



versário, é a essência da boa estratégia não apenas em vários esportes, mas em muitas ocasiões da própria guerra, como atesta a citação de Sun Tzu no início deste capítulo.

Quando um jogador varia a escolha de suas estratégias de forma a tentar surpreender o outro jogador, diz-se que eles adotam *estratégias mistas*. De que forma as estratégias mistas afetam a análise do equilíbrio em um jogo será nosso próximo assunto.

ESTRATÉGIAS MISTAS EM JOGOS ESTRITAMENTE COMPETITIVOS

Todos sabem que, em qualquer esporte, as chances de vitória são determinadas não apenas pela habilidade dos competidores, mas também pela sua capacidade de de surpreender o adversário. Nos esportes, na economia e principalmente na guerra, o fator surpresa pode desequilibrar a situação favoravelmente a quem a surpresa a seu lado.

Para usar uma ilustração trivial, um batedor de pênalts, por melhor que seja, corre o risco de ter seus chutes defendidos se o goleiro adversário souber com certeza qual será o lado que o batedor escolherá para a cobrança. Todo jogador que cobra pênalts sabe que tem de “variar” a direção do chute para tentar *surpreender* o goleiro.

Por outro lado, sabendo que o batedor de pênalts irá variar o lado no qual chutará a bola, o goleiro também deverá variar o lado para o qual irá se atirar ao tentar defender o gol, visando a *neutralizar* qualquer vantagem que o batedor possa ter ao escolher aleatoriamente o lado em que irá chutar a bola. Estaremos supondo, obviamente, que o goleiro *não sabe* qual será o lado que o batedor escolherá para cobrar o pênalts.

Estratégias mistas, assim, estão diretamente associadas a *tentar surpreender e evitar ser surpreendido*. Quando os jogadores partem do princípio de que os demais jogadores podem surpreendê-los, intencionalmente ou não, é razoável supor que eles podem escolher tomar suas decisões tentando evitar o pior resultado que podem obter.

É como se, diante da ameaça de uma surpresa desagradável, os jogadores adotassem uma atitude do gênero “dos males o menor”. Essa é a interpretação mais usual de estratégias mistas, e a que iremos abordar agora: uma opção estratégica que visa a *neutralizar os efeitos da estratégia escolhida pelo outro jogador*.

De acordo com essa interpretação, podemos oferecer uma definição simples do que são estratégias mistas, em comparação com estratégias puras:



Quando, em vez de escolher entre suas estratégias uma dada estratégia para jogá-la com certeza, um jogador decide alterná-las aleatoriamente, atribuindo uma probabilidade a cada estratégia a ser escolhida, diz-se que o jogador utiliza **estratégias mistas**. Caso contrário, diz-se que emprega **estratégias puras**.

Voltando ao exemplo do jogador de futebol ao bater um pênalti, ele pode, por exemplo, jogar uma moeda não-viciada para cima, antes de decidir para que lado chutar: escolhendo, por exemplo, chutar para o lado direito se o resultado for cara, e para o lado esquerdo se o resultado for coroa.

Com isso, antes de chutar efetivamente, haveria uma probabilidade de 50% de o batedor escolher o lado direito e de 50% de escolher o lado esquerdo. Isso seria uma estratégia mista, diferentemente de uma situação em que houvesse certeza de que o batedor iria *necessariamente* escolher o lado direito, o que seria uma estratégia pura.

Um outro exemplo de estratégia mista, ainda do ponto de vista dessa interpretação, seria o caso em que o batedor, antes de escolher o lado, retirasse uma carta de um baralho aleatoriamente. Se a carta fosse do naipe de ouros, ele escolheria o lado direito para cobrar o pênalti. Se a carta fosse de qualquer outro naipe, ele cobraria o pênalti do lado esquerdo. Isso equivaleria a adotar uma estratégia mista em que o lado direito seria escolhido com 25% de probabilidade e o lado esquerdo com 75% de probabilidade.

Assim, vamos retornar ao jogo de prevenção de ataque da Figura 5.5, reproduzida novamente a seguir:

Azul	Vermelho	
	Porto Sul	Porto Norte
Porto Sul	1, -1	-1, 1
Porto Norte	-1, 1	1, -1

Figura 5.5 O Jogo de Prevenção de Ataque

O leitor já deve ter notado que, diferentemente do que fazíamos antes, quando analisávamos jogos estritamente competitivos apenas com estratégias puras, dessa vez estamos escrevendo as recompensas dos dois jogadores. Fazemos isso apenas para facilitar a compreensão do funcionamento do equilíbrio em estratégias mistas, evitando qualquer confusão que possa prejudicar o entendimento.

Vamos agora calcular quanto cada país obtém de recompensa, dada a estratégia que escolheu, se o outro país resolver variar aleatoriamente a estratégia

escolhi
com o p

A for
dade pa
decidiss
ríamos
0,5) e c

Com
nismo a
de moe
haverá
lidade 1

É fác
der, se c
taremos
fazer. A
definiçã

Vamo
que a p
bilidade
de p var
maior p
de zero

Veja
1, a pro
te, a pro
os resul

Assin
-1, pois
terá seu
nesse ca
colher c
fará um

O inv
o porto
cando c
compen
porto q
o porto

ELSEVIER
gria para jo-
juindo uma
utiliza esta-
s.
pode, por
para que
resultado
e de 50%
erdo. Isso
houvesse
o que se-
essa inter-
asse uma
os, ele es-
uer outro
r uma es-
abilidade
s, repro-



escolhida. Vamos iniciar calculando as recompensas de Vermelho de acordo com o porto que ele escolha atacar, se Azul decidir adotar uma estratégia mista. A forma usual de representar uma estratégia mista é atribuir uma probabilidade para cada estratégia que cada jogador pode adotar. Por exemplo, se Azul decidisse que porto defender jogando uma moeda não viciada para cima, sabíamos que ele escolheria o porto Sul com 50% de chances (probabilidade de 0,5) e o porto Norte também com 50% de chances.

