.
Copiar bloco dentro da área de trabalho.	<i>bD</i> e mantendo pressionado arraste a cópia do bloco para outro local da área de trabalho.
Mudar tamanho do bloco	Selecione o bloco e, em um dos vértices, arraste na vertical e horizontal para obter novo tamanho.
Selecionar vários blocos.	Mantenha a tecla <i>Shift</i> apertada e clique sobre os blocos.
Mudar posição do nome do bloco	Selecione o bloco, barra de ferramentas, menu <i>Format, Flip name</i> .
Mudar a fonte do nome do bloco	Selecione o bloco, barra de ferramentas, menu <i>Format, Font</i> .
Esconder o nome do bloco	Selecione o bloco, barra de ferramentas, menu <i>Format, Hide name</i> .
Mostrar o nome do bloco	Selecione o bloco, barra de ferramentas, menu <i>Format, Show name</i> .
Editar o nome do bloco	Clique sobre o nome do bloco e digite o texto.

C.4.3 – MANIPULAÇÃO DE LINHAS

Tabela C.3 Manipulação de linhas.

Objetivo	Procedimento
Criar uma linha conectando dois blocos.	(i) Clique na saída do bloco de origem e arraste até a entrada do bloco de destino. Se precisar mudar a direção, solte o <i>bE</i> e reinicie a partir daquele ponto. Nota: o <i>bD</i> também conecta. (ii) Clique no bloco de origem e depois, com a tecla <i>CTRL</i> pressionada, clique no bloco de destino.
Selecionar uma linha.	Clique sobre a linha.
Mover o vértice da linha.	Selecione a linha, clique no vértice e arraste para o local desejado.
Criar um vértice em uma linha.	Selecione a linha. Mantendo a tecla <i>Shift</i> apertada, clique sobre o ponto da linha e arraste o vértice criado.
Criar um ramo a partir de um ponto da linha.	<i>bD</i> no ponto da linha e mantendo pressionado arraste criando o início do ramo. Solte o <i>bD</i> e reinicie com o <i>bE</i> (ou com o próprio <i>bD</i>) até o bloco de destino.
Selecionar várias linhas.	Mantenha a tecla <i>Shift</i> apertada e clique sobre as linhas.
Criar nome da linha.	Duplo clique na linha e edite o nome.
Mudar ou editar nome da linha.	Clique no nome e edite.
Mudar o local do nome da linha	Clique no nome e arraste para a nova posição.
Apagar o nome da linha.	Mantenha a tecla <i>Shift</i> apertada, clique sobre o nome e aperte a tecla <i>Del</i> .

C.5 – EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

C.5.1 – EXERCÍCIO 1: USO DOS BLOCOS: *TRANSFER Fcn*, *MUX* E *To WORKSPACE*

Para o sistema com função de transferência dada pela equação C.1, fazer o diagrama de blocos e a simulação considerando:

- a entrada é uma onda senoidal com *Amplitude* = 1; *Bias* = 0; *Frequency* = 1 *rad/sec*; e *Phase lag* = 0.
- observar ambos os sinais de entrada e saída em uma só tela do Scope. Adotar para o eixo Y: *Ymin* = -5; e *Ymax* = +5.
- enviar para o *Workspace* os três conjuntos: (i) um vetor coluna *qin* contendo o sinal de entrada; (ii) uma matriz com o nome *qin_e_gout* de duas colunas contendo respectivamente os sinais de entrada e saída; e (iii) uma matriz com o nome *ScopeData* de três colunas contendo, respectivamente, o tempo e os sinais de entrada e saída, usando o bloco *Scope*.

- usar os *Simulation parameters*: *Start time = 0*; *Stop time = 30*; *Solver: variable step, ode45*; *Relative tolerance = 1e-6*; e *Absolute tolerance: auto*.

As Figuras C.17, C.18 e C.19 mostram, respectivamente, o diagrama de blocos, os gráficos e a tela do *Workspace*.

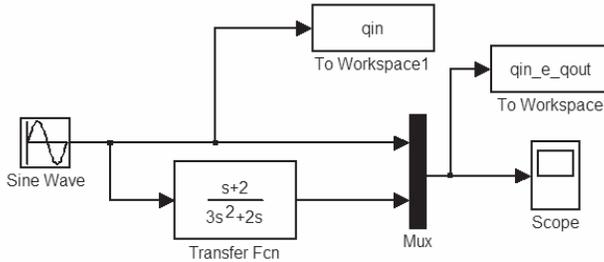


Figura C.17 Diagrama do exemplo 1, conforme proposto.

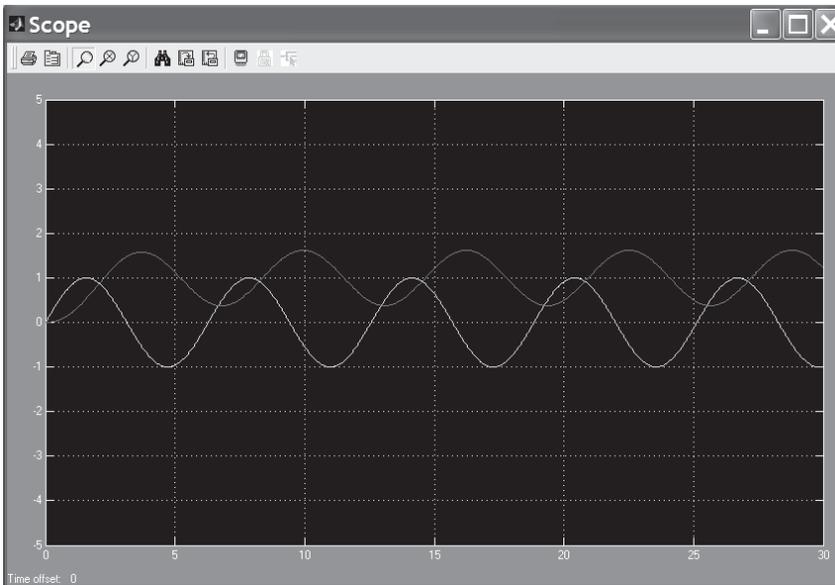


Figura C.18 Gráficos do exemplo 1 mostrando a entrada (onda senoidal) e a saída.

