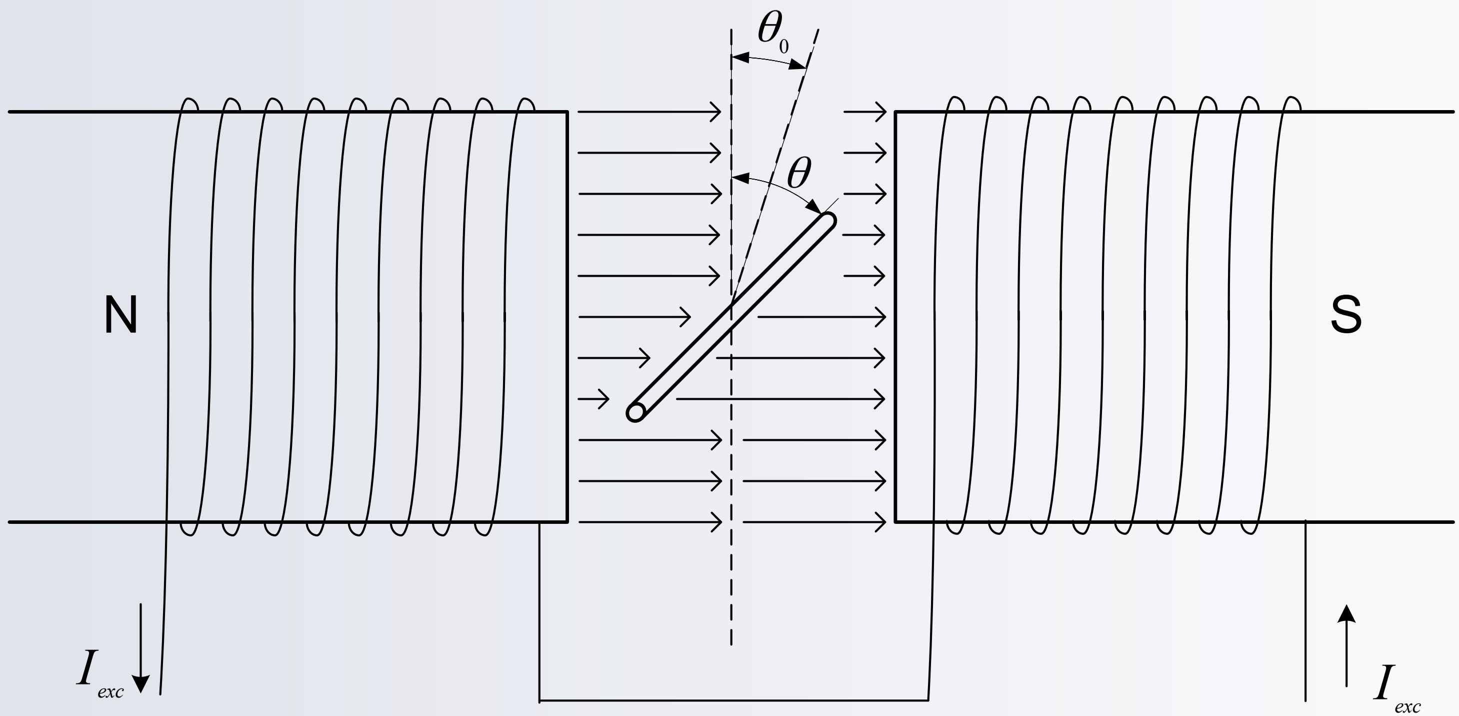
Circuitos em Corrente Alternada

PEA – 3345
ELETROTÉCNICA GERAL

PEA - Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

EPUSP

1. Gerador de Corrente Alternada Elementar



$$B : Campo\ Magnético\ produzido\ por\ I_{exc}$$

$$\phi(\theta) : Fluxo\ magnético\ através\ da\ bobina$$

1.1 Relações Básicas

$$\phi(\theta) = B.S(\theta)$$

$$\phi(\theta) = B.S\cos\theta$$

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

$$\phi(t) = B.S\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$S : \acute{A}rea\, da\, bobina$$

1.2 Lei de FARADAY

$$e = -N\frac{d\phi}{dt}$$

$$e : f.e.m.induzida\,(Volts)$$

$$N : Número\ de\ espiras\ da\ bobina$$

$$e = \omega NBS sen(\omega t + \theta_0)$$

1.2 Lei de FARADAY

Fazendo

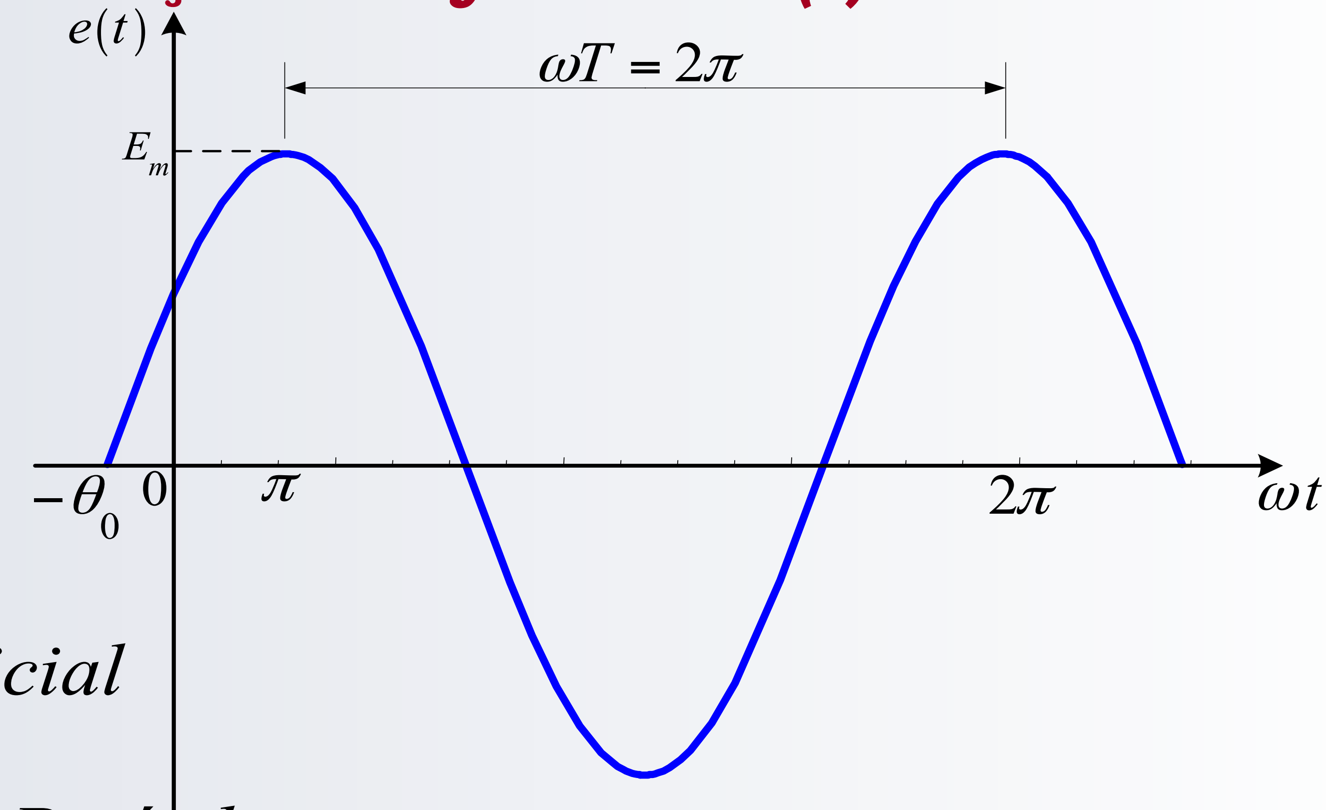
$$E_m = \omega NBS$$

Resulta:

$$e = E_m sen(\omega t + \theta_0)$$

1.2 Lei de FARADAY

Representação Gráfica de e(t):



