ELETROMAGNETISMO II (4302304) - LISTA 1b

1. Determine todos os elementos do tensor das tensões de Maxwell para uma onda plana monocromática se propagando na direção z e linearmente polarizada na direção x. Dada a interpretação física de $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$, sua resposta faz sentido? Qual a relação entre densidade de fluxo de momento e densidade de energia nesse caso?

2. No caso de incidência normal de uma onda eletromagnética ao passar de um meio a outro, prove que que os campos refletidos e transmitidos têm a mesma polarização que a onda incidente. Dica: No caso de polarização incidente ao longo de $\hat{\boldsymbol{x}}$, assuma que os vetores de polarização para as ondas refletidas e transmitidas podem ser escritos como

$$\hat{\mathbf{n}}_R = \cos\theta_R\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta_R\,\hat{\boldsymbol{y}}, \quad \hat{\mathbf{n}}_T = \cos\theta_T\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta_T\,\hat{\boldsymbol{y}},$$

e o mostre que $\theta_R = \theta_T = 0$.

3. Analise o caso de polarização perpendicular ao plano de incidência. Imponha as condições de contorno para os campos elétrico e magnético na interface entre os meios e obtenhas as equações de Fresnel para $\tilde{E}_{0_R}$ e $\tilde{E}_{0_T}$. Esboce as razões $\tilde{E}_{0_R}/\tilde{E}_{0_I}$ e $\tilde{E}_{0_T}/\tilde{E}_{0_I}$ como funções do ângulo de incidência θ_I para o caso $\beta = n_2/n_1 = 1.5$. Note que para este β, a onda refletida está sempre em oposição de fase com a incidente. Mostre que não há ângulo de Brewster para nenhuma combinação de n_1 e n_2: $\tilde{E}_{0_R}$ nunca é zero (exceto, é claro, para $n_1 = n_2$ e $\mu_1 = \mu_2$, quando os meios são opticamente indistinguíveis). Verifique que suas equações de Fresnel concordam com as de incidência normal para $\theta_I = 0$. Calcule os coeficientes de reflexão e transmissão e verifique que $R + T = 1$.

4. (a) Calcule a média no tempo da densidade de energia de uma onda eletromagnética plana num meio condutor. Mostre que a contribuição magnética sempre domina. R: $k^2E_0^2e^{-2\kappa z}/(2\mu\omega^2)$.
   (b) Mostre que a intensidade é dada por $kE_0^2e^{-2\kappa z}/(2\mu\omega)$

5. Mostre que o modo TE_{00} não é permitido num guia de ondas retangular. Dica: Neste caso $\omega/c = k$, B_z é constante e, sendo assim, por aplicação da lei de Faraday na forma integral sobre uma seção transversal do guia, $B_z = 0$, de forma que esse seria um modo TEM.

6. Confirme que a energia no modo TE_{mn} viaja com a velocidade de grupo. Dica: calcule a média no tempo do vetor de Poynting $\langle\mathbf{S}\rangle$ e da densidade de energia $\langle u\rangle$. Integre sobre a seção transversal do guia de onda para obter a potência por unidade de comprimento transportada pela onda e olhe para a razão dessas quantidades.

7. Desenvolva a teoria de modos TM para um guia de ondas retangular. Em particular, determine o campo elétrico transversal, as frequências de corte e as velocidades de fase e de grupo. Calcule a razão entre as menores frequências de corte dos modos TM e TE para um dado guia de ondas. Cuidado ao determinar o modo TM de menor frequência de corte.

8. Suponha

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = A\frac{\sin\theta}{r}\left[\cos(kr-\omega t) - \frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right]\hat{\boldsymbol{\phi}},$$

com $\omega/k = c$. Esse é a onda esférica mais simples possível. Por conveniência de notação, defina $u \equiv kr - \omega t$.

   (a) Mostre que $\mathbf{E}$ satisfaz todas as equações de Maxwell no vácuo e determine o campo magnético associado.

   (b) Calcule o vetor de Poynting. Tome a sua média no tempo durante um ciclo completo de oscilação do campo e obtenha a intensidade $\mathbf{I}$. Esse vetor aponta na direção esperada? Ele cai com r^{-2} como esperado?

   (c) Integre $\mathbf{I}\cdot d\mathbf{a}$ sobre uma superfície esférica para determinar a potência total irradiada. R: $\frac{4\pi A^2}{3\mu_0 c}$.