Como há somente dois portos para Azul defender, qualquer que seja o mecanismo aleatório que ele escolha para decidir que porto defender (lançamento de moeda, lançamento de dados, sorteio de uma carta ao acaso etc.), sempre haverá uma probabilidade p de Azul escolher esse mesmo porto e uma probabilidade $1 - p$ de Azul escolher outro porto.

É fácil entender a razão disso: como há somente dois portos para Azul defender, se considerarmos as probabilidades de Azul defender cada um dos portos estaremos considerando tudo que Azul pode fazer, ou 100% de tudo que ele pode fazer. A probabilidade de tudo que é possível acontecer é, portanto, igual a 1 por definição: $p + (1 - p) = 1$.

Vamos estabelecer como convenção no nosso jogo de prevenção de ataque que a probabilidade de Azul escolher o porto Sul é representada por p , e a probabilidade de Azul escolher o porto Norte é representada por $1 - p$. Assim, o valor de p varia entre 0 e 1, sendo que um valor de p mais próximo de 1 significa uma maior probabilidade de Azul escolher o porto Sul e um valor de p mais próximo de zero significa uma maior probabilidade de Azul escolher o porto Norte.

Vejamos inicialmente os valores extremos que p pode assumir. Quando $p = 1$, a probabilidade de Azul escolher o porto Sul é de 100% ou, alternativamente, a probabilidade de Azul escolher o porto Norte é $1 - p = 1 - 1 = 0$. Ambos os resultados significam que Azul escolhe o porto Sul com certeza.

Assim, quando $p = 1$, a recompensa de Vermelho por escolher o porto Sul é -1 , pois ele escolheu o porto que Azul escolherá defender com certeza e assim terá seu ataque repellido, obtendo uma recompensa de -1 (Azul, obviamente, nesse caso, obtém uma recompensa de 1). Já a recompensa de Vermelho por escolher o porto Norte, que Azul não irá defender com certeza, é 1, pois Vermelho fará um ataque bem-sucedido.

O inverso ocorre para $p = 0$, ou seja, quando a probabilidade de Azul escolher o porto Sul é nula. Isso porque quando $p = 0$ temos que $1 - p = 1 - 0 = 1$, significando que Azul escolhe o porto Norte com certeza. Assim, quando $p = 0$, a recompensa esperada de Vermelho por escolher o porto Sul é 1, pois ele escolheu o porto que Azul não escolherá defender com certeza, e a recompensa por escolher o porto Norte, no qual Azul irá alocar suas defesas com certeza, é -1 .



Mas o que acontecerá se Azul escolher um p entre os dois extremos em que $p = 1$ ou $p = 0$? Nesse caso, quanto maior o p , maiores as chances de Azul escolher o porto Sul, e maior a recompensa que Vermelho pode esperar por escolher o porto Norte. Nesse caso, é claro, a recompensa que Vermelho pode esperar obter por escolher o porto Norte não será tão elevada como no caso em que $p = 1$, pois nesse caso extremo há a certeza de que Azul escolherá o porto Sul e, desse modo, Vermelho pode ter certeza de ter sucesso no ataque se escolher o porto Norte, fazendo jus à recompensa de 1.

Isso porque se $p < 1$, há alguma probabilidade, ainda que pequena, de Azul escolher o porto Norte. Assim, Vermelho não pode mais assegurar uma recompensa de 1. Para ilustrar o que estamos querendo dizer, suponha que $p = 0,90$, ou seja, que há 90% de chance de Azul escolher o porto Sul, mas há também 10% de chance de Azul escolher o porto Norte. A *recompensa esperada* de Vermelho nesse caso, que chamaremos REV_{PN} , por escolher o porto Norte, será:

$$REV_{PN} = (0,9 \times 1) + (0,1 \times -1) = 0,9 - 0,1 = 0,8$$

Obviamente, se Vermelho tivesse escolhido o porto Sul, sua recompensa esperada nesse caso (REV_{PS}) seria:

$$REV_{PS} = (0,9 \times -1) + (0,1 \times 1) = -0,9 + 0,1 = -0,8$$

Em outras palavras, a *recompensa esperada* de um jogador pela adoção de uma dada estratégia é a recompensa que ele pode vir a obter, em média, dadas as probabilidades com que os outros jogadores escolham suas estratégias.

Desse modo, quanto mais próxima de 1 estiver a probabilidade p de que Azul escolha o porto Sul, maior a recompensa que Vermelho pode esperar obter, em média, por escolher o porto Norte, e menor a recompensa esperada de Vermelho por escolher o porto Sul.

É importante o leitor atentar para o fato de que, uma vez que p seja menor do que 1, ainda que seja muito próximo de 1, Vermelho nunca poderá ter certeza de obter a recompensa de 1, ou seja, realizar um ataque bem-sucedido. Se $p = 0,99$, por exemplo, ainda que a chance do Azul escolher o porto Norte seja muito pequena (1%), ela ainda existe e, portanto, pode ser que, no momento de localizar suas defesas, Azul acabe por sortear o porto Norte, não obstante a probabilidade reduzida de que ele o faça.

O que a recompensa esperada de Vermelho nos informa, portanto, é apenas que, dadas as chances de Azul escolher o porto Sul, que supomos serem de 99%, o país Vermelho estará muito mais próximo de obter sua recompensa de 1 se escolher o porto Norte, pois nesse caso sua recompensa esperada é de:

Do q
rada se

Pois
uma re
Por c
Norte,
escolhe
de char
porto S
caso se

Repr
lher a p
uma pr
Azul es

Azul
Porto S
Porto N
Recom Verme

Podê
a recon
esperac
Azul, s

$$REV_{PN} = (0,99 \times 1) + (0,01 \times -1) = 0,99 - 0,01 = 0,98$$

Do que, se Vermelho escolher o porto Sul, para o qual sua recompensa esperada será de:

$$REV_{PS} = (0,99 \times -1) + (0,01 \times 1) = -0,99 + 0,01 = -0,98$$

Pois Vermelho estará, nessa última hipótese, muito mais próximo de obter uma recompensa de -1 .