θ_0 : *fase inicial*

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}(s) : Período$

E_m : *Valor Máximo de* $e(t)$ $\quad f = \dfrac{1}{T}$: *freqüência* $(s^{-1} = Hz)$

1.2 Lei de FARADAY

Valor Eficaz de e(t):

$$E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2 dt}$$

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

Escreve-se também:

$$e = \sqrt{2}E sen(\omega t + \theta_0) \quad ou \quad e = \sqrt{2}E sen(2\pi f\, t + \theta_0)$$

Exemplo

Exemplo 1: *Para a f.e.m. dada por:*

$$e = 311 sen(377t + 35^o)(V)$$

Determine:

a)O valor máximo de e;
b)O valor eficaz de e;
c)O período;
d)A freqüência;
e)A fase.

Exemplo

Exemplo 2: *Uma corrente alternada senoidal apresenta os seguintes parâmetros:*

Corrente Eficaz I=5A;
freqüência f=50 Hz;
fase=-30º

Escreva a expressão temporal dessa corrente.

2. Representação Complexa de uma Grandeza Senoidal

A mais poderosa ferramenta para tratamento de grandezas senoidais

2.1 Números Complexos

Unidade complexa:

$$j = \sqrt{-1}$$

a) Representação na forma cartesiana

$$\dot{Z} = a + jb$$

a ***: Parte Real de*** $\dot{Z}$

b ***: Parte Imaginária de*** $\dot{Z}$

2.1 Números Complexos

b) Representação na forma polar

$$\dot{Z} = Z\underline{/\,\alpha}$$

Z: ***Módulo de*** $\dot{Z}$

α: ***Fase de*** $\dot{Z}$

2.1 Números Complexos

Correspondência entre Representações

$$Z\cos\alpha + jZ\mathrm{sen}\alpha = a + jb$$

$$a = Z\cos\alpha \qquad b = Z\mathrm{sen}\alpha$$

$$Z = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \alpha = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$$

2.1 Números Complexos

Identidade de EULER

$$e^{j\beta} = \cos\beta + j\,\mathrm{sen}\beta$$

Podemos escrever:

$$Z\underline{/\,\alpha} = Ze^{j\alpha}$$

2.2 Operações com Números Complexos

Soma/Subração

$$\dot{Z}_1 = a + jb \qquad \dot{Z}_2 = c + jd$$

$$\dot{Z}_1 \pm \dot{Z}_2 = (a \pm c) + j(b \pm d)$$

2.2 Operações com Números Complexos

Multiplicação/Divisão

$$\dot{Z}_1 = Z_1 e^{j\alpha_1} \qquad \dot{Z}_2 = Z_2 e^{j\alpha_2}$$

$$\dot{Z}_1 . \dot{Z}_2 = Z_1 Z_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{Z_1}{Z_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

2.2 Operações com Números Complexos

Exponenciação:

$$\dot{Z} = Ze^{j\alpha}$$

$$\dot{Z}^n = Z^n e^{jn\alpha}$$

2.3 Operador Im[.]

I_m[.] = *Parte Imaginária de* [.]

I_m[.] *é um operador linear, isto é:*

$$I_m[\dot{z}_1] + I_m[\dot{z}_2] = I_m[\dot{z}_1 + \dot{z}_2]$$

$$I_m[a\dot{z}] = aI_m[\dot{z}] \qquad \mathrm{a:Real}$$

2.3a Operador Re[.]

Re[.] = *Parte Real de* [.]

Re[.] *é um operador linear, isto é:*

$$Re[\dot{z}_1] + / Re[\dot{z}_2] = Re[\dot{z}_1 + \dot{z}_2]$$

$$Re[a\dot{z}] = a / Re[\dot{z}] \quad a : \text{Real}$$

2.4 Representação Fasorial

Representação Complexa de uma grandeza variável senoidalmente no tempo

$$y(t) = \sqrt{2}Y sen\left[\omega t + \alpha\right]$$

Associa-se a y(t) a grandeza complexa:

$$\dot{y}(t) = \sqrt{2}Y\cos\left[\omega t + \alpha\right] + j\sqrt{2}Y sen\left[\omega t + \alpha\right]$$

2.4 Representação Fasorial

Resulta então:

$$y(t) = I_m\left[\dot{y}(t)\right]$$

com

$$\dot{y}(t) = \sqrt{2}Ye^{j(\omega t+\alpha)}$$

ou

$$\dot{y}(t) = \sqrt{2}Ye^{j\alpha}.e^{j\omega t}$$

2.4 Representação Fasorial

Fazendo:

$$\dot{Y} = Ye^{j\alpha}$$

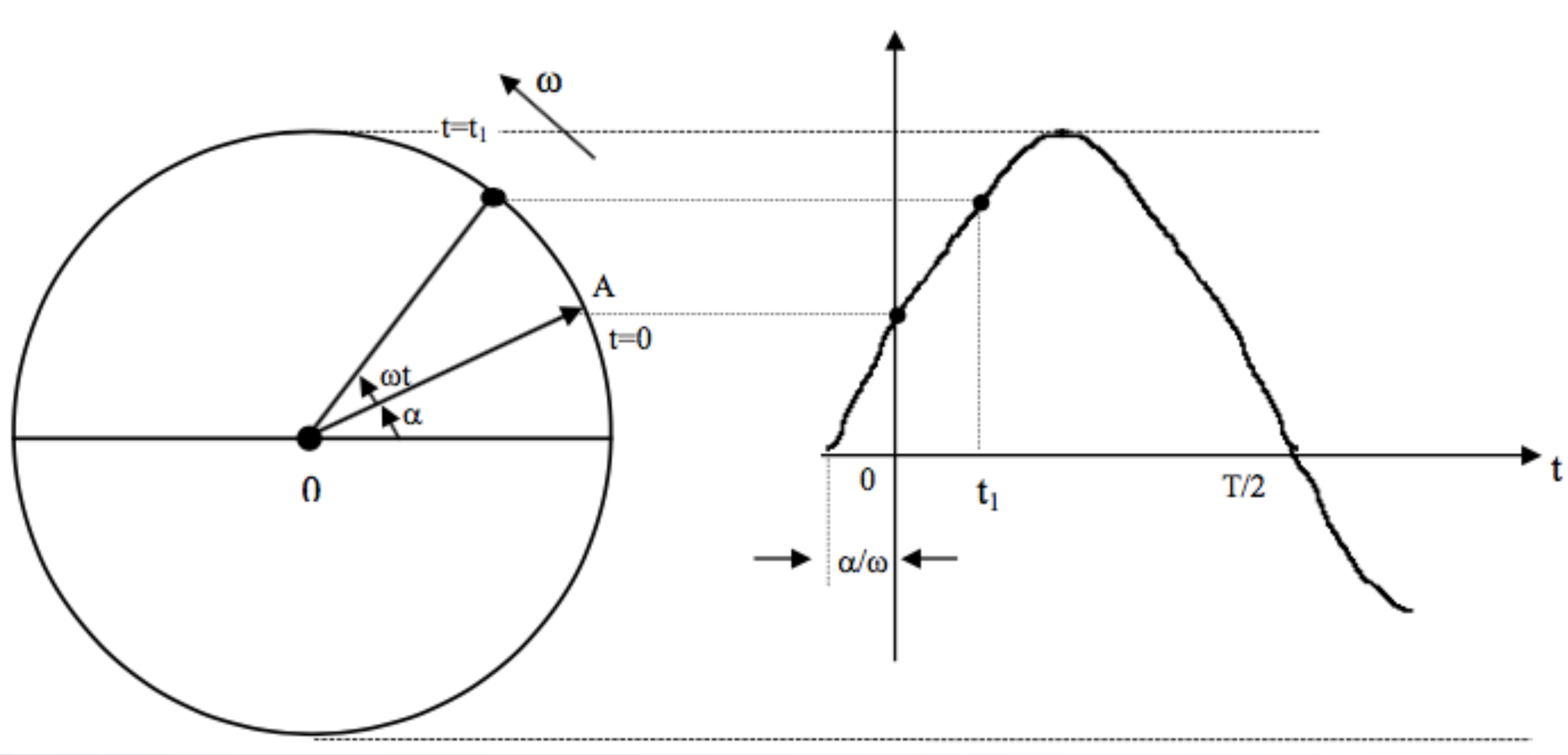
Denominado FASOR de y(t)

Podemos escrever:

$$y(t) = I_m[\sqrt{2}\dot{Y}e^{j\omega t}]$$

2.4 Representação Fasorial

Vetor Girante:



2.4 Representação Fasorial

Correspondência Bi-unívoca:

$$y(t) = \sqrt{2}Ysen\left[\omega t + \alpha\right] \Leftrightarrow \dot{Y} = Ye^{j\alpha}$$

IMPORTANTÍSSIMO!

Exemplo

***Exemplo 3**: Dados*

$$\dot{Z}_1 = 2\sqrt{2}\underline{/45^o} \ e \ \dot{Z}_2 = 5 + j10$$

Determine:

$$a)\ \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2$$

$$b)\ \dot{Z}_1 . \dot{Z}_2$$

$$c)\ \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}$$

Exemplo

Exemplo 4: *Dados*

$$e_1 = 10\sqrt{2}sen[377t - 30^o]$$

$$e_2 = 7\sqrt{2}sen[377t + 60^o]$$

Determine, usando notação complexa:

$$e = e_1 + e_2$$

Exemplo

Exemplo 5: *Dada a corrente senoidal*

$$i = 5\sqrt{2}sen[377t - 42^o]$$

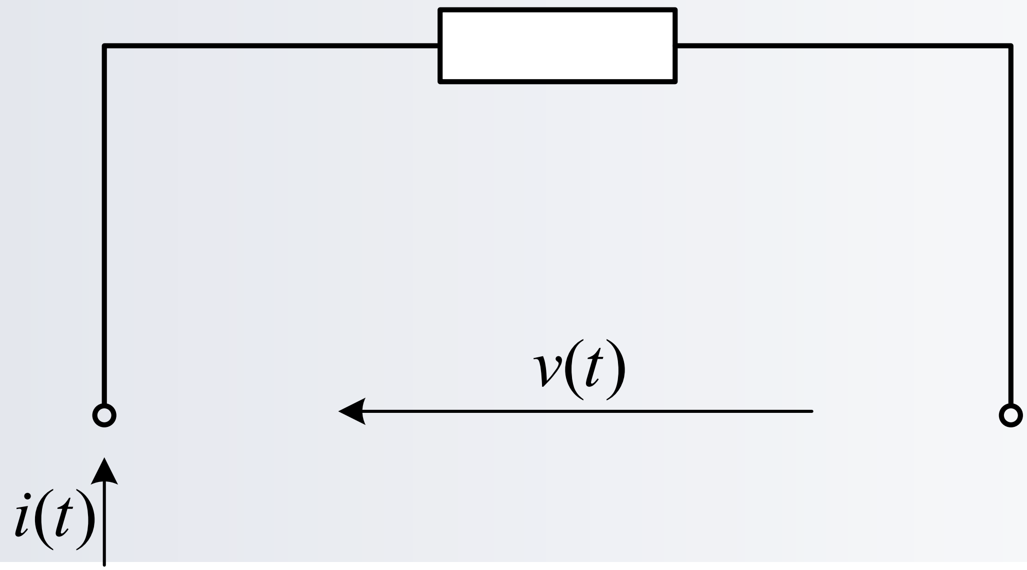
determine o seu ***fasor****.*

Exemplo 6: *Dado fasor da tensão senoidal*

$$\dot{V} = 380\underline{/-75^o}(V)$$

determine a expressão de v(t) para f=100 Hz.

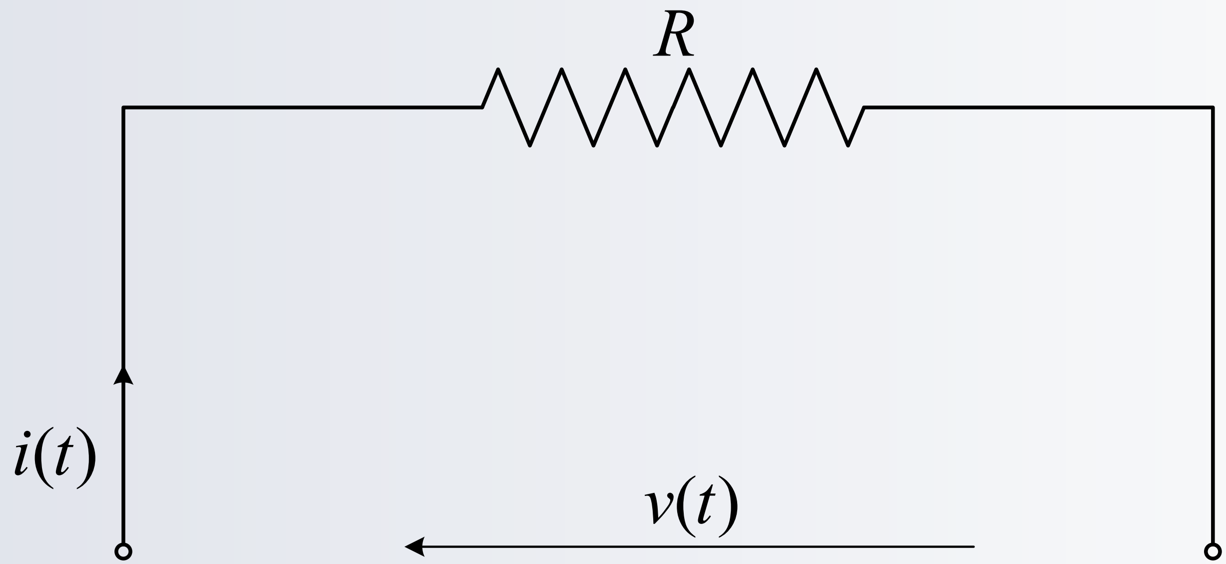
3. Circuitos em Corrente Alternada (C.A.)



