

# Circuitos de Corrente Alternada

O objetivo destas experiências consiste em estudar o comportamento de alguns circuitos simples contendo resistores, capacitores e indutores em regime estacionário de corrente alternada.

Os conceitos básicos sobre o comportamento desse tipo de circuito podem ser encontrados no capítulo 10 do livro Curso de Física Básica vol. 3 - Eletromagnetismo de H. M. Nussenzveig.

## 1 Descrição teórica de correntes e tensões alternadas

Uma tensão pode apresentar variações ao longo do tempo. Ao valor médio de uma tensão, podemos associar um sinal constante - uma tensão contínua. Sobre ela, teremos uma flutuação ao longo do tempo. Esta parte flutuante pode ser associada a uma tensão alternada quando o sinal tiver um período definido.

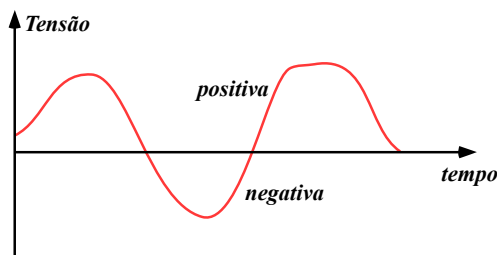


Figura 1. Representação de uma tensão dependente do tempo.

Um caso particular é o de uma tensão alternada harmônica. Ela é particularmente relevante pois qualquer tensão dependente do tempo pode ser escrita como uma superposição de tensões harmônicas.

### 1.1 Tensões harmônicas simples

Uma tensão alternada que varia harmonicamente no tempo (do tipo senoidal), pode ser descrita como:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi_V) \quad (1)$$

onde  $V_P$  é a tensão máxima ou tensão de pico ou, ainda, amplitude,  $\omega$  é a frequência angular e  $\phi_V$  é a fase da tensão alternada no instante  $t = 0$ . A frequência angular,  $\omega$ , é dada por:

$$\omega = 2\pi f \quad (2)$$

em que  $f$  é a frequência da oscilação, em hertz, e igual ao inverso do período,  $T$ .

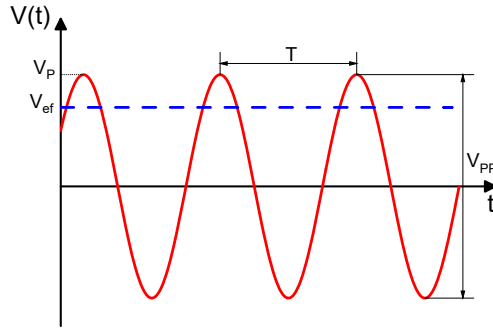


Figura 2. Tensão alternada senoidal em função do tempo.

Na figura acima,  $V_{PP}$ , é a tensão pico a pico que é o dobro da tensão de pico  $V_P$  e  $V_{ef}$  é a tensão eficaz que será definida mais adiante.

A corrente alternada pode ser representada da mesma forma:

$$i(t) = i_P \cos(\omega t + \phi_i) \quad (3)$$

onde  $i_P$  é a corrente máxima ou corrente de pico e  $\phi_i$  é a fase da corrente alternada no instante  $t = 0$ .

A corrente e a tensão podem não estar em fase em determinados elementos de circuito, apresentando uma defasagem  $\Delta\phi$ :

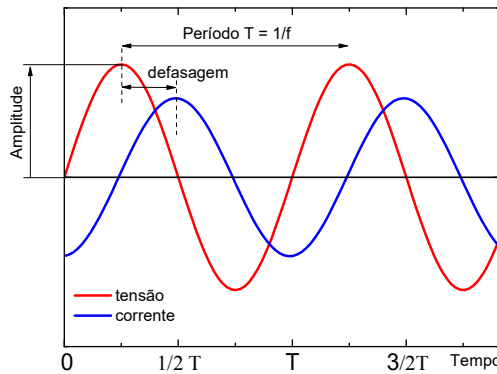


Figura 3. Defasagem entre tensão e corrente alternadas.

A tensão e a corrente são dadas pelas equações (1) e (3), respectivamente. A defasagem será dada por:

$$\Delta\phi = \phi_i - \phi_V = 2\pi \frac{\Delta T}{T} = \omega \Delta T \quad (4)$$

onde  $\Delta T$  é mostrado na figura como *defasagem*.

## 1.2 Tensão alternada: resistor ôhmico

Vamos estudar o caso de um circuito de uma malha que consiste de um gerador de tensão alternada (gerador de áudio), uma resistência ôhmica,  $R_1$ , conhecida, e um elemento desconhecido de circuito, que vamos chamar de elemento  $X$ .

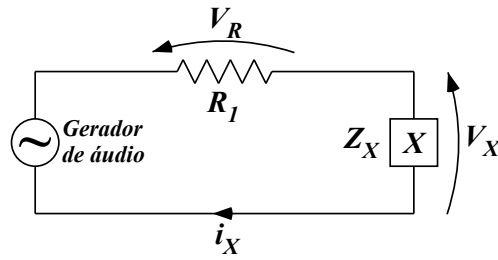


Figura 4. Circuito para estudo do elemento  $X$ .

Supondo que o elemento  $X$  seja um elemento resistivo ôhmico, de resistência  $R$ , a lei de Ohm, é válida para esse circuito.

$$V = R i \quad (R = \text{constante}) \quad (5)$$

sendo  $V$  e  $i$  a tensão e a corrente aplicadas ao elemento estudado, respectivamente.

Portanto, no caso de tensão alternada, vamos ter a lei de Ohm escrita como:

$$V(t) = R i(t) \quad (R = \text{constante}) \quad (6)$$

e considerando, por uma questão de simplicidade, a fase inicial na tensão  $\phi_V$  igual a zero temos:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t) = R i(t) \quad (7)$$

portanto, obrigatoriamente, temos que:

$$i(t) = i_P \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad R = \frac{V_P}{i_P} = \text{cte} \quad (8)$$

nesse caso, então, as fases iniciais da tensão e da corrente são obrigatoriamente iguais para que a lei de Ohm (equação (6)) seja válida. A resistência,  $R$ , é a razão entre a tensão aplicada ao resistor e a corrente que atravessa o resistor ôhmico estudado, em qualquer instante.

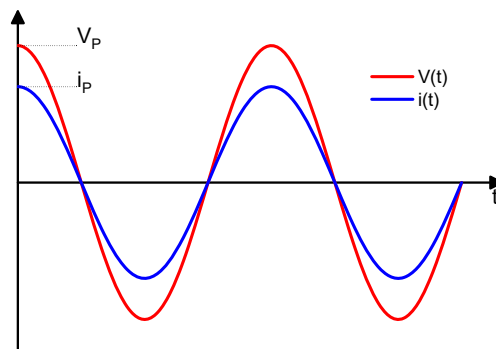


Figura 5. Tensão e corrente alternadas, em função do tempo, para o resistor ôhmico.

### 1.3 Tensão alternada: capacitor

Vamos ver agora o que ocorre no caso do elemento  $X$  ser um capacitor, submetido a uma tensão cossenoidal, do tipo:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t) = \frac{q(t)}{C} \quad (9)$$

onde  $q(t)$  é a carga do capacitor e  $C$  é uma constante de proporcionalidade chamada de capacitância. A carga pode ser escrita como a integral da corrente que passa pelo elemento,

$$q(t) = \int i(t) dt \quad (10)$$

Substituindo na equação (9) tem-se:

$$V(t) = \frac{\int i(t) dt}{C} \quad (11)$$

e usando a operação inversa

$$i(t) = C \frac{dV}{dt} \quad (12)$$

Usando  $V(t) = V_P \cos(\omega t)$  temos

$$i(t) = -C\omega V_P \text{sen}(\omega t) = C\omega V_P \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = i_P \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (13)$$

onde  $i_P = C\omega V_P$ .

A razão entre as amplitudes de pico, ou máximas (a amplitude de pico é usada por uma questão de conveniência), da tensão aplicada e da corrente que atravessa o capacitor é chamada de reatância capacitiva,  $X_C$

$$X_C = \frac{V_P}{i_P} = \frac{1}{\omega C} \quad (14)$$

Concluimos, então, que em um capacitor submetido a uma tensão alternada, a corrente está adiantada de  $\frac{\pi}{2}$  em relação à tensão aplicada ao capacitor (Atenção: a defasagem de  $\frac{\pi}{2}$  é entre a corrente e a tensão diretamente sobre o capacitor e não quaisquer outras).

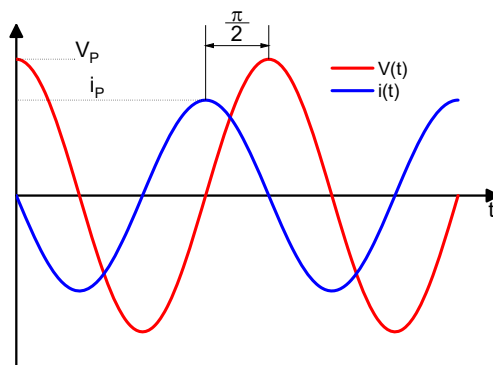


Figura 6. Tensão e corrente alternadas em função do tempo para o capacitor.

## 1.4 Tensão alternada: indutor

No caso do elemento de circuito,  $X$ , ser um indutor, de indutância  $L$ , submetido a uma tensão alternada cossenoidal, teremos:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t) = L \frac{di}{dt} \quad (15)$$

ou seja,

$$i(t) = \frac{1}{L} \int V(t) dt \quad (16)$$

Usando  $V(t) = V_P \cos(\omega t)$  temos

$$i(t) = \frac{V_P}{\omega L} \text{sen}(\omega t) = \frac{V_P}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = i_P \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (17)$$

onde  $i_P = \frac{V_P}{\omega L}$ .

A razão entre as amplitudes de pico, ou máximas, da tensão aplicada e da corrente que atravessa o indutor é chamada de reatância indutiva,  $X_L$

$$X_L = \frac{V_P}{i_P} = \omega L \quad (18)$$

Nota-se que, neste caso, a corrente está atrasada de  $\frac{\pi}{2}$  em relação à tensão aplicada ao indutor. Como no caso do capacitor, a defasagem tem esse valor somente quando comparamos a corrente e a tensão aplicadas ao indutor, sendo que a defasagem entre a corrente e quaisquer outras tensões existentes no circuito não tem necessariamente esse valor. De fato pode-se representar essa defasagem na corrente ou na tensão, contanto que ela seja do valor correto e com o sinal correto.

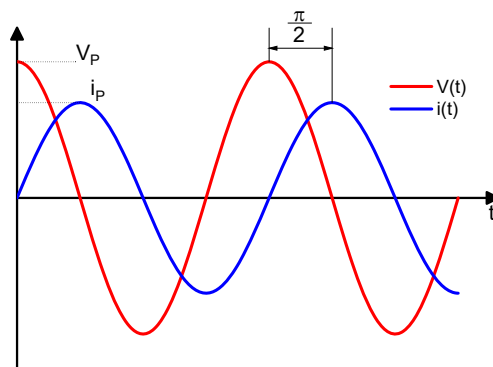


Figura 7. Tensão e corrente alternada, em função do tempo, para o indutor.