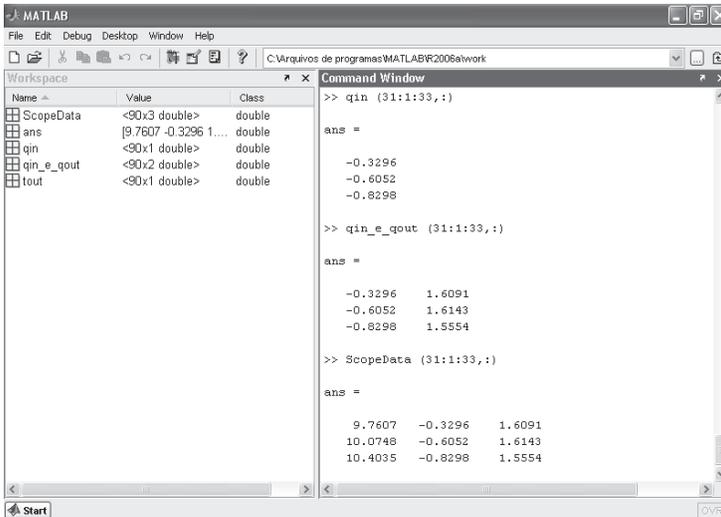


Figura C.19 Tela do MATLAB mostrando que o Workspace recebeu as variáveis da simulação.

C.5.2 – EXERCÍCIO 2: RESPOSTA DE SISTEMAS DE 1ª ORDEM À ENTRADA RAMPA

Fazer o diagrama e obter simultaneamente as respostas de três sistemas de primeira ordem independentes. Todos os sistemas têm entrada rampa. Os ganhos dos três sistemas são iguais a $K = 1$ e as constantes de tempo são, respectivamente, $\tau_1 = 0,1$ seg; $\tau_2 = 1,2$ seg e $\tau_3 = 4$ seg.

Utilize os seguintes parâmetros:

- *Simulation parameters: Start time = 0; Stop time = 12; solver: Variable step, ode45; Relative tolerance = 1e-6; e Absolute tolerance: auto.*
- *Scope properties: Number of axes = 3; e Time range = 12, Axes properties (para gráficos 1, 2 e 3): Ymin = 0 e Ymax = 5.*
- *Ramp: Slope = 1; Start time = 0; e Initial output = 0.*

As Figuras C.20 e C.21 mostram o diagrama de blocos e os gráficos.

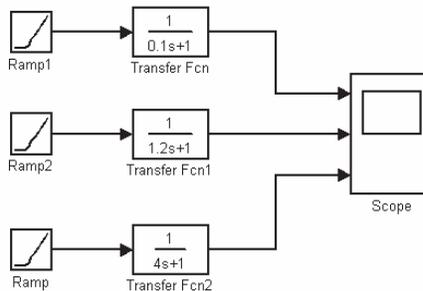


Figura C.20 Diagrama do exemplo 2, conforme proposto.

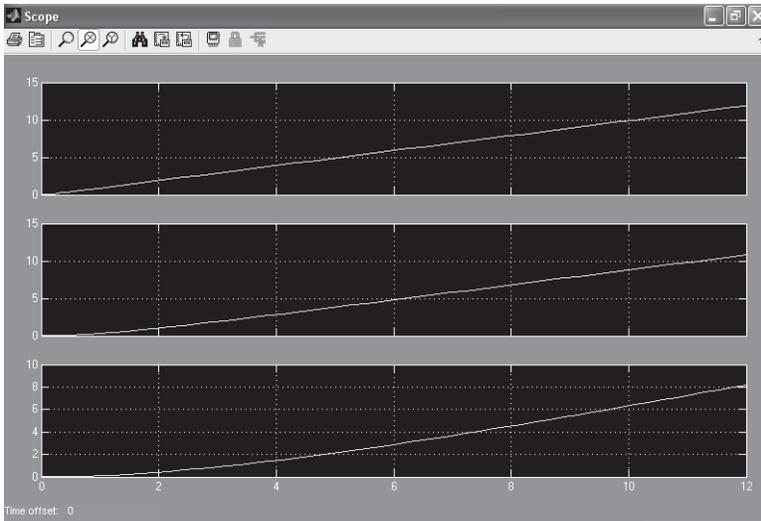


Figura C.21 Gráficos do exemplo 2 ilustrando as diferenças das saídas com a mudança da constante de tempo do sistema de primeira ordem.

C.5.3 – EXERCÍCIO 3: UM SISTEMA COM ATRITO

O sistema não-linear da Figura C.22 é constituído de um corpo com massa desprezível, uma mola linear de coeficiente $Km = 2 \text{ N/m}$ e coeficiente de atrito cinético (deslizamento) igual ao coeficiente de atrito estático $K_f = 0,2$; a força de atrito é F_f . Ele tem três entradas: a força $P(t)$, o deslocamento e e a velocidade \dot{e} . A saída do sistema é o deslocamento e_o .

O objetivo deste exemplo é implementar o diagrama para simular o sistema. O diagrama foi efetuado e está na Figura C.23.

Para testar o diagrama e facilitar a visualização da simulação foram efetuadas as seguintes considerações:

- (i) Foi adotada uma força $P(t)$ constante e com valor igual a $5N$.
- (ii) As outras entradas (a velocidade \dot{e} e o deslocamento e) foram criadas utilizando um gerador de pulsos e um integrador.
- (iii) No início ($t = 0$) o sistema está em repouso e a força da mola é zero.
- (iv) Para a simulação, os valores adotados foram: *Simulation parameters: Start time = 0; Stop time = 10; Solver: Variable step, ode45; Relative tolerance = 1e-3; Absolute tolerance: auto;* bloco *Scope: Scope properties: Number of axes = 3; Time range = 10, Axes properties* (para gráficos 1, 2 e 3): $Ymin = -3$ e $Ymax = 3$; bloco *Pulse generator: Pulse type: time based, Amplitude = 2, Period(secs) = 4, Pulse width = 50, Phase delay = 0;* bloco *Switch (Hold/Release): criteria: U2 >= Threshold, Threshold = 0;* bloco *Signum (Sign):* ativar *Enable zero crossing detection*.

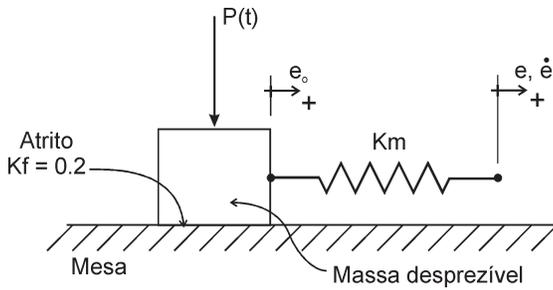


Figura C.22 Configuração do sistema com atrito.