IMPORTANTE: **A alimentação de circuito linear (com R, L e C) com fonte de tensão senoidal com freqüência " *f* " produz uma corrente, também senoidal, e de mesma freqüência e vice-versa.**

$$v(t) = \sqrt{2}V sen(\omega t + \alpha) \Leftrightarrow i(t)\sqrt{2}I sen(\omega t + \beta)$$

3.1 Resistor



$$Dado: v(t) = \sqrt{2}V sen(\omega t + \alpha)$$

$$Calcular: i(t) = \sqrt{2}I sen(\omega t + \beta)$$

3.1 Resistor – Resolução Temporal

$$\boxed{i(t) = \frac{v(t)}{R} : Lei\, de\, Ohm}$$

$$\sqrt{2} I sen(\omega t + \beta) = \frac{\sqrt{2} V sen(\omega t + \alpha)}{R}$$

Identificando: $I = \dfrac{V}{R} \quad \beta = \alpha$

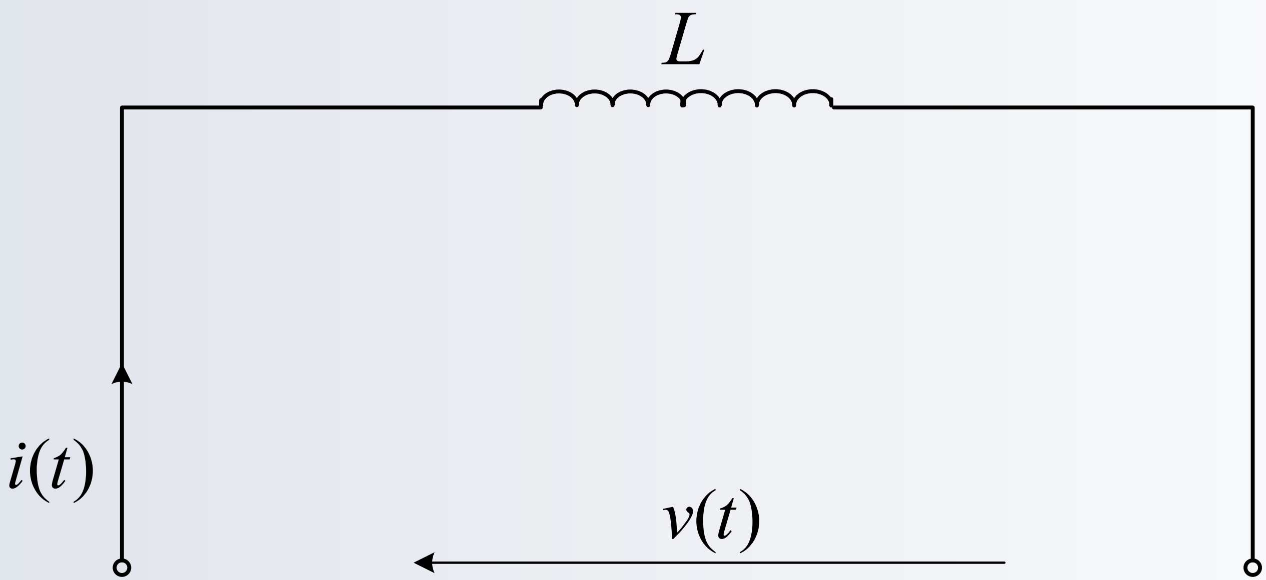
3.1 Resistor – Resolução Complexa

$$I_m[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}] = \frac{I_m[\sqrt{2}\dot{V}e^{j\omega t}]}{R}$$

Identificando: $\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R}$

Resultando: $I = \frac{V}{R} \quad \beta = \alpha$

3.2 Indutor



$$Dado: v(t) = \sqrt{2}V sen(\omega t + \alpha)$$

$$Calcular: i(t) = \sqrt{2}I sen(\omega t + \beta)$$

3.2 Indutor – Resolução Temporal

$$\boxed{v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \; : Lei\, de\, Faraday}$$

$$\sqrt{2}V sen(\omega t + \alpha) = L\sqrt{2}I\omega\cos(\omega t + \beta)$$

Identificando: $I = \dfrac{V}{\omega L} \quad \beta = \alpha - \dfrac{\pi}{2}$

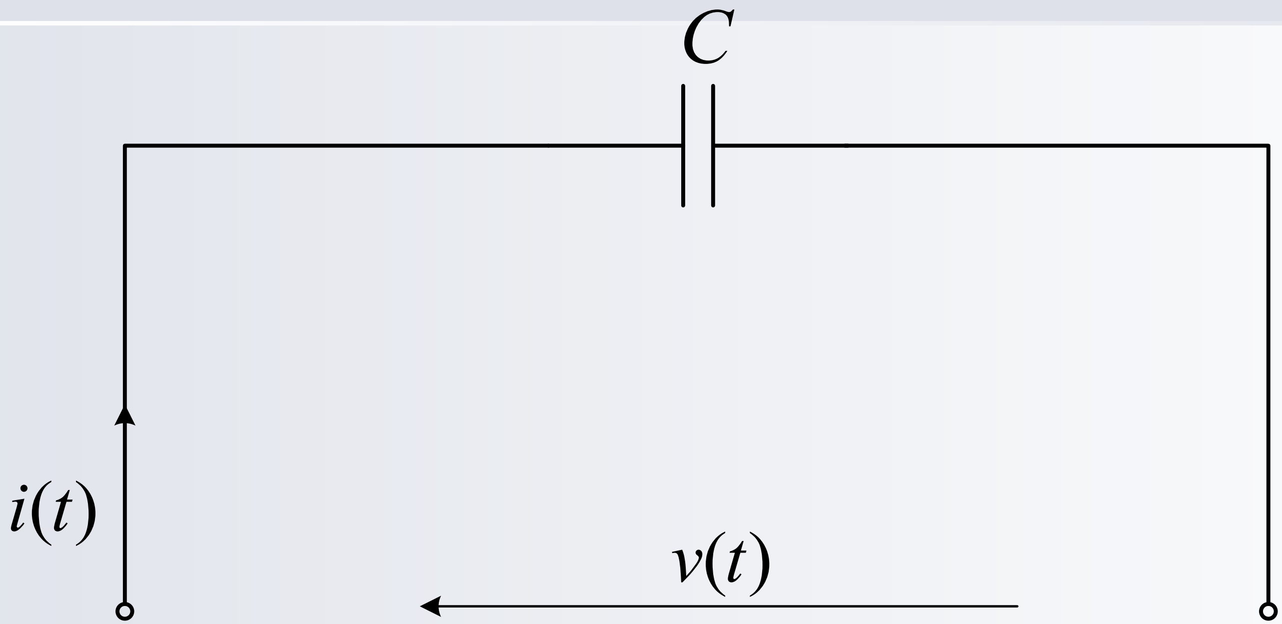
3.2 Indutor – Resolução Complexa

$$I_m[\sqrt{2}\dot{V}e^{j\omega t}] = L\frac{dI_m[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}]}{dt}$$

