

PESQUISA OPERACIONAL I – PROGRAMAÇÃO INTEIRA

Programação Inteira

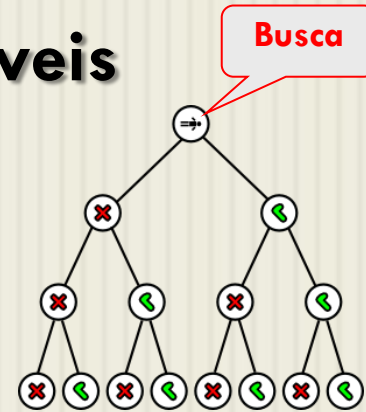
6-2

SIMPLEX

Resolução de problemas com variáveis inteiras ou binárias

Problema da Designação

Busca



1) Planos de Corte



Computação IBM

Gomory (1929 -)

Branch-and-Bound

**Bifurcação e Limite
Separação e Avaliação**



2)

Branch-and-Bound



Branch-and-Bound



3) Enumeração Implícita (0/1)



Administração Carnegie Mellon

Balas (1922 -)

Capítulo 6



Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

6-3

Apresentação

Designação de:

- Operações a máquinas
- Operários a tarefas
- Trabalhadores a locais de trabalho
- Dinheiro a investimentos

Designação de custo mínimo

Minimizar o custo do transporte dos agentes designados aos locais de trabalho

Designação de lucro máximo

Maximizar a satisfação dos agentes designados aos locais de trabalho

$$\min f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Custo

$$s/a \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1..n)$$

Horizontal

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1..n)$$

Vertical

$$x_{ij} = 0/1$$

x11	x12	x13	x14
x21	x22	x23	x24
x31	x32	x33	x34
x41	x42	x43	x44



Custo

Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

6-4

Exercício 1

	T1	T2	T3	T4
O1	6	3	2	4
O2	10	6	2	5
O3	6	10	9	8
O4	11	5	4	9

Designar 4 operários a 4 tarefas

$$\min f = 6x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{14} + 10x_{21} + 6x_{22} + 2x_{23} + 5x_{24} + 6x_{31} + 10x_{32} + 9x_{33} + 8x_{34} + 11x_{41} + 5x_{42} + 4x_{43} + 9x_{44}$$

s/a

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 \\ x_{ij} &= 0/1 \end{aligned}$$

x11	x12	x13	x14
x21	x22	x23	x24
x31	x32	x33	x34
x41	x42	x43	x44

	T1	T2	T3	T4
O1				1
O2			1	
O3	1			
O4		1		



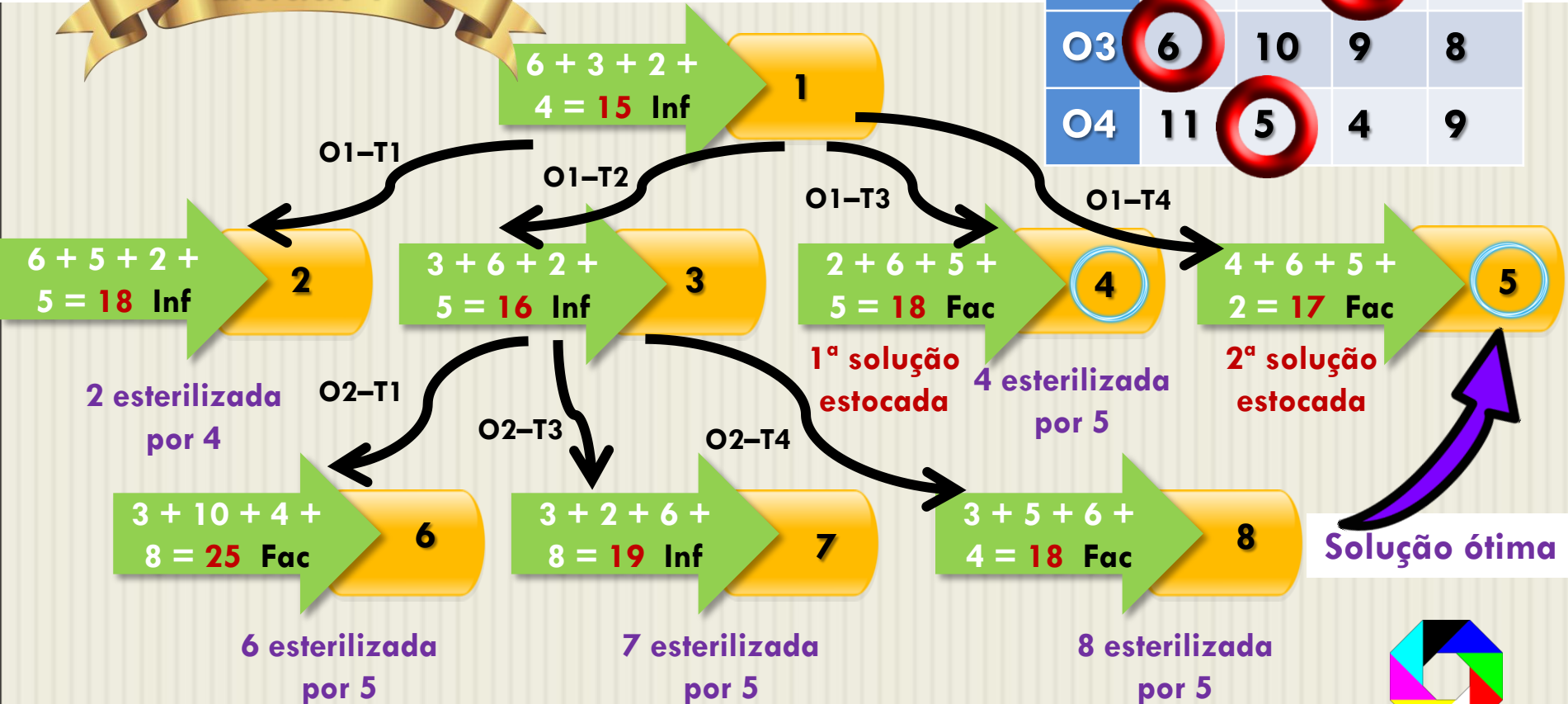
Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

	T1	T2	T3	T4
O1	6	3	2	4
O2	10	6	2	5
O3	6	10	9	8
O4	11	5	4	9

6-5

Exercício 1



Branch-and-Bound



Custo

Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

6-6

	T1	T2	T3	T4
O1	5	10	28	10
O2	24	25	9	17
O3	13	3	8	15
O4	7	23	5	3



Exercício 2

$$\begin{aligned} \min f = & 5x_{11} + 10x_{12} + 28x_{13} \\ & + 10x_{14} + 24x_{21} + 25x_{22} + \\ & 9x_{23} + 17x_{24} + 13x_{31} + 3x_{32} \\ & + 8x_{33} + 15x_{34} + 7x_{41} + \\ & 23x_{42} + 5x_{43} + 3x_{44} \end{aligned}$$

s/a

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 \\ x_{ij} &= 0/1 \end{aligned}$$

x11	x12	x13	x14
x21	x22	x23	x24
x31	x32	x33	x34
x41	x42	x43	x44

	T1	T2	T3	T4
O1	1			
O2			1	
O3		1		
O4				1



Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

	T1	T2	T3	T4
O1	5	10	28	10
O2	24	25	9	17
O3	13	3	8	15
O4	7	23	5	3

6-7

Exercício 2



Branch-and-Bound



Custo

Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

6-8

Exercício 3

	T1	T2	T3	T4
O1	8	3	1	5
O2	11	7	1	6
O3	7	8	6	8
O4	11	6	4	9

Designar 4
operários a 4
tarefas

$$\min f = 8x_{11} + 3x_{12} + x_{13} + 5x_{14} + 11x_{21} + 7x_{22} + x_{23} + 6x_{24} + 7x_{31} + 8x_{32} + 6x_{33} + 8x_{34} + 11x_{41} + 6x_{42} + 4x_{43} + 9x_{44}$$

s/a

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 \\ x_{ij} &= 0/1 \end{aligned}$$