Por outro lado, quanto menor o p , maior a chance de Azul escolher o porto Norte, e, consequentemente, maior a recompensa esperada de Vermelho por escolher o porto Sul. Para ilustrar, suponha que $p = 0,20$, ou seja, que há 80% de chance de Azul escolher o porto Norte, e 20% de chance de Azul escolher o porto Sul. A recompensa esperada de Vermelho por escolher o porto Sul nesse caso será:

$$REV_{PS} = (0,8 \times 1) + (0,2 \times -1) = 0,8 - 0,2 = 0,6$$

Representamos isso escrevendo ao lado de cada estratégia que Azul pode escolher a probabilidade de que ele escolha essa estratégia. Assim, como atribuímos uma probabilidade p de Azul escolher o porto Sul e uma probabilidade $1 - p$ de Azul escolher o porto Norte, temos na forma estratégica da Figura 5.5 (a) que:

Azul	Vermelho	
	Porto Sul	Porto Norte
Porto Sul (p)	1, -1	-1, 1
Porto Norte ($1 - p$)	-1, 1	1, -1
Recompensa Esperada de Vermelho de Cada Estratégia		$-p + (1 - p) = 1 - 2p$
		$p - (1 - p) = 2p - 1$

Figura 5.5 (a) As Estratégias Mistas de Azul

Podemos ver na Figura 5.5 (a) que se Vermelho decidir escolher o porto Sul, a recompensa que ele pode esperar receber em média, ou seja, sua recompensa esperada por escolher o porto Sul, REV_{PS} , dada a estratégia mista escolhida por Azul, será de:

$$REV_{PS} = 1 - 2p$$



Evidentemente, essa recompensa será máxima quando $p = 0$, sendo nesse caso igual a 1. Isto é, quando Azul escolher proteger o porto Norte com certeza, e Vermelho escolher o porto Sul, a recompensa de Vermelho será máxima.

Pela razão inversa, essa recompensa esperada será mínima quando $p = 1$: uma vez que Vermelho tenha decidido atacar o porto Sul, sua recompensa será mínima (no caso, $REV_{PS} = -1$).⁷ A variação na recompensa esperada de Vermelho, de acordo com o porto que ele escolha e a estratégia mista adotada por Azul, é resumida no Gráfico 5.1:

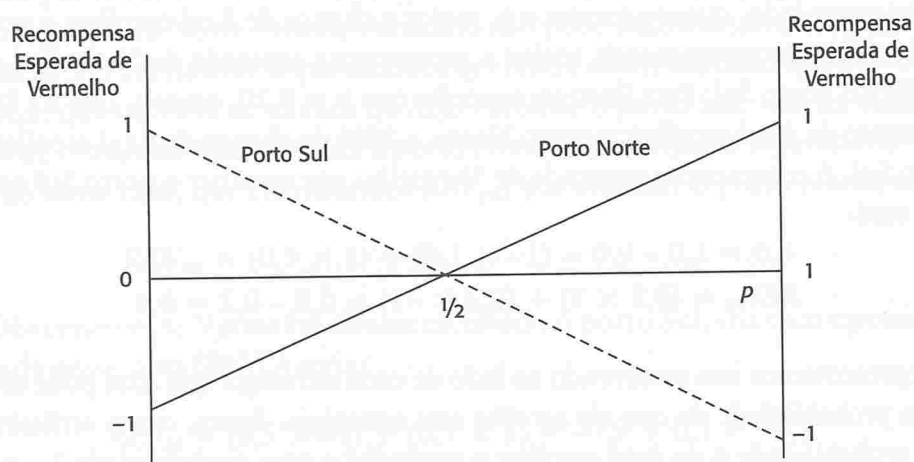


Gráfico 5.1 Recompensas Esperadas Vermelho, Dada a Estratégia Mista de Azul

Nos eixos verticais do Gráfico 5.1 temos a recompensa esperada de Vermelho, um valor que varia, conforme vimos, entre 1 e -1 , de acordo com o porto que Vermelho escolhe e a probabilidade de Azul escolher cada porto. No eixo horizontal temos o valor de p , a probabilidade de Azul escolher o porto Sul.

A linha tracejada que desce da esquerda para a direita no Gráfico 5.1 mostra como varia a recompensa esperada de Vermelho, caso ele escolha o *porto Sul*, à medida que o valor de p aumente. Essa linha começa em 1 no eixo vertical esquerdo do Gráfico 5.1, que é a recompensa que Vermelho recebe caso escolha o porto Sul na hipótese de o Azul com certeza não escolher defender o mesmo porto ($p = 0$).

Essa mesma linha atinge um mínimo em -1 no eixo direito do gráfico, representando a menor recompensa que Vermelho pode obter ao escolher o porto Sul, que é a recompensa obtida caso Azul escolha esse porto com certeza ($p = 1$).

⁷ O leitor é convidado a desenvolver um raciocínio análogo ao que fizemos caso Vermelho se decidisse pelo porto Sul, para o caso de Vermelho decidir escolher o porto Norte.

A li
como
te, à m
vertica
escolh
porto,

Por
caso e
eixo e
pode t
lha ess

No
tas de
 p que
lho un
pode i
perada
nua (r
Norte)

Por
uma re
pode i
lhada
Verme
portos

Pod
deve e
compe
Norte.
te com
probal

Por
vamos
e de 1

Out
de p n
valores
afirma
Verme



A linha continua que desce da direita para a esquerda no Gráfico 5.1 mostra como varia a recompensa esperada de Vermelho, caso ele escolha o *porto Norte* vertical direito do Gráfico 5.1, que é a recompensa que Vermelho recebe caso escolha o *porto Norte* na hipótese de Azul, com certeza, não escolher o mesmo *porto*, escolhendo o *porto Sul* ($p = 1$).

