em que β_0 e β_1 são os parâmetros do intercepto e da inclinação populacionais, respectivamente.

Hipótese RLS.2 (Amostragem aleatória)
Temos uma amostra aleatória de tamanho n, $\{(x_i, y_i): i = 1, 2, \ldots, n\}$, seguindo o modelo populacional na Hipótese RLS.1.

Hipótese RLS.3 (Variação amostral na variável explicativa)
Os resultados amostrais em x, a saber $\{x_i, i = 1, \ldots, n\}$, não são todos de mesmo valor.

Hipótese RLS.4 (Média condicional zero)
O erro u tem zero como valor esperado, quaisquer que sejam os valores das variáveis. Em outras palavras,

$$E(u|x) = 0.$$

Hipótese RLS.5 (Homoscedasticidade)
O erro u tem a mesma variância quaisquer que sejam os valores das variáveis explicativas. Em outras palavras:

$$\mathrm{Var}(u|x) = \sigma^2.$$

Termos-chave

Coeficiente de determinação
Condições de primeira ordem
Covariável
Elasticidade
Erro padrão da regressão (EPR)
Erro padrão de $\hat{\beta}_1$
Função de regressão populacional (FRP)
Função de regressão amostral (FRA)
Graus de liberdade
Heteroscedasticidade
Hipótese de média condicional zero
Hipóteses de Gauss-Markov
Homoscedasticidade
Independente da média
Mínimos quadrados ordinários (MQO)
Modelo de elasticidade constante
Modelo de regressão linear simples
Parâmetro de inclinação
Parâmetro do intercepto
Regressando
Regressão através da origem
Regressor
Resíduos
Reta de regressão MQO
R-quadrado
Semielasticidade
Soma dos quadrados explicada (SQE)
Soma dos quadrados dos resíduos (SQR)
Soma dos quadrados total (SQT)
Termo de erro (perturbação)
Valor estimado
Variância do erro
Variável de controle
Variável de resposta
Variável dependente
Variável explicada
Variável explicativa
Variável independente
Variável previsora
Variável prevista

Problemas

1. Seja *kids* o número de filhos de uma mulher, e *educ* os anos de educação da mulher. Um modelo simples que relaciona a fertilidade a anos de educação é

$$kids = \beta_0 + \beta_1 educ + u,$$

em que u é um erro não observável.

(i) Que tipos de fatores estão contidos em u? É provável que eles estejam correlacionados com o nível de educação?

(ii) Uma análise de regressão simples mostrará o efeito *ceteris paribus* da educação sobre a fertilidade? Explique.

2. No modelo de regressão linear simples $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$, suponha que $E(u) \neq 0$. Fazendo $\alpha_0 = E(u)$, mostre que o modelo pode sempre ser reescrito com a mesma inclinação, mas com um novo intercepto e erro, em que o novo erro tem um valor esperado zero.

3. A tabela seguinte contém as variáveis *GPA* (nota média em curso superior nos Estados Unidos) e *ACT* (nota do teste de avaliação de conhecimentos para ingresso em curso superior nos Estados Unidos) com as notas hipotéticas de oito estudantes de curso superior. *GPA* está baseado em uma escala de quatro pontos e foi arredondado para um dígito após o ponto decimal.

Estudante	*GPA*	*ACT*
1	2,8	21
2	3,4	24
3	3,0	26
4	3,5	27
5	3,6	29
6	3,0	25
7	2,7	25
8	3,7	30

(i) Estime a relação entre *GPA* e *ACT* usando MQO; isto é, obtenha as estimativas de intercepto e de inclinação da equação

$$\widehat{GPA} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 ACT.$$

Comente a direção da relação. O intercepto tem uma interpretação útil aqui? Explique. Qual deveria ser o valor previsto do *GPA* se a nota *ACT* aumentasse em cinco pontos?

(ii) Calcule os valores estimados e os resíduos de cada observação e verifique que a soma dos resíduos é (aproximadamente) zero.

(iii) Qual é o valor previsto do *GPA* quando $ACT = 20$?

(iv) Quanto da variação do *GPA* dos 8 estudantes é explicado pela *ACT*? Explique.