x11	x12	x13	x14
x21	x22	x23	x24
x31	x32	x33	x34
x41	x42	x43	x44

	T1	T2	T3	T4
O1				1
O2			1	
O3	1			
O4		1		



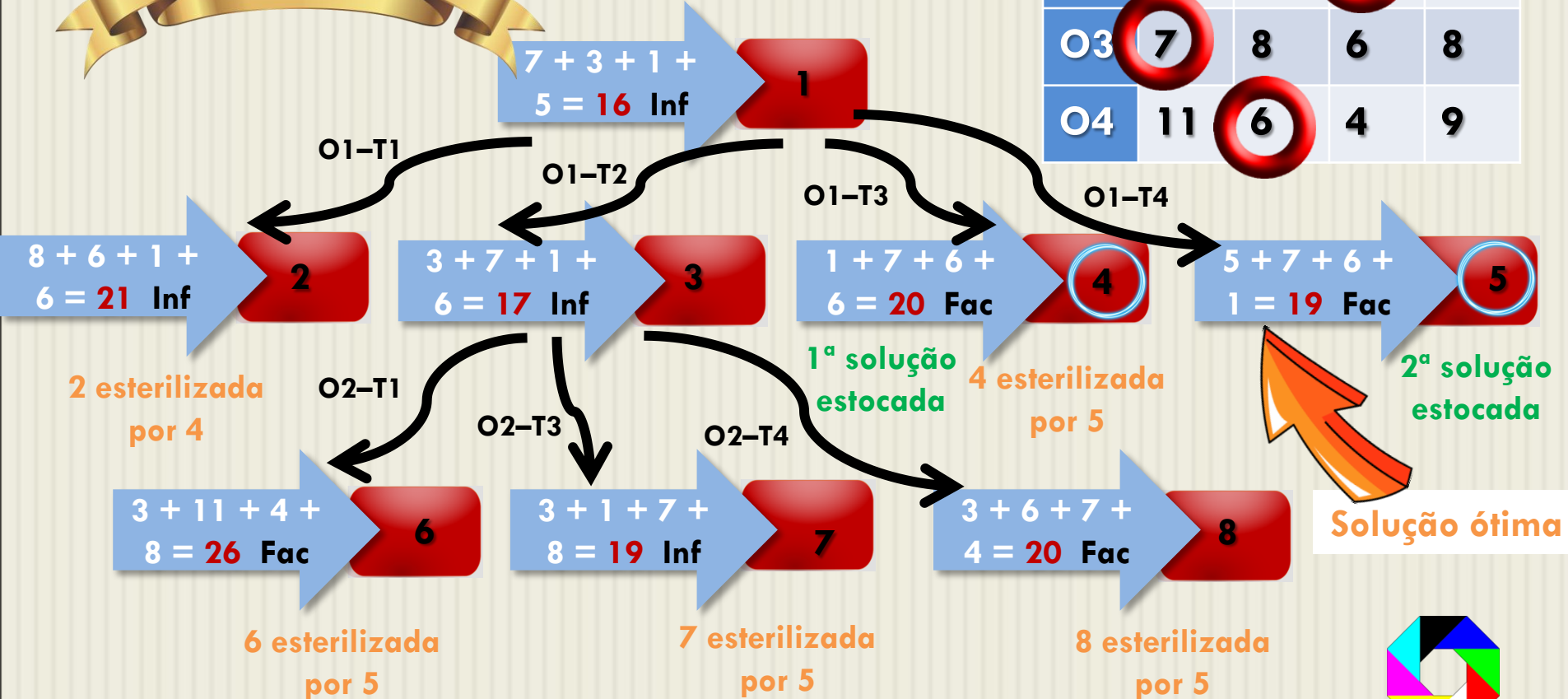
Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

	T1	T2	T3	T4
O1	8	3	1	5
O2	11	7	1	6
O3	7	8	6	8
O4	11	6	4	9

6-9

Exercício 3



Custo

Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

6-10

Exercício 4

	T1	T2	T3	T4
O1	2	1	4	2
O2	3	4	1	6
O3	1	2	6	5
O4	1	3	3	7

Designar 4
operários a 4
tarefas

$$\min f = 2x_{11} + x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} + 3x_{21} + 4x_{22} + x_{23} + 6x_{24} + x_{31} + 2x_{32} + 6x_{33} + 5x_{34} + x_{41} + 3x_{42} + 3x_{43} + 7x_{44}$$

s/a

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 \\ x_{ij} &= 0/1 \end{aligned}$$

x11	x12	x13	x14
x21	x22	x23	x24
x31	x32	x33	x34
x41	x42	x43	x44

	T1	T2	T3	T4
O1				1
O2			1	
O3		1		
O4	1			



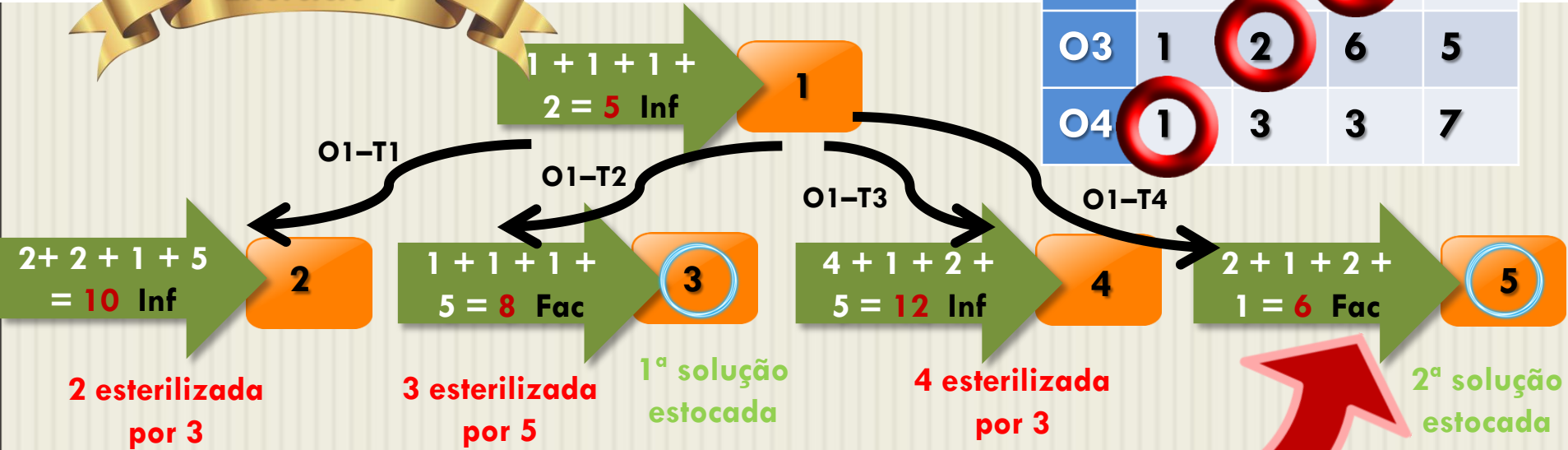
Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