Por outro lado, a reta que representa a recompensa esperada de Vermelho, caso ele escolha o *porto Norte*, no Gráfico 5.1 atinge um mínimo em -1 no eixo esquerdo do gráfico, representando a menor recompensa que Vermelho pode ter ao escolher o *porto Norte*, que é a recompensa obtida caso Azul escolha esse *porto* com certeza ($p = 0$).

No Gráfico 5.1 temos então uma primeira aproximação às melhores respostas de Vermelho a cada possibilidade de estratégia mista, isto é, a cada valor de p que Azul pode adotar. Se $p < 1/2$, escolher o *porto Sul* sempre rende a Vermelho uma recompensa esperada maior do que escolher o *porto Norte*, como se pode inferir do fato de que a linha pontilhada (representando a recompensa esperada de Vermelho ao escolher o *porto Sul*) se encontra acima da linha continua (representando a recompensa esperada de Vermelho ao escolher o *porto Norte*) no Gráfico 5.1.

Por outro lado, se $p > 1/2$, escolher o *porto Norte* sempre rende a Vermelho uma recompensa esperada maior do que escolher o *porto Sul*, como também se pode inferir do fato de que a linha continua se encontra acima da linha pontilhada no Gráfico 5.1. No caso em que $p = 1/2$, é indiferente exatamente para Vermelho escolher o *porto Sul* ou o *porto Norte*. Qualquer escolha de um dos *portos* dará a Vermelho a mesma recompensa esperada.

Podemos então afirmar que, para valores de p menores do que $1/2$, Vermelho deve escolher o *porto Sul* com certeza, pois isso maximizará o valor de sua recompensa esperada, dada a maior probabilidade de que Azul escolha o *porto Norte*. Para valores de p maiores do que $1/2$, Vermelho deve escolher o *porto Norte* com certeza, pois isso maximizará sua recompensa esperada, dada a maior probabilidade de que Azul escolha o *porto Sul*.

Por analogia com o que fizemos no caso de Azul adotar uma estratégia mista, vamos agora chamar de q a probabilidade de que Vermelho escolha o *porto Sul e de $1 - q$ a probabilidade de que Vermelho escolha o *porto Norte*.*

Outra forma de escrever a conclusão obtida anteriormente de que para valores de p menores do que $1/2$ Vermelho deve escolher o *porto Sul* com certeza e para valores de p maiores do que $1/2$ Vermelho deve escolher o *porto Norte* com certeza é afirmar, de forma mais sintética, que a melhor resposta para Vermelho para $p < 1/2$ é fazer $q = 1$, e a melhor resposta para $p > 1/2$ é fazer $q = 0$.



Isso nos permitirá descrever as melhores respostas de Vermelho às várias estratégias mistas que Azul pode vir a adotar simplesmente como uma combinação entre p e q . Graficamente, podemos descrever a melhor resposta de Vermelho (um valor de q que pode estar entre 0 e 1, incluindo esses dois extremos) em função da estratégia mista adotada por Azul (o valor de p), no Gráfico 5.2:

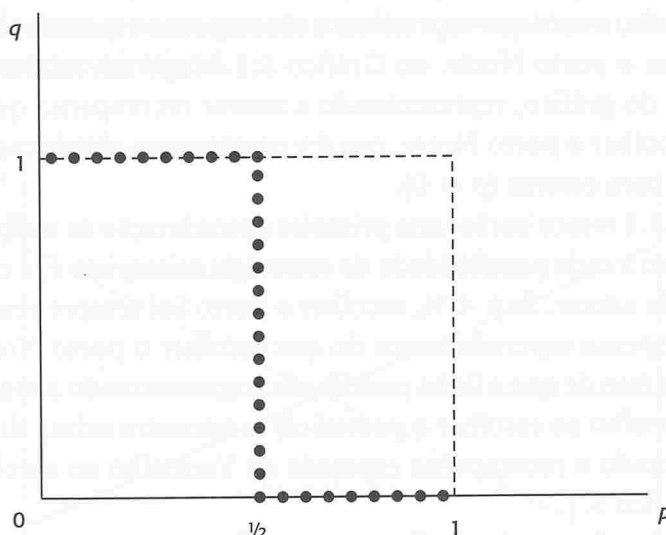


Gráfico 5.2 As Melhores Respostas de Vermelho

No Gráfico 5.2 vemos o valor de q que representa a melhor resposta de Vermelho para cada p que Azul pode adotar assinalado pela linha pontilhada em forma de “S” invertido. O Gráfico 5.2 nos informa que para valores de $p < 1/2$, a melhor resposta de Vermelho é fazer $q = 1$, que é o ramo de sua função de melhor resposta que é paralelo ao eixo p na altura em que $q = 1$.

Para valores de $p > 1/2$, a melhor resposta de Vermelho é fazer $q = 0$, daí a sua função de melhor resposta coincidir com o eixo p do valor de $p = 1/2$ até o valor de $p = 1$, significando que nesse intervalo $q = 0$. Por último, quando $p = 1/2$, *não importa o porto que Vermelho escolha*: assim, sua função de melhor resposta é vertical, indicando que qualquer valor de q é igualmente uma boa resposta ao fato de que Azul fez $p = 1/2$.

Esse resultado de que qualquer valor de q é igualmente uma boa resposta ao fato de que Azul fez $p = 1/2$ pode parecer um pouco estranho ao leitor, mas é um resultado importante e por isso merece ser mais bem compreendido. Para tanto, considere a expressão abaixo, que nos fornece a recompensa esperada de Vermelho (REV) para *qualquer estratégia mista que Vermelho e Azul adotem*:

I
Apes
mos fo
estraté
jogado
Con:
Signific
Azul es
Sul e a
O te:
combir
porto S
vale pa
Assim,
jogo de
veis e s
Simp

Vam
trola: é
to Sul (
adotar

O qu
estratégia
chance

Agor
gia mist
certeza,
em que
to Nort
parênte
Com
determi



$$REV = pq(-1) + p(1 - q)(1) + (1 - p)(q)(1) + (1 - p)(1 - q)(-1)$$

Apesar de extensa, a expressão acima não deve assustar o leitor. O que fizemos foi apenas somar as recompensas de Vermelho para cada combinação de estratégias, dadas as probabilidades de as estratégias serem adotadas pelos dois jogadores.

