

PESQUISA OPERACIONAL I

– DUALIDADE



Dualidade



5-2

A cada modelo matemático:

$$\min f = c x$$

$$\text{s/a } A x \geq b$$

$$x \geq 0$$

Problema
Primal

corresponde um outro modelo:

$$\max Q = w b$$

$$\text{s/a } w A \leq c$$

$$w \geq 0$$

Problema
Dual

o **DUAL**

formado com os mesmos coeficientes, porém dispostos de maneira diferente.

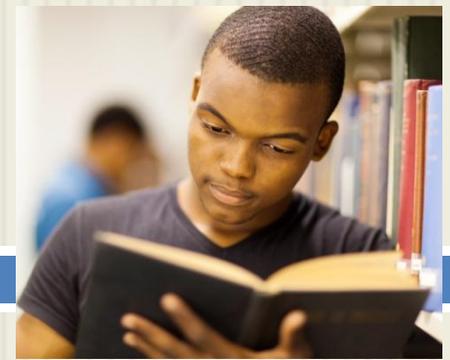


Capítulo 5





Dualidade



5-3

Seja o problema da dieta:

	s1	s2	s3	s4	s5	
Proteína	3	4	5	3	6	42
Sais Minerais	2	3	4	3	3	24
\$	25	35	50	33	36	

Alimentos

Necessidades

Custo

Modelo Matemático



Problema
Primal



$$\min f = 25 \cdot x_1 + 35 \cdot x_2 + 50 \cdot x_3 + 33 \cdot x_4 + 36 \cdot x_5$$

$$s/a \quad 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 6 \cdot x_5 \geq 42$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 3 \cdot x_5 \geq 24$$

$$x_i \geq 0$$

Cap





Dualidade



5-4

O vendedor de pílulas propõe ao cozinheiro substituir a dieta de alimentos por pílulas:

$w_1 \geq 0$ $w_2 \geq 0$ ← preço das pílulas de proteínas e de sais minerais



Então:

$$3*w_1 + 2*w_2 \leq 25$$

$$4*w_1 + 3*w_2 \leq 35$$

$$5*w_1 + 4*w_2 \leq 50$$

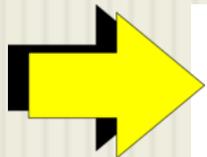
$$3*w_1 + 3*w_2 \leq 33$$

$$6*w_1 + 3*w_2 \leq 36$$



Problema Dual

	s 1	s 2	s 3	s 4	s 5	
P	3	4	5	3	6	4 2
S	2	3	4	3	3	2 4
\$	2 5	3 5	5 0	3 3	3 6	



Problema do Vendedor

max $Q = 42*w_1 + 24*w_2$

s/a

$$3*w_1 + 2*w_2 \leq 25$$

$$4*w_1 + 3*w_2 \leq 35$$

$$5*w_1 + 4*w_2 \leq 50$$

$$3*w_1 + 3*w_2 \leq 33$$

$$6*w_1 + 3*w_2 \leq 36$$

$$w_i \geq 0$$


$$Q = 42*w_1 + 24*w_2 \text{ (Lucro)}$$



Capítulo 5

O problema do vendedor de pílulas



Dualidade

5-5

Propriedades da Dualidade



O dual do dual é o primal



Se a **k-ésima** restrição do primal é de **igualdade**, a variável **w_k** do dual é **livre**



Se a variável **x_k** do primal é **livre**, a restrição **k** do dual é de **igualdade**

Teorema Básico da Dualidade

1ª parte: Seja o problema primal PP e o respectivo dual PD. Seja **x₀** uma solução factível de PP e **w₀** uma solução factível de PD. Então $f(x_0) \geq Q(w_0)$

2ª parte: Se PP e PD têm soluções factíveis, então existe uma solução ótima para cada problema tal que **f_{ótima} = Q_{ótima}**



Decorências

Se **x₀** e **w₀** são soluções factíveis de PP e PD e $c \cdot x_0 = w_0 \cdot b$, então **x₀** e **w₀** são soluções ótimas.



Se um dos problemas tem solução **ilimitada**, o outro será **infactível**.



Se um dos problemas tem solução ótima finita, o outro também terá.