	T1	T2	T3	T4
O1	2	1	4	2
O2	3	4	1	6
O3	1	2	6	5
O4	1	3	3	7

6-11

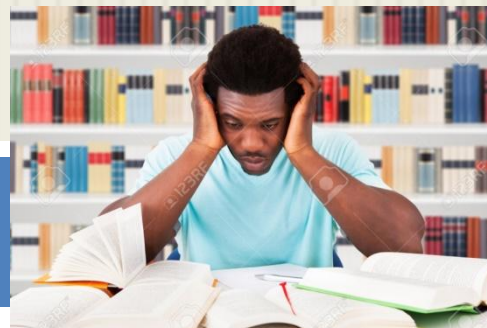
Exercício 4



Solução ótima



Capítulo 6



Branch
-and-
Bound

Programação Inteira



SIMPLEX

6-12

Exercício 5

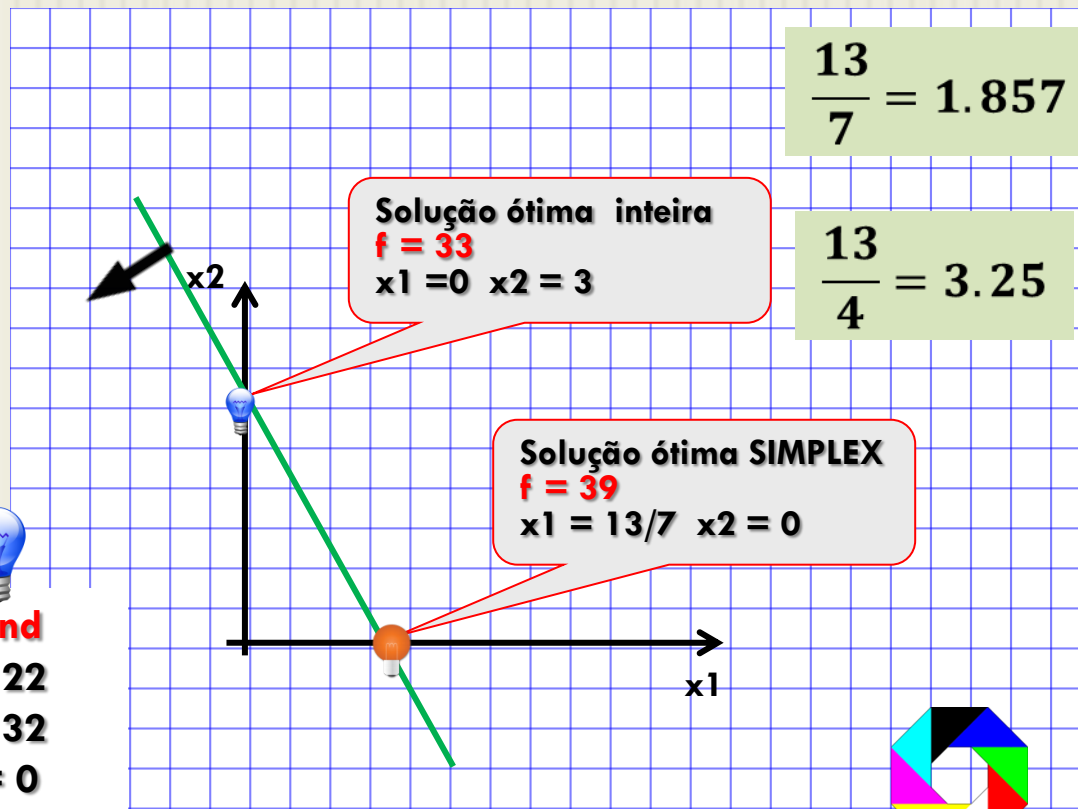
max $f = 21 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2$
s/a $7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 13$
 $x_1, x_2 \geq 0$ inteiras

N^{os} Reais **SIMPLEX**

(0,0)	$f = 0$
(0, 13/4)	$f = 35.75$
(13/7, 0)	$f = 39$

N^{os} Inteiros **Branch-and-Bound**

(0,3) $f = 33$	(0,2) $f = 22$
(0,1) $f = 11$	(1,1) $f = 32$
(1,0) $f = 21$	(0,0) $f = 0$



**Branch
-and-
Bound**



Programação Inteira



SIMPLEX

6-13

Exercício 5

$$\begin{aligned} \max \quad & f = 21x_1 + 11x_2 \\ \text{s/a} \quad & 7x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiras} \end{aligned}$$

$$x_1 = 1.857$$



$$x_1 \leq 1$$

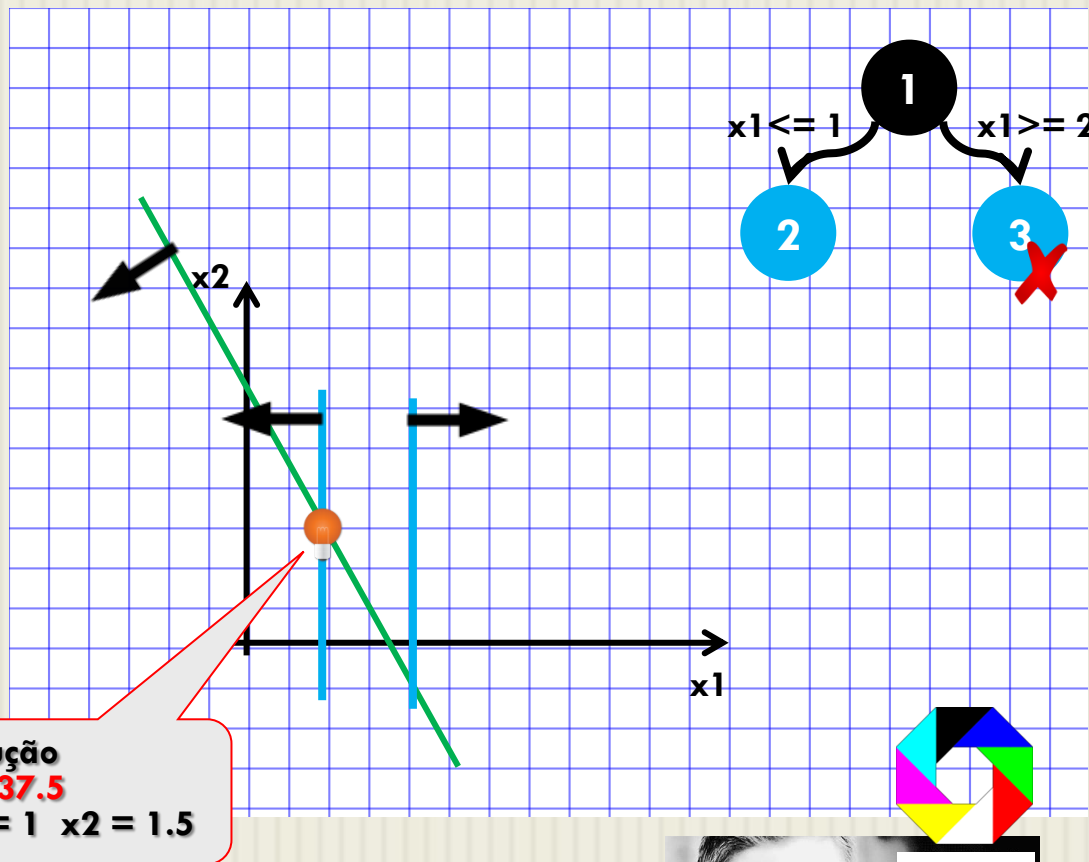
$$x_1 \geq 2$$

$$x_1 = 1$$

Problema Infatível

$$x_2 = 1.5$$

$$f = 37.5$$



Branch-and-Bound



Programação Inteira

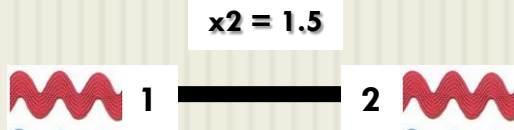
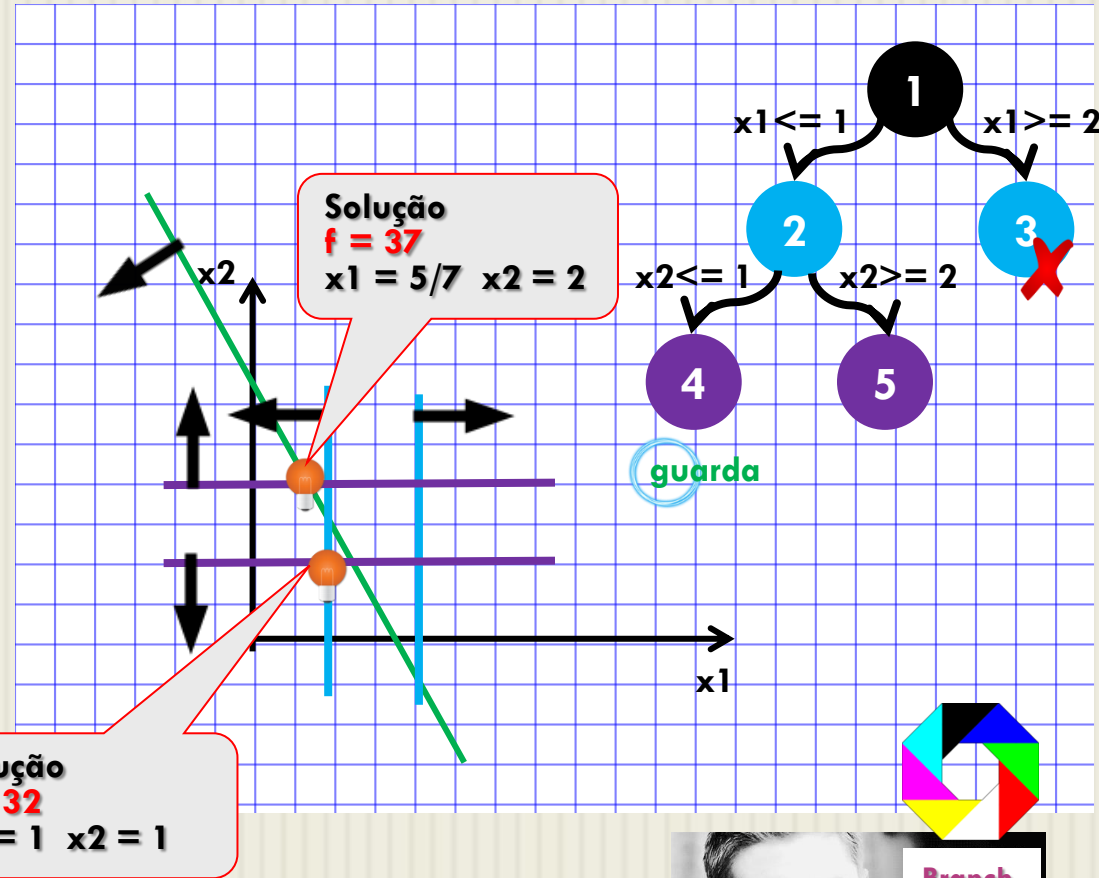