No caso de um resistor ôhmico não há defasagem entre tensão e corrente. Caso se tenha uma associação de dois resistores, por exemplo, em série, a tensão máxima ou de pico da associação é a soma das tensões máximas ou de pico de cada um

$$V_{P_{(R_1+R_2)}} = V_{P_{R_1}} + V_{P_{R_2}} \quad (19)$$

Esse resultado decorre da aplicação direta da lei de Ohm e das leis de Kirchhoff e torna fácil determinar, para qualquer associação de resistores ôhmicos, os parâmetros dessa associação.

Entretanto, quando há defasagem entre tensão e corrente em determinados elementos, circuitos que contenham uma associação mista desses elementos ou deles com resistores, não vão poder ter os parâmetros determinados de maneira tão simples quanto para o caso de circuitos puramente resistivos. Por exemplo, no caso de um indutor (ou capacitor) em série com resistores, ou indutor e capacitor em série, a tensão de pico da associação não é a soma das tensões de pico de cada elemento, porque elas não estão em fase. Para achar essa tensão, nós teríamos que somar as tensões de cada um, instante a instante. Isso torna extremamente trabalhoso determinar parâmetros de circuitos que não sejam puramente resistivos.

Porém, esse tratamento fica analiticamente muito mais simples quando se representam as oscilações de corrente e tensão por meio de quantidades complexas. Neste caso pode-se tratar circuitos indutivos e/ou capacitivos e resistivos como no caso de circuitos puramente resistivos. Esse formalismo matemático usado em corrente alternada aplica-se igualmente bem a qualquer tipo de oscilação, como por exemplo, na ótica física.

## 1.5 Impedância real e complexa

Relembrando um pouco de notação complexa. Qualquer número complexo pode ser escrito como:

$$\hat{c} = a + jb \quad \text{com } j = \sqrt{-1} \quad (20)$$

ou então:

$$\hat{c} = c e^{j\alpha} \quad \text{com } e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha) \quad (21)$$

Dessas duas relações podemos ver que:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \tan(\alpha) = \frac{b}{a} \quad (22)$$

Usando essa notação, continuamos o estudo do comportamento de um elemento passivo qualquer de circuito, em corrente alternada, através do circuito simples da figura 4 proposto na seção anterior, que possui em série um resistor, o elemento desconhecido  $X$  e um gerador de tensão alternada.

A caracterização completa do elemento  $X$ , em regime de corrente alternada estacionária, é obtida muito mais facilmente, quando se conhece a impedância complexa,  $\hat{Z}_X$ , desse elemento em função da frequência. Para definir essa grandeza precisamos introduzir a representação por números complexos de tensões e correntes alternadas.

Uma tensão alternada  $V(t)$

$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi_V) \quad (23)$$

pode ser representada pela parte real da quantidade complexa

$$\hat{V}(t) = V_P e^{j(\omega t + \phi_V)} \quad (24)$$

da mesma forma que uma corrente alternada  $i(t)$

$$i(t) = i_P \cos(\omega t + \phi_i) \quad (25)$$

pode ser escrita como a parte real de  $\hat{i}(t)$

$$\hat{i}(t) = i_P e^{j(\omega t + \phi_i)} \quad (26)$$

A impedância complexa do elemento  $X$  bipolar,  $\hat{Z}_X$ , é definida como a relação entre a tensão complexa e a corrente complexa que atravessa esse elemento

$$\hat{Z}_X = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)} = \frac{V_P e^{j(\omega t + \phi_V)}}{i_P e^{j(\omega t + \phi_i)}} = Z_0 e^{j\phi_0} \quad (27)$$

onde  $Z_0 = \frac{V_P}{i_P}$  é a impedância real do elemento  $X$  e  $\phi_0 = \phi_V - \phi_i$  a diferença de fase entre tensão e corrente nesse elemento, sendo que  $V_P$  e  $i_P$  são os valores máximos ou valores de pico da tensão e da corrente, respectivamente, no elemento.

Resumindo, se em um bipolo com impedância complexa  $\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi_0}$ , a corrente for  $i(t) = i_P \cos(\omega t)$ , a tensão nos terminais desse bipolo será

$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi_0) \quad \text{sendo } V_P = Z_0 i_P \quad (28)$$

ou seja, se a corrente é alternada, a tensão também é, mas com uma fase inicial diferindo da fase da corrente de um valor  $\phi_0$ , e, com amplitude de pico, ou máxima, igual a  $Z_0 i_P$  (lembrando que  $i_P$  é a amplitude de pico ou máxima da corrente).

Como  $\hat{Z}_X$  é um número complexo, pode-se escrevê-lo na forma:

$$\hat{Z}_X = Z_0 e^{j\phi_0} = R + jX = Z_0 \cos(\phi_0) + jZ_0 \sin(\phi_0) \quad (29)$$

onde  $R$  é a parte real da impedância ou parte resistiva

$$R = Z_0 \cos(\phi_0) \quad (30)$$

No circuito estudado (figura 4) quando o elemento  $X$  for um resistor ôhmico, teremos  $\phi_0 = 0$  e a impedância é a resistência  $R_X$ .

Na equação (29)  $X$  é a reatância que é a parte imaginária da impedância

$$X = Z_0 \sin(\phi_0) \quad (31)$$

Como já foi mencionado anteriormente, a grande vantagem da notação complexa é que a impedância complexa equivalente de um circuito qualquer pode ser obtida pelas mesmas regras simples das associações de resistores. A demonstração dessas fórmulas é baseada na definição de impedância complexa e nas leis de Kirchhoff e é análoga às demonstrações das associações de resistores ôhmicos.

### 1.5.1 Fasores

Existe um artifício que simplifica muito a soma de tensões (ou correntes) alternadas arbitrárias, e que, portanto, também simplifica as demonstrações acima, assim como as soluções de circuito de corrente alternada em geral. Ele se baseia no fato que, a soma de duas tensões alternadas arbitrárias como exemplificado na fórmula abaixo

$$V(t) = V_{P_1} \cos(\omega t + \phi_1) + V_{P_2} \cos(\omega t + \phi_2) \quad (32)$$

equivale a somar as componentes, no plano  $xy$ , de dois vetores de módulos  $V_{P_1}$  e  $V_{P_2}$ , girando com velocidade angular  $\omega$  e com ângulos iniciais, em relação ao eixo  $y$ ,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , respectivamente. Pode-se realizar a soma vetorial no instante  $t = 0$ , porque a partir desse instante o “vetor soma”, que é equivalente à tensão de pico da soma,  $V_0$ , também gira com a mesma velocidade angular. Esses vetores girantes são chamados de fasores. A figura a seguir é um exemplo de como esses vetores funcionam para encontrar a tensão soma da equação (32).

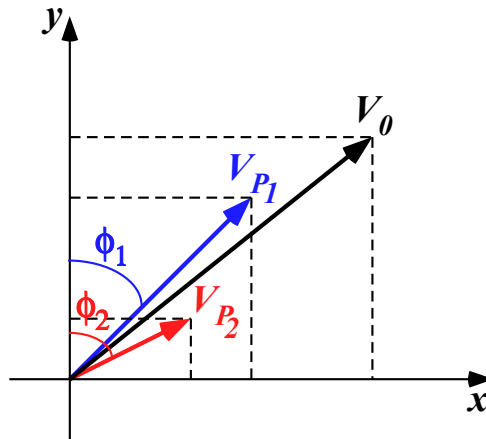


Figura 8. Diagrama de fasores para soma de tensões alternadas (equação 32).

Por esse diagrama fica evidente que devido à defasagem, a amplitude da tensão soma,  $V_0$ , não é igual à soma das amplitudes das componentes,  $V_{P_1}$  e  $V_{P_2}$  e sim

$$V_0^2 = V_{P_1}^2 + V_{P_2}^2 + 2V_{P_1}V_{P_2} \cos(\phi_2 - \phi_1) \quad (33)$$

O método também funciona para circuitos em série com elementos resistivos e não resistivos. Como a corrente é a mesma para todos os elementos, as tensões de pico em cada elemento são diretamente proporcionais às impedâncias reais desses elementos e as defasagens das tensões também são iguais às das impedâncias complexas (ver equação (29)). Então, a resistência,  $R$ , e as reatâncias indutivas e/ou capacitivas podem ser representadas por fasores como mostrado na figura 9 abaixo.



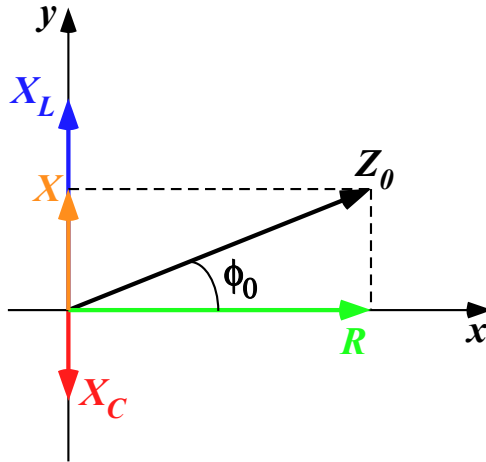


Figura 9. Diagrama de fasores representando impedâncias em série.

Da mesma forma, podemos ver que a impedância real  $Z_0$  é igual à dada por:

$$Z_0^2 = R^2 + X^2 \quad (34)$$

Representando por fasores as tensões em um circuito que contenha capacitores, indutores e resistores, em série, a fase inicial da tensão no capacitor (puro) em relação à tensão no resistor (que tem a mesma fase da corrente no resistor ou da corrente no circuito, caso este seja um circuito em série) será de  $(-\frac{\pi}{2})$ . Para o caso de indutor puro essa mesma fase (da tensão no indutor em relação à tensão no resistor) será de  $(+\frac{\pi}{2})$ .

## 1.6 Indutor real: bobina

Resistores, indutores e capacitores são modelos emergentes da natureza última do eletromagnetismo e da interação do campo com a matéria. Evidentemente, nenhum componente é ideal: elementos reativos podem dissipar potência, o que seria exclusivo de resistores. Resistores podem apresentar defasagens entre tensão e corrente, o que é intrínseco a elementos reativos.

Um indutor terá necessariamente uma resistência associada aos fios. O mesmo vale para capacitores, porém como seus condutores são mais curtos, este não é o efeito principal. Alguns capacitores são feitos por lâminas enroladas, o que adiciona uma indutância intrínseca. Ou resistores podem ter uma capacitância associada a seus terminais, e uma indutância associada aos condutores que o compõe.

Um indutor real, ou bobina, não pode ser considerado uma indutância pura, ele é equivalente a uma indutância pura mais uma resistência,  $R_B$  (figura 10). Nesse caso, podemos somar  $R_B$  à resistência  $R$  do circuito e encontrar a tensão utilizando fasores.

