Teorema da Unicidade

para campos eletrostáticos ou de correntes estacionárias
(por JJA e LCT)

Dado uma região τ onde se deseja determinar a função potencial (ou o campo elétrico) e que tem como fronteira a superfície Σ, a função potencial nessa região deve satisfazer à equação

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\operatorname{grad}\sigma}{\sigma}\cdot \operatorname{grad}\varphi \quad \text{, para campo de correntes estacionárias,} \tag{1a}$$

ou à equação

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\operatorname{grad}\varepsilon}{\varepsilon}\cdot \operatorname{grad}\varphi \quad \text{, para campos eletrostáticos } (\sigma=0), \tag{1b}$$

que se simplificam, no caso de meios homogêneos, para a forma

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{, para campo de correntes estacionárias,} \tag{1c}$$

ou

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{, para campos eletrostáticos } (\sigma=0). \tag{1d}$$

Essas equações terão solução única em τ se forem especificados, em todos os pontos de sua fronteira Σ, o valor de φ (condição de Dirichlet) ou de $\partial\varphi/\partial n$ (condição de Neumann) , sendo n a coordenada na direção normal a Σ.

Ou seja, dada uma função φ que satisfaz a uma das formas da equação (1) e que, em todos os pontos da superfície Σ, ou assume o valor especificado para o potencial ou sua derivada em relação à normal assume o valor especificado para essa derivada, essa função é a única solução para o problema.

Note que é necessário que uma das duas condições (φ ou $\partial\varphi/\partial n$) seja especificada para cada um dos pontos de Σ, ou seja, em todos os pontos de Σ deve-se conhecer φ ou $\partial\varphi/\partial n$. Note também que, se apenas $\partial\varphi/\partial n$ for especificado em Σ, a função φ estará univocamente determinada a menos de uma constante, mas que o campo elétrico, que envolve apenas as derivadas de φ, estará completamente definido.

Demonstração

Vamos demonstrar que, dadas duas soluções quaisquer para a equação (1), denominadas φ_1 e φ_2, se ambas satisfizerem as condições de fronteira impostas em todos os pontos de Σ, então essas soluções são idênticas em todos os pontos do volume τ.

Temos então que, utilizando a equação (1b) devido à sua generalidade,

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\operatorname{grad} \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \operatorname{grad} \varphi_1 \quad , \tag{2a}$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\operatorname{grad} \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \operatorname{grad} \varphi_2 \tag{2b}$$

e, para todos os pontos sobre a superfície Σ,

$$\varphi_1 = \varphi_2 \text{ ou } \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad . \tag{3}$$

Seja $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$ a função diferença, e considere a seguinte identidade vetorial:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\varepsilon \Phi \operatorname{grad}(\Phi)] &= \operatorname{grad}(\varepsilon \Phi) \cdot \operatorname{grad}(\Phi) + \varepsilon \Phi \nabla^2 \Phi = \\ &= \varepsilon |\operatorname{grad}(\Phi)|^2 + \Phi [\operatorname{grad}(\varepsilon) \cdot \operatorname{grad}(\Phi) + \varepsilon \nabla^2 \Phi] \end{aligned} \quad . \tag{4}$$

Integrando-se essa expressão no volume τ e aplicando-se o teorema de Gauss obtemos:

$$\oint\!\!\oint_\Sigma \varepsilon \Phi \operatorname{grad}(\Phi) \cdot \vec{dS} = \iiint_\tau \varepsilon |\operatorname{grad}(\Phi)|^2 d\tau + \iiint_\tau \Phi [\operatorname{grad}(\varepsilon) \cdot \operatorname{grad}(\Phi) + \varepsilon \nabla^2 \Phi] d\tau \quad . \tag{5}$$

Notando que $\operatorname{grad}(\Phi) \cdot \vec{dS} = \operatorname{grad}(\Phi) \cdot \hat{n}\, dS = \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS$ podemos reescrever (5) como

$$\oint\!\!\oint_\Sigma \varepsilon \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \iiint_\tau \varepsilon |\operatorname{grad}(\Phi)|^2 d\tau + \iiint_\tau \Phi [\operatorname{grad}(\varepsilon) \cdot \operatorname{grad}(\Phi) + \varepsilon \nabla^2 \Phi] d\tau \quad . \tag{6}$$

De (3) sabemos que, sobre todos os pontos em Σ, $\Phi = 0$ ou $\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0$, portanto o primeiro membro de (6) se anula.

Subtraindo-se (2b) de (2a) podemos escrever que

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\operatorname{grad} \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \operatorname{grad} \Phi \Rightarrow \operatorname{grad} \varepsilon \cdot \operatorname{grad} \Phi + \varepsilon \nabla^2 \Phi = 0 \quad , \tag{7}$$

que substituída em (6) nos leva a

$$\iiint_\tau \varepsilon |\vec{\nabla} \Phi|^2 d\tau = 0 \quad . \tag{8}$$

Como o integrando de (8) é não negativo em todos os pontos do volume, ele só pode ser nulo em todos os pontos do volume, o que implica que ambas as soluções φ_1 e φ_2 são idênticas em todos os pontos do volume τ, a menos de uma constante, que será nula se o valor do potencial tiver sido especificado em pelo menos um ponto da superfície Σ. De qualquer modo, o campo elétrico no volume τ é único.