Extensão do TBD

Em relação ao par de problemas PP e PD, uma e somente uma das afirmações abaixo é verdadeira:

- 1) **Ambos têm solução ótima finita**
- 2) **Um deles tem solução ilimitada e o outro é infactível**
- 3) **Ambos são infactíveis**



Dualidade

EXERCÍCIOS

5-6

1

Primal

$$\min f = 3*x1 + 4*x2 + 9*x3$$

$$\text{s/a} \quad x1 + x3 \geq 5$$

$$3*x2 + x3 = 8$$

$$xi \geq 0$$

Dual

$$\max Q = 5*w1 + 8*w2$$

$$\text{s/a} \quad w1 \leq 3$$

$$3*w2 \leq 4$$

$$w1 + w2 \leq 9$$

$$w1 \geq 0 \quad w2 \text{ livre}$$

Escrever o dual

2

Primal

$$\max f = 3*x1 + 5*x2$$

$$\text{s/a} \quad x1 \leq 4$$

$$x2 \leq 6$$

$$3*x1 + 2*x2 \leq 18$$

$$x1 \geq 0 \quad x2 \text{ livre}$$

Dual

$$\min Q = 4*w1 + 6*w2 + 18*w3$$

$$\text{s/a} \quad w1 + 3*w3 \geq 3$$

$$w2 + 2*w3 = 5$$

$$wi \geq 0$$

3

Primal

$$\min f = 10*x1 + 11*x2$$

$$\text{s/a} \quad 10*x1 + 20*x2 \geq 50$$

$$50*x1 + 10*x2 \geq 100$$

$$xi \geq 0$$

Dual

$$\max Q = 50*w1 + 100*w2$$

$$\text{s/a} \quad 10*w1 + 50*w2 \leq 10$$

$$20*w1 + 10*w2 \leq 11$$

$$wi \geq 0$$

Capítulo 5





Dualidade

EXERCÍCIOS



5-7

Escrever o dual

4

Primal

$$\min f = x_1 - x_2 + x_3$$

$$\text{s/a} \quad x_1 \leq 9$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_i \geq 0$$

Dual

$$\min Q = 9 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2$$

$$\text{s/a} \quad w_1 + w_2 \geq -1$$

$$w_2 \geq 1$$

$$w_2 \geq -1$$

$$w_i \geq 0$$

5

Primal

$$\max f = 18 \cdot x_1 + 24 \cdot x_2 + 60 \cdot x_3$$

$$\text{s/a} \quad 24 \cdot x_1 + 32 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3 = 210$$

$$3 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2 + 80 \cdot x_3 \leq 48$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \text{ livre}$$

Dual

$$\min Q = 210 \cdot w_1 + 48 \cdot w_2$$

$$\text{s/a} \quad 24 \cdot w_1 + 3 \cdot w_2 \geq 18$$

$$32 \cdot w_1 + 17 \cdot w_2 \geq 24$$

$$40 \cdot w_1 + 80 \cdot w_2 = 60$$

$$w_1 \text{ livre} \quad w_2 \geq 0$$





Dualidade

EXERCÍCIOS



5-8

Estudar o PP e o PD



6

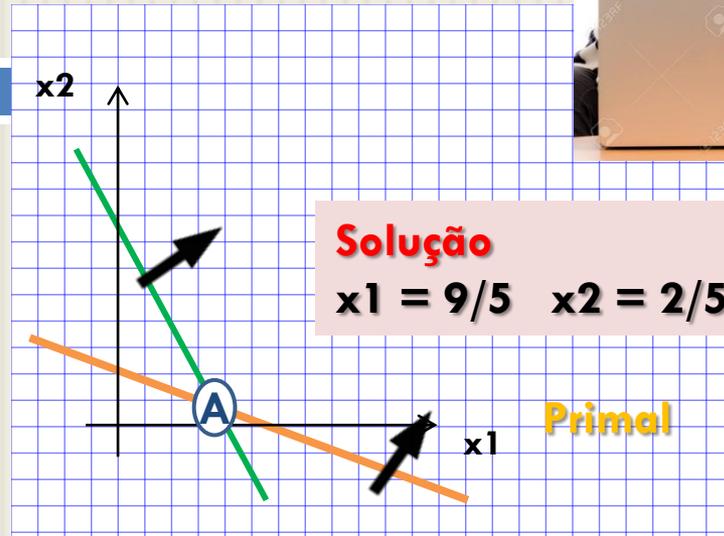
Primal

$$\min f = 16 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2$$

$$\text{s/a} \quad 2 \cdot x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 3$$