SIMPLEX

6-14

Exercício 5

$\max f = 21 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2$
 $s/a \quad 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 13$
 $x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiras}$



$x_2 = 1.5$

$x_2 \leq 1$

$x_2 \geq 2$

$x_1 = 1$

$x_1 = 5/7$ (0.714)

$x_2 = 1$

$x_2 = 2$

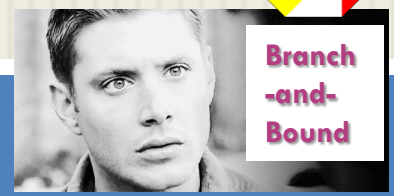
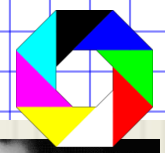
$f = 32$

$f = 37$

1ª solução estocada

Solução $f = 32$
 $x_1 = 1 \quad x_2 = 1$

Solução $f = 37$
 $x_1 = 5/7 \quad x_2 = 2$



Programação Inteira



SIMPLEX

6-15

Exercício 5

$$\begin{aligned} \max \quad & f = 21x_1 + 11x_2 \\ \text{s/a} \quad & 7x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiras} \end{aligned}$$

$$x_1 = 0.714$$



$$x_1 \leq 0$$

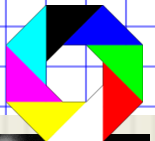
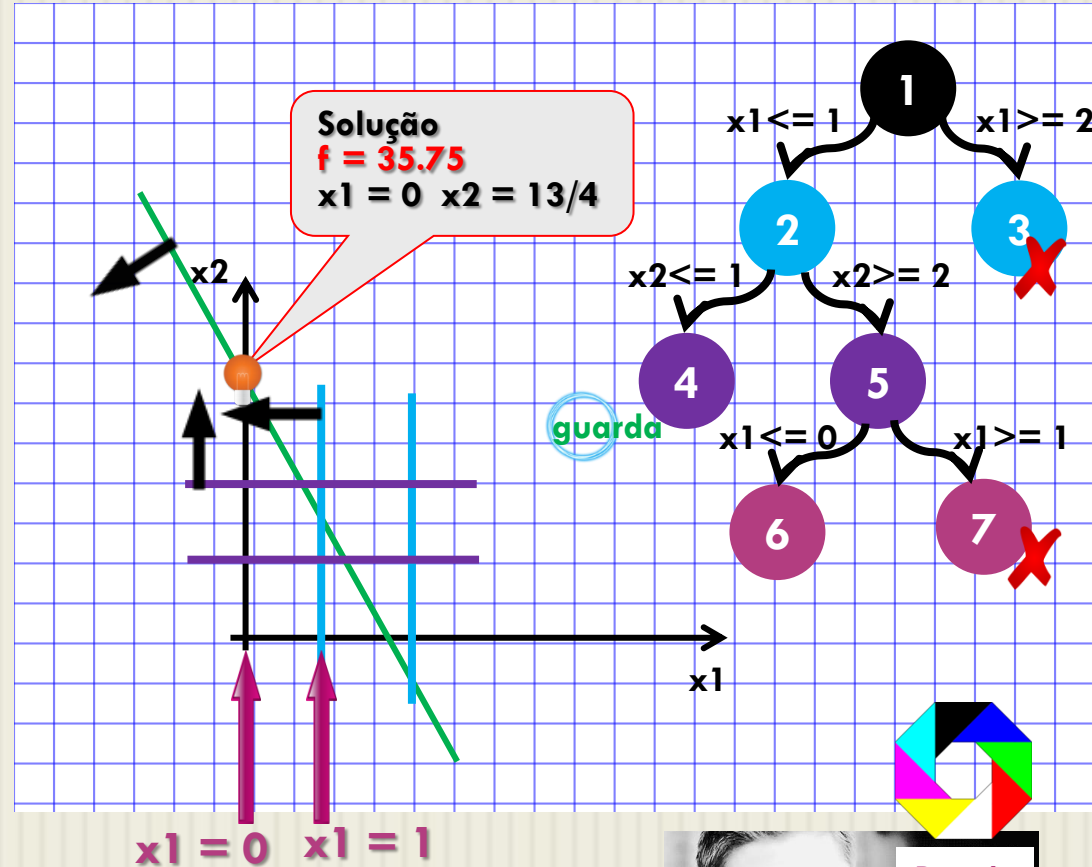
$$x_1 \geq 1$$

$$x_1 = 0$$

Problema Infatível

$$x_2 = 13/4 \quad (3.25)$$

$$f = 35.75$$



Programação Inteira



SIMPLEX

6-16

Exercício 5

$$\begin{aligned} \max \quad & f = 21x_1 + 11x_2 \\ \text{s/a} \quad & 7x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiras} \end{aligned}$$