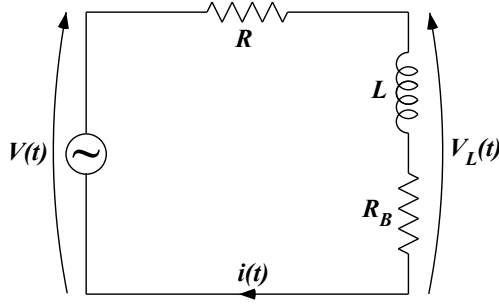


Figura 10. Circuito para o estudo de uma bobina com resistência interna  $R_B$ .

## 1.7 Potência transferida a um bipolo

A potência transferida de um circuito qualquer a uma impedância, também qualquer, a cada instante, é dada por:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) \quad (35)$$

Com  $V(t)$  e  $i(t)$  dados respectivamente por:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi_0) \quad \text{e} \quad i(t) = i_P \cos(\omega t) \quad (36)$$

pode-se, então, escrever a equação (35) como:

$$P(t) = V_P i_P \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi_0) \quad (37)$$

Escrevendo os dois cossenos como:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad \text{e} \quad \cos(\omega t + \phi_0) = \frac{1}{2} (e^{j(\omega t + \phi_0)} + e^{-j(\omega t + \phi_0)}) \quad (38)$$

e substituindo na equação (37) e reagrupando os termos obtém-se:

$$P(t) = \frac{V_P i_P}{4} (e^{j(2\omega t + \phi_0)} + e^{-j(2\omega t + \phi_0)} + e^{j\phi_0} + e^{-j\phi_0}) \quad (39)$$

que reescrita em termos de cossenos dá:

$$P(t) = \frac{V_P i_P}{2} \cos(2\omega t + \phi_0) + \frac{V_P i_P}{2} \cos(\phi_0) \quad (40)$$

Esse é o valor instantâneo da potência. Para encontrar o valor médio num período  $T$ , pela definição de valor médio em tempo, integra-se  $P(t)$  num período completo e divide-se por esse período

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_P i_P}{2} \cos(2\omega t + \phi_0) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_P i_P}{2} \cos(\phi_0) dt \quad (41)$$

a primeira integral é nula, mas a segunda não. Portanto, a potência média  $\langle P(t) \rangle$  num período é

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} V_P i_P \cos(\phi_0) \quad (42)$$

Chama-se de valor eficaz da tensão,  $V_{ef}$ , o valor  $\frac{V_P}{\sqrt{2}}$  e valor eficaz da corrente,  $i_{ef}$ , o valor  $\frac{i_P}{\sqrt{2}}$ . Utilizando essa notação a potência média fica

$$\langle P(t) \rangle = V_{ef} i_{ef} \cos(\phi_0) \quad (43)$$

O fator  $\cos(\phi_0)$  é chamado de fator de potência da impedância e suas implicações para o funcionamento dos elementos de circuito estudados nestes experimentos serão discutidas a seguir.

Para a medida de tensões e correntes alternadas utilizando voltímetros ou amperímetros analógicos ou digitais os valores obtidos são os valores eficazes tanto da tensão quanto da corrente.

### 1.7.1 Resistor: potência dissipada

Como já foi visto, no caso do resistor ôhmico a defasagem entre tensão e corrente é nula e a impedância é real

$$Z_0 = \frac{V_P}{i_P} \quad (44)$$

Em geral, resistores comuns tem comportamento ôhmico até um determinado valor de potência que é fornecido pelo fabricante. Para garantir o comportamento ôhmico e não chegar a danificar o componente esses valores devem ser respeitados. Além disso, deve-se ter sempre em mente, que componentes reais não se comportam exatamente de acordo com as definições, o que nesse caso quer dizer que resistores reais podem, também, não ter um comportamento resistivo puro mas, dependendo das condições e características de construção do resistor, apresentar capacitâncias e/ou indutâncias parasitas.

A potência média dissipada em um resistor sob corrente alternada será

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} V_P i_P = V_{ef} i_{ef} \quad (45)$$

porque a defasagem entre tensão e corrente, num resistor, é igual a zero ( $\phi_0 = 0$ ), ou seja, o fator de potência,  $\cos(\phi_0)$ , é igual a um.

Vamos reproduzir na figura abaixo a figura 5 para a tensão e corrente alternadas em um resistor e incluir nesse gráfico o comportamento da potência instantânea e da potência média para esse elemento.

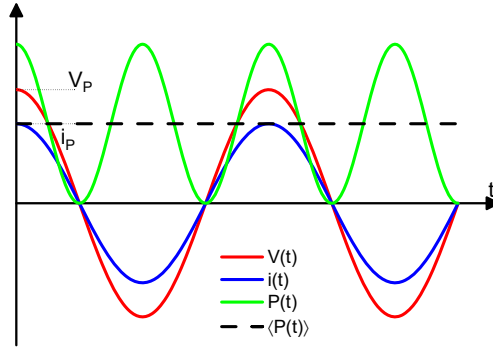


Figura 11. Comportamento da potência instantânea e da potência média dissipada em um resistor.

### 1.7.2 Capacitor: potência

Colocando agora um capacitor ideal no lugar do elemento  $X$  do circuito da figura 4.

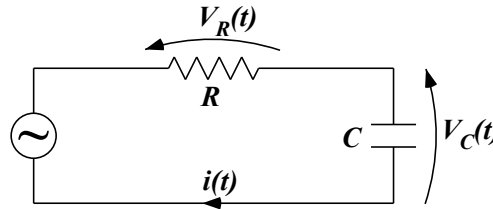


Figura 12. Circuito para o estudo do comportamento de um capacitor.

Lembrem-se que no circuito da figura acima ainda devemos considerar a resistência interna do gerador,  $R_G$ . Geradores reais dissipam parte da força eletromotriz que geram em seu próprio circuito. No gerador de áudio que está colocado à disposição no laboratório, existem duas saídas, uma no painel frontal e outra no painel traseiro, que são idênticas a menos do valor de  $R_G$ . Ou seja, na saída da frente a resistência interna do gerador (que estará em série no circuito) é da ordem de  $50 \Omega$ , enquanto que na saída traseira essa resistência é de alguns ohms apenas (da ordem de  $5 \Omega$ ).

A tensão medida sobre o capacitor será:

$$V_C(t) = V_P \cos(\omega t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (46)$$

Utilizando a notação complexa podemos escrever a corrente que passa no circuito como sendo a parte real de

$$\hat{i}(t) = i_P e^{j(\omega t)} \quad (47)$$

E assim a tensão sobre o capacitor será, também, a parte real de

$$\hat{V}_C(t) = \frac{1}{C} \int \hat{i}(t) dt = \frac{1}{j\omega C} i_P e^{j(\omega t)} \quad (48)$$

Podemos escrever  $\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ , e a tensão sobre o capacitor será

$$\hat{V}_C(t) = \frac{i_P}{\omega C} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \quad (49)$$

Como a relação entre  $\hat{V}_C(t)$  e  $\hat{i}(t)$  é a impedância complexa  $\hat{Z}_C$ , (o índice  $C$  denota o capacitor)

$$\hat{Z}_C = \frac{\hat{V}_C(t)}{\hat{i}(t)} = Z_C e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (50)$$

onde a impedância real de um capacitor ou sua reatância capacitiva real  $X_C$  é

$$Z_C = X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (51)$$

e a defasagem entre a tensão no capacitor e a corrente que o atravessa é

$$\phi_C = -\frac{\pi}{2} \quad (52)$$

o que significa que a tensão está atrasada de  $\frac{\pi}{2}$  em relação à corrente, que é o que se vê na figura 6.

Em relação à potência, para o caso de um capacitor ideal submetido à corrente alternada, a potência instantânea é

$$P(t) = \frac{V_P i_P}{2} \cos(2\omega t + \phi_0) + \frac{V_P i_P}{2} \cos(\phi_0) \quad (53)$$

Calculando a potência média, como a integral do primeiro termo dessa equação, sobre um período, é igual a zero (como já foi visto) e  $\phi_0 = \phi_C = -\frac{\pi}{2}$  para um capacitor ideal, conclui-se que a potência média dissipada por esse capacitor é nula. O gráfico a seguir mostra a tensão, a corrente e a potência instantânea sobre um capacitor ideal.

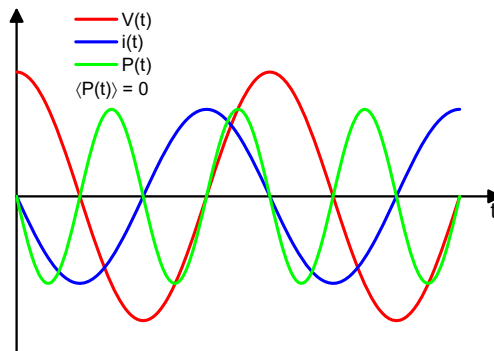


Figura 13. Comportamento da potência instantânea e da potência média para o caso de um capacitor ideal.

### 1.7.3 Indutor: potência

Colocando agora um indutor ideal no lugar do elemento  $X$  do circuito da figura 4.

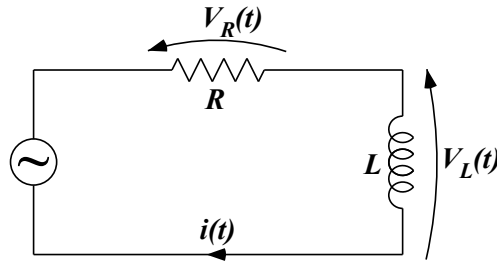


Figura 14. Circuito para o estudo do comportamento de um indutor.

A tensão medida sobre o indutor,  $V_L(t)$ , será:

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (54)$$

Novamente utilizando a notação complexa podemos escrever a corrente que passa no circuito como sendo a parte real de

$$\hat{i}(t) = i_P e^{j(\omega t)} \quad (55)$$

E assim a tensão sobre o indutor será, também, a parte real de

$$\hat{V}_L(t) = L \frac{d\hat{i}(t)}{dt} = j\omega L i_P e^{j(\omega t)} \quad (56)$$

Podemos escrever  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ , e a tensão sobre o indutor será:

$$\hat{V}_L(t) = \omega L i_P e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} \quad (57)$$

Como sabemos que a impedância complexa é a razão entre a tensão complexa e a corrente complexa no indutor ideal em estudo, concluímos que

$$\hat{Z}_L = \frac{\hat{V}_L(t)}{\hat{i}(t)} = Z_L e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (58)$$

onde a impedância real de um indutor ou sua reatância indutiva real  $X_L$  é

$$Z_L = X_L = \omega L \quad (59)$$

e a defasagem entre a tensão no indutor e a corrente que o atravessa é

$$\phi_L = \frac{\pi}{2} \quad (60)$$

portanto, a tensão no indutor,  $V_L(t)$ , está adiantada de  $\frac{\pi}{2}$  em relação à corrente. Isso pode ser visto na figura 7.