Considere o primeiro termo na expressão acima: $pq(-1)$. O que ele significa? Significa a recompensa de Vermelho, no caso em que tanto Vermelho como Azul escolham o porto Sul e as vezes e probabilidade de Azul escolher o porto Sul e a probabilidade de Vermelho também escolher o porto Sul.

O termo $pq(-1)$, portanto, é a recompensa esperada de Vermelho, caso essa combinação particular de estratégias, em que os dois jogadores escolhem o porto Sul, se verifique, dadas as probabilidades de que isto ocorra. O mesmo vale para os demais termos da expressão (o leitor deve se certificar disto). Assim, a expressão anterior é a recompensa esperada total de Vermelho no jogo de prevenção de ataque, dadas todas as combinações de estratégias possíveis e suas probabilidades.

Simplificando a expressão anterior obtemos:

$$REV = 2q - 4pq + 2p - 1$$

Vamos colocar q em evidência, pois é a única variável que Vermelho controla: é a variável que nos informa se Vermelho vai atacar com certeza o porto Sul ($q = 1$), se vai escolher o porto Norte com certeza ($q = 0$), ou se vai adotar alguma estratégia mista ($0 < q < 1$). Assim obtemos:

$$REV = q(2 - 4p) + 2p - 1$$

O que acontece então se Azul decide fazer $p = \frac{1}{2}$, ou seja, se adota uma estratégia mista em que há 50% de chance de ele escolher o porto Sul e 50% de chance de ele escolher o porto Norte?

Agora deve estar claro o que significa dizer que quando Azul adota a estratégia mista em que $p = \frac{1}{2}$, para Vermelho é indiferente atacar o porto Sul com certeza, atacar o porto Norte com certeza ou adotar qualquer estratégia mista, em que Vermelho escolha atacar o porto Sul com uma probabilidade q e o porto Norte com uma probabilidade $(1 - q)$: quando $p = \frac{1}{2}$, então o termo entre parênteses na expressão $REV = q(2 - 4p) + 2p - 1$ se torna $q(2 - 2) = 0$.

Com isso, q passa a ser multiplicado por zero, e se torna irrelevante para a determinação da recompensa esperada por Vermelho: se Vermelho escolhe o

ra de Ver-
lhada em
de $p < \frac{1}{2}$,
função de
, daí a sua
ité o valor
= $\frac{1}{2}$, não
resposta é
posta ao
resposta
itor, mas
rendido.
ensa espe-
ho e Azul

várias es-
combina-
e Verme-
xtremos)
ico 5.2:



porto Sul com certeza ($q = 1$), o porto Norte com certeza ($q = 0$), ou se adota alguma estratégia mista ($0 < q < 1$), sua recompensa esperada não é afetada e é sempre:

$$REV = 2p - 1 = 2(1/2) - 1 = 0$$

Em outras palavras, uma vez que Azul tenha escolhido uma estratégia mista em que o porto a ser protegido é sorteado com 50% de chances para cada um, a recompensa esperada de Vermelho ao decidir atacar um porto ou outro, ou também sortear entre eles com qualquer probabilidade para cada um, inclusive 50% de chances para cada porto, é sempre em média zero.

Aqui há um ponto muito importante que irá se repetir no caso de Azul (que iremos discutir daqui a pouco), mas que já é importante assinalar. O fato de que se tornou indiferente para Vermelho escolher um ou outro porto com certeza ou ainda adotar uma estratégia mista em que cada porto seja escolhido aleatoriamente com uma dada probabilidade, significa que *não há nada que Vermelho possa fazer para surpreender Azul*.

Ou seja, Vermelho não obtém qualquer vantagem se alterar as chances de atacar um dos portos: a estratégia mista de Azul de localizar sua frota aérea de defesa de forma aleatória, com 50% de chances em cada porto, anula completamente qualquer possibilidade de Vermelho surpreender Azul com sua escolha.

Em outros termos, ao adotar $p = 1/2$, Azul *neutralizou qualquer vantagem que Vermelho pudesse ter, variando o lado que iria atacar*. Esse é o sentido de tornar q irrelevante fazendo $p = 1/2$. Esse é o aspecto fundamental de estratégias mistas, e o leitor deve mantê-lo em mente, pois será de grande importância para entendermos o sentido do equilíbrio em estratégias mistas.

Caso Azul realmente decida implementar essa estratégia mista, em que $p = 1/2$, representamos esse fato da seguinte forma:

$$(p, 1 - p) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Onde, por convenção, o primeiro elemento do par ordenado que representa a estratégia mista é a probabilidade de a estratégia na primeira linha ser jogada, o segundo elemento é a probabilidade de a estratégia na segunda linha ser jogada e assim por diante, caso o jogador possua mais de duas estratégias.

A forma estratégica da Figura 5.5 (b) descreve tanto as probabilidades de Azul ao escolher o porto em que irá localizar sua frota de defesa aérea como as probabilidades de Vermelho ao escolher o porto que irá atacar:

Azul

Porto Su

Porto No
(1 - p)Recomp
Esperad
Vermelh

Pod
comper
será de:

Evide
igual a
porto q
Pela
Uma ve
Azul esc
 $REA_{PS} =$
um raci
Essa v
escolha

Reco
Esp
de

Grá



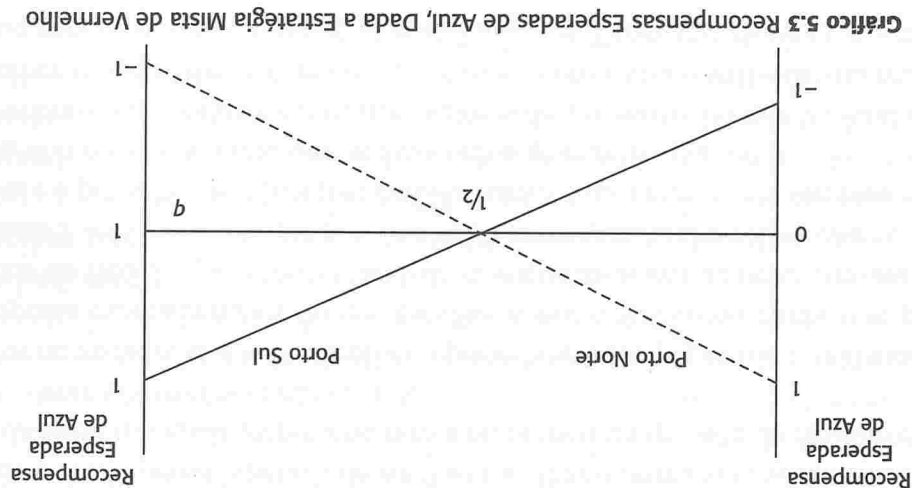
Azul	Vermelho		Recompensa Esperada de Vermelho
	Porto Sul (p)	Porto Norte (1 - p)	
Porto Sul (q)	1, -1	-1, 1	$(-1)p + (1)(1 - p) = 1 - 2p$
Porto Norte (1 - q)	-1, 1	1, -1	$(1)p + (-1)(1 - p) = 2p - 1$
Recompensa Esperada de Azul	$1(q) + (-1)(1 - q) = 2q - 1$	$-1(q) + (1)(1 - q) = 1 - 2q$	

Figura 5.5 (b) As Estratégias Mistas de Azul e Vermelho

Podemos observar na Figura 5.5 (b) que se Azul escolher o porto Sul, sua recompensa esperada REA_{ps} , dada a estratégia mista escolhida por Vermelho, será de:

$$REA_{ps} = 2q - 1$$

Evidentemente, essa recompensa será máxima quando $q = 1$, sendo nesse caso igual a 1. Isto é, quando Vermelho com certeza escolher o porto Sul, o mesmo porto que Azul decidiu escolher, a recompensa esperada de Azul será máxima. Pela razão inversa, essa recompensa esperada será mínima quando $q = 0$. Uma vez que Vermelho com certeza escolha atacar o porto Norte, enquanto Azul escolhe defender o porto Sul, a recompensa de Azul será mínima (no caso, $REA_{ps} = -1$ se $q = 0$). O leitor é, também nesse caso, convidado a desenvolver um raciocínio análogo para o caso de Azul escolher o porto Norte. Essa variação na recompensa esperada de Azul, de acordo com o porto que Azul escolhe e a estratégia mista que Vermelho adote, é resumida no Gráfico 5.3:





Nos eixos verticais do Gráfico 5.3 temos a recompensa esperada de Azul, também um valor que varia entre 1 e -1 , de acordo com o porto que Vermelho escolhe e a probabilidade da sua escolha. No eixo horizontal, temos o valor de q , a probabilidade de Vermelho escolher atacar o porto Sul.

A linha contínua que sobe da esquerda para a direita no Gráfico 5.3 mostra como varia a recompensa esperada de Azul, caso ele escolha o porto Sul, à medida que o valor de q aumente. Essa linha começa em seu valor mínimo (recompensa de -1 : o porto Norte é atacado com certeza) no eixo vertical esquerdo do Gráfico 5.3, que é a recompensa que Azul recebe caso escolha proteger o porto Sul, no caso em que Vermelho com certeza não escolhe o mesmo porto ($q = 0$).

Essa mesma linha atinge um máximo de 1 no eixo direito do gráfico, representando a maior recompensa que Azul pode ter ao escolher o porto Sul, que é a recompensa obtida caso Vermelho escolha esse mesmo porto com certeza ($q = 1$).

A linha tracejada que desce da esquerda para a direita no Gráfico 5.3 mostra como varia a recompensa esperada de Azul, caso escolha o porto Norte, à medida que o valor de q aumenta. O mínimo dessa linha em -1 no eixo vertical direito do Gráfico 5.3 é a recompensa que Azul recebe se escolher o porto Norte no caso em que Vermelho, com certeza, escolhe o porto Sul ($q = 1$).

Já a mesma reta que representa a recompensa esperada de Azul caso ele escolha o porto Norte atinge o máximo em 1 no eixo esquerdo do Gráfico 5.3, representando a maior recompensa que Azul pode ter ao escolher o porto Norte: a recompensa obtida no caso em que Vermelho escolhe este porto com certeza ($q = 0$).

No Gráfico 5.3 temos também uma primeira abordagem das melhores respostas de Azul a cada possibilidade de estratégia mista de Vermelho, isto é, a cada valor de q que Vermelho pode adotar. Assim, se $q > \frac{1}{2}$, escolher o porto Sul sempre rende a Azul uma recompensa esperada maior do que escolher o porto Norte, como se pode inferir do fato de que a linha contínua (representando a recompensa esperada de Azul ao escolher o porto Sul) se encontra acima da linha tracejada (representando a recompensa esperada de Azul ao escolher o porto Norte) no Gráfico 5.3.

Por outro lado, se $q < \frac{1}{2}$, escolher o porto Norte sempre rende a Azul uma recompensa esperada maior do que escolher o porto Sul, como também se pode inferir do fato de que a linha tracejada se encontra acima da linha contínua no Gráfico 5.3. No caso em que $q = \frac{1}{2}$, é indiferente para Azul escolher entre o porto Sul e o porto Norte. Qualquer escolha dará a Azul a mesma recompensa esperada, como mostra o fato de que as duas linhas se cruzam quando $q = \frac{1}{2}$.

Podemos então afirmar que, para valores de q menores do que $\frac{1}{2}$, Azul deve escolher o porto Norte com certeza, o que maximizará o valor de sua recompensa esperada, dada a maior probabilidade de Vermelho escolher o mesmo

porto p
to Sul c
maior c

Estar
rias estr
entre p
dada a

No C
para ca
de degr
valor e

$p = 1$, c
Esse
Azul é
eixo ve
função
lher un
que qu

Vam
caso de
recomp
Azul co



porto para atacar. Para valores de q maiores do que $\frac{1}{2}$, Azul deve escolher o porto Sul com certeza, pois isso irá maximizar sua recompensa esperada, dada a maior chance de que Vermelho escolha esse mesmo porto.

