



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PQI 3301 – FENÔMENOS DE TRANSPORTE II

APOSTILA ④ – Condução em Regime Transiente

Prof. Jorge A. W. Gut

Prof. José Luís de Paiva

Versão 2019

Conteúdo

1.	CONDUÇÃO TRANSIENTE DE CALOR	2
1.1	Geometrias de sólido plano, cilindro longo e esfera	2
1.2	Geometria do sólido semi-infinito	15
1.3	Outras geometrias (condução multidirecional)	19
1.4	Simplificações para a condição transiente	21
2.	EXERCÍCIOS	22
3.	SÍMBOLOS.....	28
4.	BIBLIOGRAFIA	29

Produção 2013: Caio Luca Joppert, bolsista do Programa de Estímulo ao Ensino de Graduação (PEEG) da Pró-Reitoria de Graduação da USP.

Revisão 2015: Yuri Nascimento Nariyoshi, bolsista do Programa de Aperfeiçoamento de Ensino (PAE) da CAPES.

1. CONDUÇÃO TRANSIENTE DE CALOR

Nesta apostila é explorado o transporte de energia térmica em um corpo sólido por condução em regime transiente. Neste caso, o balanço microscópico de energia térmica se resume aos termos de acúmulo e de difusão, já que não há escoamento ou geração de calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T - \alpha \cdot \nabla^2 T - \frac{\dot{q}_V}{\rho \cdot c_p} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \cdot \nabla^2 T = 0$$

É considerado o caso geral de um corpo sólido trocando calor com as vizinhanças por convecção, tendo como volume de controle o sólido. O transporte de energia térmica no interior do sólido depende de sua geometria e nesta apostila são analisadas as geometrias mais comuns, como sólido plano, cilindro e esfera.

Há casos em que a energia é transportada por condução no interior do sólido em uma velocidade muito superior àquela da troca por convecção nas suas fronteiras, de forma que é possível assumir que a temperatura do sólido é praticamente uniforme, o que simplifica muito a análise, conforme será discutido adiante.

1.1 Geometrias de sólido plano, cilindro longo e esfera

Considera-se inicialmente um sólido plano de espessura $2L$ com temperatura inicial uniforme T_i . Esta placa é colocada em contato com um meio fluido frio com temperatura constante T_∞ (temperatura do meio fluido afastado do sólido). Sendo as áreas das faces superior e inferior da placa muito grandes em relação à área de sua borda lateral, pode-se desprezar o calor trocado pela borda, assumindo-a adiabática. Nesta situação, o transporte de calor no interior do sólido será unidirecional:

$$q \approx q(x, t) \quad \text{e} \quad T \approx T(x, t)$$

Considera-se ainda que o coeficiente de convecção seja igual nas duas faces do sólido plano, originando um problema simétrico. A **Figura 1** apresenta três possíveis dinâmicas de resfriamento do sólido até atingir a temperatura do meio fluido T_∞ . No caso I, a velocidade de retirada de energia por convecção é muito inferior à velocidade de dispersão de energia no interior do sólido fazendo com que a sua temperatura seja quase uniforme. No caso III tem-se a situação oposta, de forma que a temperatura na superfície do sólido fica próxima a T_∞ , enquanto o sólido apresenta um elevado gradiente de temperatura. O caso II retrata um comportamento intermediário.