A potência instantânea dissipada no indutor ideal, como já calculado, é igual a

$$P(t) = \frac{V_P i_P}{2} \cos(2\omega t + \phi_0) + \frac{V_P i_P}{2} \cos(\phi_0) \quad (61)$$

Calculando novamente a potência média, como a integral do primeiro termo dessa equação, sobre um período, é igual a zero (como já foi visto) e  $\phi_0 = \phi_L = \frac{\pi}{2}$  para um indutor ideal, conclui-se que a potência média dissipada por esse indutor também é nula. O gráfico a seguir mostra a tensão, a corrente e a potência instantânea sobre um indutor ideal.

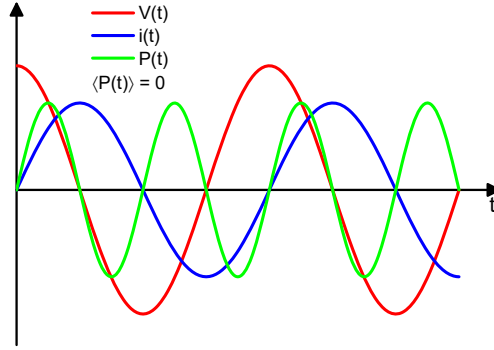


Figura 15. Tensão, corrente e potência dissipada em um indutor ideal.

Porém, raramente, o modelo de um indutor ideal pode ser usado para bobinas, pois como elas são fios condutores muito longos enrolados, sua resistência elétrica é, em geral, significativa e não pode ser desprezada.

Para as condições do laboratório, ou seja, a bobina, circuito e intervalo de frequência disponíveis, não é possível adotar o modelo de indutor ideal. Pelo menos a resistência da bobina deve ser levada em conta. Isso significa que o modelo adotado para a bobina, não é mais o de uma indutância pura, mas de uma indutância pura ligada, em série, a uma resistência ôhmica. Portanto, o circuito experimental não é o da figura 14, mas sim o da figura 10.

Para um circuito, em série, de uma resistência e de uma indutância pura, a impedância complexa equivalente é a soma das impedâncias complexas de cada elemento. A impedância resistiva da bobina é  $R_B$  e a impedância complexa do indutor puro é  $\hat{X}_L$

$$\hat{X}_L = j\omega L \quad (62)$$

Portanto a impedância complexa da associação é

$$\hat{Z} = R_B + j\omega L = Z e^{j(\phi_Z)} \quad (63)$$

A impedância real é o módulo de  $\hat{Z}$

$$Z = \sqrt{\hat{Z}\hat{Z}^*} = \sqrt{R_B^2 + \omega^2 L^2} \quad (64)$$

e a defasagem entre a tensão da associação em série  $R_B + L$  e a corrente que a percorre, pode ser escrita a partir da equação (22) como sendo

$$\tan(\phi_Z) = \frac{\omega L}{R_B} \quad (65)$$

ou

$$\phi_Z = \arctan\left(\frac{\omega L}{R_B}\right) \quad (66)$$

Nota-se que a essa defasagem não é mais  $\frac{\pi}{2}$ , mas um outro ângulo que depende da frequência  $\omega$ , da indutância  $L$  e da resistência do indutor  $R_B$ .

A potência média dissipada pela bobina será

$$\langle P(t) \rangle = V_P i_P \cos(\phi_Z) \quad (67)$$

onde  $\phi_Z$  é dado pela equação (66). Portanto, a potência média não é mais nula como no caso do indutor puro.

## 2 Filtros

Em muitos circuitos, ou sistemas eletrônicos, são usados componentes que possuem quatro terminais para ligações elétricas, duas de entrada e duas de saída e esses elementos são chamados de quadripolos elétricos.

Para o estudo proposto de alguns quadripolos passivos, são necessárias certas definições. Além disso, para tornar a caracterização desse elemento, submetido a tensões alternadas, mais simples é preciso usar a notação complexa.

A figura 16 abaixo representa um quadripolo qualquer. Os parâmetros importantes são as tensões e as correntes complexas de entrada e saída e as impedâncias complexas de entrada e saída.

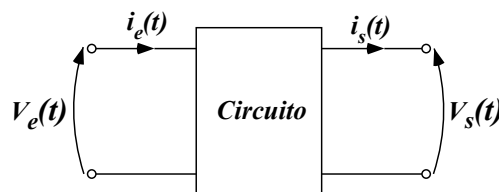


Figura 16. Modelo simples para um quadripolo elétrico.

A impedância complexa de entrada é definida como a razão entre a tensão complexa de entrada e a corrente complexa de entrada

$$\hat{Z}_e = \frac{\hat{V}_e(t)}{\hat{i}_e(t)} \quad (68)$$



Para todos os efeitos, do ponto de vista de saída, o quadripolo mais simples pode ser representado como uma impedância complexa (de saída)  $\hat{Z}_s$ , definida como

$$\hat{Z}_s = \frac{\hat{V}_s(t)}{\hat{i}_s(t)} \quad (69)$$

Outra relação importante e que descreve essencialmente o comportamento de um quadripolo é a relação entre a tensão complexa de entrada e a tensão complexa de saída, que é chamada de ganho complexo do quadripolo

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_s(t)}{\hat{V}_e(t)} \quad (70)$$

Considerando que as tensões complexas de entrada e saída podem ser escritas como

$$\hat{V}_e(t) = V_{P_e} e^{j(\omega t)} \quad \text{e} \quad \hat{V}_s(t) = V_{P_s} e^{j(\omega t + \phi)} \quad (71)$$

podemos, então, escrever o ganho complexo desse quadripolo nesses termos

$$\hat{G} = G_0 e^{j\phi} \quad \text{onde} \quad G_0 = \frac{V_{P_s}}{V_{P_e}} \quad (72)$$

lembrando que:  $V_{P_s}$  e  $V_{P_e}$  são as tensões de pico, ou máximas, de saída e de entrada, respectivamente. Portanto,  $G_0$ , que é o módulo do ganho complexo, é o ganho real do quadripolo ou simplesmente ganho do quadripolo e  $\phi$  é a defasagem entre a tensão de saída e a tensão de entrada.

## 2.1 RC - passa-baixa

Tendo em mente essas definições vamos analisar o circuito  $RC$  da figura 17, a seguir

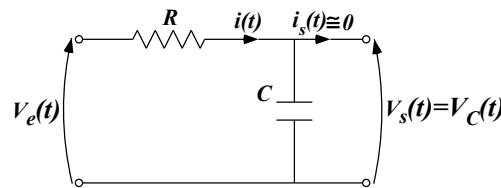


Figura 17. Modelo de um filtro  $RC$  passa-baixa.

Para facilitar a análise, sem que haja alterações nas características de operação do circuito de interesse, vamos supor que a impedância,  $\hat{Z}_{ext}$ , do circuito externo que vai ser ligado à saída desse quadripolo  $RC$  seja muito maior que a impedância de saída do próprio quadripolo,  $\hat{Z}_s$ , ou seja

$$\hat{Z}_s \ll \hat{Z}_{ext} \quad (73)$$

Nesse caso, a corrente de saída pode ser considerada desprezível, se comparada à corrente de entrada. Assim, a corrente que passa pelo capacitor é praticamente igual à corrente que passa pelo resistor.

A tensão de saída complexa desse circuito  $RC$  é a tensão sobre o capacitor,  $\hat{V}_C$ , portanto

$$\hat{V}_C(t) = \hat{Z}_C \hat{i}(t) \quad (74)$$

onde  $\hat{Z}_C$  é a impedância complexa do capacitor e  $\hat{i}(t)$  a corrente complexa que o atravessa.

Por outro lado, a tensão complexa de entrada do quadripolo  $RC$  é o produto da sua impedância complexa de entrada pela corrente complexa que percorre o circuito,  $\hat{i}(t)$

$$\hat{V}_e(t) = \hat{Z}_e \hat{i}(t) \quad (75)$$

a impedância complexa de entrada,  $\hat{Z}_e$ , é a soma das impedâncias complexas do resistor (que só possui parte real) e do capacitor, ou

$$\hat{Z}_e = \hat{Z}_R + \hat{Z}_C = R + \frac{1}{j\omega C} \quad (76)$$

O ganho complexo desse circuito,  $\hat{G}$ , definido como a razão das tensões complexas de saída e entrada, pode ser escrito como:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_C(t)}{\hat{V}_e(t)} = \frac{\hat{Z}_C \hat{i}(t)}{\hat{Z}_e \hat{i}(t)} = \frac{\hat{Z}_C}{\hat{Z}_e} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)} \quad (77)$$

dividindo o numerador e o denominador por  $\frac{1}{j\omega C}$  temos:

$$\hat{G} = \frac{1}{(1 + j\omega RC)} \quad (78)$$

$\frac{1}{RC}$  tem dimensão de frequência angular e será definido como  $\omega_c$ .

Em termos dessas grandezas o ganho complexo fica

$$\hat{G} = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)} \quad (79)$$

O ganho real é o módulo do ganho complexo acima

$$G_0 = \sqrt{\hat{G}\hat{G}^*} = \sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)}} \quad (80)$$

e, pela equação (22), a defasagem entre a tensão de saída e a tensão de entrada,  $\phi$ , é

$$\tan(\phi) = \frac{Im\{\hat{G}\}}{Re\{\hat{G}\}} = -\omega RC = -\frac{\omega}{\omega_c} \quad (81)$$

Portanto, o ganho real do quadripolo  $RC$  depende da frequência da tensão alternada a que ele está submetido. No caso em que essa frequência é baixa de tal maneira que  $\omega \ll \omega_c$ , o termo  $\left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)$  na equação (80), fica muito pequeno se comparado à unidade e, como

consequência, o ganho é praticamente igual a um. O que quer dizer que a tensão de saída é praticamente igual à tensão de entrada. Se a frequência for alta, ou seja,  $\omega \gg \omega_c$ , o termo  $(\frac{\omega^2}{\omega_c^2})$  é tão grande, que o algarismo 1, no denominador da fórmula (80), pode ser desprezado e o ganho é praticamente igual à  $\frac{\omega_c}{\omega}$ . Esse número, porém, é muito pequeno o que significa que para frequências altas a tensão de saída é muito menor que a tensão de entrada.

A conclusão dessa análise é que esse circuito atenua muito a tensão de saída para frequências altas e permite uma tensão de saída praticamente igual à tensão de entrada para frequências baixas. Esse é o funcionamento básico de um filtro de frequências, em particular de um filtro passa-baixas. Neste contexto é importante notar que as frequências são consideradas altas ou baixas em relação ao valor de  $\omega_c$ . Se a frequência da tensão de entrada for igual a esse valor,  $\omega = \omega_c$ , o ganho fica igual a  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Ou seja, a tensão de saída é igual à tensão de entrada dividida por  $\sqrt{2}$  e essa frequência, como é igual ao inverso do produto  $RC$ , é característica do filtro e o identifica. Convencionou-se, então, chamar  $\omega_c$  de frequência de corte.