Identificando: $\dot{I} = \dfrac{\dot{V}}{j\omega L}$

Resultando: $I = \dfrac{V}{\omega L} \quad \beta = \alpha - \dfrac{\pi}{2}$

3.3 Capacitor



$$Dado : v(t) = \sqrt{2} V sen(\omega t + \alpha)$$

$$Calcular : i(t) = \sqrt{2} I sen(\omega t + \beta)$$

3.3 Capacitor – Resolução Temporal

$$\boxed{i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}}$$

$$\sqrt{2}Isen(\omega t + \beta) = C\sqrt{2}V\omega\cos(\omega t + \alpha)$$

Identificando: $I = \dfrac{V}{\dfrac{1}{\omega C}}$ $\quad \beta = \alpha + \dfrac{\pi}{2}$

3.3 Capacitor – Resolução Complexa

$$I_m[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}] = C\frac{dI_m[\sqrt{2}\dot{V}e^{j\omega t}]}{dt}$$

Identificando: $$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{-j\dfrac{1}{\omega C}}$$

Resultando: $$I = \frac{V}{\dfrac{1}{\omega C}} \qquad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

RESUMO

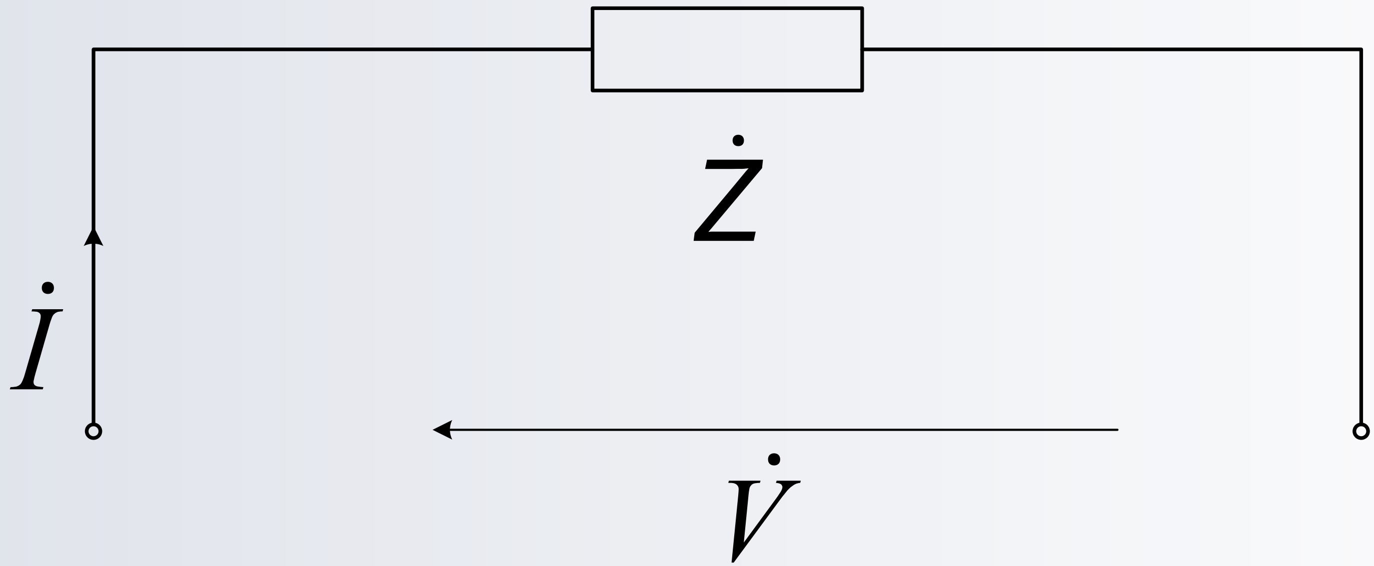
Resistor	*Indutor*	*Capacitor*
$\frac{\dot{V}}{\dot{I}} = R$	$\frac{\dot{V}}{\dot{I}} = jX_L$ $X_L = \omega L$	$\frac{\dot{V}}{\dot{I}} = -jX_C$ $X_C = \frac{1}{\omega C}$