$$x_i \geq 0$$



Solução

$$x_1 = 9/5 \quad x_2 = 2/5 \quad f = 36$$



Ambos têm solução ótima finita

Estudar o primal e o dual

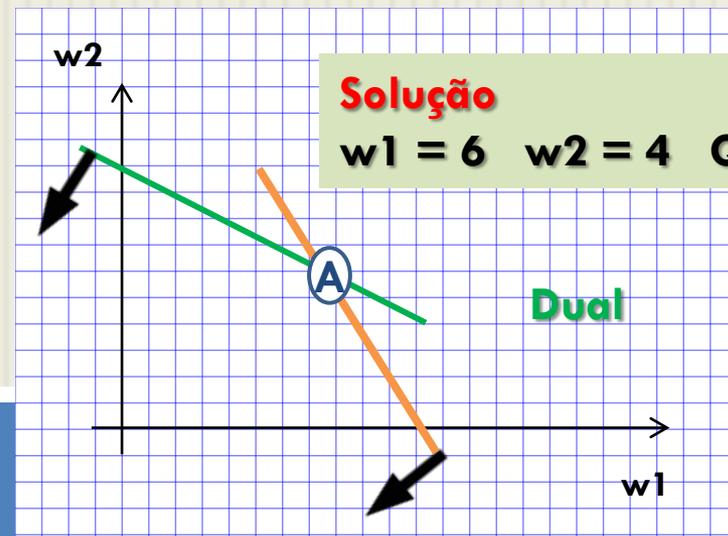
Dual

$$\max Q = 4 \cdot w_1 + 3 \cdot w_2$$

$$\text{s/a} \quad 2 \cdot w_1 + w_2 \leq 16$$

$$w_1 + 3 \cdot w_2 \leq 18$$

$$w_i \geq 0$$



Solução

$$w_1 = 6 \quad w_2 = 4 \quad Q = 36$$





Dualidade

EXERCÍCIOS



5-9

Estudar o PP e o PD



7

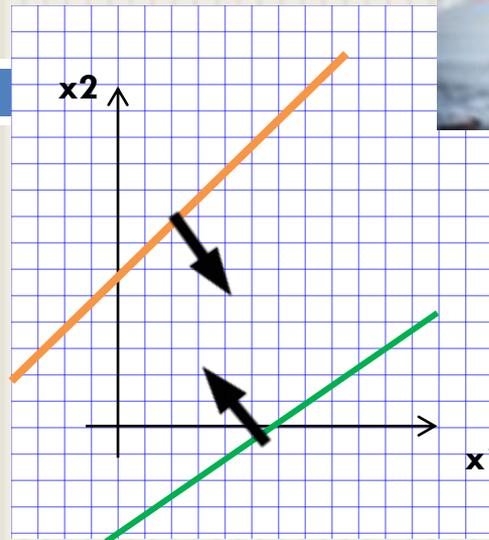
Primal

$$\min f = -3x_1 - 2x_2$$

$$\text{s/a } -x_1 + 2x_2 \geq -4$$

$$x_1 - x_2 \geq -3$$

$$x_i \geq 0$$



Primal

Solução

$f = -\infty$ (ilimitada)