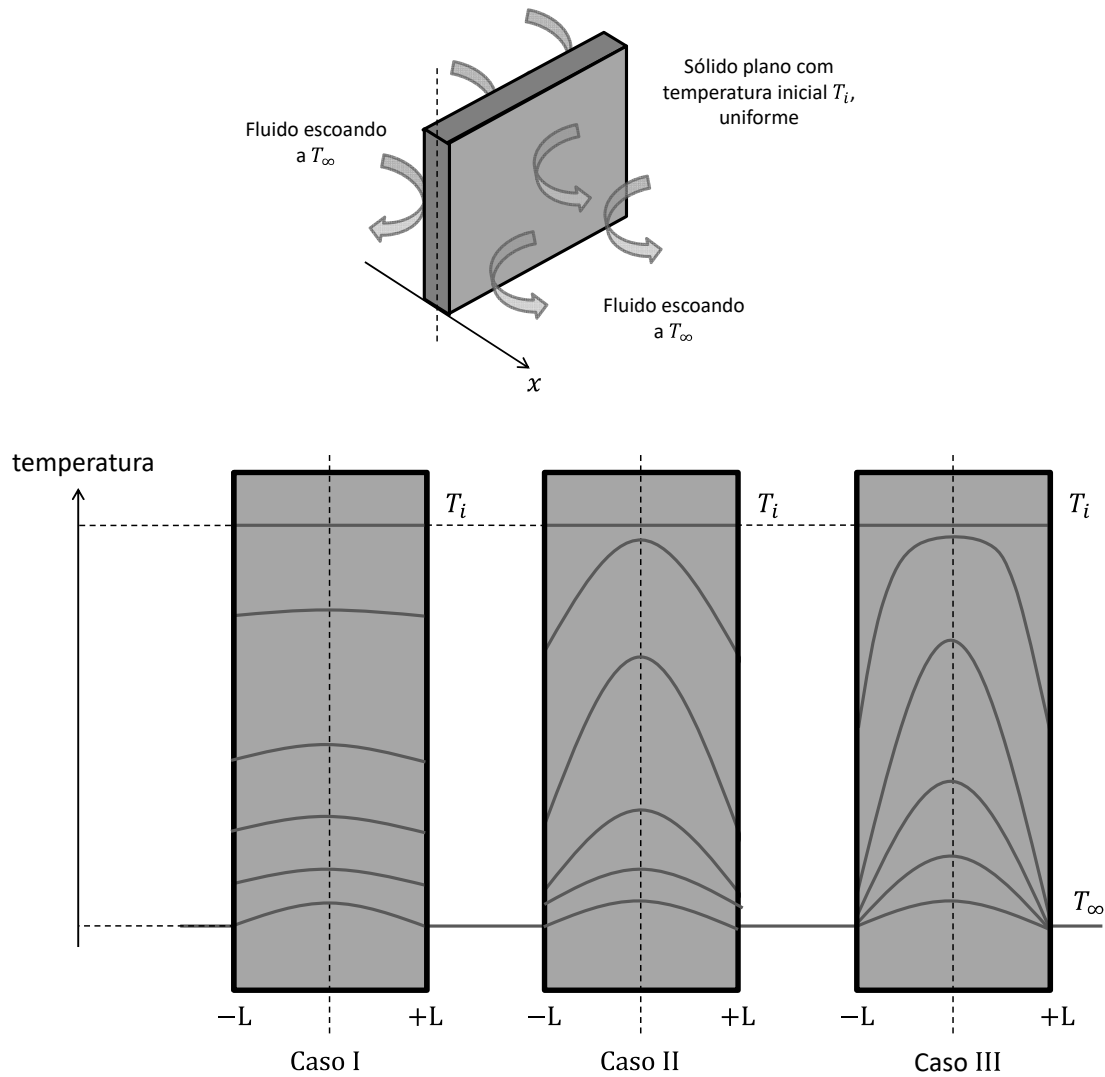


Figura 1: Condução transiente unidimensional em um sólido plano com diferentes dinâmicas.

A dinâmica da condução transiente está ligada à relação entre a resistência térmica de condução no interior do sólido e a resistência térmica de convecção na sua superfície de troca. A razão entre estas resistências é denominada Número de Biot. No caso do sólido plano de espessura $2L$, considerando apenas metade da simetria ($0 \leq x \leq L$), tem-se:

$$Bi = \frac{R_{term,cond}}{R_{term,conv}} = \frac{L}{k A_x} \frac{h A_s}{1} = \frac{h L}{k}$$

lembrando que a área relativa ao transporte condutivo A_x é igual a área superficial de uma face do sólido para convecção A_s .