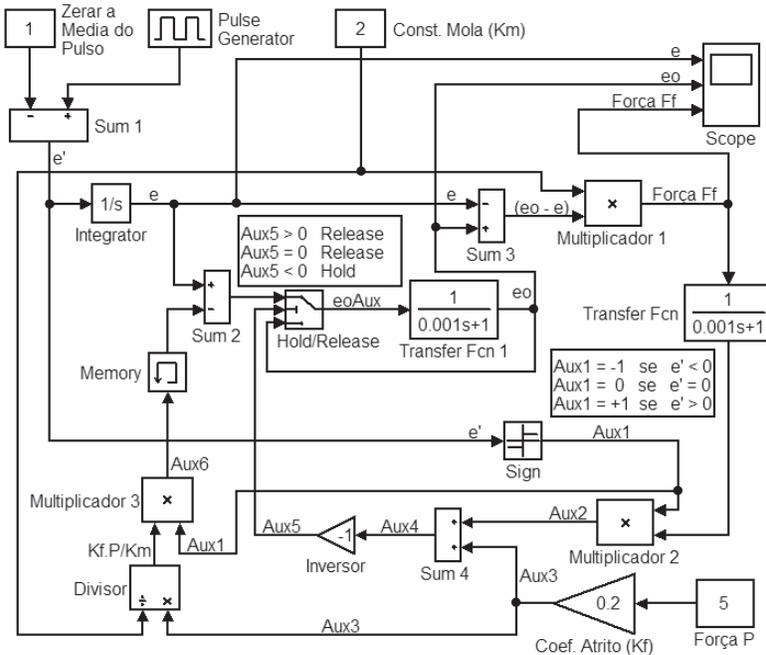


Figura C.23 Diagrama em Simulink para o sistema com atrito da Figura C.22.

Note no diagrama a presença de três blocos: o *Memory*, o *Transfer Fcn* e o *Transfer Fcn1*. Estes foram utilizados para atender a um único objetivo: eliminar as malhas fechadas (“loops”) algébricas. Como esses blocos inseridos têm altas velocidades de resposta, as suas interferências na simulação são desprezíveis.

Como exercício e para melhor entender o funcionamento do diagrama recomendamos executar manualmente a simulação, incremento por incremento de tempo. Desta forma será possível acompanhar o comportamento das variáveis e , e' , $Aux1$, $Aux2$, etc.

A Figura C.24 mostra os gráficos obtidos das variáveis: e , e' e *Força F_f*.

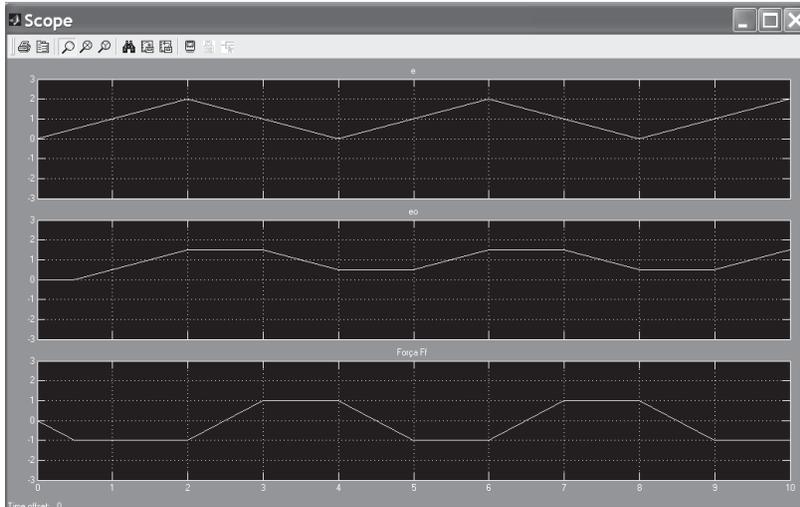


Figura C.24 Resultado gráfico da simulação do diagrama da Figura C.23 mostrando o deslocamento e (primeiro gráfico), o deslocamento e_o (segundo gráfico) e a força de atrito **Força F_f** (terceiro gráfico).

C.6 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

EX1 – Implementar no Simulink o diagrama da Figura 8.18. Simular o sistema com o objetivo de obter uma resposta conforme as Figuras 8.19 e 8.20.

EX2 – O sistema da Figura EC.1 tem o seguinte modelo dinâmico linear:

$$\begin{aligned} (A_1 D + C_3) h_1 - C_3 h_2 &= Q_1 \\ -C_3 h_1 + (A_2 D + C_3 + C_4) h_2 &= Q_2 \end{aligned}$$

em que:

D é operador derivativo;

A_1 , C_3 , A_2 e C_4 são constantes do sistema.

Elaborar o diagrama de blocos para o Simulink.

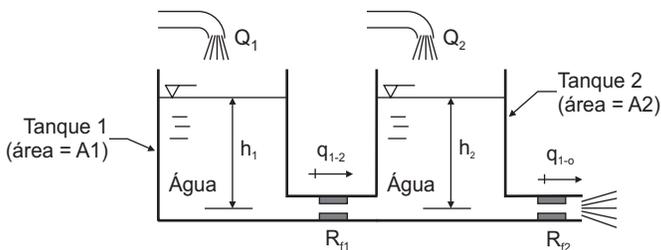


Figura EC.1

EX3 – O programa de simulação digital Simulink pode facilitar o exame do teste do pseudoimpulso verificando se ele é suficientemente de curta duração para ser tratado como um impulso perfeito de mesma área.

Estude este detalhe usando um sistema de segunda ordem e um pulso retangular, Figura EC.2.

O sistema é dado por: $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)y = x$, com $\omega_n = 1$ rad/seg e $\zeta = 0,2$.

Para obter a resposta do impulso perfeito use um conjunto especial de condições iniciais, ou seja, $\dot{y} = +1,0$ e $y = 0$ (vide Capítulo 4, seção 4.7, e Capítulo 5, equação 5.37).

Variando T , observe o efeito da duração do pulso na resposta do sistema e compare com a resposta do impulso perfeito.

Execute a simulação e comente resumidamente os resultados. Faça $T = 0,05; 0,1; 0,5; 0,8; 1,5; 3;$ e 6 segundos.