Estamos agora em condições de analisar as melhores respostas de Azul às várias estratégias mistas de Vermelho, novamente apenas como uma combinação entre p e q . Podemos assim descrever graficamente a melhor resposta de Azul, dada a estratégia mista adotada por Vermelho (o valor de q) no Gráfico 5.4:

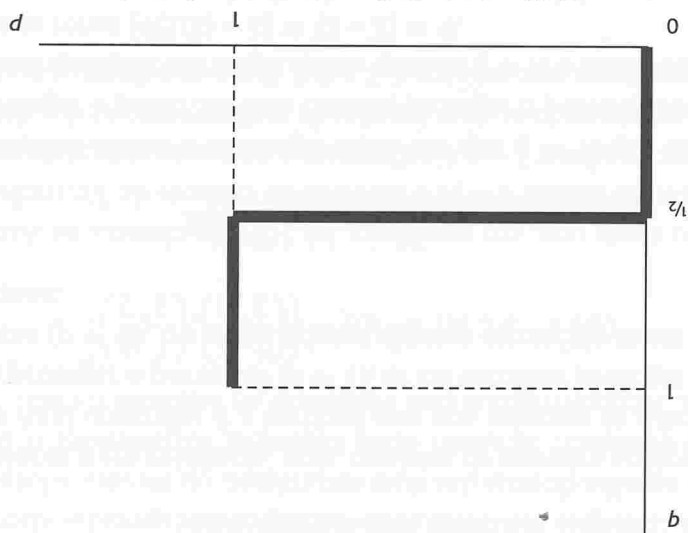


Gráfico 5.4 As Melhores Respostas de Azul

No Gráfico 5.4 temos o valor de p , que representa a melhor resposta de Azul para cada q que Vermelho pode adotar, assinalado pela linha cheia em forma de degrau de escada, que parte do valor em que $q = 0$, sobe verticalmente até o valor em que $q = \frac{1}{2}$, e segue horizontalmente a partir daí até o valor em que $p = 1$, de onde sobe verticalmente, paralela ao eixo de q .

Esse gráfico demonstra que, para valores de $q < \frac{1}{2}$, a melhor resposta de Azul é fazer $p = 0$, daí a função de melhor resposta de Azul coincide com o eixo vertical. Para $q > \frac{1}{2}$, a melhor resposta de Azul é fazer $p = 1$, quando a função sobe verticalmente. Se o valor de $q = \frac{1}{2}$, é indiferente para Azul escolher um ou outro porto: a função de melhor resposta é horizontal, indicando que qualquer valor de p , com $0 \leq p \leq 1$, é uma boa resposta a $q = \frac{1}{2}$.

Vamos analisar a situação em que $q = \frac{1}{2}$ da mesma forma que fizemos no caso de Vermelho. Para tanto, considere a expressão seguinte, que representa a recompensa esperada de Azul (REA) para qualquer estratégia mista que tanto Azul como Vermelho adotem:

da de Azul, Vermelho o valor de

5.3 mostra Sul, à medi- no (recom- squerdo do ger o porto o: ($q = 0$). o, represen- que é a re- za ($q = 1$). 5.3 mostra lorte, à me- vertical di- porto Norte 1).

ele escolha 3, represen- te: a recom- za ($q = 0$). elhores res- no, isto é, a her o porto : escolher o (represen- a encontra- azul ao esco-

zula uma re-

contínua no entre o por- pensa espe-

2, Azul deve sua recom- ar o mesmo



$$REA = pq(1) + p(1-q)(-1) + (1-p)q(-1) + (1-p)(1-q)(1)$$

De maneira análoga, como no caso da expressão para a recompensa esperada de Vermelho, tudo o que fizemos foi somar o produto das recompensas de Azul para cada combinação de estratégias, multiplicadas pelas probabilidades de que cada jogador adotasse cada uma das estratégias que compõem a combinação.

Simplificando a expressão obtemos:

$$REA = 4pq - 2p - 2q + 1$$

Vamos colocar p em evidência, pois, também de maneira análoga, p é a única variável que Azul controla: é a variável que nos informa se Azul vai escolher com certeza proteger o porto Sul ($p = 1$), se vai escolher proteger o porto Norte com certeza ($p = 0$), ou se vai adotar alguma estratégia mista ($0 < p < 1$). Assim, obtemos:

$$REA = p(4q - 2) - 2q + 1$$

Basta Vermelho adotar a estratégia mista em que $q = 1/2$ que será indiferente para Azul proteger o porto Sul com certeza, proteger o porto Norte com certeza, ou ainda adotar qualquer estratégia mista: quando $q = 1/2$ o termo entre parênteses na expressão se torna $[4(1/2) - 2] = (2 - 2) = 0$.

Com isso, p passa a ser multiplicado por zero, e também nesse caso se torna irrelevante para a determinação da recompensa esperada do batedor, pois sua recompensa esperada não é afetada por p e é sempre:

$$REA = -2q + 1 = -2(1/2) + 1 = -1 + 1 = 0$$

Chegamos então a um resultado análogo, no caso de Azul, ao que obtivemos na análise do comportamento da recompensa esperada de Vermelho. Assim como no caso de Vermelho, torna-se indiferente para Azul escolher proteger com certeza o porto Sul, escolher com certeza proteger o porto Norte, ou adotar uma estratégia mista, se Vermelho fizer $q = 1/2$.

O fato de que se tornou indiferente para Azul escolher um dos portos com certeza ou adotar uma estratégia mista significa também nesse caso que *não há nada que Azul possa fazer para surpreender Vermelho*. Em outros termos, no caso em que $q = 1/2$, Vermelho neutraliza qualquer vantagem que Azul possa ter, variando aleatoriamente o porto em que irá atacar.