4. Os dados do arquivo BWGHT contêm informações de nascimentos por mulheres nos Estados Unidos. As duas variáveis de interesse são: a variável dependente, peso dos recém-nascidos em onças (*bwght*), e a variável explicativa, número médio de cigarros que a mãe fumou por dia durante a gravidez (*cigs*). A seguinte regressão simples foi estimada usando dados de $n = 1.388$ nascimentos:

$$\widehat{bwght} = 119{,}77 - 0{,}514\, cigs$$

(i) Qual é o peso de nascimento previsto quando $cigs = 0$? E quando $cigs = 20$ (um maço por dia)? Comente a diferença.

(ii) O modelo de regressão simples necessariamente captura uma relação causal entre o peso de nascimento da criança e os hábitos de fumar da mãe? Explique.

(iii) Para prever um peso de nascimento de 125 onças, qual deveria ser a magnitude de *cigs*? Comente.

(iv) A proporção de mulheres que não fumou durante a gravidez na amostra é cerca de 0,85. Isso ajuda a reconciliar sua conclusão do item (iii)?

5. Na função de consumo linear

$$\widehat{cons} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 inc,$$

a MPC – *propensão marginal a consumir* (estimada) é simplesmente a inclinação $\hat{\beta}_1$, ao passo que a APC – *propensão média a consumir* é $\widehat{cons}/inc = \hat{\beta}_0/inc + \hat{\beta}_1$. Usando as observações de renda e consumo anuais de 100 famílias (ambas medidas em dólares), obteve-se a seguinte equação:

$$\widehat{cons} = -124{,}84 + 0{,}853\ inc$$

$$n = 100, R^2 = 0{,}692.$$

(i) Interprete o intercepto dessa equação e comente seu sinal e magnitude.

(ii) Qual é o consumo previsto quando a renda familiar é US$ 30.000?

(iii) Com *inc* sobre o eixo de *x*, desenhe um gráfico da MPC e da APC estimadas.

6. Usando dados de casas vendidas em 1988 em Andover, Massachusetts [Kiel e McClain (1995)], a equação seguinte relaciona os preços das casas (*price*) à distância de um incinerador de lixo recentemente construído (*dist*):

$$\widehat{\log(price)} = 9{,}40 + 0{,}312 \log(dist)$$

$$n = 135, R^2 = 0{,}162.$$

(i) Interprete o coeficiente de log(*dist*). O sinal dessa estimativa é o que você esperava?

(ii) Você considera que a regressão simples oferece um estimador não viesado da elasticidade *ceteris paribus* de preço (*price*) em relação à distância (*dist*)? (Pense sobre a decisão da cidade em instalar o incinerador naquele local.)

(iii) Quais outros fatores relativos a casas afetam seu preço? Eles poderiam estar correlacionados com a distância do incinerador?

7. Considere a função de poupança

$$sav = \beta_0 + \beta_1 inc + u,\ u = \sqrt{inc}\cdot e,$$

em que *e* é uma variável aleatória com E(*e*) = 0 e Var(*e*) = σ_e^2. Considere *e* independente de *inc*.

(i) Mostre que E(*u*|*inc*) = 0, de modo que a hipótese de média condicional zero (Hipótese RLS.4) seja satisfeita. [*Dica*: se *e* é independente de *inc*, então E(*e*|*inc*) = E(*e*).]

(ii) Mostre que Var(*u*|*inc*) = $\sigma_e^2\,inc$, de modo que a hipótese de homoscedasticidade RLS.5 é violada. Em particular, a variância de *sav* aumenta com *inc*. [*Dica*: Var(*e*/*inc*) = Var(*e*), se *e* e *inc* forem independentes.]

(iii) Faça uma discussão que sustente a hipótese de que a variância da poupança aumenta com a renda da família.

8. Considere o modelo de regressão simples padrão $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$ sob as hipóteses de Gauss-Markov RLS.1 a RLS.5. Os estimadores usuais $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ são não viesados para seus respectivos parâmetros populacionais. Seja $\tilde{\beta}_1$ o estimador de β_1 obtido ao assumir que o intercepto é zero (veja a Seção 2.6).