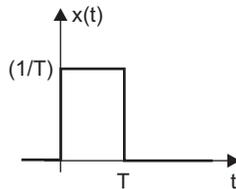


Figura EC.2

TEOREMAS E TABELA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

D.1 – TEOREMAS DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

A listagem dos teoremas é um resumo e não contém os detalhes e/ou restrições envolvidos na teoria da Transformada de Laplace. Por exemplo, na primeira linha (Definição) não está mencionado que $f(t)$ precisa atender a três condições: (i) contínua por partes; (ii) ter valores iguais a zero para $t < 0$; e (iii) ser de ordem exponencial. Portanto, esta listagem deve ser usada somente após o estudo do Capítulo 4.

Tabela D.1 Teoremas da Transformada de Laplace.

Definição	$\mathcal{L}[f(t)] \triangleq F(s) \triangleq \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
Linearidade	$\mathcal{L}[af(t)] = aF(s); \quad a = \text{constante}$ $\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$
Derivadas	$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{(n-k)} f^{(k-1)}(0^+)$ $f^{(k)}(t) \triangleq \frac{d^k f(t)}{dt^k}; \quad f^{(0)} \triangleq f(t)$
Integrais	$\mathcal{L}[f^{(-n)}(t)] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(-k)}(0^+)}{s^{n-k+1}}$ $f^{(-k)}(t) \triangleq \int \dots \int f(t) (dt)^k; \quad f^{(0)}(t) \triangleq f(t)$
Valor Inicial	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \triangleq f(\varepsilon_2) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (\text{vide Figura 4.13})$
Valor Final	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
Função Defasada	$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as} F(s); \quad a > 0$
Função Periódica (Período = T)	$f_1(t) \triangleq \begin{cases} f(t); & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ 0; & \text{para } t < 0 \text{ e } t > T \end{cases}$ $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}}$
Convolução	$\mathcal{L}[F_1(s)F_2(s)] = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau) d\tau$
Mudança de Escala	$\mathcal{L}[f(t/a)] = aF(as)$
Derivação Complexa	$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$

D.2 – TABELA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

A partir do par número 4 da Tabela D.2 está subentendido que todas as funções do tempo são multiplicadas por $u_+(t)$ para atender a uma das condições de funções transformáveis (nulas para $t < 0$) e para colocar as descontinuidades da origem dentro do intervalo de integração da transformada.

Se a função do tempo tiver ângulo de fase, este deve ser expresso em radianos e o seu valor deve ser determinado de acordo com o quadrante; vide Figura A.1 do Apêndice A.

Tabela D.2 Tabela de Transformadas de Laplace.

Par n°	$F(s)$	$f(t)$
1	s	$\delta'_+(t)$; primeira derivada do impulso unitário.
2	1	$\delta_+(t)$; impulso unitário.
3	$1/s$	$u_+(t)$; degrau unitário.
4	$1/s^2$	t
5	$1/s^n$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$ ($n =$ inteiro positivo)
6	$1/(s+a)$	e^{-at}
7	$1/(s+a)^n$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$ ($n =$ inteiro positivo)
8	$1/(s(s+a))$	$\frac{1-e^{-at}}{a}$
9	$1/(s(s+a)^2)$	$\frac{1}{a^2} (1-e^{-at} - ate^{-at})$
10	$1/(s^2(s+a))$	$\frac{1}{a^2} (e^{-at} + at - 1)$
11	$(s+b)/(s^2(s+a))$	$\frac{b-a}{a^2} e^{-at} + \frac{b}{a} t + \frac{a-b}{a^2}$
12	$(s^2 + a_1 s + a_0)/(s^2(s+a))$	$\frac{a^2 - a_1 a + a_0}{a^2} e^{-at} + \frac{a_0}{a} t + \frac{a_1 a - a_0}{a^2}$
13	$1/((s+a)(s+b))$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$
14	$s/((s+a)(s+b))$	$\frac{1}{a-b} (a e^{-at} - b e^{-bt})$
15	$(s+c)/((s+a)(s+b))$	$\frac{(c-a)e^{-at} - (c-b)e^{-bt}}{b-a}$

Tabela D.2 Tabela de Transformadas de Laplace. (Continuação.)

Par n ^o	$F(s)$	$f(t)$
16	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{be^{-at} - ae^{-bt}}{ab(a-b)}$
17	$\frac{s+c}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{c}{ab} - \frac{c-a}{a(b-a)}e^{-at} + \frac{c-b}{b(b-a)}e^{-bt}$
18	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{a_0}{ab} + \frac{a^2-a_1a+a_0}{a(a-b)}e^{-at} - \frac{b^2-a_1b+a_0}{b(a-b)}e^{-bt}$
19	$\frac{1}{s^2(s+a)(s+b)}$	$\frac{t}{ab} - \frac{a+b}{(ab)^2} + \frac{1}{a-b} \left[\frac{e^{-bt}}{b^2} - \frac{e^{-at}}{a^2} \right]$
19a	$\frac{1}{s^2(\tau_1s+l)(\tau_2s+l)}$	$t - (\tau_1 + \tau_2) + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left[\tau_2^2 e^{-l/\tau_2} - \tau_1^2 e^{-l/\tau_1} \right]$
20	$\frac{s+a_0}{s^2(s+a)(s+b)}$	$\frac{ab-a_0(a+b)}{(ab)^2} + \frac{a_0}{ab}t - \frac{a_0-a}{a^2(a-b)}e^{-at} + \frac{a_0-b}{b^2(a-b)}e^{-bt}$
21	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s^2(s+a)(s+b)}$	$\frac{a_1ab-a_0(a+b)}{(ab)^2} + \frac{a_0}{ab}t - \frac{a^2-a_1a+a_0}{a^2(a-b)}e^{-at} + \frac{b^2-a_1b+a_0}{b^2(a-b)}e^{-bt}$
22	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
23	$\frac{s+a_0}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{a_0-a}{(b-a)(c-a)}e^{-at} + \frac{a_0-b}{(a-b)(c-b)}e^{-bt} + \frac{a_0-c}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$
24	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{a^2-a_1a+a_0}{(b-a)(c-a)}e^{-at} + \frac{b^2-a_1b+a_0}{(a-b)(c-b)}e^{-bt} + \frac{c^2-a_1c+a_0}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$
25	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\text{sen}(at)$
26	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\text{cos}(at)$
27	$\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}e^{-at} \text{sen}(bt)$
28	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \text{cos}(bt)$
29	$\frac{s+a_0}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}\sqrt{(a_0-a)^2+b^2} e^{-at} \text{sen}(bt+\phi)$ em que: $\phi = \text{arctg} \frac{b}{a_0-a}$
30	$\frac{1}{s(s^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2}(1-\text{cos} bt)$
31	$\frac{1}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b\sqrt{a^2+b^2}}e^{-at} \text{sen}(bt-\phi)$ em que: $\phi = \text{arctg} \frac{b}{-a}$

Tabela D.2 Tabela de Transformadas de Laplace. (Continuação.)