Para o caso geral, o número de Biot é definido em relação à dimensão característica do sólido, $L_c = \text{Volume}/\text{Área superficial}$.

$$Bi = \frac{h L_c}{k}$$

É simples verificar que $L_c = L$ para um sólido plano (desprezando as bordas), $L_c = R/2$ para um cilindro longo (desprezando as tampas) e $L_c = R/3$ para uma esfera.

Quanto menor for o número de Biot, maior é a velocidade de dispersão de energia no interior do sólido. Considera-se que para $Bi < 0,1$ é aceitável a hipótese de *temperatura uniforme no interior do sólido*, pois o gradiente de temperatura é pequeno. Esta hipótese simplifica muito os cálculos, já que temperatura do sólido pode ser considerada como função exclusiva do tempo: $T(t)$. Neste caso, não é necessário aplicar o balanço diferencial de energia térmica, sendo um balanço global de energia térmica no sólido suficiente.

Para o caso de um sólido genérico perdendo calor por convecção para um meio fluido na condição de $Bi < 0,1$, o balanço global de energia térmica fica:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= -q_{conv} \\ \frac{d(mc_p T)}{dt} &= -h \cdot A_S \cdot (T - T_\infty) \\ \frac{dT}{dt} &= -\frac{h \cdot A_S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot (T - T_\infty)\end{aligned}$$

Uma forma alternativa para chegar nesta equação consiste em o aplicar o balanço diferencial de energia térmica no sólido, assumir que o gradiente de temperatura é desprezível e tratar, artificialmente, a perda de calor por convecção como um “consumo” de energia térmica:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla T - \alpha \nabla^2 T - \frac{\dot{q}_V}{\rho c_p} &= 0 \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{\rho c_p} \left(\frac{-q_{conv}}{V} \right) \\ \frac{dT}{dt} &= -\frac{h \cdot A_S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot (T - T_\infty)\end{aligned}$$

Integrando do estado inicial com temperatura T_i até um estado no instante t :

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left(-\frac{h \cdot A_S}{\rho \cdot V \cdot c_p} t\right)$$

OBS: para integrar fazer $\theta = (T - T_\infty)$ e $d\theta = dT$.

A taxa do decaimento exponencial depende da razão entre hA (transferência de energia térmica por convecção) e $\rho V c_p$ (acúmulo de energia térmica no VC). Expressando a velocidade do decaimento em função de Bi , tem-se o desenvolvimento:

$$\frac{h \cdot A_S}{\rho \cdot V \cdot c_p} t = \frac{h \cdot A_S}{\rho \cdot L_c \cdot A_S \cdot c_p} t \cdot \frac{L_c \cdot k}{L_c \cdot k} = \frac{h \cdot L_c}{k} \cdot \frac{k}{\rho \cdot c_p} \cdot \frac{t}{L_c^2} = \frac{h \cdot L_c}{k} \cdot \frac{\alpha \cdot t}{L_c^2}$$

O termo que surge da manipulação matemática é o Número de Fourier, que é equivalente a um tempo adimensional:

$$Fo = \frac{\alpha t}{L_c^2}$$

Definindo a temperatura adimensional do sólido como:

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

tem-se a forma adimensional da equação de temperatura, que é válida tanto para o aquecimento quanto para o resfriamento de um sólido por convecção:

$$\theta^* = e^{-Bi.Fo}$$

Voltando ao problema do sólido plano (**Figura 1**), mas sem adotar a hipótese de temperatura uniforme, o balanço microscópico de energia térmica pode ser expresso como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Como este é um problema simétrico, é considerada apenas metade do sólido como volume de controle ($0 \leq x \leq L$). Condições necessárias para resolver esta equação diferencial: duas condições de contorno (em x) e uma condição inicial (no tempo):

- Temperatura no instante inicial: $T(x, 0) = T_i$
- Troca por convecção na face do sólido: $-k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h \cdot (T(L, t) - T_\infty)$
- Condição de simetria: $\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$