(i) Encontre $E(\tilde{\beta}_1)$ em termos de x_i, β_0 e β_1. Verifique que $\tilde{\beta}_1$ é não viesado para β_1 quando o intercepto populacional (β_0) é zero. Há outros casos em que $\tilde{\beta}_1$ é não viesado?

(ii) Encontre a variância de $\tilde{\beta}_1$. [*Dica*: a variância não depende de β_0.]

(iii) Mostre que $\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_1) \leq \mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)$. [*Dica*: para qualquer amostra de dados, $\sum_{i-1}^{n} x_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$, com a desigualdade estrita preponderando, a não ser que $\bar{x} = 0$.]

(iv) Comente a relação entre viés e variância ao escolher entre $\hat{\beta}_1$ e $\tilde{\beta}_1$.

9. (i) Sejam $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ o intercepto e a inclinação da regressão de y_i sobre x_i, usando n observações. Sejam c_1 e c_2 constantes, com $c_2 \neq 0$. Sejam $\tilde{\beta}_0$ e $\tilde{\beta}_1$ o intercepto e a inclinação da regressão de $c_1 y_i$ sobre $c_2 x_i$. Mostre que $\tilde{\beta}_1 = (c_1/c_2)\,\hat{\beta}_0$ e $\tilde{\beta}_0 = c_1\hat{\beta}_0$, verificando as observações sobre as unidades de medida da Seção 2.4. [*Dica*: para obter $\tilde{\beta}_1$, insira as transformações de x e y em (2.19). Em seguida, use (2.17) para $\tilde{\beta}_0$, estando seguro de usar as transformações de x e y *e* a inclinação correta.]

(ii) Agora, sejam $\tilde{\beta}_0$ e $\tilde{\beta}_1$ os parâmetros estimados da regressão de $(c_1 + y_i)$ sobre $(c_2 + x_i)$ (sem nenhuma restrição sobre c_1 ou c_2). Mostre que $\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1$ e $\tilde{\beta}_0 = \hat{\beta}_0 + c_1 - c_2\hat{\beta}_1$.

(iii) Agora, sejam $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ as estimativas de MQO da regressão $\log(y_i)$ sobre x_i, para a qual devemos assumir $y_i > 0$ para todo i. Para $c_1 > 0$, sejam $\tilde{\beta}_0$ e $\tilde{\beta}_1$ o intercepto e a inclinação da regressão de $\log(c_1 y_i)$ sobre x_i. Mostre que $\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1$ e $\tilde{\beta}_0 = \log(c_1) + \hat{\beta}_0$.

(iv) Agora, assumindo que $x_i > 0$ para todo i, sejam $\tilde{\beta}_0$ e $\tilde{\beta}_1$ o intercepto e a inclinação da regressão de y_i sobre $\log(c_2 x_i)$. Como $\tilde{\beta}_0$ e $\tilde{\beta}_1$ se comparam com o intercepto e a inclinação da regressão de y_i sobre $\log(x_i)$?

10. Sejam $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ os estimadores MQO do intercepto e da inclinação, respectivamente, e que $\bar{u}$ seja a média amostral dos erros (não os resíduos!).

(i) Demonstre que $\hat{\beta}_1$ pode ser escrita como $\hat{\beta} = \beta_1 + \sum_{i=1}^{n} w_i u_i$, em que $w_i = d_i/\mathrm{SQT}_x$ e $d_i = x_i - \bar{x}$.

(ii) Use o item (i), juntamente com $\sum_{i=1}^{n} w_i = 0$, para demonstrar que $\hat{\beta}_1$ e $\bar{u}$ são não correlacionadas. [*Dica*: Você está sendo solicitado a demonstrar que $E[\hat{\beta} - \beta_1) \cdot \bar{u}] = 0$.].

(iii) Demonstre que $\hat{\beta}_0$ pode ser escrito da seguinte forma $\hat{\beta}_0 = \beta_0 + \bar{u} - (\hat{\beta}_1 - \beta_1)\bar{x}$.

(iv) Use os itens (ii) e (iii) para provar que $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_0) = \sigma^2/n + \sigma^2(\bar{x})^2/\mathrm{SQT}_x$.