Par n°	$F(s)$	$f(t)$
31a	$\frac{I}{s(I + 2\zeta s/\omega_n + s^2/\omega_n^2)}$	$I + \frac{I}{\sqrt{I - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{I - \zeta^2} t - \phi)$ <p>em que: $\phi = \text{arctg} \frac{\sqrt{I - \zeta^2}}{-\zeta}$</p> <p>Nota: Relação entre os parâmetros do par n° 31a e n° 31:</p> $\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \zeta \omega_n = a$ $\zeta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \sqrt{I - \zeta^2} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\omega_n \sqrt{I - \zeta^2} = b$
32	$\frac{s + a_0}{s[(s + a)^2 + b^2]}$	$\frac{a_0}{a^2 + b^2} + \frac{I}{b} \sqrt{\frac{(a_0 - a)^2 + b^2}{a^2 + b^2}} e^{-at} \text{sen}(bt + \phi)$ <p>em que: $\phi = \text{arctg} \frac{b}{a_0 - a} - \text{arctg} \frac{b}{-a}$</p>
33	$\frac{a}{s^2(s^2 + a^2)}$	$\frac{t}{a} - \frac{I}{a^2} \text{sen}(at)$
34	$\frac{I}{s^2[(s + a)^2 + b^2]}$	$\frac{I}{a^2 + b^2} \left[t - \frac{2a}{a^2 + b^2} + \frac{I}{b} e^{-at} \text{sen}(bt - \phi) \right]$ <p>em que: $\phi = 2 \text{arctg} \frac{b}{-a}$</p>
35	$\frac{I}{(s + c)[(s + a)^2 + b^2]}$	$\frac{e^{-ct}}{(c - a)^2 + b^2} + \frac{I}{b\sqrt{(c - a)^2 + b^2}} e^{-at} \text{sen}(bt - \phi)$ <p>em que: $\phi = \text{arctg} \frac{b}{c - a}$</p>
36	$\frac{I}{s(s + c)[(s + a)^2 + b^2]}$	$\frac{I}{c(a^2 + b^2)} - \frac{I}{c[(a - c)^2 + b^2]} e^{-ct} +$ $+ \frac{I}{b\sqrt{(a^2 + b^2)[(c - a)^2 + b^2]}} e^{-at} \text{sen}(bt - \phi)$ <p>em que: $\phi = \text{arctg} \frac{b}{-a} + \text{arctg} \frac{b}{c - a}$</p>
37	$\frac{\omega_l}{(s^2 + \omega_l^2) \left[\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + I \right]}$	$\frac{\omega_l \omega_n^2}{\sqrt{[\omega_n^2 - \omega_l^2]^2 + 4\zeta^2 \omega_l^2 \omega_n^2}} \left[\frac{I}{\omega_l} \text{sen}(\omega_l t - \phi_1) + \right.$ $\left. + \frac{I}{\omega_n \sqrt{I - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{I - \zeta^2} t - \phi_2) \right]$ <p>em que:</p> $\phi_1 = \text{arctg} \frac{2\zeta \omega_l \omega_n}{\omega_n^2 - \omega_l^2};$ $\phi_2 = \text{arctg} \frac{-2\zeta \omega_n^2 \sqrt{I - \zeta^2}}{\omega_l^2 - \omega_n^2 (I - 2\zeta^2)}$

ÍNDICE ANALÍTICO

A

- Acelerômetro, 83
- Acoplamento fluídico, 373
- Amortecedor
 - de translação, 32
 - ideal, 32
 - linear, 32
 - não-linear, 159
 - torcional, 33
- Amortecedor equivalente, 375
- Amortecedor mais realista
 - esquema, 370
 - função de transferência, 372
 - resposta em frequência, 373
- Amp-op*, 72
- Amplificador operacional
 - entrada inversora, 73
 - entrada não-inversora, 73
 - ganho, 73
 - montado como integrador, 74
 - simbologia, 72
- Amplitude modulada
 - definição, 310
 - resposta de um sistema, 311
- Análise, 8
- Análise de perturbação, *ver* linearização
- Análise dimensional, 131
- Anisotrópico, 14
- Arte de modelar, 2

B

- Bomba autocompensada, tipo proporcional
 - análise de distúrbio, 433
 - condição de estabilidade, 433
 - diagrama do modelo dinâmico, 431
 - diagrama funcional, 425
 - esquema da bomba, 424
 - estabilidade do modelo linearizado, 431
 - modelo dinâmico de perturbação, 431
 - modelo linearizado, 432
 - princípio de operação, 423
 - vazão teórica, 429
- Bomba controlada e motor
 - amortecedor equivalente, 411

- discussão do modelo, 413
- função de transferência, 413
- inércia equivalente, 411
- válvula de alívio, 408
- válvula de retenção, 408

Bulk Modulus, 49, 391

C

- Capacitância fluídica, 44
- Capacitância térmica, 40
- Capacitor, 35
- Cilindro controlado por válvula
 - esquema, 415
 - função de transferência, 423
 - válvula centro aberto (*underlapped*), 417
 - válvula centro crítico, 417
 - válvula centro fechado (*overlapped*), 417
- Circuito elétrico
 - com amplificador operacional, 72, 75
 - com gerador de corrente, 69, 71
 - com impedâncias equivalentes, 66, 68
 - LCR, 61
 - RC, 58
- Co-espectro, 331
- Coefficiente de rigidez volumétrico, 49
- Compressibilidade de líquidos, 48, 49, 391
- Computador analógico, 344
- Computador digital, 344
- Condição de regime permanente, 131
- Condições iniciais, 175, 176, 181, 221
- Constante de tempo, 60
- Controlador PID pneumático
 - diagrama-padrão, 441
 - esquema, 442
 - função de transferência, 445, 446
 - resposta em frequência, 448
- Controle
 - diagrama-padrão (nomenclatura), 441
 - diagrama do PID, 441
 - proporcional e integral, 111
- Convenções de sinais, 23
- Convolução, 192, 293
- Cramer, 475
- Critério de Routh, 128, 431