Expressando a equação diferencial usando as variáveis adimensionais θ^* para temperatura, $Fo_L = \frac{\alpha t}{L^2}$ para tempo e $x^* = \frac{x}{L}$ para espaço, tem-se:

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial Fo_L} = \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}}$$

A solução exata desta equação diferencial para as condições de contorno dadas é:

$$\theta^*(x^*, Fo_L) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\lambda_n^2 \cdot Fo_L) \cos(\lambda_n x^*)$$

$$C_n = \frac{4 \sin(\lambda_n)}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)}$$

Esta solução é válida para os casos de aquecimento ou de resfriamento do sólido plano por convecção. As variáveis λ_n (em radianos) são as n raízes da seguinte equação que depende de $Bi_L = \frac{hL}{k}$. Estas raízes podem ser determinadas por meio de métodos numéricos de solução.

$$\lambda_n \tan(\lambda_n) = Bi_L$$

Note que os adimensionais Biot e Fourier carregam o índice 'L' nesta solução. Isso significa que o comprimento característico L_C foi substituído pela meia espessura da placa, L . Para uma placa plana não há diferença, já que $L_C = L$, mas em sistemas radiais o uso ou não do índice faz diferença.

Para ilustrar a solução deste problema, a **Figura 2** apresenta a evolução da temperatura adimensional no plano central da placa ($x^* = 0$) ao longo do tempo adimensional para diferentes valores de Bi_L . Já a **Figura 3** traz a temperatura na superfície da placa em função do tempo e de Biot.

Note nestas figuras que para valores baixos de Biot, há pouca diferença entre a temperatura no centro e na superfície, ou seja, pode ser considerada a hipótese de temperatura uniforme discutida anteriormente. Note também que para valores altos de Biot, há uma grande variação de temperatura entre o centro e a superfície e que a temperatura da superfície rapidamente tende a T_∞ .

Os termos do somatório na função $\theta^*(x^*, Fo_L)$ diminuem em módulo com o avanço de n . Portanto, calculam-se os termos sequencialmente até atingir a precisão numérica desejada. Quanto menor for o valor de Fourier, mais termos do somatório são necessários, já que aproxima-se do instante $t = 0$ que representa uma descontinuidade (início do estado transiente). Por exemplo, para fazer as **Figuras 2 e 3** com $Fo_L > 0,01$, optou-se por avançar até $n = 10$ para garantir uma precisão mínima de 10^{-4} em θ^* .

Sabe-se que para $Fo_L > 0,2$, pode-se adotar apenas o primeiro termo do somatório ($n = 1$) com uma precisão da ordem de 10^{-2} em θ^* . Neste caso, a equação pode ser simplificada como:

$$\theta^*(x^*, Fo_L) = C_1 \exp(-\lambda_1^2 \cdot Fo_L) \cos(\lambda_1 x^*)$$

$$C_1 = \frac{4 \sin(\lambda_1)}{2\lambda_1 + \sin(2\lambda_1)}$$

Para $x^* = 0$ (plano médio da placa), define-se $\theta_0^* = \theta^*(x^*=0, Fo_L)$:

$$\theta_0^* = C_1 \exp(-\lambda_1^2 \cdot Fo_L)$$

que é função exclusiva do tempo. Então, pode-se representar a dependência da temperatura com a posição desta forma:

$$\theta^* = \theta_0^* \cdot \cos(\lambda_1 x^*)$$

Esta representação é útil por separar a dependência da temperatura no tempo e na posição.