Caso Vermelho decida implementar essa estratégia mista, em que $q = 1/2$, representamos esse fato da seguinte forma:

Onde,
a estratêg
da, o seg
jogada, e

Desse
 $p = q = 1$
dos jogad
babilidad
tratégia p
quer que

Signific
50% de c
50% de c
simplesm
tal como

No G
lho, enq



$$(q, 1 - q) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Onde, por convenção, o primeiro elemento do par ordenado que representa a estratégia mista é a probabilidade de a estratégia na primeira coluna ser jogada, o segundo elemento é a probabilidade de a estratégia na segunda coluna ser jogada, e assim por diante, caso o jogador possua mais de duas estratégias.

Desse modo, se ambos os jogadores adotarem estratégias mistas em que $p = q = 1/2$, temos um **equilíbrio em estratégias mistas**, no sentido que nenhum dos jogadores consegue melhorar suas recompensas esperadas alterando a probabilidade de escolha de uma das duas estratégias, ou mesmo adotando uma estratégia pura qualquer: nenhum deles consegue surpreender o outro, o que quer que faça. Representamos esse equilíbrio da seguinte forma:

$$((p, 1 - p), (q, 1 - q)) = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$$

Significando assim que, em equilíbrio, há 50% de chances de Azul adotar p e 50% de chances de adotar $1 - p$; e há 50% de chances de Vermelho adotar q e 50% de chances de adotar $1 - q$. Graficamente, podemos encontrar esse equilíbrio simplesmente superpondo as duas funções de melhor resposta dos dois jogadores, tal como se encontram nos gráficos 5.2 e 5.4. Foi o que fizemos no Gráfico 5.5:

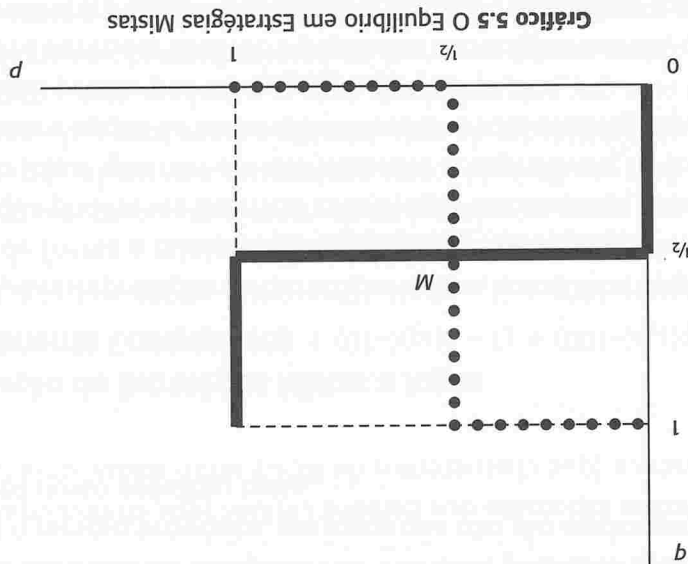


Gráfico 5.5 O Equilíbrio em Estratégias Mistas

No Gráfico 5.5, a linha tracejada é a função de melhor resposta de Vermelho, enquanto a linha cheia é a função de melhor resposta de Azul. Há apenas



um ponto no qual as duas funções se cruzam: o ponto M , em que $p = q = \frac{1}{2}$, que é o equilíbrio em estratégias mistas desse jogo. Na verdade, como fica evidente do exame do Gráfico 5.5, esse é o único ponto de equilíbrio do jogo: o jogo de prevenção de ataque é um jogo que tem apenas um equilíbrio, e em estratégias mistas.

Desse modo, o jogo de prevenção de ataque tem um único equilíbrio, que consiste em cada lado escolher o porto que é defendido ou atacado com probabilidades iguais, de forma que o inimigo não consiga antecipar qual o porto escolhido para a defesa ou o ataque. Ao se comportarem assim, os dois lados na guerra estarão obedecendo à máxima de Sun Tzu do início deste capítulo: contra os que sabem atacar, o inimigo ignora que local defender; contra os que sabem defender, o inimigo ignora que local atacar.

Na verdade, um jogo pode possuir equilíbrios em estratégias puras, equilíbrios em estratégias mistas e equilíbrios em estratégias mistas e puras. Veremos que o jogo da guerra fria é um jogo que possui equilíbrio em estratégias mistas e puras. Qual seria o tipo de jogo com equilíbrio apenas em estratégias puras? Nos exercícios deste capítulo o leitor poderá verificar por si mesmo que os jogos que têm equilíbrio em estratégias estritamente dominantes não têm equilíbrio em estratégias mistas.

Entretanto, a perspectiva pessimista (na medida em que busca a minimização de surpresas desagradáveis) que norteia a escolha de estratégias mistas não se limita a jogos estritamente competitivos. Também podemos aplicar estratégias mistas, com o mesmo propósito, em jogos que não são estritamente competitivos. Esse será nosso próximo tema.

Uma Aplicação de Estratégias Mistas a Jogos Não Estrictamente Competitivos

Na verdade, a interpretação de estratégias mistas como uma opção estratégica pessimista, de forma a minimizar perdas, ultrapassa as situações de interação estratégica que podem ser descritas como jogos estritamente competitivos. Na verdade, em jogos que não são estritamente competitivos, os jogadores também podem ter a opção de variar aleatoriamente suas estratégias, de modo a reduzir eventuais perdas por serem pegos desprevenidos.

Assim, para entender melhor o papel das estratégias mistas, quando os jogadores escolherem jogar “dos males o menor”, considere mais uma vez o jogo da guerra fria, da Figura 5.2, aqui reproduzido novamente como a Figura 5.6:

Estados

Ameaça

Não An

O lei
descreit
ver, ess
Ameaç

O pr
que po
çar, e c
chance
do que
ajudar

Para
5.6. Ne
com pr
Da me
probab
de (1 -

As r
da Uni
mente,

RE

RE

A qu
cada jc
encont
menos
ou qua
em est
petitiv