D

- Decibel (db), 265
- Degrau unitário, 75, 163, 165
- Densidade espectral
 - de transiente, 312
 - do impulso, 316
 - do impulso realizável, 318
- Derivadas (fórmulas), 469
- Descarga, 26
- Determinantes
 - co-fatores, 473
 - matriz inversa, 473
 - propriedades, 472
 - regra de Cramer, 475
- Diagrama de blocos
 - de função de transferência, 57, 196
 - somador, 96
- Dinâmica (conceito), 5
- Dinâmica de sistema
 - definição, 5
 - subáreas, 6

E

- Efeito de carga, 7
- Entrada
 - aleatória, 11
 - definição, 6
 - determinística, 10
 - modelos, 9
- Equação característica, 478, 484
- Equação de estado para gases, 47, 110
- Equações diferenciais
 - equação característica, 478, 484
 - equações diferenciais simultâneas, 483
 - método clássico, 476
 - método dos coeficientes indeterminados, 479
 - operador D , 478
 - ordem da equação, 477
 - ordinária, 476
 - parcial, 476
 - princípio da superposição, 483
 - solução da homogênea, 478
 - solução da particular, 478
- Escoamento
 - região de transição, 44
 - regime laminar, 43
 - regime turbulento, 43
- Excitação paramétrica, 10

F

- Fator de amortecimento, 63

- Fator de compressibilidade, 48
- Força eletromotriz de auto-indução, 37
- Fourier
 - filtro, 353, 354, 355
 - Transformada, 329
- Frequências do sistema de 2ª ordem
 - de ressonância, 262
 - do pico da relação de amplitudes, 262
 - natural amortecida, 206, 225, 262
 - natural não-amortecida, 63, 262
- Função contínua por partes, 144
- Função de ordem exponencial, 144
- Função de transferência
 - com Laplace, 195
 - operacional, 55, 56, 123
 - senoidal, 252
 - senoidal efetiva, 350
 - utilização geral, 339
- Função defasada, 153
- Função degrau unitário
 - definição, 75, 142, 154
 - Transformada de Laplace, 163, 165
- Função descritiva
 - conceito, 344
 - de um relé ideal, 353
 - filtro de Fourier, 353, 354, 355
 - função de transferência senoidal efetiva, 350
 - hipóteses envolvidas, 350
- Função impulso (Delta de Dirac)
 - definição, 166
 - densidade espectral, 316
 - multiplicação com outra função, 177
 - resposta de um sistema linear, 292, 295
 - substituição de condições iniciais, 179, 221
 - teste, 316
 - Transformada de Laplace, 166
- Função rebatida (espelhada), 164, 193, 201
- Função sign, 159
- Funções com função degrau, 164
- Funções transitórias
 - conceito, 164
 - ver* resposta
- Funções trigonométricas
 - equação de Euler, 468
 - relações envolvendo senos e cossenos, 469
 - seno e cosseno em termos polares, 468

G

- Ganho
 - de função de transferência, 123
 - derivativo, 124, 126

integrador, 124, 126
paramétrico k , 127
proporcional, 124, 125
Gases perfeitos, 47, 110
Gráfico de Bode, 264

H

Homogêneo, 14

I

Impedância equivalente
em paralelo, 65
em série, 64
Impulso, *ver* função impulso
Indução mútua, 38
Indutor, 37
Inércia equivalente, 375
Inertância fluidica, 46
Integração com impulso, 168
Integração por partes, 147
Integrador, 74, 117, 526
Integrais (fórmulas), 470
Integral de convolução, 192
Isotrópico, 14

L

Lei da conservação da energia, 27
Lei da conservação da massa, 25, 394
Lei de Kirchhoff
lei das malhas, 24
lei dos nós, 25
Lei de Newton, 23
Limites (fórmulas), 471
Linearização
análise de perturbação, 345
conceito do método, 344
erro de linearização, 346
interpretação da linearização, 347
outros métodos de linearização, 349
série de Taylor truncada, 346
variável de perturbação, 346

M

Material

anisotrópico, 14
homogêneo, 14
isotrópico, 14

MATLAB

command window, 488, 489
comando *help*, 488
comentário, 491

expansão em frações parciais, 510
gráficos bidimensionais, 507
funções, 495, 496
funções complexas, 494
funções matriciais, 504
linhas de comando, 490
matriz singular, 502
matrizes e vetores, 497
operações com matrizes, 499
operações comparativas e lógicas, 505
ponto-e-vírgula, 491
raízes de polinômio, 507
regras para definição de variáveis, 490
resposta em frequência, 513
tipos de formatos, 496
toolboxes, 488
vírgula, 491
workspace, 489

Matriz do sistema, 56

Método de Routh, 128, 431

Modelagem

com harmonia e coerência, 130
experimental, 236
fluxograma da organização, 20

Modelo físico esquemático, 52

Modelos

analíticos, 12
classificação dos analíticos, 11, 13
computacionais, 12
físicos, 3
matemáticos, 3

Mola

de prato, 28
de translação, 28
ideal, 27
linear, 27
torcional, 31

Momento de inércia

da massa pontual, 90, 138
do disco, 90, 138
translação entre eixos paralelos, 90

N

Número de Biot, 41

Número de Reynolds, 44

Números complexos

ângulo de fase, 467
divisão e multiplicação, 468
forma polar, 467
módulo, 467
soma de conjugados, 468

O

- Operador D , 35, 478
- Operador D e a Transformada de Laplace, 157, 426

P

- Parâmetros distribuídos, 14
- Partes de modelagem, 18
- Pêndulo simples, 86
- PID pneumático, *ver* controlador
- Plano de fase, 344
- Pólos
 - de uma função de transferência, 196
 - no plano complexo, 197, 198
- Princípio da superposição, 96, 338, 483
- Problema de análise, 8
- Problema de medidas, 8
- Problema de síntese, 8