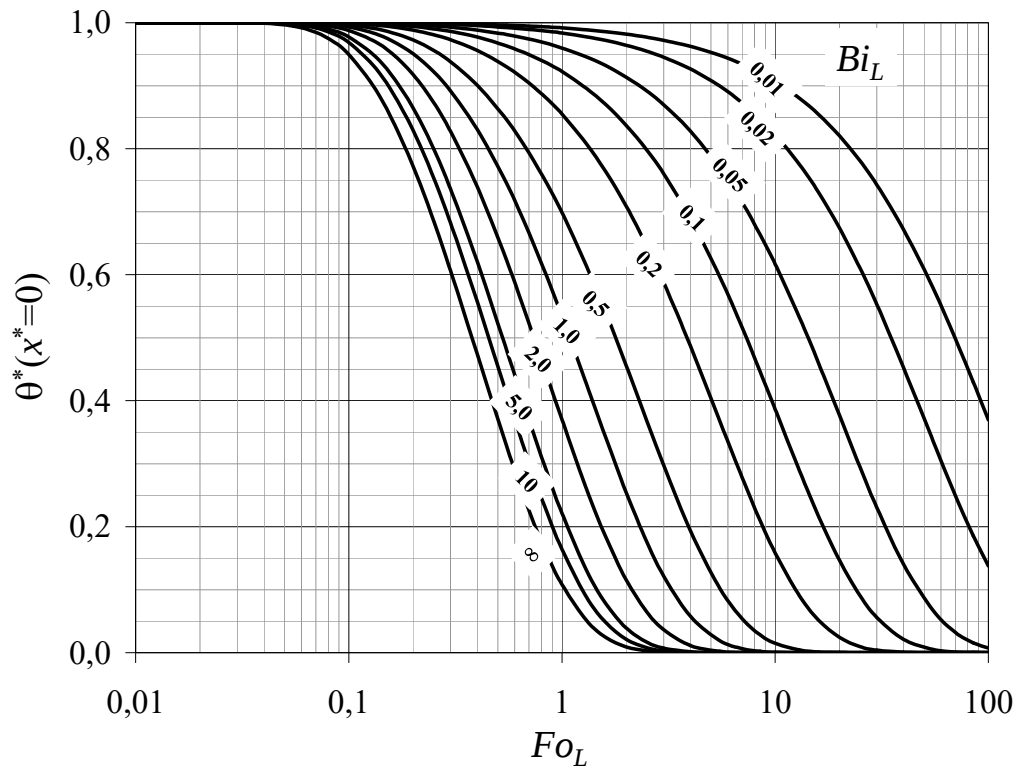


Figura 2: Temperatura central de um sólido plano em condução transiente unidirecional (GUT e SONG, 2015).