$X_L = \omega L$ **Reatância Indutiva**

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ **Reatância Capacitiva**

4. Impedância

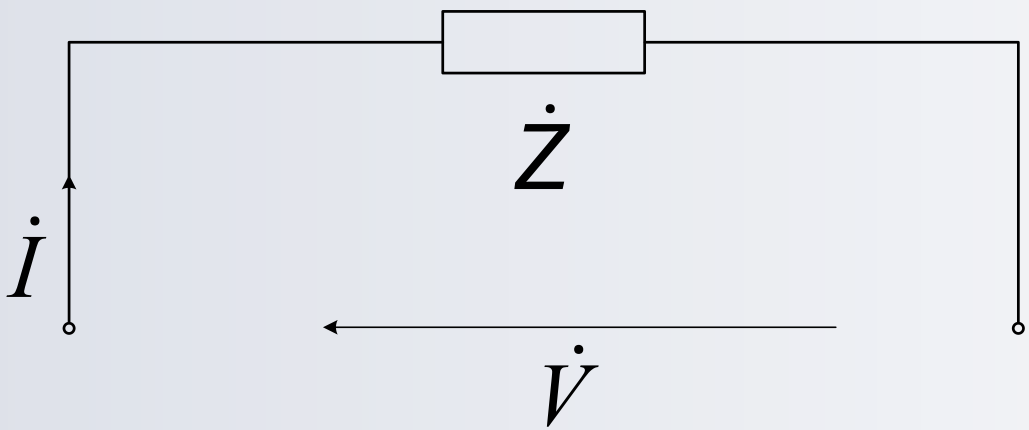
Bipolo Passivo



$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} \, (\Omega)$$

4. Impedância

Bipolo Passivo



$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} \; (\Omega)$$

$\dot{V} = V\underline{/\alpha}$ **: FASOR da Tensão Aplicada**

$\dot{I} = I\underline{/\beta}$ **: FASOR da Corrente**

4.1 Impedância – Relações Básicas

$$\dot{Z} = Z\underline{/\phi}\ (\Omega)$$

$Z = \dfrac{V}{I}$ **: *Módulo da Impedância***

$\varphi = \alpha - \beta$ **: *Diferença de fase entre a tensão e a corrente***

4.1 Impedância – Relações Básicas

$$\dot{Z} = R + jX$$

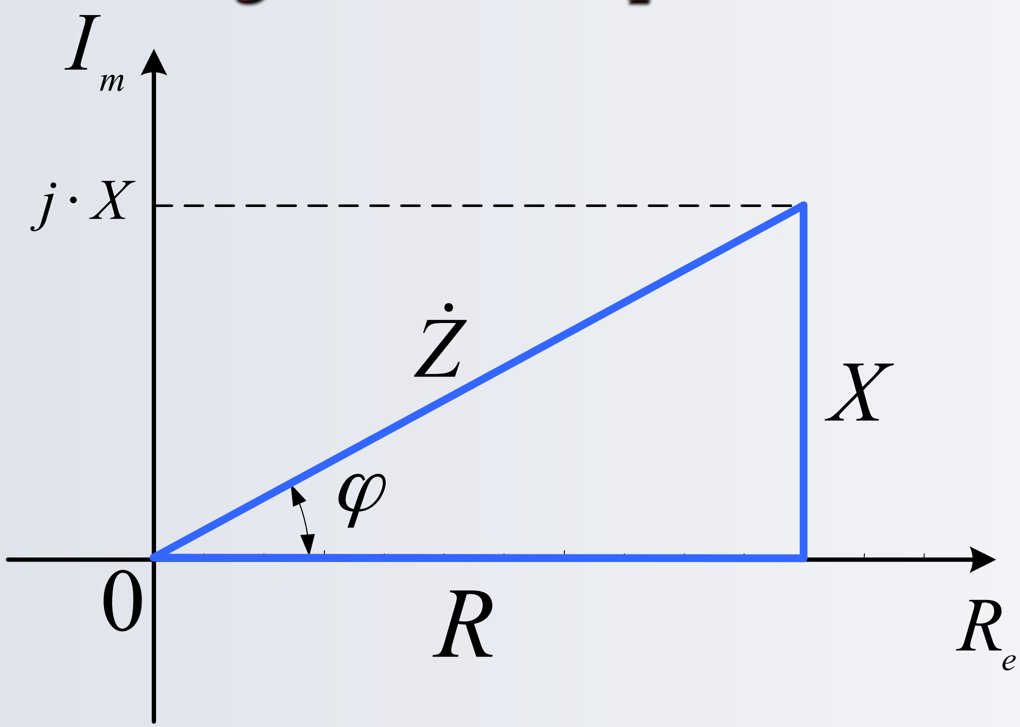
R **: Parte Real da Impedância (RESISTIVA)**

X **: Parte Imaginária da Impedância (REATIVA)**

$$R = Z\cos\varphi \qquad X = Z\,sen\,\varphi$$

4.1 Impedância – Relações Básicas

Triângulo das Impedâncias



$$R = Z\cos\varphi$$

$$X = Z\,sen\,\varphi$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi = arctg\frac{X}{R}$$

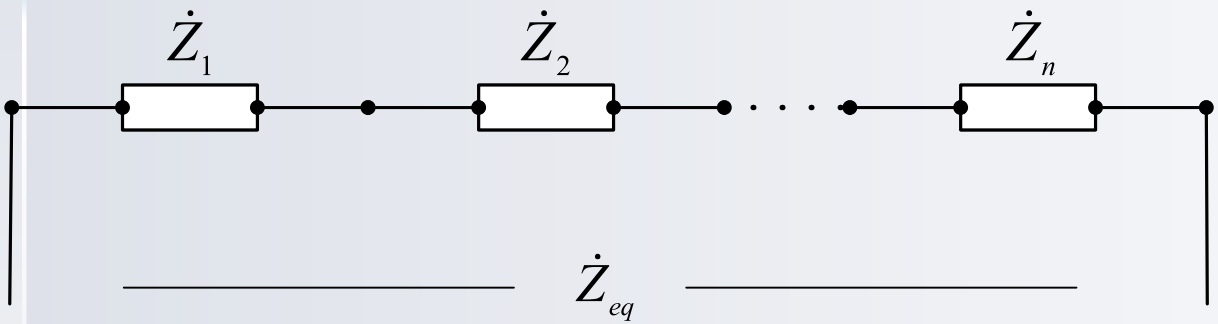
$\cos\varphi$ **: FATOR DE POTÊNCIA**

4.2 Impedâncias Elementares

	$\dot{Z} = R + jX$	$\dot{Z} = Z\underline{/\varphi}$
R	R	R
L	jX_L	$X_L\underline{/90^o}$
C	$-jX_C$	$X_C\underline{/-90^o}$

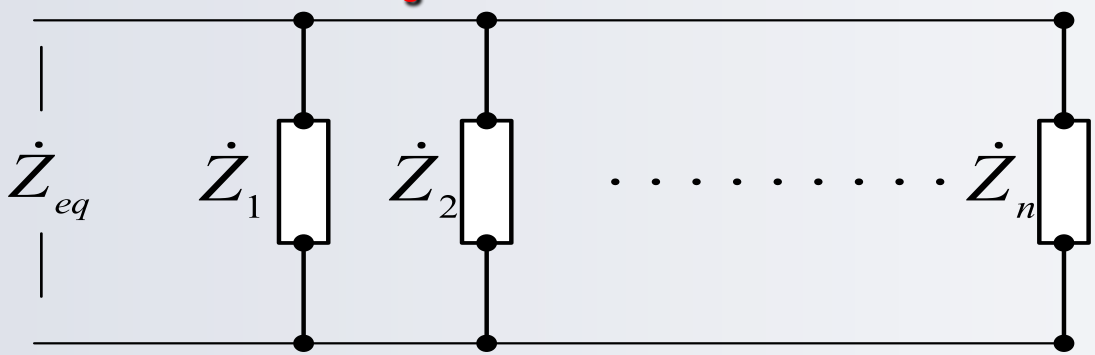
4.3 Impedâncias: Associações

Associação Série



$$\dot{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \dot{Z}_i$$

Associação em Paralelo



$$\frac{1}{\dot{Z}_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\dot{Z}_i}$$

5. Resolução de Circuitos em C.A.

Circuito Real

(Domínio do Tempo)

R, L e C

v(t) e i(t)

-Sistema de Equações Diferenciais

Circuito Transformado

(Domínio da freqüência)

R, jX_L e $-jX_C$

$\dot{V}$ e $\dot{I}$

-Sistema de Equações Algébricas

5. Resolução de Circuitos em C.A.

Leis dos Nós

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{I}_i = 0$$

Leis das Malhas

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{V}_i = 0$$

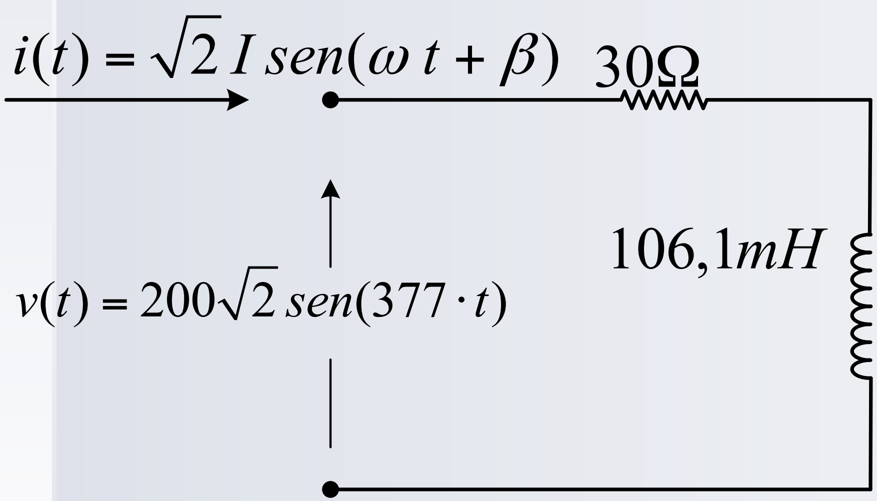
$$\frac{1}{\dot{Z}_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\dot{Z}_i}$$