9. De acordo com a lei de Snell, quando a luz passa de um meio opticamente "mais denso" para outro "menos denso" ($n_1 > n_2$), o vetor de onda $\mathbf{k}$ se afasta da normal. Em particular, se a luz incide num ângulo crítico

$$\theta_c = \mathrm{asin}(n_2/n_1)$$

então $\theta_T = 90°$ e a onda transmitida tangencia a interface entre os meios. Se θ_I excede θ_C, não há qualquer onda refratada, apenas uma onda refletida (este é o fenômeno de **reflexão interna total**, por meio do qual a luz pode ser "canalizada"por uma fibra óptica). Entretanto, os campos eletromagnéticos não são nulos no meio 2; o que se obtém é a chamada **onda evanescente**, que é rapidamente atenuada e não transporta energia através desse meio.

   (a) Mostre que

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0_T} e^{-\kappa z} e^{i(kx-\omega t)},$$

   onde

$$\kappa = \frac{\omega}{c}\sqrt{(n_1\sin\theta_I)^2 - n_2^2} \quad \text{e} \quad k \equiv \frac{\omega n_1}{c}\sin\theta_I$$

   Esta é uma onda se propagando na direção x (paralela à interface) e atenuada na direção z.

   (b) Calcule o coeficiente de reflexão R para polarização paralela ao plano de incidência, lembrando-se que agora α é imaginário. Perceba que é possível obter 100% de reflexão, melhor até que o valor obtido numa superfície condutora. Calcule, por exemplo, R para luz incidindo numa interface ar-prata ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\sigma = 6\times10^7(\Omega\mathrm{m})^{-1}$) em frequências do óptico ($\omega = 4\times10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$). R: $R = 1, R = 0.93$.

   (c) Faça o mesmo para polarização perpendicular ao plano de incidência. R: $R = 1$.

(d) No caso de polarização perpendicular ao plano de incidência, mostre que os campos evanescentes podem ser escritos como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_0 e^{-\kappa z}\cos(kx-\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{E_0}{\omega}e^{-\kappa z}\left[\kappa\sin(kx-\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + k\cos(kx-\omega t)\hat{\boldsymbol{z}}\right]$$

(e) Verifique que os campos do ítem (d) satisfazem todas as equações de Maxwell.

(f) Para os campos do ítem (d), construa o vetor de Poynting e mostre que nenhuma energia é transmitida na direção z.

10. A partir do vetor de Poynting para o modo TE_{10} de um guia de onda retangular de dimensões transversais a e b, mostre que a potência total transmitida ao longo do guia vazio nesse modo é dada por

$$P_T = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}|E_0|^2 ab\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}},$$

onde ω_c é a frequência de corte do modo em questão.

11. Mostre que as correntes superficiais induzidas nas paredes internas do guia anterior satisfazem

$$|\mathbf{K}|^2 = \begin{cases} |H_0|^2, & \text{paredes da esquerda e da direita} \\ |H_0|^2\cos^2(k_c x) + \frac{\beta^2}{k_c^2}|H_0|^2\sin^2(k_c x), & \text{paredes superior e inferior} \end{cases}$$

onde

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \quad (\text{para modo } \mathrm{TE}_{nm})$$

e

$$\beta^2 = \frac{\omega^2-\omega_c^2}{c^2}$$

12. A potência dissipada P_{diss} nas paredes de um guia ou cavidade ressonante via efeito Joule pode ser obtida a partir da integração da densidade de corrente superficial $\mathbf{K}$ sobre as paredes do guia ou da cavidade

$$P_{diss} = \frac{1}{2}R_s\int_{\text{paredes}}|\mathbf{K}|^2 da,$$

onde R_s é a resistência superficial das paredes [1]. Mostre que para o caso do guia retangular e modo TE_{10}, a potência dissipada por unidade de comprimento ao longo do eixo do guia é dada por

$$\frac{dP_{diss}}{dz} = \frac{R_s a|E_0|^2\epsilon_0}{2\mu_0}\left(1+2\frac{b}{a}\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right).$$

[1] Para um filme fino de espessura t, comprimento L e largura W, com $t << L, W$, a relação entre R_s e a resistividade ρ é $\rho = R_s t$.