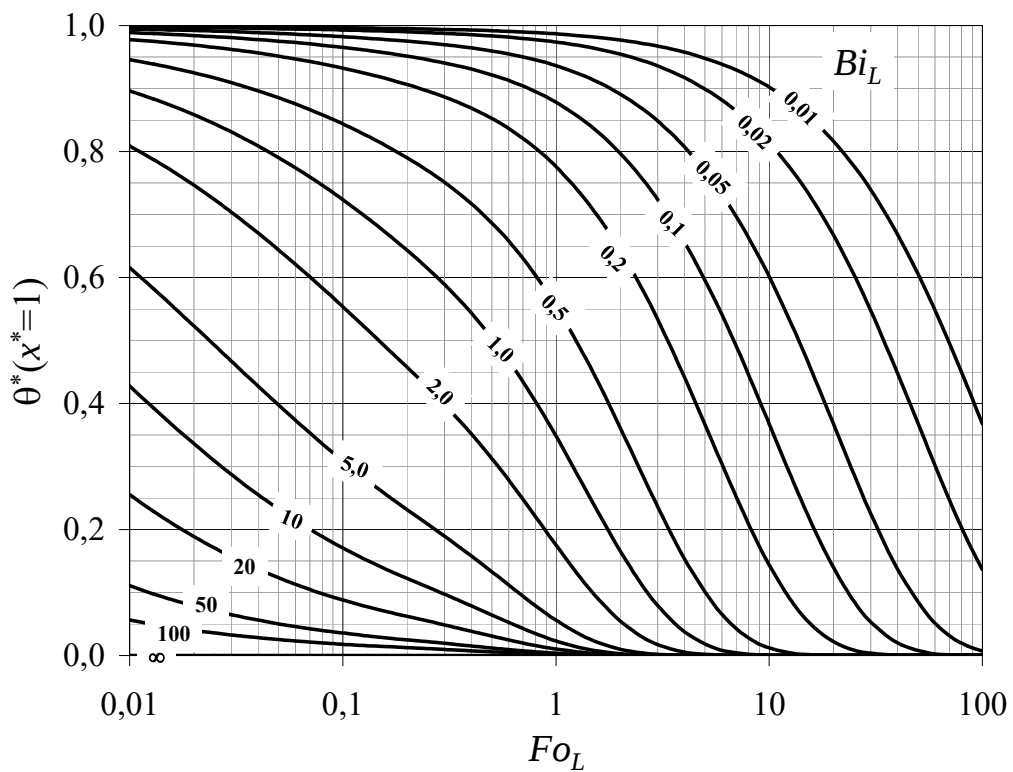


Figura 3: Temperatura superficial de um sólido plano sujeito à condução transiente unidirecional (GUT e SONG, 2015).

Além da temperatura, pode-se ter interesse em conhecer a quantidade de energia transferida entre o sólido e o meio fluido em função do tempo, $Q(t)$. Esta variável é definida como a diferença entre a energia térmica armazenada no sólido entre um instante t e o instante inicial:

$$Q = E(t) - E(0)$$

$$Q = \int c_p \cdot T(x, t) \cdot dm - M \cdot c_p \cdot T_i$$

$$Q = \rho c_p \int (T(x, t) - T_i) \cdot dV$$

Para adimensionalizar o problema, divide-se a equação acima pela quantidade de energia trocada até o sistema atingir o equilíbrio térmico com o meio fluido após um tempo muito longo, ou seja, temperatura do sólido uniforme e igual a T_∞ : $Q_\infty = \rho c_p V (T_\infty - T_i)$. Tem-se:

$$Q^* = \frac{Q}{Q_\infty} = \int \left(\frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i} \right) \cdot \frac{dV}{V} = \int (1 - \theta^*) \cdot \frac{dV}{V}$$

No caso do sólido plano, a equação pode ser integrada facilmente considerando $Fo > 0,2$. Para esta geometria, $V = 2 \cdot L \cdot A_x$ e $dV = dx \cdot A_x = dx^* \cdot L \cdot A_x$. Então $dV/V = dx^*/2$. Integrando para metade da placa ($0 \leq x^* \leq 1$) e multiplicando por 2:

$$Q^* = 2 \cdot \int_0^1 (1 - \theta_0^* \cdot \cos(\lambda_1 x^*)) \frac{dx^*}{2} = 1 - \frac{\sin(\lambda_1)}{\lambda_1} \theta_0^*$$

Um estudo análogo pode ser aplicado para um sólido cilíndrico com raio R que seja longo o suficiente para desprezar a troca térmica que ocorre em suas tampas. Neste caso, pode-se adotar um sistema de coordenadas cilíndricas e assumir condução unidirecional dentro do sólido (transporte somente na direção r , desprezando os gradientes de temperatura nas direções z e ϕ). Neste caso, a solução do balanço diferencial de energia térmica fornece:

$$\theta^*(r^*, Fo_R) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\lambda_n^2 \cdot Fo_R) J_0(\lambda_n r^*)$$

$$C_n = \frac{2}{\lambda_n} \cdot \frac{J_1(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n) + J_1^2(\lambda_n)}$$

em que dimensão radial foi adimensionalizada como $r^* = \frac{r}{R}$ e λ_n são as raízes da seguinte equação:

$$\lambda_n \cdot \frac{J_1(\lambda_n)}{J_0(\lambda_n)} = Bi_R$$

Nestas equações, $J_0(x)$ e $J_1(x)$ são funções de Bessel de primeira espécie de ordens 0 e 1, respectivamente (pesquise o que são estas funções matemáticas). Valores destas funções são apresentados na **Tabela 1** e na **Figura 4** em função de uma variável genérica x .