Pode-se também usar a definição do ganho em decibels, que é a definição mais utilizada em engenharia

$$G_0(dB) = 20 \log(G_0) = -10 \log \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right) \quad (82)$$

quando  $\omega = \omega_c$ ,  $G(dB) = -3,010 \dots$  e, por isso, a frequência  $f_0 = \frac{\omega_c}{2\pi}$  também é chamada de “frequência -3 dB”.

Chama-se de curva de resposta do filtro ao gráfico do ganho em função da frequência angular.

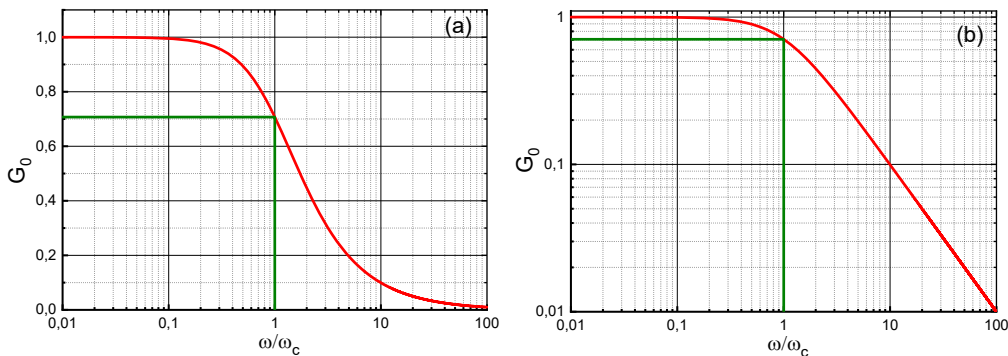


Figura 18. Curvas de ganho (linha vermelha) de um filtro  $RC$  passa-baixa em função de  $\frac{\omega}{\omega_c}$ . A linha verde indica a frequência de corte, onde  $\omega = \omega_c$  e  $G_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . (a) escala monolog e (b) escala dilog.

A defasagem  $\phi$  para um filtro  $RC$  passa-baixa em função de  $\frac{\omega}{\omega_c}$  é mostrada na figura 19. Para baixas frequências tal que  $\omega \ll \omega_c$ , o termo  $(\frac{\omega}{\omega_c})$  na equação (81), é muito pequeno (aproximadamente nulo), de forma que  $\tan(\phi) \approx 0$  e como consequência,  $\phi \approx 0$ , e a tensão de saída está praticamente em fase com a tensão de entrada. Se a frequência for alta, ou

seja,  $\omega \gg \omega_c$ , o termo  $(\frac{\omega}{\omega_c})$  é muito grande, de forma que  $\tan(\phi) \rightarrow -\infty$  e assim,  $\phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ . Isso significa que para frequências altas a tensão de saída está defasada de  $-\frac{\pi}{2}$  em relação à tensão de entrada. Para  $\omega = \omega_c$  a defasagem entre a tensão de saída e a de entrada é igual a  $-\frac{\pi}{4}$ .

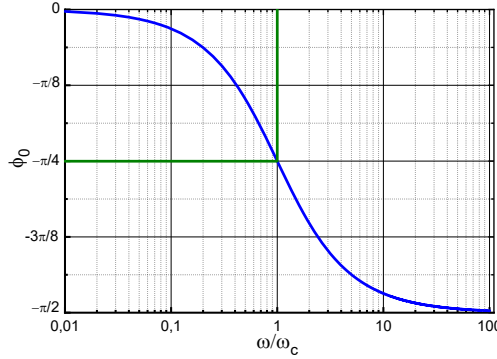


Figura 19. Diferença de fase (linha azul) entre a tensão de saída e a de entrada de um filtro  $RC$  passa-baixa em função de  $\frac{\omega}{\omega_c}$  (escala logarítmica). A linha verde indica a frequência de corte, onde  $\omega = \omega_c$  e  $\phi = -\frac{\pi}{4}$ .

## 2.2 RC - passa-alta

Vamos agora analisar o mesmo circuito  $RC$ , mas tomando a tensão de saída sobre o resistor, como mostrado na figura 20 a seguir.

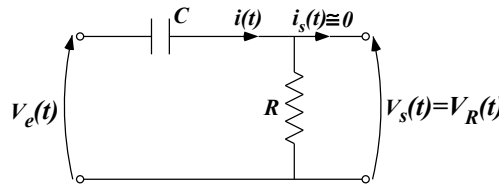


Figura 20. Modelo de um filtro  $RC$  passa-alta.

Para novamente facilitar a análise, sem que haja alterações nas características de operação do circuito de interesse, vamos supor que a impedância,  $\hat{Z}_{ext}$ , do circuito externo que vai ser ligado à saída desse quadripolo  $RC$  seja muito maior que a impedância de saída do próprio quadripolo,  $\hat{Z}_s$ , ou seja

$$\hat{Z}_s \ll \hat{Z}_{ext} \quad (83)$$

Nesse caso, a corrente de saída pode ser considerada desprezível, se comparada à corrente de entrada. Assim, a corrente que passa pelo resistor é praticamente igual à corrente que passa pelo capacitor.

A tensão de saída complexa desse circuito  $RC$  é a tensão sobre o resistor,  $\hat{V}_R$ , portanto

$$\hat{V}_R(t) = \hat{Z}_R \hat{i}(t) \quad (84)$$

onde  $\hat{Z}_R$  é a impedância (nesse caso real) do resistor e  $\hat{i}(t)$  a corrente complexa que o atravessa.

Por outro lado, a tensão complexa de entrada do quadripolo  $RC$  é o produto da sua impedância complexa de entrada pela corrente complexa que percorre o circuito,  $\hat{i}(t)$

$$\hat{V}_e(t) = \hat{Z}_e \hat{i}(t) \quad (85)$$

a impedância complexa de entrada,  $\hat{Z}_e$ , é a soma das impedâncias complexas do resistor (que só possui parte real) e do capacitor, ou

$$\hat{Z}_e = \hat{Z}_R + \hat{Z}_C = R + \frac{1}{j\omega C} \quad (86)$$

O ganho complexo desse circuito,  $\hat{G}$ , definido como a razão das tensões complexas de saída e entrada, pode ser escrito como:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_R(t)}{\hat{V}_e(t)} = \frac{\hat{Z}_R \hat{i}(t)}{\hat{Z}_e \hat{i}(t)} = \frac{\hat{Z}_R}{\hat{Z}_e} = \frac{R}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)} \quad (87)$$

dividindo o numerador e o denominador por  $R$  temos:

$$\hat{G} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{j\omega RC}\right)} \quad (88)$$

vamos usar novamente que  $\frac{1}{RC} = \omega_c$ .

Em termos dessas grandezas o ganho complexo fica

$$\hat{G} = \frac{1}{(1 - j\frac{\omega_c}{\omega})} \quad (89)$$

O ganho real é o módulo do ganho complexo acima

$$G_0 = \sqrt{\hat{G}\hat{G}^*} = \sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)}} \quad (90)$$

e, pela equação (22), a defasagem entre a tensão de saída e a tensão de entrada,  $\phi$ , é

$$\tan(\phi) = \frac{Im\{\hat{G}\}}{Re\{\hat{G}\}} = \frac{1}{\omega RC} = \frac{\omega_c}{\omega} \quad (91)$$

Portanto, o ganho real do quadripolo  $RC$  depende da frequência da tensão alternada a que ele está submetido. No caso em que essa frequência é baixa de tal maneira que  $\omega \ll \omega_c$ , o termo  $\left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)$  na equação (90), é tão grande, que o algarismo 1, no denominador da fórmula pode ser desprezado e o ganho é praticamente igual à  $\frac{\omega}{\omega_c}$ . Esse número, porém, é muito pequeno o que significa que para frequências baixas a tensão de saída é muito menor que a

tensão de entrada. Se a frequência for alta, ou seja,  $\omega \gg \omega_c$ , o termo  $(\frac{\omega_c}{\omega})^2$  na equação (90), fica muito pequeno se comparado à unidade e, como consequência, o ganho é praticamente igual a um. O que quer dizer que a tensão de saída é praticamente igual à tensão de entrada.

A conclusão dessa análise é que esse circuito atenua muito a tensão de saída para frequências baixas e permite uma tensão de saída praticamente igual à tensão de entrada para frequências altas. Esse é o funcionamento básico de um filtro de frequências, em particular de um filtro passa-altas. Neste contexto é importante notar que as frequências são consideradas altas ou baixas em relação ao valor de  $\omega_c$ . Se a frequência da tensão de entrada for igual a esse valor,  $\omega = \omega_c$ , o ganho fica igual a  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Ou seja, a tensão de saída é igual à tensão de entrada dividida por  $\sqrt{2}$ . A curva de resposta do filtro  $RC$  passa-alta é mostrada na figura abaixo.

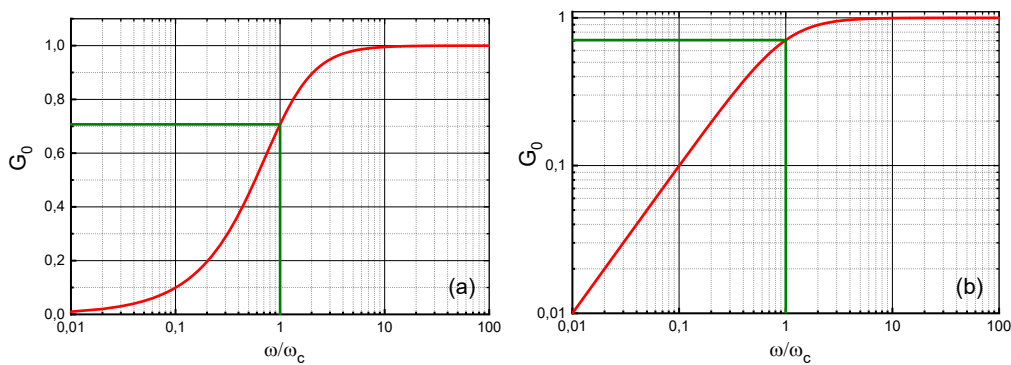


Figura 21. Curvas de ganho (linha vermelha) de um filtro  $RC$  passa-alta em função de  $\frac{\omega}{\omega_c}$ . A linha verde indica a frequência de corte, onde  $\omega = \omega_c$  e  $G_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . (a) escala monolog e (b) escala dilog.

A defasagem  $\phi$  para um filtro  $RC$  passa-alta em função de  $\frac{\omega}{\omega_c}$  é mostrada na figura 22. Para baixas frequências tal que  $\omega \ll \omega_c$ , o termo  $(\frac{\omega_c}{\omega})$  na equação (91), é muito grande, de forma que  $\tan(\phi) \rightarrow \infty$  e assim,  $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Isso significa que para frequências baixas a tensão de saída está defasada de  $\frac{\pi}{2}$  em relação à tensão de entrada. Se a frequência for alta, ou seja,  $\omega \gg \omega_c$ , o termo  $(\frac{\omega_c}{\omega})$  é muito pequeno (aproximadamente nulo), de forma que  $\tan(\phi) \approx 0$  e como consequência,  $\phi \approx 0$ , e a tensão de saída está praticamente em fase com a tensão de entrada. Para  $\omega = \omega_c$  a defasagem entre a tensão de saída e a de entrada é igual a  $\frac{\pi}{4}$ .