$$x_2 = 3.25$$



$$x_2 \leq 3$$

$$x_2 \geq 4$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 3$$

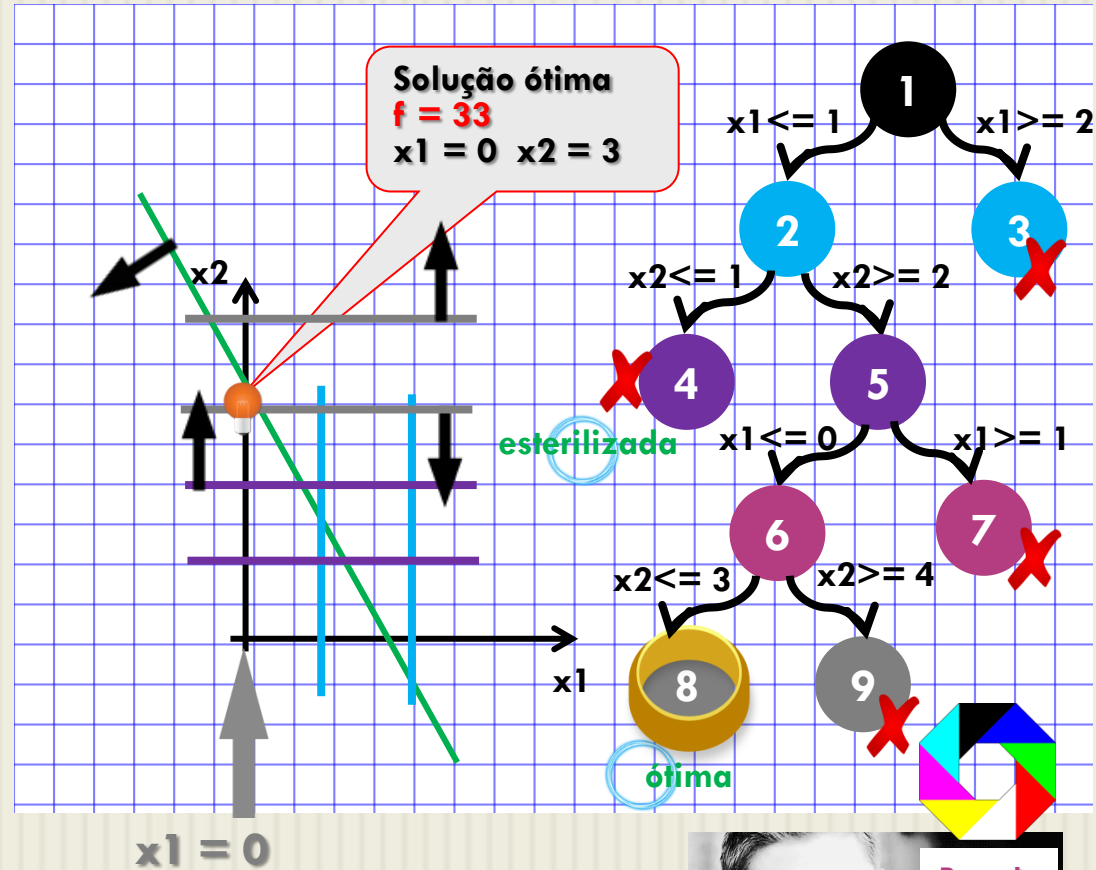
$$f = 33$$

Problema Infatível

Solução Ótima



Capítulo 6



Programação Inteira

SIMPLEX

6-17

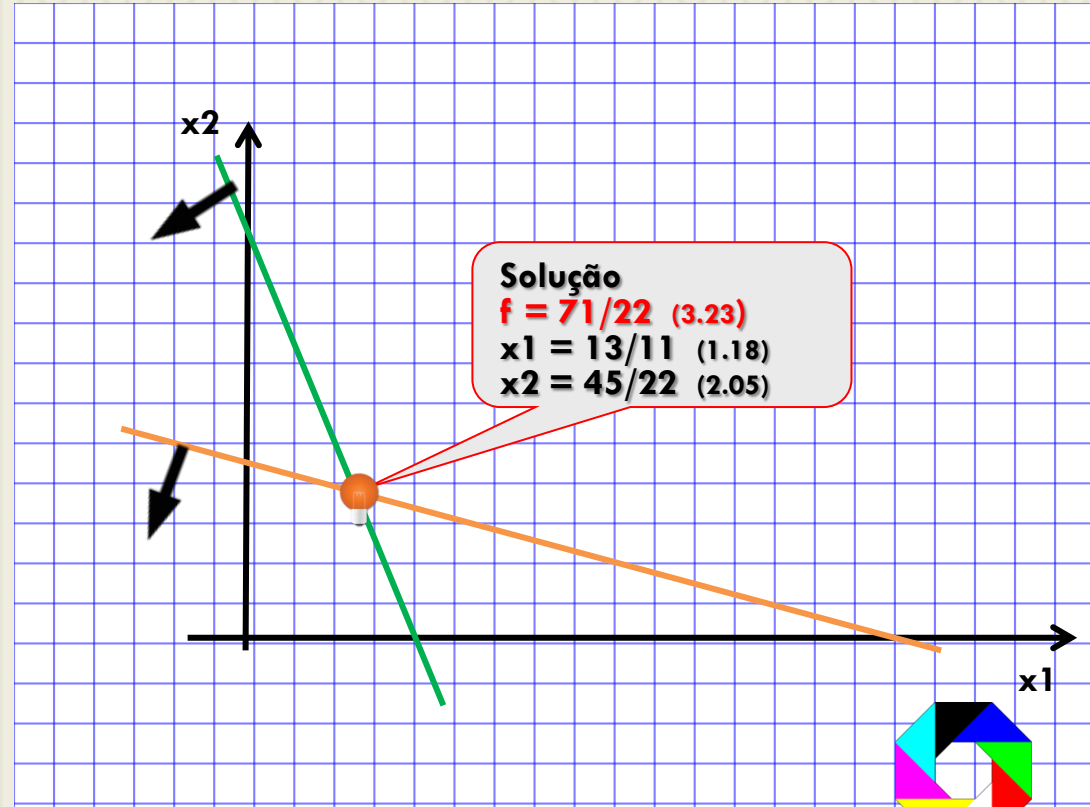
Exercício 6

$$\max f = x_1 + x_2$$

$$\text{s/a } 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 10$$

$$3 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 \leq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiras}$$



Branch
-and-
Bound



Programação Inteira

SIMPLEX



6-18

Exercício 6

$$\max f = x_1 + x_2$$

$$\text{s/a } 5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$3x_1 + 10x_2 \leq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiras}$$