Q

- Quad-espectro, 331

R

- Raízes de polinômio, 184
- Raízes instáveis, 128
- Região de transição, 44
- Regime laminar, 43
- Regime turbulento, 43
- Relação de transmissão, 374
- Relações entre variáveis (tabela), 51
- Relações não-lineares suaves e contínuas, 342
- Resistência
 - elétrica, 34
 - fluídica, 42
 - térmica, 38
- Resposta da entrada
 - arbitrária, 293
 - impulso, 292, 295
 - impulso aproximado, 296
 - periódica, 305, 308
 - transiente arbitrário, 312
- Resposta do impulso e resposta em frequência, 301, 303
- Resposta em frequência
 - comando Bode (MATLAB), 513
 - conceito, 250, 299
 - correções e fase do sistema de 1ª ordem, 270
 - correções e fase do sistema de 2ª ordem, 275
 - de integradores e derivadores, 267
 - decibel (db), 265
 - determinação de escalas, 280
 - do ganho proporcional, 254, 266

- do integrador, 255
 - do sistema de 1ª ordem, 257, 259, 269
 - do sistema de 2ª ordem, 260, 273
 - do sistema de 2ª ordem numerador, 278
 - do tempo morto, 263, 277
 - frequência de pico, 262
 - frequência de ressonância, 262
 - função de transferência senoidal, 252
 - gráfico da resposta em frequência, 251
 - gráfico de Bode, 264, 513
 - gráfico normalizado do sistema de 1ª ordem, 259
 - gráfico normalizado do sistema de 2ª ordem, 261
 - resposta permanente senoidal, 250
- Respostas transitória e permanente de sistemas, 213, 250
- Routh, 128, 431

S

- Saída
 - definição, 6
 - transitória e permanente de sistemas, 213, 250
 - ver também* Resposta
- Sensibilidade estática da malha, 127
- Sentido positivo
 - definição, 52
 - harmonioso e correspondente, 53
- Série de Fourier
 - coeficientes, 305
 - da onda quadrada, 307, 353
- Série de Taylor, 346, 471
- Simulink
 - abs*, 528
 - blocos usuais, 525
 - carregar blocos, 520
 - clock*, 530
 - constant*, 530
 - dead zone*, 526
 - elaboração de diagrama, 519
 - entrada de parâmetros dos blocos, 525
 - gain*, 528
 - integrator*, 526
 - interligando blocos, 522
 - library browser*, 519
 - loops* algébricos, 537
 - manipulação de blocos, 532
 - manipulação de linhas, 533
 - manipulação do sistema, 532
 - mux*, 528
 - nomear trabalho, 519
 - parâmetros da simulação, 524
 - preparação de blocos, 520

- product*, 527
- ramp*, 531
- saturation*, 527
- scope*, 529
- simulação e resultado, 524
- sine wave*, 531
- step*, 531
- sum*, 527
- switch*, 528
- to workspace*, 529
- transfer fn*, 526
- xy graph*, 529
- Simulação digital
 - algoritmo de integração, 358
 - diagrama de um modelo não-linear de vibração, 364
 - erro do método de Euler, 358
 - método de Euler, 358
 - reformulação da equação diferencial, 356
 - rotina computacional do método de Euler, 360
 - usando MATLAB, *ver* Simulink,
- Sinal aleatório
 - características, 319
 - co-espectro, 331
 - densidade espectral cruzada, 331
 - densidade espectral média quadrada, 326, 332
 - determinação de função de transferência, 333
 - estacionário, 320
 - função autocorrelação, 324
 - função de distribuição de amplitudes, 322
 - power spectral density*, 329
 - probability density function*, 322
 - quad-espectro, 331
 - raiz média quadrada (RMS), 322
 - relação entre densidade espectral e autocorrelação, 329
 - ruído branco, 330
 - sinais rápidos, 325
 - valor da média quadrada, 321
 - valor médio, 321
 - variação periódica no sinal aleatório, 325
 - white noise*, 330
- Sismógrafo, 83
- Sistema
 - com controle de pressão, 114
 - com dois tanques, 105
 - com duas massas em translação, 92
 - com inércia-mola-amortecedor, 80
 - com massas em um eixo, 88
 - com um tanque, 97, 99, 102
 - definição, 4
 - estável, 128
 - massa-mola-amortecedor, 77
 - pneumático para compensação, 111
 - térmico com duas capacitâncias térmicas, 121
 - térmico com uma capacitância térmica, 118
- Sistema de 1ª ordem
 - determinação experimental de t , 237, 240
 - estudo da resposta experimental, 237
 - função de transferência padrão, 61, 213
 - gráfico normalizado da resposta ao degrau, 217
 - gráfico normalizado da resposta em frequência, 259
 - resposta à função degrau, 215
 - resposta à função impulso, 220
 - resposta à função rampa, 218
 - resposta em frequência, 257, 269
 - solução da homogênea, 214
- Sistema de 2ª ordem
 - determinação do sobre-sinal $M_p(\%)$, 241
 - determinação experimental de ω_n e ζ , 240
 - determinação experimental de τ_1 e τ_2 , 243, 248
 - estudo da resposta experimental, 240, 245
 - frequência natural não-amortecida, 262
 - função de transferência padrão, 63, 222
 - gráfico do sobre-sinal $M_p(\%)$ em função de ζ , 243
 - gráfico normalizado da resposta ao degrau, 229
 - gráfico normalizado da resposta em frequência, 261
 - raízes do sistema com amortecimento crítico, 224
 - raízes do sistema subamortecido, 224
 - raízes do sistema superamortecido, 224
 - resposta à função degrau, 225
 - resposta à função impulso, 233
 - resposta à função rampa, 230
 - resposta em frequência, 260, 273
 - sobre-sinal (*overshoot*), 229, 236, 241
 - solução da homogênea, 223
- Sistema hidráulico – óleo
 - bomba de deslocamento positivo, 383
 - Bulk Modulus*, 391
 - comparação de dados gerais de bombas, 384
 - conservação da massa e função da massa específica, 394
 - controle misto, 387, 388