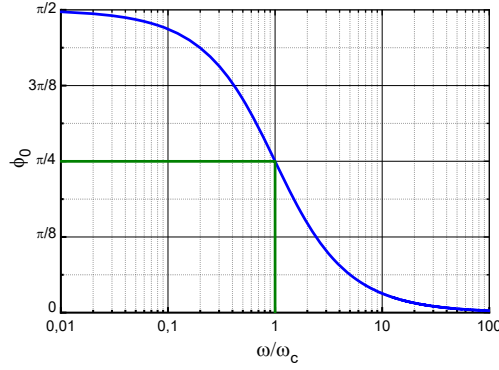


Figura 22. Diferença de fase (linha azul) entre a tensão de saída e a de entrada de um filtro  $RC$  passa-alta em função de  $\frac{\omega}{\omega_c}$  (escala logarítmica). A linha verde indica a frequência de corte, onde  $\omega = \omega_c$  e  $\phi = \frac{\pi}{4}$ .

### 2.3 Circuito Integrador RC

Um circuito integrador realiza a integração de uma tensão variável no tempo,  $V(t)$ , em relação ao tempo  $t$ . O circuito integrador passivo mais utilizado é o circuito  $RC$  da figura 17.

O circuito é alimentado com uma tensão alternada na entrada. A impedância externa (ou de carga), que vai ser colocada na saída desse quadripolo, deve ser muito maior que a impedância de saída do mesmo, para garantir que a corrente de saída seja desprezível face à corrente de entrada,  $i(t)$ . O cálculo a seguir só é válido se essa hipótese for satisfeita. Utilizando a notação complexa podemos calcular o ganho complexo exatamente como foi feito para o filtro  $RC$  passa-baixa

$$\hat{G} = \frac{1}{(1 + j\omega RC)} \quad (92)$$

Mas, por definição, o ganho complexo é a razão entre a tensão complexa de saída e a tensão complexa de entrada

$$\hat{V}_s(t) = \hat{G} \hat{V}_e(t) = \frac{1}{(1 + j\omega RC)} \hat{V}_e(t) \quad (93)$$

Para o caso de frequências altas se comparadas à frequência de corte  $\omega_c = \frac{1}{RC}$ , ou seja,  $\omega \gg \frac{1}{RC}$ , ou ainda  $\omega RC \gg 1$ , podemos aproximar  $\hat{V}_s(t)$  na equação (93) para

$$\hat{V}_s(t) = \left( \frac{1}{j\omega RC} \right) \hat{V}_e(t) \quad (94)$$

Escrevendo a tensão complexa de entrada como

$$\hat{V}_e(t) = V_{Pe} e^{j(\omega t)} \quad (95)$$

temos

$$\int \hat{V}_e(t) dt = \frac{1}{j\omega} V_{P_e} e^{j(\omega t)} = \frac{1}{j\omega} \hat{V}_e(t) \quad (96)$$

ou seja, o termo  $\left(\frac{1}{j\omega RC}\right) \hat{V}_e(t)$  na equação (94) é, de fato, a integral da tensão complexa de entrada dividida por  $RC$

$$\hat{V}_s(t) = \left(\frac{1}{RC}\right) \int \hat{V}_e(t) dt \quad \text{para} \quad \omega \gg \frac{1}{RC} \quad (97)$$

Em um caso mais geral, em que a tensão de entrada não é necessariamente harmônica, mas em que a condição  $\omega \gg \frac{1}{RC}$  é satisfeita, mas além disso  $R \gg X_C$  temos que:

$$\hat{i}(t) = \frac{\hat{V}_e(t)}{\hat{Z}_e} \approx \frac{\hat{V}_e(t)}{R} \quad (98)$$

A tensão de saída será dada por:

$$\hat{V}_s(t) = \frac{\hat{q}(t)}{C} = \frac{1}{C} \int \hat{i}(t) dt \approx \left(\frac{1}{RC}\right) \int \hat{V}_e(t) dt \quad (99)$$

Resumindo, se as condições acima forem satisfeitas o circuito  $RC$  da figura 17 realiza a integração da tensão de entrada. Por isso é chamado de circuito integrador  $RC$ . Além da condição de altas frequências, a condição de corrente de saída desprezível (em relação à corrente de entrada) deve estar satisfeita, porque essa foi uma das hipóteses iniciais para a dedução realizada. Ou seja, a impedância externa (ou de carga) deve ser muito maior que a impedância de saída do circuito integrador.

Esse tipo de integrador passivo tem a grande vantagem de ser muito simples de construir e operar, mas, apresenta dois inconvenientes que podem inviabilizar sua utilização para certas aplicações. Um deles consiste em não funcionar para baixas frequências e o outro é a grande redução na amplitude de pico do sinal de saída. A equação (94) mostra que a amplitude de pico do sinal de saída é reduzida de um fator  $\omega RC \gg 1$ . Essas dificuldades podem ser contornadas com a utilização de um integrador ativo.

Um quadripolo  $RC$  passivo, do mesmo tipo, simplesmente invertendo as posições do resistor com a do capacitor (como mostrado no filtro  $RC$  passa-alta da figura 20), funciona como um circuito que produz, na saída, a derivada do sinal colocado na entrada. Esse circuito é conhecido como circuito diferenciador  $RC$  e apresenta vantagens e desvantagens semelhantes às do circuito integrador  $RC$ .

## 2.4 Análise de Fourier

Uma tensão ou corrente qualquer, variável no tempo, pode ser descrita como uma superposição de tensões ou correntes alternadas senoidais de frequência definida. Matematicamente uma tensão periódica qualquer pode ser representada por uma série ou integral de Fourier.



No caso dos circuitos estudados, há dois aspectos relacionados à sugestão de usar o critério da representação de tensões periódicas por meio das séries de Fourier, para caracterizar a eficácia de um integrador ou de um filtro: (1) matemático e (2) prático.

Do ponto de vista matemático, a definição geral de uma série que representa uma função periódica no tempo, genérica, é

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (100)$$

onde  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  e  $T$  é o período da função  $f(t)$  e

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (101)$$

e

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (102)$$

ou, usando a notação complexa

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j(n\omega t)} \quad (103)$$

com

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j(n\omega t)} dt \quad (104)$$

As constantes  $a_n$  e  $b_n$  da expressão tradicional podem ser obtidas como

$$a_n = (c_n + c_{-n}) \quad \text{e} \quad b_n = j(c_n - c_{-n}) \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots \quad (105)$$

Considerando, por exemplo, o caso do circuito integrador, por uma questão de simplicidade e didática, vamos estudar a integração de uma onda quadrada. Portanto, estamos interessados no conjunto de tensões harmônicas de diferentes amplitudes e frequências que compõem a tensão representada por uma onda quadrada. Essa onda quadrada pode ser representada por:

$$V(t) = \begin{cases} V_P & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -V_P & \text{para } \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (106)$$

Calculando os coeficientes da série de Fourier temos:

$$a_n = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} V_P \cos(n\omega t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T (-V_P) \cos(n\omega t) dt \right] \quad (107)$$

Fazendo a mudança de variável  $x = n\omega t$  reescrevemos a expressão acima como

$$a_n = \frac{2}{T} \left[ \frac{V_P}{n\omega} \int_0^{n\pi} \cos(x) dx - \frac{V_P}{n\omega} \int_{n\pi}^{2n\pi} \cos(x) dx \right] \quad (108)$$

e integrando

$$a_n = \frac{2}{T} \frac{V_P}{n\omega} [\text{sen}(x) \Big|_0^{n\pi} - \text{sen}(x) \Big|_{n\pi}^{2n\pi}] = 0 \quad (109)$$

para qualquer  $n$ .

Da mesma forma

$$b_n = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} V_P \text{sen}(n\omega t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T (-V_P) \text{sen}(n\omega t) dt \right] \quad (110)$$

Fazendo a mesma substituição de variável

$$b_n = \frac{2}{T} \left[ \frac{V_P}{n\omega} \int_0^{n\pi} \text{sen}(x) dx - \frac{V_P}{n\omega} \int_{n\pi}^{2n\pi} \text{sen}(x) dx \right] \quad (111)$$

e integrando

$$b_n = \frac{2}{T} \frac{V_P}{n\omega} [-\cos(x) \Big|_0^{n\pi} + \cos(x) \Big|_{n\pi}^{2n\pi}] = \frac{V_P}{n\pi} 2[1 - \cos(n\pi)] \quad (112)$$

Assim temos

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{4V_P}{n\pi} & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases} \quad (113)$$

Dessa forma a onda quadrada da equação (106) pode ser escrita em uma série de Fourier como:

$$V(t) = \frac{4V_P}{\pi} \left[ \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{3}\text{sen}(3\omega t) + \frac{1}{5}\text{sen}(5\omega t) + \dots \right] \quad (114)$$

onde  $V_P$  é a tensão de pico da onda  $V(t)$ ,  $\omega$  é a sua frequência angular e o número de termos se estende ao infinito. Na prática, pode-se obter uma aproximação razoável para uma onda quadrada considerando apenas alguns termos da expressão acima, como pode ser visto na figura abaixo.

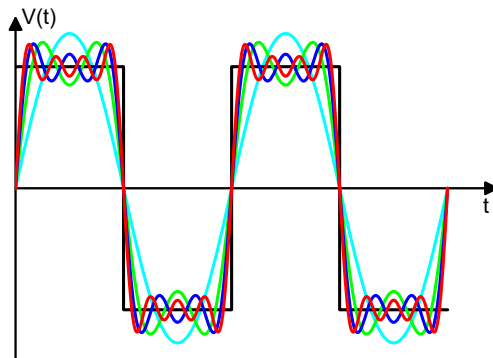


Figura 23. Representação dos primeiros termos da expansão de uma onda quadrada em série de Fourier, sendo somente o primeiro termo (curva cian), os dois primeiros termos (curva verde), os três primeiros termos (curva azul) e os quatro primeiros termos (curva vermelha).

Vamos considerar agora o filtro  $RC$  da figura 17, mas com uma tensão de entrada não harmônica. Podemos escrever essa tensão não harmônica em termos de uma série de Fourier

$$\hat{V}_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j(n\omega t)} \quad (115)$$

Vamos ver como ficam as equações que descrevem o circuito.