$$x_2 = 2.05$$



$$x_2 \leq 2$$

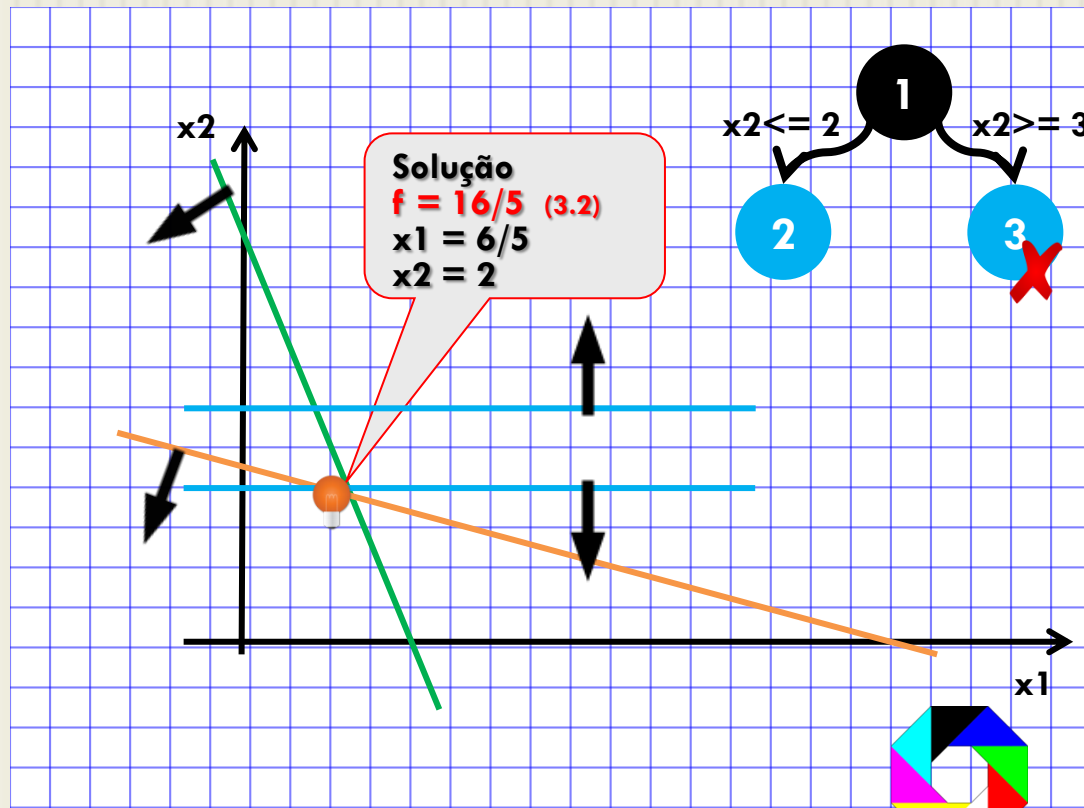
$$x_2 \geq 3$$

$$\rightarrow x_1 = 6/5 \text{ (1.2)}$$

$$x_2 = 2$$

$$f = 16/5 \text{ (3.2)}$$

Problema Infatível



Programação Inteira

SIMPLEX



6-19

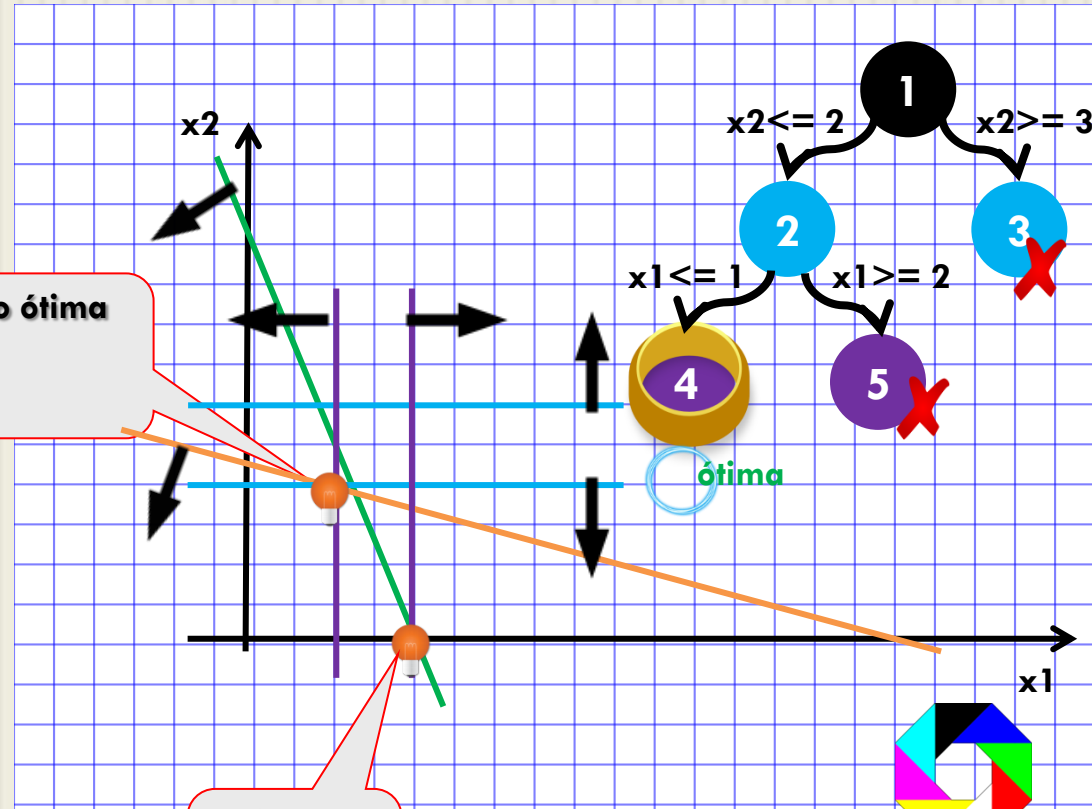
Exercício 6

$$\max f = x_1 + x_2$$

$$\text{s/a } 5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$3x_1 + 10x_2 \leq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiras}$$



Solução ótima

$$f = 3$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_1 = 1.2$$



$$x_1 \leq 1$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1 = 1$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 2$$

$$x_2 = 0$$

$$f = 3$$

$$f = 2$$

Solução Ótima

Esterilizada por $f = 3$

Solução

$$f = 2$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 0$$



Programação Inteira

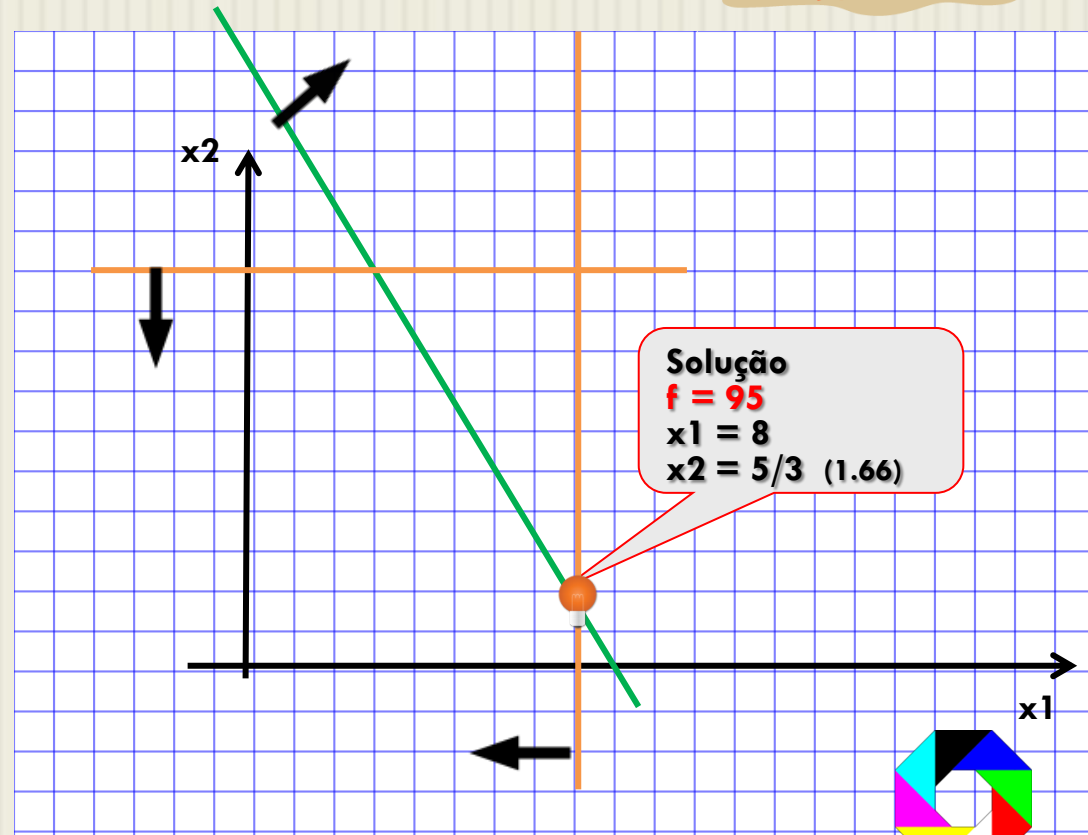


SIMPLEX

6-20

Exercício 7

$$\begin{aligned} \min \quad & f = 10 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \\ \text{s/a} \quad & 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 45 \\ & 0 \leq x_1 \leq 8 \\ & 0 \leq x_2 \leq 10 \text{ inteiras} \end{aligned}$$



Branch
-and-
Bound

Programação Inteira



SIMPLEX

6-21

Exercício 7

$$\begin{aligned} \min \quad & f = 10 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \\ \text{s/a} \quad & 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 45 \\ & 0 \leq x_1 \leq 8 \\ & 0 \leq x_2 \leq 10 \text{ inteiras} \end{aligned}$$