Um deles tem solução ilimitada e o outro é infactível

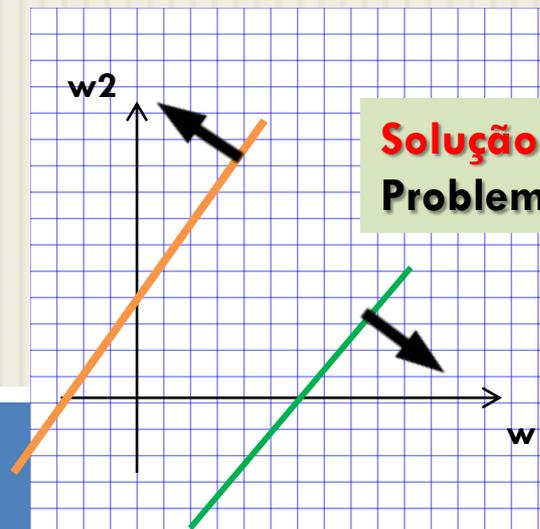
Dual

$$\max Q = -4w_1 - 3w_2$$

$$\text{s/a } -w_1 + w_2 \leq -3$$

$$2w_1 - w_2 \leq -2$$

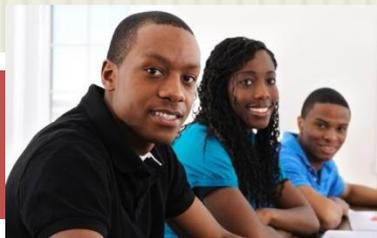
$$w_i \geq 0$$



Solução

Problema infactível

Dual





Dualidade

EXERCÍCIOS



5-10

Estudar o PP e o PD



8

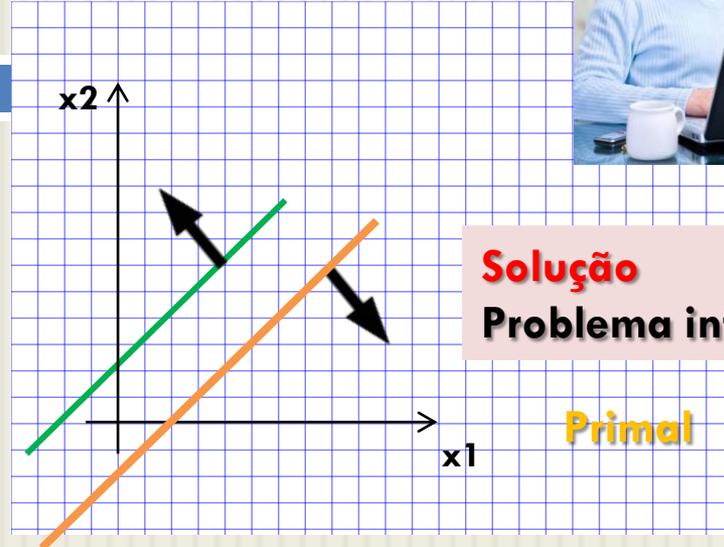
Primal

$$\min f = -x_1 - x_2$$

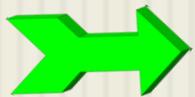
$$\text{s/a } x_1 - x_2 \geq 1$$

$$-x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_i \geq 0$$



Solução
Problema infactível



Ambos são infactíveis

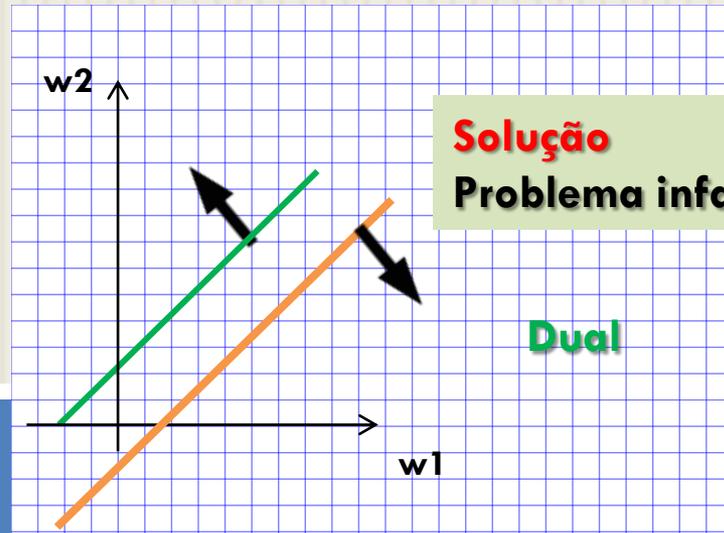
Dual

$$\max Q = w_1 + w_2$$

$$\text{s/a } w_1 - w_2 \leq -1$$

$$-w_1 + w_2 \leq -1$$

$$w_i \geq 0$$



Solução
Problema infactível



Dualidade 9

EXERCÍCIOS

Estudar o
PP e o PD

5-11

Primal

$$\max f = 5x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s/a} \quad & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$



Dual

$$\min Q = 3w_1 + 4w_2 + 9w_3$$

$$\begin{aligned} \text{s/a} \quad & w_1 + w_3 \geq 5 \\ & w_2 + 2w_3 \geq 2 \\ & w_i \geq 0 \end{aligned}$$

	x1 (-w4)	x2 (-w5)	x3 (-w1)	x4 (-w2)	x5 (-w3)	
	5	2	0	0	0	f
x3	1	0	1	0	0	3
x4	0	1	0	1	0	4
x5	1	2	0	0	1	9
	0	2	-5	0	0	f-15
x1	1	0	1	0	0	3
x4	0	1	0	1	0	4
x5	0	2	-1	0	1	6
	0	0	-4	0	-1	f-21
x1	1	0	1	0	0	3
x4	0	0	1/2	1	-1/2	1
x2	0	1	-1/2	0	1/2	3

Solução do Primal

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 & x_2 &= 3 & x_3 &= 0 \\ x_4 &= 1 & x_5 &= 0 & f &= 21 \end{aligned}$$

Solução do Dual

$$\begin{aligned} w_1 &= 4 & w_2 &= 0 & w_3 &= 1 \\ w_4 &= 0 & w_5 &= 0 & Q &= 21 \end{aligned}$$