(v) Faça os cálculos para simplificar a expressão no item (iv) para a equação (2.58). [*Dica*: $\mathrm{SQT}_x/n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$.]

11. Suponha que você esteja interessado em estimar o efeito das horas gastas com um curso de preparação para o vestibular (*hours*) no total das notas do vestibular (*sat*). A população são todos os pré-universitários graduados no ensino médio em determinado ano.

(i) Suponha que lhe tenha sido dada uma subvenção para executar um experimento controlado. Explique como você estruturaria o experimento para estimar o efeito causal de horas (*hours*) no vestibular (*sat*).

(ii) Considere o caso mais realístico em que os alunos decidem quanto tempo gastarão com um curso de preparação, e você só pode fazer amostragens aleatórias de *sat* e *hours* da população. Escreva o modelo populacional da seguinte forma

$$sat = \beta_0 + \beta_1 hours = u$$

em que, como sempre, num modelo com um intercepto, podemos assumir $E(u) = 0$. Liste pelo menos dois fatores contidos em u. Existe a probabilidade de eles terem correlação negativa ou positiva com as horas gastas (*hours*)?

(iii) Na equação do item (ii), qual deve ser o sinal de β_1 se o curso de preparação for eficaz?

(iv) Na equação do item (ii), qual é a interpretação de β_0?

12. Considere o problema descrito no fim da Seção 2.6: rodar uma regressão e estimar somente um intercepto.

(i) Dada a amostra $\{y_i: i = 1, 2, \ldots, n\}$, deixe $\tilde{\beta}$ ser a solução para

$$\min_{b_0} \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0)^2.$$

Mostre que $\tilde{\beta} = \bar{y}$, isto é, a média amostral minimiza a soma dos quadrados dos resíduos. (*Dica:* você pode usar cálculos de uma variável ou mostrar o resultado diretamente ao adicionar ou subtrair $\bar{y}$ dentro do quadrado dos resíduos e, assim, usar um pouco de álgebra.)

(ii) Defina os resíduos como $\tilde{u}_i = y_i - \bar{y}$. Dê argumentos justificando que estes resíduos sempre somam zero.

Exercícios em computador

C1 Os dados do arquivo 401K são um subconjunto de dados analisados por Papke (1995) para estudar a relação entre a participação em um plano de pensão 401k e a generosidade do plano. A variável *prate* é a porcentagem de trabalhadores aptos e com uma conta ativa; esta é a variável que gostaríamos de explicar. A medida da generosidade é a taxa de contribuição do plano, *mrate*. Esta variável mostra a quantia média com que a empresa contribui para o fundo trabalhista a cada US$ 1 de contribuição do trabalhador. Por exemplo, se a *mrate* = 0,50, então uma contribuição de US$ 1 do trabalhador corresponde a uma contribuição de US$ 0,50 da empresa.

(i) Encontre a taxa de participação e a taxa de contribuição médias na amostra de planos.

(ii) Agora, estime a equação de regressão simples

$$\widehat{prate} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 mrate,$$

e relate os resultados ao lado do tamanho da amostra e do *R*-quadrado.

(iii) Interprete o intercepto de sua equação. Interprete o coeficiente de *mrate*.

(iv) Encontre a *prate* prevista quando *mrate* = 3,5. Esta é uma previsão razoável? Explique o que está ocorrendo aqui.

(v) Quanto da variação da *prate* é explicada pela *mrate*? Na sua opinião, isso é bastante?

C2 O conjunto de dados do arquivo CEOSAL2 contém informações sobre CEOs de corporações norte-americanas. A variável *salary* é a compensação anual, em milhares de dólares, e *ceoten* é o número prévio de anos como CEO da empresa.

(i) Encontre o salário médio e a permanência média na amostra.

(ii) Quantos CEOs estão em seu primeiro ano no cargo (isto é, *ceoten* = 0)? Qual é a permanência mais longa como CEO?

(iii) Estime o modelo de regressão simples

$$\log(salary) = \beta_0 + \beta_0 ceoten + u,$$

e registre seus resultados da forma usual. Qual é o aumento percentual previsto (aproximado) no salário quando se tem um ano a mais como CEO?