13. Se arranjarmos as frequências de corte dos modos de um guia de onda em ordem crescente $\omega_{c_1} < \omega_{c_2} < \omega_{c_3} < ...$, então para assegurar que apenas um modo normal do guia se propague, a frequência deve estar restrita ao intervalo $\omega_{c_1} < \omega < \omega_{c_2}$, de modo que apenas o modo de menor frequência se propague. Este intervalo define a largura de banda de operação do guia. Sendo assim, tome um guia de onda retangular de seção transversal 1.5×3.0 cm operado numa frequência que se encontra no meio da banda do modo TE_{10}. Determine essa frequência de operação em GHz e calcule a potência máxima em Watts que pode ser transmitida sem causar o rompimento dielétrico do ar, cuja rigidez dielétrica é 3 MV/m. R: $f = 7.5$ GHz, $P_T = 2.0$ MW.

14. Considere uma cavidade ressonante produzida ao se fechar as duas extremidades de um guia de onda retangular (de dimensões transversais a e b), em $z = 0$ e $z = d$, dando origem a uma caixa vazia perfeitamente condutora. Mostre que as frequências de ressonância tanto para os modos TE quanto TM são dadas por

$$\omega_{lmn} = c\pi\sqrt{\left(\frac{l}{d}\right)^2 + \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2},$$

onde l, m e n são inteiros. Determine os campos elétricos e magnéticos associados aos modos TE e TM.

15. O fator de qualidade Q de uma cavidade ressonante preenchida por onda eletromagnética de frequência ω é definido como

$$Q \equiv \omega\frac{\overline{E}}{P_{diss}}$$

onde $\overline{E}$ é a média no tempo (tomada sobre um período de oscilação da onda) da energia total armazenada no campo eletromagnético e P_{diss} é a potência dissipada nas paredes da cavidade via efeito Joule.

Mostre que o fator Q de um modo TE_{l0n} da cavidade ressonante do exercício anterior (ou seja, $m = 0$) é dado por

$$Q = \frac{\mu_0\omega}{2R_s}\frac{\left[\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2\right]abd}{\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2(2b+a)d + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2(2b+d)a}$$

16. Determine a densidade de carga $\lambda(z,t)$ e a corrente $I(z,t)$ percorrendo o condutor interno de raio a de uma linha de transmissão coaxial em que o condutor externo tem raio b, ao longo do qual uma onda eletromagnética em modo TEM de frequência ω e número de onda k se propaga. R: $\lambda = 2\pi\epsilon_0 E_0\cos(kz - \omega t)$, $I = \frac{2\pi E_0}{\mu_0 c}\cos(kz - \omega t)$.

17. A tabela abaixo mostra alguns guias de onda retangulares padronizados com seus nomes, dimensões transversais (a e b) em polegadas, frequências de corte (f_c) em GHz, frequências mínima e máxima de operação recomendadas (f_{min} e f_{max}) em GHz, potências nominais

(P) e atenuações (α=$20\log_{10}(e)\alpha_c = 8.686\,\alpha_c$) em dB/m (as potências e atenuações são apenas representativas de cada banda de operação). Considere o guia de onde WR-159 (preenchido de ar). Assuma que as paredes do guia são feitas de cobre (condutividade $\sigma = 5.8 \times 10^7 (\Omega\ \mathrm{m})^{-1}$). Faça no computador gráficos da constante de atenuação α_c e da potência transmitida P_T como funções da frequência f em GHz, assumindo uma magnitude de campo elétrico $E_0 = 1.5$ MV/m. A constante de atenuação é definida em termos da razão entre a potência por unidade de comprimento P_{diss} dissipada por efeito Joule nas paredes condutoras do guia e a potência total P_T sendo transmitida através da seção transversal do guia, mais precisamente por:

$$\alpha_c \equiv \frac{P_{diss}}{2P_T}$$

name	a	b	f_c	$f_{\min}$	$f_{\max}$	band	P	α
WR-510	5.10	2.55	1.16	1.45	2.20	L	9 MW	0.007
WR-284	2.84	1.34	2.08	2.60	3.95	S	2.7 MW	0.019
WR-159	1.59	0.795	3.71	4.64	7.05	C	0.9 MW	0.043
WR-90	0.90	0.40	6.56	8.20	12.50	X	250 kW	0.110
WR-62	0.622	0.311	9.49	11.90	18.00	Ku	140 kW	0.176
WR-42	0.42	0.17	14.05	17.60	26.70	K	50 kW	0.370
WR-28	0.28	0.14	21.08	26.40	40.00	Ka	27 kW	0.583
WR-15	0.148	0.074	39.87	49.80	75.80	V	7.5 kW	1.52
WR-10	0.10	0.05	59.01	73.80	112.00	W	3.5 kW	2.74