Para o circuito da figura 17 a tensão de entrada é igual a

$$\hat{V}_e(t) = \hat{V}_R(t) + \hat{V}_C(t) \quad (116)$$

e as tensões sobre o resistor e o capacitor são dadas por:

$$\begin{cases} \hat{V}_C(t) = \frac{\hat{q}(t)}{C} \\ \hat{V}_R(t) = R\hat{i}(t) = R\frac{d\hat{q}(t)}{dt} = RC\frac{d\hat{V}_C(t)}{dt} \end{cases} \quad (117)$$

ou seja, reescrevendo a equação (116) temos:

$$\hat{V}_e(t) = RC\frac{d\hat{V}_C(t)}{dt} + \hat{V}_C \quad (118)$$

Como a tensão de entrada é não harmônica, a tensão de saída,  $\hat{V}_s(t) = \hat{V}_C(t)$ , também deve ser não harmônica, e também pode ser escrita em termos de uma série de Fourier

$$\hat{V}_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{j(n\omega t)} \quad (119)$$

Substituindo as equações (115) e (119) na expressão (118) temos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j(n\omega t)} = RC\frac{d}{dt} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{j(n\omega t)} \right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{j(n\omega t)} \quad (120)$$

derivando e juntando os termos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j(n\omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (jn\omega RC + 1)d_n e^{j(n\omega t)} \quad (121)$$

ou seja,

$$d_n = \frac{c_n}{(jn\omega RC + 1)} \quad (122)$$

e, dessa forma

$$\hat{V}_s(t) = \hat{V}_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + jn\omega RC} \right) c_n e^{j(n\omega t)} \quad (123)$$

Lembrando que o ganho de um filtro é dado por:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_s(t)}{\hat{V}_e(t)} \quad \text{ou} \quad \hat{V}_s(t) = \hat{G} \hat{V}_e(t) \quad (124)$$

podemos escrever a equação (123) como

$$\hat{V}_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{G}_n c_n e^{j(n\omega t)} \quad (125)$$

onde

$$\hat{G}_n = \frac{1}{(1 + jn\omega RC)} \quad (126)$$

é o “ganho” para cada termo harmônico da série de Fourier com frequência  $n\omega$ .

Lembrando ainda que podemos escrever

$$\hat{G}_n = G_n e^{j\phi_n} \quad (127)$$

teremos

$$G_n = \sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{n\omega^2}{\omega_c^2}\right)}} \quad \text{e} \quad \tan(\phi_n) = -\frac{n\omega}{\omega_c} \quad (128)$$

onde  $\omega_c = \frac{1}{RC}$ .

Assim, o estudo de um sinal não harmônico em um circuito cuja equação diferencial é linear (como a equação (118)) pode ser feito decompondo o sinal em suas frequências harmônicas e estudando o comportamento desse circuito para cada uma dessas componentes. Resumindo, para uma tensão de entrada

$$\hat{V}_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j(n\omega t)} \quad (129)$$

a tensão de saída será dada por:

$$\hat{V}_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n c_n e^{j(n\omega t + \phi_n)} \quad (130)$$

ou ainda

$$V_e(t) = \begin{bmatrix} V_1^c \cos(\omega t) + V_1^s \sin(\omega t) + \\ V_2^c \cos(2\omega t) + V_2^s \sin(2\omega t) + \\ V_3^c \cos(3\omega t) + V_3^s \sin(3\omega t) + \\ \vdots \\ V_n^c \cos(n\omega t) + V_n^s \sin(n\omega t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} G_k = G(k\omega, R, C, \dots) \\ \phi_k = \phi(k\omega, R, C, \dots) \end{matrix} \Rightarrow V_s(t) = \begin{bmatrix} G_1 V_1^c \cos(\omega t + \phi_1) + G_1 V_1^s \sin(\omega t + \phi_1) + \\ G_2 V_2^c \cos(2\omega t + \phi_2) + G_2 V_2^s \sin(2\omega t + \phi_2) + \\ G_3 V_3^c \cos(3\omega t + \phi_3) + G_3 V_3^s \sin(3\omega t + \phi_3) + \\ \vdots \\ G_n V_n^c \cos(n\omega t + \phi_n) + G_n V_n^s \sin(n\omega t + \phi_n) \end{bmatrix} \quad (131)$$

Para muitas aplicações é útil conhecer as principais ondas harmônicas que compõem uma tensão alternada periódica, por exemplo, quando se tem que projetar um filtro, ou integrador, ou diferenciador para uma tensão alternada periódica. Nesse caso, temos que conhecer os principais harmônicos que compõem o sinal de interesse para saber se um determinado tipo de circuito vai funcionar ou não, e, se funcionar, para poder escolher os parâmetros para ter o circuito mais adequado.

### 3 Circuito $RLC$ em série

Vamos considerar um circuito com um indutor puro e um capacitor puro ligados em série, em que o capacitor está carregado no instante  $t=0$ . Como inicialmente o capacitor está com a carga máxima, a corrente será igual a zero; à medida que o capacitor se descarrega a corrente vai aumentando, até o capacitor se descarregar completamente e a corrente atingir seu valor máximo. Quando a carga é máxima e a corrente é igual a zero, toda a energia estará armazenada no campo elétrico do capacitor. Quando a carga é nula e a corrente é máxima toda a energia estará armazenada no campo magnético do indutor. Como o circuito é ideal, ou seja, capacitor e indutor ideais e resistência nula, a carga e a corrente vão oscilar indefinidamente, e, como não há resistência, não há dissipação de energia. Portanto, esse é um sistema conservativo: a energia que ele continha inicialmente, associada à carga do capacitor, mantém-se sempre no sistema.

É importante lembrar aqui que, quando qualquer sistema (mecânico, elétrico, acústico, nuclear, etc) capaz de oscilar, for excitado (retirado de sua condição de equilíbrio) esse sistema vai oscilar sozinho em uma frequência particular, (pode também ser mais de uma), que se chama frequência natural do sistema.

Ao se introduzir uma resistência elétrica no circuito  $LC$  ideal, a cada oscilação, parte da energia é perdida na resistência, de tal forma, que o sistema (carga, corrente e tensões) continua oscilando, mas as amplitudes, ou valores de pico, tanto da carga, quanto da corrente, ou tensões, vão diminuindo, até se anularem. Tal sistema é dito amortecido. Quando existe um amortecimento a frequência com que o sistema vai oscilar até parar, é menor que sua frequência natural de oscilação. Quão menor vai depender basicamente da intensidade do amortecimento.

Uma maneira de se manter as oscilações num sistema amortecido é fornecer energia periodicamente através de um gerador, que vai executar um trabalho positivo sobre o sistema. A aplicação de uma tensão externa alternada vai produzir nesse sistema uma oscilação forçada. O importante é que o sistema vai oscilar (carga, corrente e tensões) na mesma frequência com que o gerador fornece energia, mas, em geral, com pequena amplitude. Se a amplitude de oscilação (seja da carga,  $q_P$ , corrente,  $i_P$ , tensão no capacitor,  $V_{PC}$ , ou tensão no indutor,  $V_{PL}$ , onde o índice  $P$  quer dizer “de pico”) for pequena, isso significa que pouca energia está sendo transferida do gerador para o circuito  $RLC$ .

Na verdade, as oscilações num sistema  $RLC$  forçado (o mesmo vale para qualquer sistema que oscile) serão de pequena amplitude sempre que a frequência de oscilação do gerador for muito diferente da frequência natural do sistema. Se o gerador permitir a variação contínua da frequência, pode-se notar que, à medida que a frequência do gerador se aproxima da frequência natural do sistema, a amplitude de oscilação (seja da carga,  $q_P$ , corrente,  $i_P$ ,  $V_{PL}$  ou  $V_{PC}$ ) aumenta dramaticamente. Quando a frequência do gerador for idêntica à

frequência natural do sistema, a amplitude de oscilação atinge o valor máximo e essa condição é conhecida como ressonância. A frequência natural do sistema é também conhecida como frequência de ressonância. A condição de ressonância é a condição em que a energia é mais eficientemente transferida do gerador para o sistema ou para o circuito  $RLC$ , no caso. Isso quer dizer que, na ressonância, a maior parte da energia disponível em cada ciclo vai ser armazenada ora no campo elétrico do capacitor (como carga), ora no campo magnético do indutor (como corrente), nenhuma energia será devolvida ao gerador, e a energia injetada será dissipada na resistência. Quanto menor a resistência do circuito, maior será a amplitude de oscilação (seja da carga,  $q_P$ , ou da corrente,  $i_P$ , ou de  $V_{P_L}$  ou de  $V_{P_C}$ ) na ressonância, além disso, mais rapidamente essa amplitude aumenta ou cai, quando se varia a frequência do gerador em torno da frequência de ressonância.

O objetivo aqui é estudar o fenômeno da ressonância de um circuito  $RLC$  em série. Não somente a ressonância é de fundamental importância na compreensão de um grande número de fenômenos mecânicos, eletromagnéticos, acústicos, atômicos, nucleares e outros, o que por si só já justificaria esse estudo, mas também, esse circuito, nessas condições, tem muitas aplicações práticas de grande interesse. Para tanto, vamos criar as condições de ressonância para esse circuito e verificar se seu comportamento experimental está de acordo com o comportamento previsto teoricamente.

Para quantificar esse comportamento, vamos aplicar a lei das malhas de Kirchhoff para o circuito  $RLC$  série que vamos estudar. O circuito que será estudado é o da figura 24 a seguir.

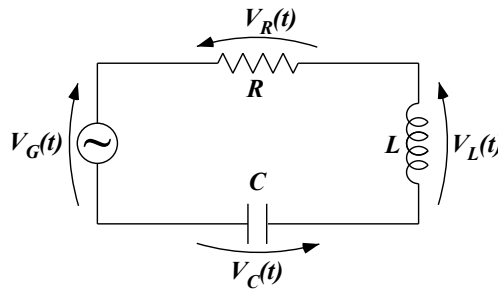


Figura 24. Circuito  $RLC$  em série.

No circuito temos que:

$$V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = V_G(t) \quad (132)$$

mas sabemos que

$$\begin{cases} V_R(t) = R i(t) = R \frac{dq(t)}{dt} \\ V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d^2q(t)}{dt^2} \\ V_C(t) = \frac{q(t)}{C} \end{cases} \quad (133)$$

A solução  $q(t)$  dessa equação diferencial é dada por uma solução particular dessa equação, somada à solução geral da equação homogênea correspondente

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right) \frac{dq(t)}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right) q(t) = 0 \quad (134)$$

A solução da equação acima descreve o comportamento transitório do circuito  $RLC$  em série. É o comportamento que surge quando o circuito é perturbado ou modificado, por exemplo, quando o gerador é ligado ou desligado. Esse comportamento é o do oscilador amortecido e, como já foi discutido, desaparece depois de algum tempo.

A solução particular da equação (132) descreve o comportamento em regime estacionário do circuito, ou seja, depois que o transitório desaparece. Essa dedução não vai ser feita em detalhe aqui.