C3 Use os dados do arquivo SLEEP75, de Biddle e Hamermesh (1990), para estudar se há uma compensação entre o tempo gasto dormindo por semana e o tempo gasto em um trabalho remunerado. Podemos usar qualquer variável como a variável dependente. Para materializar, estime o modelo

$$sleep + \beta_0 + \beta_1 totwrk + u,$$

em que *sleep* são os minutos dormidos à noite por semana e *totwrk* é o total de minutos trabalhados durante a semana.

(i) Registre seus resultados em uma equação junto com o número de observações e o R^2. O que o intercepto desta equação significa?

(ii) Se *totwrk* aumentar 2 horas, quanto você estima que *sleep* cairá? Você acha que este é um efeito grande?

C4 Use os dados do arquivo WAGE2 para estimar uma regressão simples que explique o salário mensal (*wage)* em termos da pontuação do QI (*IQ*).

(i) Encontre o salário médio e o *IQ* médio da amostra. Qual é o desvio padrão amostral do *IQ*? (Pontuações de *IQ* são padronizadas, por isso, a média na população é 100 com um desvio padrão igual a 15.)

(ii) Estime um modelo de regressão simples em que um aumento de um ponto em *IQ* altere *wage* em uma quantia constante de dólares. Use este modelo para encontrar o aumento previsto do salário para o caso de um acréscimo de 15 pontos de *IQ*. O *IQ* explica a maior parte da variação em *wage*?

(iii) Agora, estime um modelo em que cada acréscimo de um ponto em *IQ* tenha o mesmo efeito percentual em *wage*. Se *IQ* aumentar 15 pontos, qual será o aumento percentual previsto aproximado em *wage*?

C5 Para a população de empresas do setor químico, defina *rd* como os gastos anuais em pesquisa e desenvolvimento, e *sales* como as vendas anuais (ambos em milhões de dólares).

(i) Escreva um modelo (não uma equação estimada) que implique uma elasticidade constante entre *rd* e *sales*. Qual é o parâmetro da elasticidade?

(ii) Agora, estime o modelo usando os dados do arquivo RDCHEM. Monte a equação estimada da forma usual. Qual é a elasticidade estimada de *rd* em relação a *sales*? Explique o que essa elasticidade significa.

C6 Usamos os dados do arquivo MEAP93 no Exemplo 2.12. Agora, queremos explorar a relação entre a taxa de aprovação em matemática (*math10*) e os gastos por estudante (*expend*).

(i) Você acha que cada dólar adicional gasto tem o mesmo efeito sobre a taxa de aprovação ou um efeito decrescente seria mais razoável? Explique.

(ii) No modelo populacional

$$math10 = \beta_0 + \beta_1 \log(expend) + u$$

argumente que $\beta_1/10$ é a porcentagem de alteração em *math10* dado um aumento de 10% em *gasto*.

(iii) Use os dados do arquivo MEAP93 para estimar o modelo (ii). Descreva a equação estimada da forma usual, incluindo o tamanho da amostra e o R-quadrado.

(iv) Quão grande é o efeito de gastos estimado? Em outras palavras, se os gastos aumentarem 10%, qual será o aumento percentual estimado em *math10*?

(v) Alguns podem se preocupar com o fato de que a análise de regressão pode produzir valores ajustados para *math10* maiores do que 100. Por que isso não é tão preocupante neste conjunto de dados?

C7 Use os dados do arquivo CHARITY [retirado de Franses e Paap (2001)] para responder às seguintes questões:

(i) Qual é a doação (*gift*) média da amostra de 4.268 pessoas (em florins holandeses)? Qual é a porcentagem de pessoas com nenhuma doação?

(ii) Qual é a média de envios por ano? Quais são os valores mínimos e máximos?

(iii) Estime o modelo

$$gift = \beta_0 + \beta_1 mailsyear + u$$

por MQO e registre os resultados da forma usual, incluindo o tamanho da amostra e o R-quadrado.

(iv) Interprete o coeficiente de inclinação. Se cada envio custa um florim, a instituição de caridade espera obter um lucro líquido em cada um dos envios? Isso quer dizer que a instituição obtém um lucro líquido em todos os envios? Explique.