5. Resolução de Circuitos em C.A.

Exemplo: ***Para o circuito da figura, determine as grandezas indicadas.***

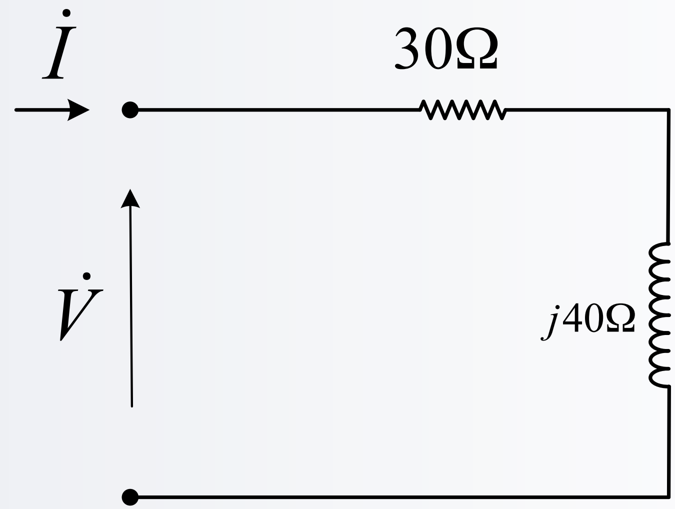
Circuito Real

(Domínio do Tempo)

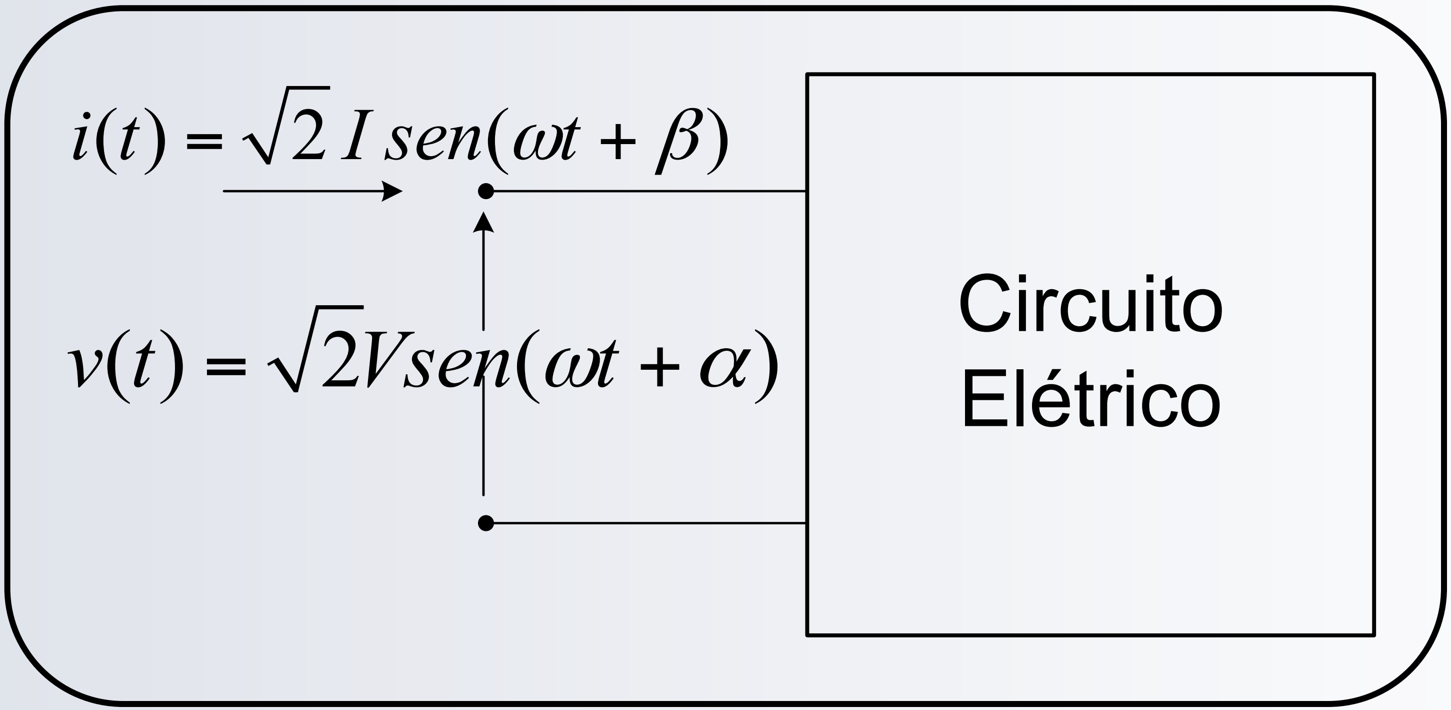


Circuito Transformado

(Domínio da Frequência)



6. Potência Instantânea



$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

$$p(t) = \sqrt{2} V sen(\omega t + \alpha) \cdot \sqrt{2} I sen(\omega t + \beta)$$

6. Potência Instantânea

Identidade Trigonométrica

$$2sen(a)\cdot sen(b)=cos(a-b)-cos(a+b)$$

Podemos escrever:

$$p(t)=VIcos\varphi-VIcos(2\omega t+\alpha+\beta)$$

$$cos\varphi=cos(\alpha-\beta):\ fator\ de\ potência$$

6.1 Potência Ativa

Valor Médio da Potência Instantânea
"POTÊNCIA ATIVA"

$$P = Med[p(t)]$$

Podemos escrever:

$$P = VI\cos\varphi$$

Potência Ativa (Watts): Potência elétrica consumida pelo circuito

6.1 Potência dos Componentes

	$\dot{Z} = R + jX$	$\dot{Z} = Z\underline{/\varphi}$	P
R	R	R	VI
L	jX_L	$X_L\underline{/90^o}$	0
C	$-jX_C$	$X_C\underline{/-90^o}$	0

6.1 Potência Complexa

Potência Ativa

$$P = VI\cos\varphi \ (W)$$

Definimos Potência Reativa:

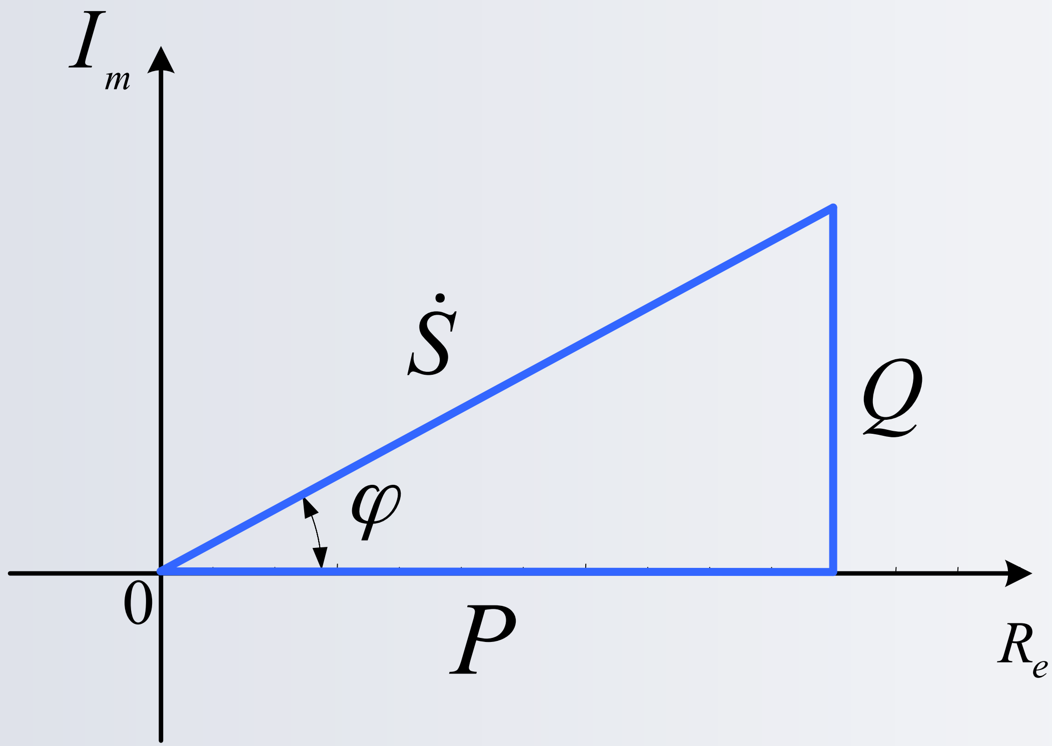
$$Q = VI\,sen\,\varphi \ (VAr)$$

Assim: Potência Aparente

$$S = VI \ \ (VA)$$

6.1 Potência Complexa

Triângulo das Potências



$$\dot{S} = P + jQ$$

6.1 Potência Complexa

Definição de Potência Complexa:

$$\dot{S} = P + jQ = VI\cos\phi + jVI\text{sen}\phi$$

Em termos de FASORES:

Sendo: $\dot{V} = Ve^{j\alpha}$ $\quad \dot{I} = Ie^{j\beta}$ $\quad \alpha - \beta = \varphi$

Definindo: $\dot{S} = \dot{V}\dot{I}^{*}$

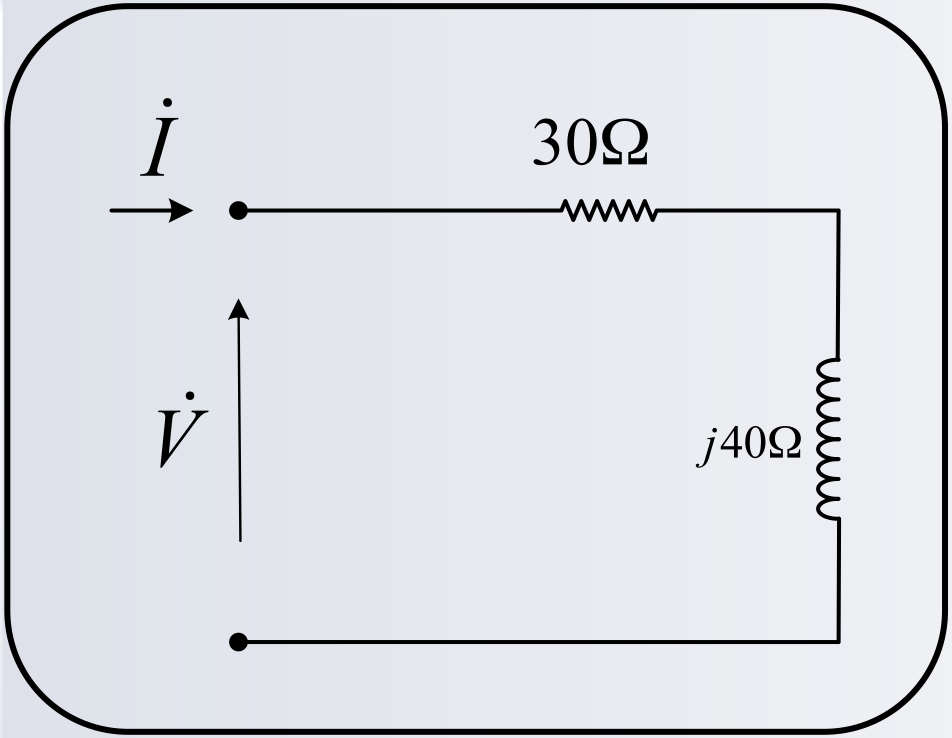
$\dot{I}^{*}$: *Complexo Conjugado do Fasor da Corrente*

Resulta:

$$\dot{S} = VIe^{j\varphi} = VI\cos\varphi + jVI\text{sen}\varphi$$

6.1 Potência Complexa

Exemplo: Calcular P, Q e S $Dado: \dot{V} = 200\underline{/0^o}$



$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}} = \frac{200\underline{/0^o}}{30 + j40} = 4\underline{/-53{,}13^o}$$

$$\dot{S} = \dot{V}\dot{I}^* = 200\underline{/0^o}.4\underline{/53{,}13^o}$$

$$\dot{S} = \dot{V}\dot{I}^* = 800\underline{/53{,}13^o}$$

$$\dot{S} = \dot{V}\dot{I}^* = 480 + j640$$

$$\therefore P = 480\,W; Q = 640\,VAr\ e\ S = 800\,VA$$

6.2 Aplicação Industrial

Potência dos Motores Elétricos

$$P = \frac{\text{Potência Mecânica}}{Rendimento} = \frac{P_{Mec}}{\eta}$$

$$Q = P.\ tg\phi$$

Potência de Iluminação

Incandecente	*Fluorescente*
P:Potência da Luminária **Q=0**	**P:Potência da Luminária** **Q=P.tgφ**

6.2 Aplicação Industrial

Potência Ativa Total da Instalação

$$P_T = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

Potência Reativa Total da Instalação

$$Q_T = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

Potência Aparente Total

$$\dot{S}_T = P_T + jQ_T$$

"NUNCA SOMAR POTÊNCIAS APARENTES"

6.2 Aplicação Industrial

Cargas de uma Indústria:

- Motores de Indução: P_{Mec} = 50HP; Fat.Pot.:0,85;

  Rendimento: 92%; (1 HP = 745,7 W)
- Iluminação: I=60A; Fat.Pot.:0,9 indutivo;
- Fornos: Potência Ativa=150kW; Pot. Reativa=80kVAr

Custo da Energia: R$.180,00/MWh para F.P.>0,92.

Alimentação: 1000 V – 60 Hz

6.2 Aplicação Industrial

Determinar

1. *Potências Ativa, Reativa e Complexa Totais e Fator de Potência; Haverá tarifa excedente por F.P. baixo?*

2. *Custo Mensal da Energia. (considere mês com 22 dias úteis, jornada de 8 horas diárias e consumo em fins de semana nulo)*

3. *Corrente absorvida pelas cargas e a corrente total;*

4. *Diagrama de fasores.*