- controle por bomba, 386
- controle por válvula, 384
- deslocamento de bombas, 384
- deslocamento variável, 386
- equações e relações, 389
- fórmulas para orifícios, 390
- motores hidráulicos, 384
- torque de motores e bombas, 395
- vazão de bombas e motores, 395
- Sistema linear
 - características, 338
 - princípio da superposição, 338, 483
 - utilização da função de transferência, 339
- Sistema mecânico com engrenagens e acoplamento fluido
 - amortecedor equivalente, 375
 - função de transferência, 381
 - inércia equivalente, 374
 - relação de transmissão, 374
 - sistema equivalente, 379
 - torque equivalente, 375
- Sistema mecânico com entrada deslocamento
 - conceito de entrada, 367
 - densidade espectral, 366
- Sistema não-linear
 - blocos não-lineares, 340, 341, 342, 343
 - ciclo-limite, 340
 - computador analógico, 344
 - computador digital, 344
 - fenômenos característicos, 339
 - função descritiva, 344, 350
 - influência do tamanho da entrada, 339
 - linearização, 344, 345
 - oscilações diversas, 340
 - plano de fase, 344
 - relações não-lineares suaves e contínuas, 342
 - saltos de amplitude de ressonância, 340
 - simulação digital, 344, 356
 - sub-harmônicos, 340
 - super-harmônicos, 340
- Somador, 96, 527
- T**
- Tanque pressurizado com válvula, orifícios e pistão
 - esboço da resposta em frequência, 407
 - esquema do sistema, 397
 - função de transferência, 404
- Teorema da convolução, 192, 293
- Termômetro de bulbo, 119
- Teste do impulso, 316, 319
- Torque equivalente (translação), 375
- Transdutor de deslocamento para pressão
 - determinação experimental dos coeficientes, 437, 438
 - esquema, 435
 - função de transferência, 439
 - sensibilidade, 436
- Transdutor eletropneumático
 - análise da linearidade, 455
 - diagrama de blocos, 454
 - esquema, 449
 - força magnética, 452
 - modelo matemático, 455
- Transferência de calor
 - condução, 39
 - convecção, 39
 - radiação, 40
- Transformada de Fourier, 329
- Transformada de Laplace
 - condições iniciais, 175, 176, 181
 - convolução, 192
 - da derivada da função impulso, 172
 - da função degrau, 163, 165
 - da função impulso, 166
 - de funções periódicas, 160, 203
 - definição, 142
 - detalhes na origem, 175
 - inversão usando tabelas, 184
 - métodos para inversão, 183
 - operador D e a Transformada de Laplace, 157
 - restrições de s , 143
 - tabela com teoremas, 540
 - tabela de transformadas, 541
 - teorema da derivação complexa, 152
 - teorema da derivação real, 150
 - teorema da integração, 147
 - teorema da mudança de escala no tempo, 155
 - teorema da unicidade, 146
 - teorema do defasamento em s , 154, 201
 - teorema do defasamento no tempo, 153, 202
 - teorema do valor final, 155
 - teorema do valor inicial, 156
- Transformada inversa de Laplace
 - aplicação à resposta em frequência, 303
 - definição, 145
 - envolvendo a densidade espectral, 314
 - envolvendo a resposta em frequência, 303
 - inversão usando tabelas, 184
 - métodos para inversão, 183
 - usando MATLAB, 510

Translação de inércia equivalente, 376

V

Variável de fluxo, 50

Variável de potencial, 50

Vazão, 26

Verificação de modelagem

análise dimensional, 131

condição de regime permanente, 131

método de Routh, 128

técnicas, 128

Vetor das entradas, 56

Vetor das saídas, 56

Vibrações livres, 10

Z

Zeros

de uma função de transferência, 196

no plano complexo, 197, 198

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASELTINE, J. A. **Transform method in linear system analysis**. New York: McGraw-Hill, 1958.
- D'AZZO, J. J.; HOUPIS, C. H. **Análise e projeto de sistemas de controle lineares**. 2. ed. Tradução de Bernardo Severo da Silva Filho. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1984.
- DOEBELIN, E. O. **System dynamics: modeling, analysis, simulation, design**. New York: Marcel Dekker, 1998.
- DOEBELIN, E. O. **System modeling and response: theoretical and experimental approaches**. New York: John Wiley & Sons, 1980.
- DOEBELIN, E. O. **Dynamics analysis and feedback control**. New York: McGraw-Hill, 1962.
- ESPOSITO, A. **Fluid power with applications**. 5. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2000.
- FELICIO, L. C. **A Theoretical and experimental study of the static and dynamic behavior of vane-type pressure compensated hydraulic pumps with proportional type regulator**. Columbus: The Ohio State University, 1981.
- HANSELMAN, D.; LITTLEFIELD, B. **Matlab 6: curso completo**. Tradução de Cláudia Sant'Ana Martins. São Paulo: Prentice Hall, 2003.
- MATSUMOTO, E. Y. **Matlab 7: fundamentos**. São Paulo: Érica, 2004.
- MATSUMOTO, E. Y. **Simulink 5: fundamentos**. São Paulo: Érica, 2002.
- MERRITT, H. E. **Hydraulic control systems**. New York: John Wiley & Sons, 1967.
- NIXON, F. E. **Handbook of Laplace transformation: tables and examples**. New Jersey: Prentice Hall, 1960.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 4. ed. Tradução de Paulo Álvaro Maya. São Paulo: Prentice Hall, 2003.
- PHILLIPS, C. L.; HARBOR, R. D. **Sistemas de controle e realimentação**. Tradução de Luiz Fernando Ricardo. São Paulo: Makron Books, 1996.
- SELBY, S. M. **Standard mathematical tables**. 23. ed. Cleveland: CRC Press, 1975.
- THOMSON, W. T.; DAHLEH, M. D. **Theory of vibration with applications**. 5. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1998.
- WYLEN, G. J. V.; SONNTAG, R. E.; BORGNAKKE, C. **Fundamentos da termodinâmica**. Tradução de Euryale de Jesus Zerbini. São Paulo: Edgard Blücher, 2003.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**. v.1, 3. ed. Tradução de Antonio Zumpano. São Paulo: Pearson, 2005.

MODELAGEM DA DINÂMICA DE SISTEMAS E ESTUDO DA RESPOSTA

Luiz Carlos Felício

Segunda
Edição

Esta obra atende a cursos de graduação e cursos iniciais de pós-graduação cujos respectivos programas contemplem modelagem da Dinâmica de Sistemas. A técnica de modelagem aqui ensinada utiliza metodologia especial que se resume na divisão das expressões matemáticas em dois grupos: equações e relações.

Foi acrescentado ainda o **estudo da resposta**, assunto indispensável para compreender o comportamento dinâmico de sistemas, necessário na elaboração de projetos, análise e avaliação de sistemas.

Os assuntos foram cuidadosamente selecionados e didaticamente desenvolvidos, com base na experiência de muitos anos de ensino de modelagem.

ESTE LIVRO CONTÉM

- ✓ 33 modelagens completas
- ✓ 90 exercícios resolvidos e propostos

ISBN 978-85-7656-169-9