(v) Qual é a menor contribuição à instituição prevista na amostra? Usando essa análise de regressão simples, você pode prever zero de *gift*?

C8 Para completar este exercício, você precisará de um programa que lhe permita gerar dados das distribuições uniforme e normal.

(i) Comece gerando 500 observações em x_i – a variável explicativa – a partir da distribuição uniforme com variação [0,10]. (A maioria dos programas estatísticos tem um comando para distribuição Uniforme(0,1); só multiplique essas observações por 10.) Qual é a média da amostra e o desvio padrão da amostra de x_i?

(ii) Gere, de forma aleatória, 500 erros, u_i, a partir da distribuição Normal(0,36). Se você gerar uma Normal(0,1), como geralmente está disponível, simplesmente multiplique os resultados por seis.) A média amostral de u_i é exatamente zero? Por que sim ou por que não? Qual é o desvio padrão amostral de u_i?

(iii) Agora gere y_i como

$$y_i = 1 + 2x_i + u_i \equiv \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i;$$

isto é, o intercepto da população é um e a inclinação populacional é dois. Use os dados para executar a regressão de y_i em x_i. Quais são suas estimativas de intercepto e inclinação? Elas são iguais aos valores populacionais da equação acima? Explique.

(iv) Obtenha os resíduos MQO, $\hat{u}_i$, e verifique se a equação (2.60) se mantém (sujeita a erros de arredondamento).

(v) Calcule as mesmas quantidades da equação (2.60), mas use os erros u_i no lugar dos resíduos. Agora, o que você conclui?

(vi) Repita os itens (i), (ii) e (iii) com uma nova amostra de dados, começando com a geração de x_i. Agora, o que você obtém de $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$? Por que isto é diferente do que você obteve no item (iii)?

C9 Use os dados do arquivo COUNTYMURDERS para responder a essas questões. Utilize somente os dados de 1996.

(i) Quantos condados tiveram zero assassinatos em 1996? Quantos condados tiveram pelo menos uma execução? Qual é o maior número de execuções?

(ii) Estime a equação abaixo, em que *murders* corresponde ao número de assassinatos.

$$murders = \beta_0 + \beta_1 execs + u$$

por MQO e relate os resultados da forma usual, incluindo o tamanho da amostra e o R-quadrado.

(iii) Interprete o coeficiente de inclinação registrado no item (ii). A equação estimada sugere um efeito dissuasor da pena capital?

(iv) Qual é o menor número de assassinatos que pode ser previsto pela equação? Qual é o resíduo de um condado com zero execuções e zero assassinatos?

(v) Explique por que uma análise de regressão simples não é adequada para determinar se a pena capital tem um efeito dissuasor sobre os assassinatos.

C10 O conjunto de dados do arquivo CATHOLIC inclui informações de pontuações de testes de mais de 7.000 estudantes dos Estados Unidos que cursaram a oitava série em 1988. As variáveis *mate*12 e *leitu*12 são notas padronizadas de matemática e leitura, respectivamente.

(i) Quantos estudantes existem na amostra? Encontre as médias e desvios padrão de *mate*12 e *leitu*12.

(ii) Compute a regressão simples de *mate*12 sobre *leitu*12 para obter o intercepto MQO e as estimativas de inclinação. Reporte os resultados na forma

$$\widehat{mate12} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 leitu12$$

$$n = ?, R^2 = ?$$

em que você vai preencher os valores de $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$, além de substituir os pontos de interrogação.

(iii) O intercepto registrado na parte (ii) tem uma interpretação significativa? Explique.

(iv) Você está surpreso pelo $\hat{\beta}_1$ encontrado? E quanto ao R^2?

(v) Suponha que você apresente suas descobertas ao superintendente distrital de educação e ele diga: "Suas descobertas mostram que, para aumentar as notas de matemática, precisamos somente melhorar as notas de leitura; portanto, devemos contratar mais professores de leitura". Como você responderia a este comentário? (*Dica*: Se você calculasse a regressão de *leitu*12 sobre *mate*12, ao invés do contrário, o que esperaria descobrir?)