Considerando que uma tensão alternada do tipo  $V_G(t) = V_P \cos(\omega t)$  foi aplicada ao circuito pelo gerador, a corrente através do circuito será

$$i(t) = i_P \cos(\omega t - \phi_0) \quad (135)$$

A solução  $q(t)$  é da forma

$$q(t) = q_P \text{sen}(\omega t - \phi_0) \quad (136)$$

onde  $q_P$  é a amplitude de pico da carga,  $i_P$  é a amplitude de pico da corrente,  $\omega = 2\pi f$  é a frequência angular e  $\phi_0$  é a diferença de fase entre a corrente no circuito e a tensão do gerador.

A impedância complexa da associação é a soma das impedâncias complexas de cada elemento, já que o circuito é em série

$$Z = Z_0 e^{j\phi_0} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (137)$$

$Z_0$  é a parte real da impedância e é igual à raiz quadrada do produto da impedância complexa  $Z$  pelo seu complexo conjugado  $Z^*$ . Fazendo esse cálculo obtém-se

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (138)$$

Lembrando que a razão entre a tensão complexa da associação  $RLC$  em série e a corrente complexa que a percorre é a impedância complexa da associação, a amplitude de pico, ou máxima, da corrente real será

$$i_P = \frac{V_P}{Z_0} = \frac{V_P}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (139)$$

a defasagem  $\phi_0$  está relacionada à razão entre a parte imaginária e a parte real da impedância complexa  $Z$

$$\tan(\phi_0) = \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R} \quad (140)$$

analisando as equações acima, vê-se que, quando

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \quad (141)$$

que quer dizer que, se a frequência  $\omega_0$  da tensão fornecida pelo gerador é tal que a reatância indutiva é igual à reatância capacitiva, em módulo (a defasagem entre elas é  $180^\circ$ ), o denominador da equação (139) é mínimo e igual a  $R$ . Se o denominador é mínimo, a amplitude da corrente  $i_P$  é máxima, que é justamente a condição de ressonância para a corrente. E, como foi discutido, a frequência para a qual esse fenômeno ocorre é a frequência natural de oscilação desse circuito,  $\omega_0$ , ou frequência de ressonância da corrente.

Ainda, na condição de ressonância

$$Z_0 = R \quad \text{e} \quad V_P = R i_P \quad (142)$$

além disso, na ressonância, a tangente de  $\phi_0$  é nula, então,  $\phi_0$  é igual a zero, o que significa que não há defasagem entre a tensão da associação e a corrente que a percorre, o que é típico de um circuito cuja impedância é puramente resistiva. Ou seja, na ressonância, a impedância de um circuito  $RLC$  é puramente resistiva.

A potência média absorvida pelo circuito  $RLC$  pode ser escrita como

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} V_P i_P \cos(\phi_0) \quad \text{e} \quad V_P = Z_0 i_P \quad (143)$$

então, a potência absorvida pelo circuito, que é a potência dissipada pela resistência presente no circuito, será máxima quando a corrente também for. Na condição de ressonância,  $\phi_0 = 0$  e  $Z_0 = R$ , portanto, a potência média máxima será

$$\langle P \rangle_{Max} = \frac{V_P^2}{2R} \quad (144)$$

e ela ocorre para a mesma frequência em que ocorre a ressonância para a corrente. Por isso a ressonância de corrente é também chamada de ressonância de energia.



Na figura 25, a seguir, é apresentado um gráfico da variação da corrente de pico,  $i_P$ , na associação, em função da frequência angular  $\omega$ . Ele ilustra exatamente o comportamento que foi estudado.

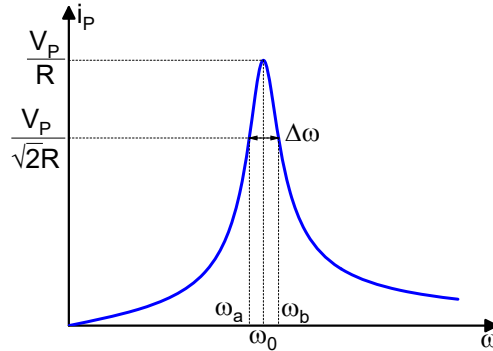


Figura 25. Comportamento da amplitude de pico da corrente em função da frequência angular.

Como foi visto, na equação (136), a carga no capacitor também varia harmonicamente no tempo e como  $q(t)$  é a integral da corrente

$$q(t) = \int i(t) dt = \frac{i_P}{\omega} \text{sen}(\omega t - \phi_0) \quad (145)$$

portanto, substituindo a expressão para  $i_P$

$$q_P = \frac{i_P}{\omega} = \frac{V_P}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (146)$$

esse denominador também é uma função de  $\omega$ , que tem um mínimo, que pode ser obtido sem dificuldade. Esse mínimo ocorre para uma frequência  $\omega_1$  igual a

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (147)$$

Se o denominador tem um mínimo, a amplitude de pico da carga tem um máximo nessa frequência e essa é a chamada ressonância de amplitude. Como se vê, ela ocorre numa frequência,  $\omega_1$ , um pouco menor que a frequência de ressonância de energia. A figura 26 mostra o comportamento da amplitude de pico (ou máxima) da carga em função da frequência angular. Notar que para  $\omega = 0$  a carga não é zero, porque a tensão seria constante e igual a  $V_0$  e, portanto, a carga é  $CV_0$ .

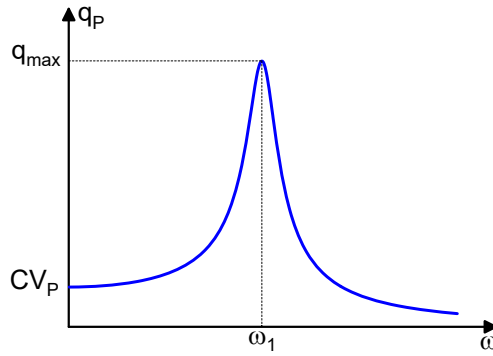


Figura 26. Ressonância de amplitude: comportamento da amplitude da carga em função da frequência angular.

Há um outro parâmetro importante usado também para caracterizar circuitos ressonantes: é o fator de qualidade,  $Q$ , do circuito. Esse fator é definido como a razão entre a energia armazenada no circuito e a energia perdida por ciclo pelo circuito, na ressonância

$$Q = 2\pi \left( \frac{\text{Energia armazenada, } U_0}{\text{Energia perdida por ciclo, } \Delta U} \right)_{\text{na ressonância}} \quad (148)$$

A energia armazenada no circuito está armazenada no campo elétrico do capacitor e no campo magnético do indutor. Entretanto, no instante em que a carga se anula toda a energia estará armazenada no campo magnético do indutor, depois, quando a corrente vai a zero toda a energia estará armazenada no campo elétrico do capacitor, portanto, o numerador da equação (148) acima, é

$$U_0 = \frac{1}{2} L i_P^2 = \frac{1}{2} \frac{q_P^2}{C} \quad (149)$$

onde, tanto  $i_P$  como  $q_P$  são as amplitudes de pico assumidas pela corrente e pela carga, respectivamente, na condição de ressonância.

A energia perdida por ciclo de oscilação é o produto da potência média dissipada, pelo período de oscilação, na condição de ressonância. (Lembrar que potência é o que se gasta ou se fornece de energia por intervalo de tempo). Portanto, o denominador da equação (148) é

$$\Delta U = PT = P \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{2} R I_P^2 \quad (150)$$

Substituindo as expressões (149) e (150) na expressão (148) que define o fator de qualidade,  $Q$  temos:

$$Q = 2\pi \frac{U_0}{\Delta U} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (151)$$

como  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , vê-se que o fator de qualidade depende exclusivamente dos valores nominais dos elementos do circuito.

A figura 27, adiante, mostra como varia a potência em função da frequência angular da tensão fornecida pelo gerador para dois valores diferentes do fator de qualidade. A largura

à meia altura,  $\Delta\omega$ , dessa curva é igual a

$$\Delta\omega = \omega_b - \omega_a = \frac{R}{L} \quad (152)$$

Comparando a expressão acima com a expressão (151) para o fator de qualidade obtém-se

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (153)$$

o que permite obter um valor experimental para o fator de qualidade diretamente do gráfico de potência por frequência angular.

Também, demonstra-se facilmente que, na ressonância, a tensão de pico sobre o capacitor, é igual à tensão de pico sobre o indutor e ambas são iguais ao produto do fator de qualidade pelo valor de pico da tensão aplicada à associação (ou tensão do gerador)

$$V_{PL} = V_{PC} = QV_P \quad (154)$$

como o fator de qualidade, dependendo do circuito, pode ser bem maior que 1, a equação acima indica que em um circuito  $RLC$ , em ressonância, podem ocorrer tensões bastante altas, bem maiores que a tensão fornecida pelo gerador, por isso esse tipo de circuito exige atenção extra em seu manuseio.

Vê-se (na equação (153)) que, quanto mais estreita ( $\Delta\omega$  pequeno) for a curva de potência em função da frequência angular da tensão fornecida, maior será o fator de qualidade desse circuito. Para um determinado circuito com  $L$  e  $C$  fixos, e, portanto,  $\omega_0$  fixo, o fator de qualidade é tanto maior quanto menor for a resistência do circuito. Isso implica em que tanto maior será, também, a amplitude ou valor de pico da corrente que passa pelo circuito.

Resumindo, quanto maior for o fator de qualidade de um circuito, tanto mais estreita e alta será a curva que descreve a ressonância para esse circuito, seja ela a corrente, a carga ou a potência em função da frequência angular. O nome fator de qualidade para a quantidade  $Q$  foi dado porque, na época, justamente havia o interesse em aplicações práticas de sistemas ressonantes em que era importante que a curva de ressonância fosse bastante aguda. O comportamento da potência média em um circuito  $RLC$  em série para diferentes valores do fator de qualidade, pode ser observado na figura 27, a seguir.

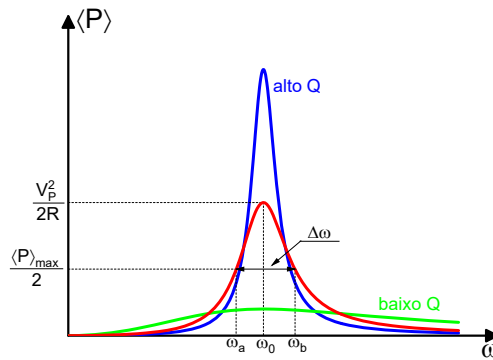


Figura 27. Curvas de ressonância de energia para um circuito *RLC* em série com fatores de qualidade diferentes.

Uma das muitas aplicações práticas de um circuito ressonante de alto fator de qualidade são sistemas receptores de sinais eletromagnéticos, como rádios e televisões. Muitas vezes, porém, a ressonância é uma inconveniência e, em tais casos, procura-se construir um circuito em que o fator de qualidade seja o mais baixo possível. Uma infinidade de sistemas mecânicos, acústicos, eletromagnéticos, etc, devem ter essa característica, como edifícios altos, pontes, edificações sobre linhas de metrô ou próximas de linhas de trem ou de aeroportos, sinos, gongos, cones de alto falante... A lista de aplicações de circuitos com alto ou baixo fator de qualidade é, praticamente, sem fim.