Métodos Computacionais – Ondas

Aula: Ondas estacionárias

Aula: Ondas Estacionárias - Objetivos

Com essa aula, você deverá ser capaz de:

1) Implementar/adaptar um script para simular modos normais de vibração em uma corda.
2) Fazer a *animação* de combinação de modos normais em Octave/MatLab.

Tarefa: Adaptar o script da aula anterior para simular modos normais de vibração em uma corda. Para cada tempo t, plotar pontos y(x,t) vs x em um "*frame*" de modo que a sequência de todos os *frames* formará uma animação da dinâmica do modo normal/combinação de modos normais.

Tempo aproximado: 20 a 30 min.

Ondas estacionárias

Equação de onda: $$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t)}$$

Uma solução (harmônica) possível é da forma:

$$y(x,t) = A(x)\cos(\omega t)$$

onde a função A(x) obedece:

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} = -k^2 A(x) \qquad \text{com} \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

(sujeita às condições de contorno).

Ondas estacionárias e condição inicial

Digamos que usamos a condição inicial: $y(x, t = 0) = A(x)$

sendo que a função A(x) obedece:

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} = -k^2 A(x) \quad \text{com} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

com condições de contorno.

Isso gera uma solução de *onda estacionária*
(que não se propaga).

Modos normais de vibração

Exemplos de solução de : $$\frac{d^2A(x)}{dx^2} = -k^2A(x)$$ $$k = \frac{\omega}{c}$$

com condições de contorno $$A(x_0 = 0) = A(x_1 = L) = 0$$

Solução geral: $$A(x) = a\cos(kx) + b\sin(kx)$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A(0) & = & 0 \Rightarrow a=0 \\ A(L) & = & 0 \Rightarrow b\sin(k\ L)=0 \Rightarrow k.L=n\pi\ (n=0,1,2,..) \end{array} \right.$$

Logo: $$\boxed{A_n(x)=b_n\sin(n\pi x/L)}$$ $$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

obedece às condições de contorno p/ *qualquer n.*

Modos normais de vibração

Onda estacionária + condições de contorno

$$\boxed{y_n(x,t) = b_n \sin(n\pi x/L)\cos(\omega_n t)}$$

Logo, qualquer solução inicial do tipo

$$y(x, t=0) = b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

gera uma onda estacionária na corda com frequência dada por:

$$\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{L}$$

Uma solução deste tipo é chamada um *modo normal de vibração*.

Combinando modos normais de vibração

Onda estacionária + condições de contorno

$$\boxed{y_n(x,t) = b_n \sin(n\pi x/L)\cos(\omega_n t)}$$

$$\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{L}$$

Obviamente se $y_{n1}(x,t)$ é solução, então
$y_{n1}(x,t) + y_{n2}(x,t)$ também é solução,
obedecendo às mesmas cond. de contorno.

Exemplo: condição inicial que combine modos normais do tipo:

$$\boxed{y(x,t=0) = \sum_n a_n \sin\frac{n\pi x}{L}}$$

Aula 11 – Tarefa (Fazer upload!)

Adapte o script escrito na aula anterior [onda ideal que se propaga com velocidade *c*=50m/s em uma corda com extremos em $x_0=0$ e $x_1=1$m] e

- *Calcule y(x,t) de t=0 a t=0,05s com passo Δt=0,0001 e r=c($\Delta t/\Delta x$) =1 (determine o Δx) usando as seguintes condições iniciais:*

  1) $y(x, t \leq 0) = 0.5 \sin \pi x$

  2) $y(x, t \leq 0) = 0.5 \sin 3\pi x$

  3) $y(x, t \leq 0) = 0.5 \sin \pi x + 0.5 \sin 3\pi x$

- *Após a simulação temporal, mostrar um gráfico de y(x=0,3,t) vs t.*

Aula 11 – Tarefa - Dicas

- *Debug: seguem os valores de y(i=60,61,62,63,n=1,2,3,4,5) para a condição inicial* $y(x, t \leq 0) = 0.5 \sin \pi x$

```
n=1: tempo=0.0000  y(60,n)=0.3998 y(61,n)=0.4045 y(62,n)=0.4091 y(63,n)=0.4135
n=2: tempo=0.0001  y(60,n)=0.3997 y(61,n)=0.4044 y(62,n)=0.4090 y(63,n)=0.4134
n=3: tempo=0.0002  y(60,n)=0.3995 y(61,n)=0.4042 y(62,n)=0.4088 y(63,n)=0.4132
n=4: tempo=0.0003  y(60,n)=0.3993 y(61,n)=0.4039 y(62,n)=0.4085 y(63,n)=0.4129
n=5: tempo=0.0004  y(60,n)=0.3989 y(61,n)=0.4035 y(62,n)=0.4081 y(63,n)=0.4125
```

- *Para mostrar o resultado, você pode fazer um "animação" como na última aula.*
- *A idéia é fazer um plot de y(i,n) vs* x_i *para cada valor de n ("time frame") e "juntar" tudo na animação.*
- *Veja um exemplo de um "filme" de uma queda livre no arquivo*

Aula10_ExMovie.m

Aula 11 – Tarefa - Dicas

- *Debug II: segue o gráfico y(0.3, t) vs t para a condição inicial*

$$y(x, t \leq 0) = 0.5 \sin \pi x + 0.5 \sin 3\pi x$$