$$x_2 = 1.66$$

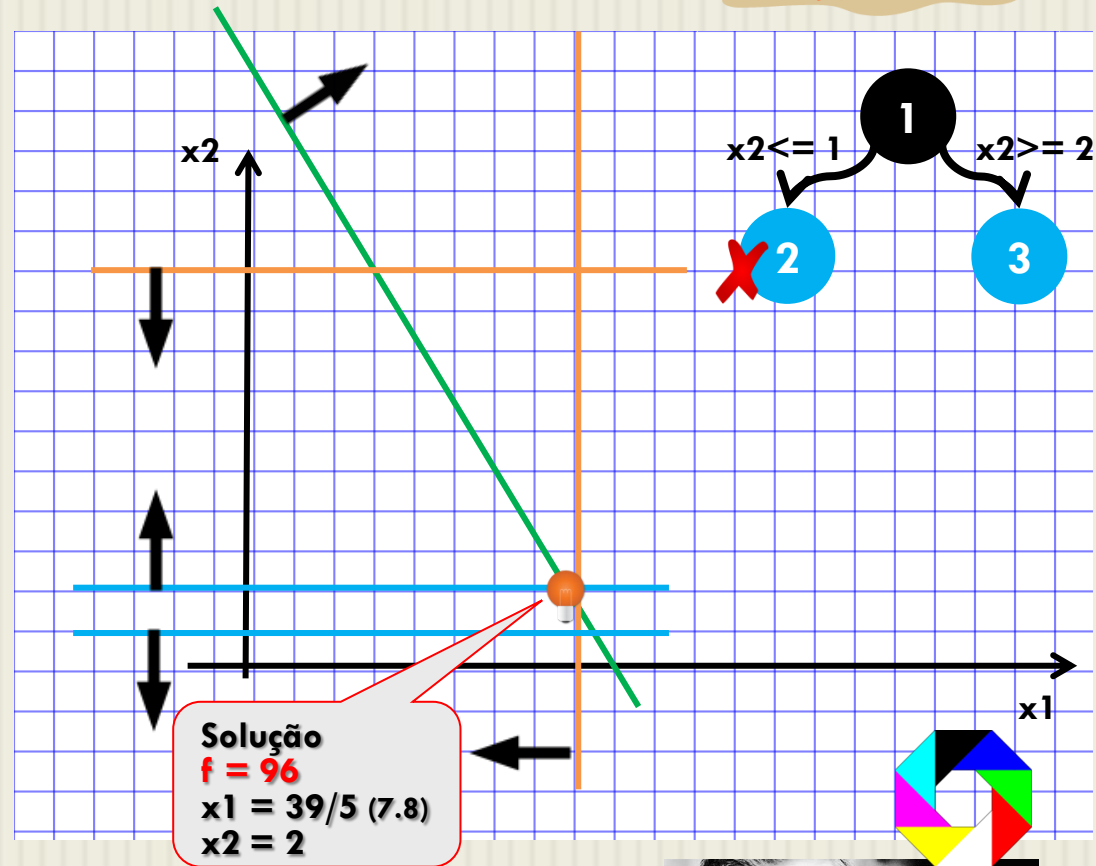


$$x_2 \leq 1$$

$$x_2 \geq 2$$

Problema Infactível

$$\begin{aligned} & x_1 = 39/5 \quad (7.8) \\ & x_2 = 2 \\ & f = 96 \end{aligned}$$



Programação Inteira



SIMPLEX

6-22

Exercício 7

$$\begin{aligned} \min \quad & f = 10 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \\ \text{s/a} \quad & 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 45 \\ & 0 \leq x_1 \leq 8 \\ & 0 \leq x_2 \leq 10 \text{ inteiras} \end{aligned}$$

$$x_1 = 7.8$$



$$x_1 \leq 7$$

$$x_1 \geq 8$$

$$x_1 = 7$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 10/3$$

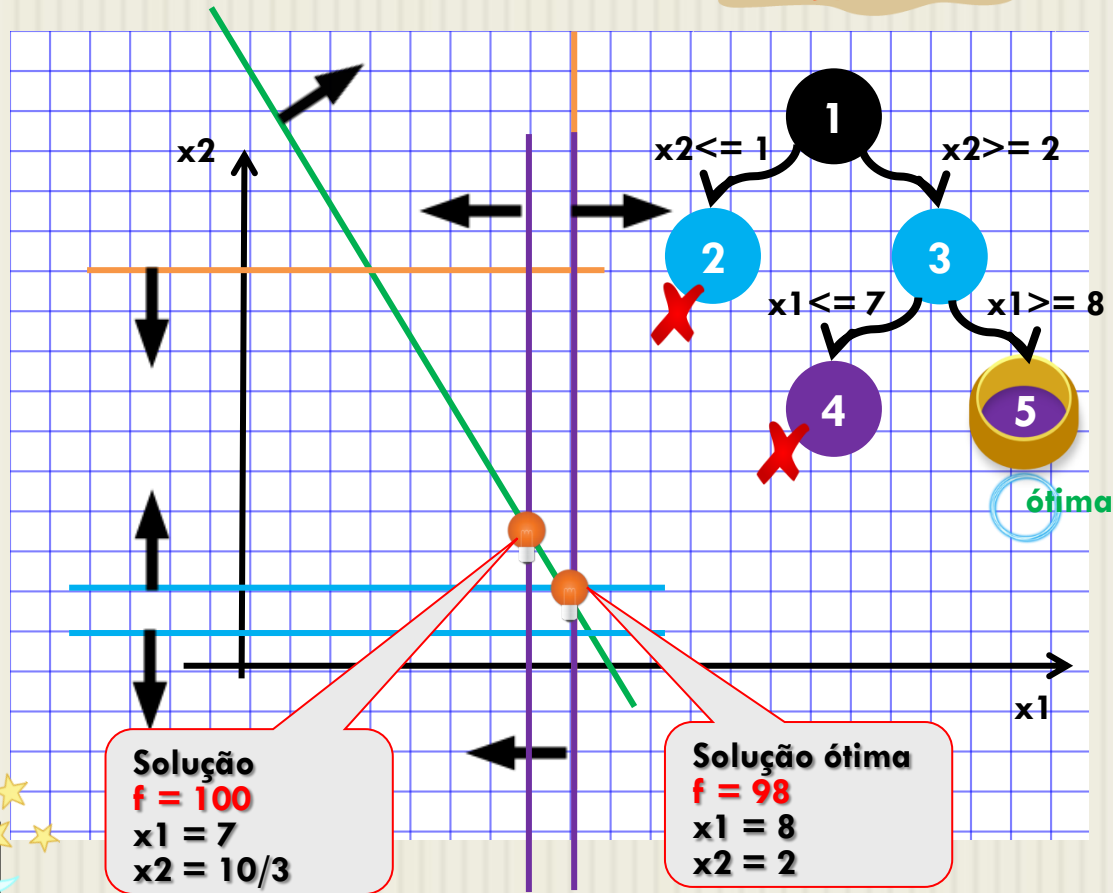
$$x_2 = 2$$

$$f = 100$$

$$f = 98$$

Esterilizada por
 $f = 98$

Solução
Ótima



Solução
 $f = 100$
 $x_1 = 7$
 $x_2 = 10/3$

Solução ótima
 $f = 98$
 $x_1 = 8$
 $x_2 = 2$



Programação Inteira

SIMPLEX



6-23

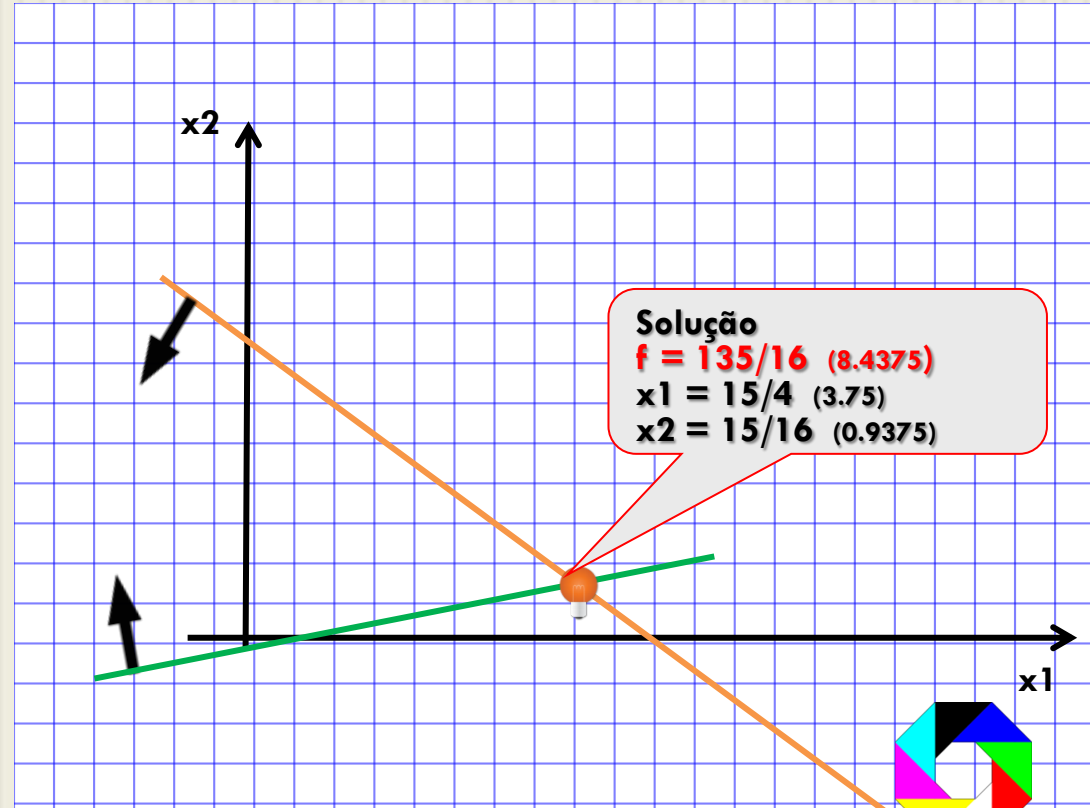
Exercício 8

$$\max f = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s/a } x_1 - 4x_2 \leq 0$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiras}$$



