ELETROMAGNETISMO II (4302304) - LISTA 1a

1. Um capacitor de placas circulares de raio R e separação $d << R$ é preenchido com um material de constante dielétrica K_e. Uma diferença de potencial $V = V_0 \cos(\omega t)$ é aplicada ao capacitor.

   (a) Determine o campo elétrico $\mathbf{E}$ como função do tempo, assim como a densidade superficial de cargas livres sobre as placas do capacitor. Ignore efeitos de borda e de natureza magnética. R: $\mathbf{E} = \frac{V_0}{d} \cos(\omega t)\hat{\mathbf{z}}$, $\sigma = \pm K_e \epsilon_0 \frac{V_0}{d} \cos(\omega t)$

   (b) Determine agora o campo magnético $\mathbf{B}$ entre as placas como função da distância ao eixo do capacitor. Atenção para a corrente de polarização. : $\mathbf{B} = \frac{K_e \epsilon_0 \mu_0 \omega V_0}{2d} s \sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{\phi}}$

   (c) Calcule o fluxo do vetor de Poynting através das bordas abertas do capacitor. R: $\frac{\pi K_e \epsilon_0 \omega V_0^2 R^2 \sin(2\omega t)}{2d}$

2. (a) Considere duas cargas pontuais iguais q, separadas por uma distância $2a$. Construa o plano equidistante das cargas. Por integração do tensor das tensões de Maxwell sobre esse plano, determine a força que uma carga exerce sobre a outra.

   (b) Repita o procedimento para cargas de sinais opostos.

3. Considere um capacitor de placas paralelas infinito, com a placa inferior (em $z = -d/2$) carregado com densidade de carga $-\sigma$ e a placa superior ($z = +d/2$) carregada com densidade $+\sigma$.

   (a) Determine todas as nove componentes do tensor das tensões na região entre as placas.

   (b) Calcule a força por unidade de área em cada uma das placas. R: $\frac{\mathbf{F}}{A} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$ (placa superior)

   (c) Calcule o momento por unidade de área e tempo cruzando um plano paralelo às placas e localizado entre elas. R: $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$

4. Um capacitor de placas paralelas (com campo elétrico uniforme $\mathbf{E} = E\,\hat{\mathbf{z}}$) é colocado num campo magnético $\mathbf{B} = B\,\hat{\mathbf{x}}$.

   (a) Determine o momento eletromagnético no espaço entre as placas. R: $\mathbf{p}_{em} = \epsilon_0 EBAd\hat{\mathbf{y}}$, onde d é a distância entre as placas e A a área de cada uma.

   (b) Agora, um fio com resistência elétrica finita conecta as placas ao longo do eixo z, de modo que essas descarregam lentamente. A corrente ao longo do fio sofrerá a ação de uma força magnética; calcule o impulso total comunicado ao sistema durante a descarga. R: $\epsilon_0 EBAd\hat{\mathbf{y}}$

   (c) Suponha que, ao invés de desligar o campo elétrico, reduzíssemos o campo magnético, induzindo um campo elétrico via Lei de Faraday que, por sua vez, exerceria uma força sobre as placas. Mostre que o impulso total é igual (assim como em (b)) ao momento originalmente armazenado nos campos.

5. Imagine uma esfera de ferro de raio R com carga Q e magnetização uniforme $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$. A esfera está inicialmente em repouso.

   (a) Calcule o momento angular armazenado nos campos eletromagnéticos.

   (b) Suponha que a esfera seja gradualmente e uniformemente desmagnetizada (por exemplo, via aquecimento acima do ponto de Curie). Use a lei de Faraday para determinar o campo elétrico induzido, obtendo em seguida o torque exercido sobre a esfera e, por conseguinte, o momento angular comunicado à esfera durante a desmagnetização.

   (c) Suponha que ao invés de desmagnetizar a esfera nós a descarreguemos conectando um fio aterrado ao pólo norte. Assuma, por simplicidade, que a corrente flui ao longo da supefície da esfera de tal forma que a densidade de carga se mantenha uniforme. Use a lei de força de Lorentz para determinar o torque sobre as esfera e calcular o momento angular comunicado à esfera durante a descarga. (OBS: O campo magnético é descontínuo na superfície ...isso importa?) [R: $\frac{2}{9}\mu_0 MQR^2$]

6. Uma esfera de raio R possui polarização uniforme $\mathbf{P}$ e magnetização uniforme $\mathbf{M}$ (não necessariamente alinhadas). Determine o momento eletromagnético desta configuração. [R: $\frac{4}{9}\pi\mu_0 R^3 \mathbf{M} \times \mathbf{P}$].

7. Um solenóide muito longo de raio a, com n espiras por unidade de comprimento, é percorrido por corrente I_S. Coaxial ao solenóide, com raio $b >> a$, há um fio com resistência R em forma de anel. Quando a corrente no solenóide é gradualmente diminuída, uma corrente I_r é induzida no fio.

   (a) Calcule I_r em termos de dI_s/dt

   (b) A potência ($I_r^2 R$) dissipada no anel deve ter vindo do solenóide. Confirme isso calculando o vetor de Poynting fora do solenóide (o campo elétrico é devido à variação de fluxo no solenóide; o campo magnético é devido à corrente no anel). Integre sobre a superfície do solenóide e certifique-se de que você recupera a potência total.

8. Obtenha a equação de conservação local de momento angular baseando-se na equação de continuidade para o momento linear apresentada no livro-texto. Mostre que as formas diferencial (local) e integral da lei de conservação de momento angular são

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\text{mec}} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\text{em}}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{M}} = 0$$

e

$$\frac{d}{dt}\int_V (\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\text{mec}} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\text{em}}) d\tau + \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{M}}\, da = 0$$

onde a densidade de momento angular do campo eletromagnético é

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\text{em}} = \mathbf{r} \times \mathscr{P} = \epsilon_0 \left[\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\right]$$

e a densidade de fluxo de momento angular é descrita por um tensor

$$\overleftrightarrow{\mathbf{M}} = \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \times \mathbf{r}$$