Solução
 $f = 135/16$ (8.4375)
 $x_1 = 15/4$ (3.75)
 $x_2 = 15/16$ (0.9375)



Branch
-and-
Bound

Programação Inteira

SIMPLEX



6-24

Exercício 8

$$\max f = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s/a } x_1 - 4x_2 \leq 0$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiras}$$

$$x_1 = 3.75$$



3



4

$$x_1 \leq 3$$

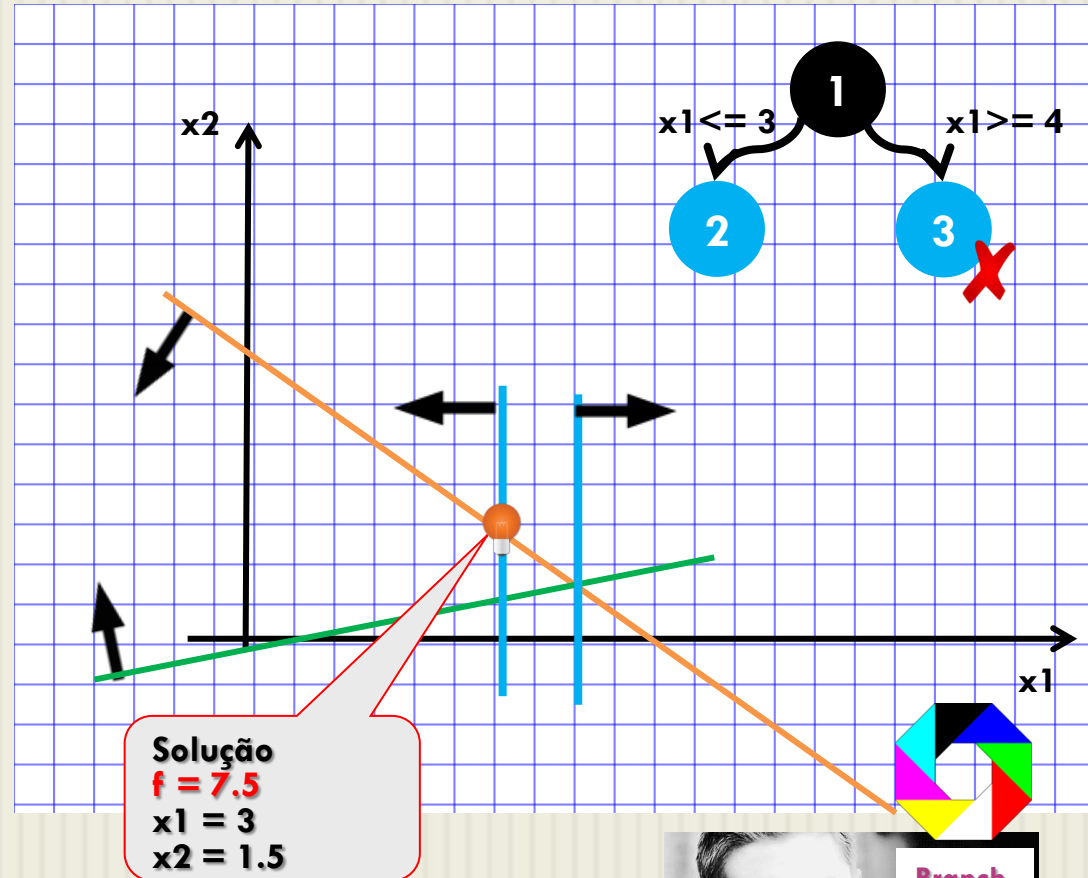
$$x_1 \geq 4$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 1.5$$

$$f = 7.5$$

Problema
Infactível



Solução
 $f = 7.5$
 $x_1 = 3$
 $x_2 = 1.5$



Branch
-and-
Bound



Programação Inteira

SIMPLEX



6-25

Exercício 8

max $f = 2 \cdot x_1 + x_2$

s/a $x_1 - 4 \cdot x_2 \leq 0$

$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 15$

$x_1, x_2 \geq 0$ inteiras

$x_2 = 1.5$



$x_2 \leq 1$

$x_2 \geq 2$

$x_1 = 3$

$x_1 = 7/3$

$x_2 = 1$

$x_2 = 2$

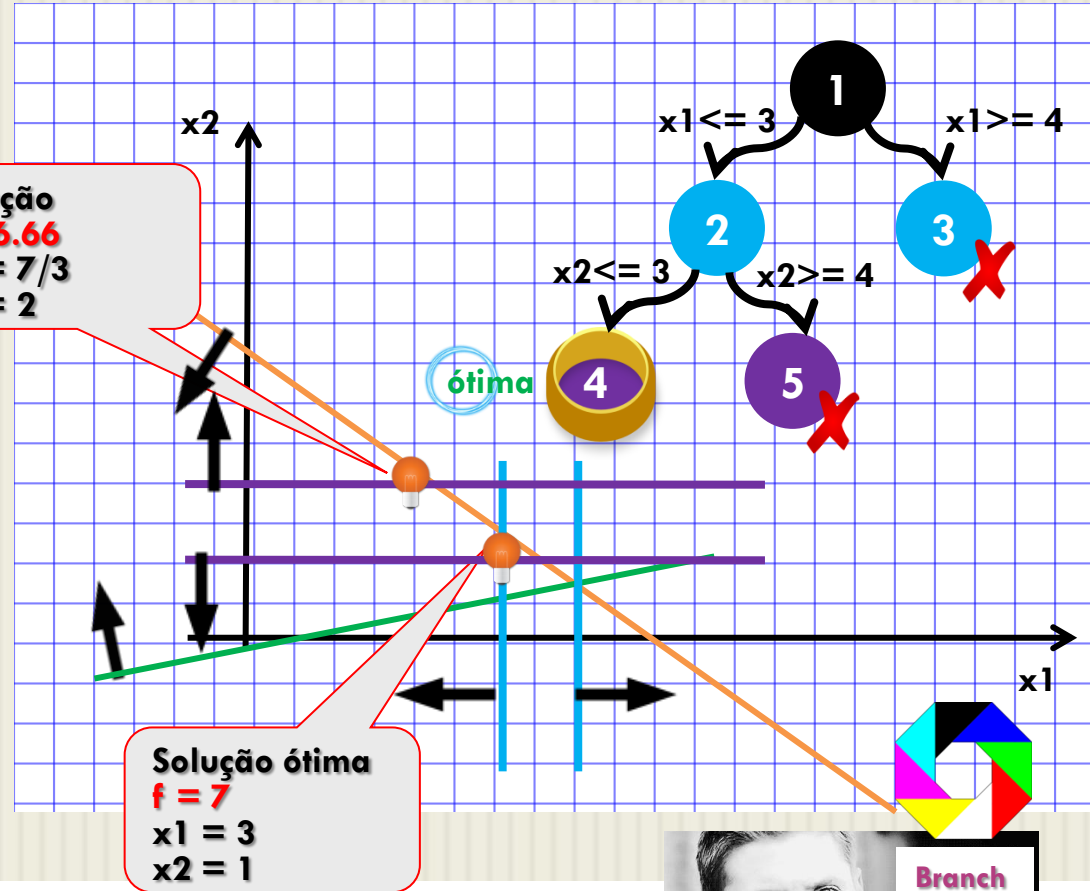
$f = 7$

$f = 20/3$ (6.66)

Solução Ótima

Esterilizada por $f = 7$

Solução
 $f = 6.66$
 $x_1 = 7/3$
 $x_2 = 2$



Solução ótima
 $f = 7$
 $x_1 = 3$
 $x_2 = 1$