Para esta solução analítica, foram utilizados os números de Biot e Fourier baseados no raio do cilindro e não na dimensão característica do sólido, ou seja:

$$Bi_R = \frac{h R}{k} \qquad Fo_R = \frac{\alpha t}{R^2}$$

Tabela 1: Funções de Bessel de primeira espécie com ordens 0 e 1.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0,00	1,0000	0,0000	3,15	-0,3066	0,2813
0,15	0,9944	0,0748	3,30	-0,3443	0,2207
0,30	0,9776	0,1483	3,45	-0,3727	0,1583
0,45	0,9500	0,2194	3,60	-0,3918	0,0955
0,60	0,9120	0,2867	3,75	-0,4014	0,0332
0,75	0,8642	0,3492	3,90	-0,4018	-0,0272
0,90	0,8075	0,4059	4,05	-0,3934	-0,0849
1,05	0,7428	0,4559	4,20	-0,3766	-0,1386
1,20	0,6711	0,4983	4,35	-0,3520	-0,1876
1,35	0,5937	0,5325	4,50	-0,3205	-0,2311
1,50	0,5118	0,5579	4,65	-0,2830	-0,2682
1,65	0,4268	0,5743	4,80	-0,2404	-0,2985
1,80	0,3400	0,5815	4,95	-0,1938	-0,3216
1,95	0,2528	0,5794	5,10	-0,1443	-0,3371
2,10	0,1666	0,5683	5,25	-0,0931	-0,3450
2,25	0,0827	0,5484	5,40	-0,0412	-0,3453
2,40	0,0025	0,5202	5,55	0,0102	-0,3383
2,55	-0,0729	0,4843	5,70	0,0599	-0,3241
2,70	-0,1424	0,4416	5,85	0,1071	-0,3034
2,85	-0,2051	0,3928	6,00	0,1506	-0,2767
3,00	-0,2601	0,3391	6,15	0,1898	-0,2446

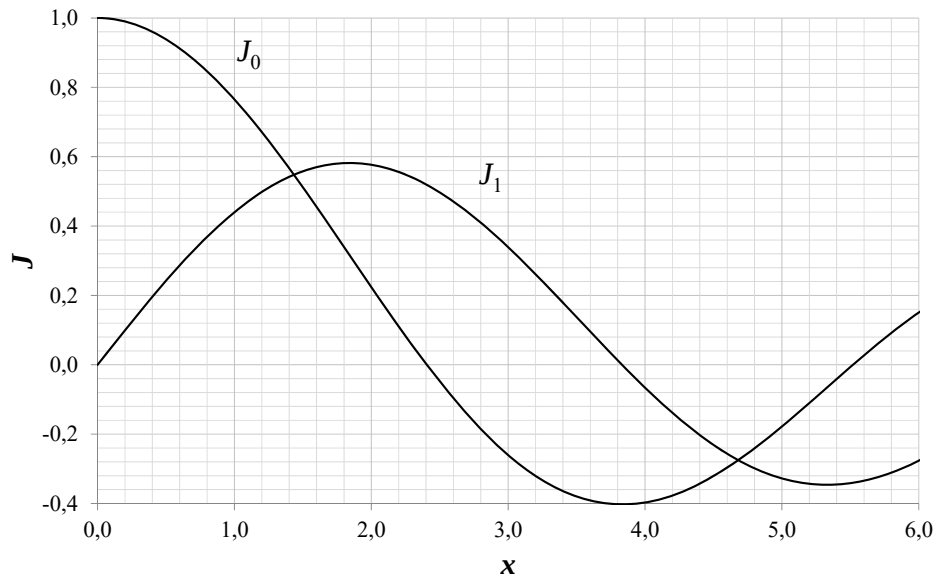


Figura 4: Funções de Bessel de primeira espécie com ordens 0 e 1.

As temperaturas no centro e na superfície do cilindro longo em função do tempo e do Número de Biot são apresentadas nas **Figuras 5 e 6**. Para estes gráficos foram usados os 10 primeiros termos do somatório em $\theta^*(r^*, Fo_R)$.

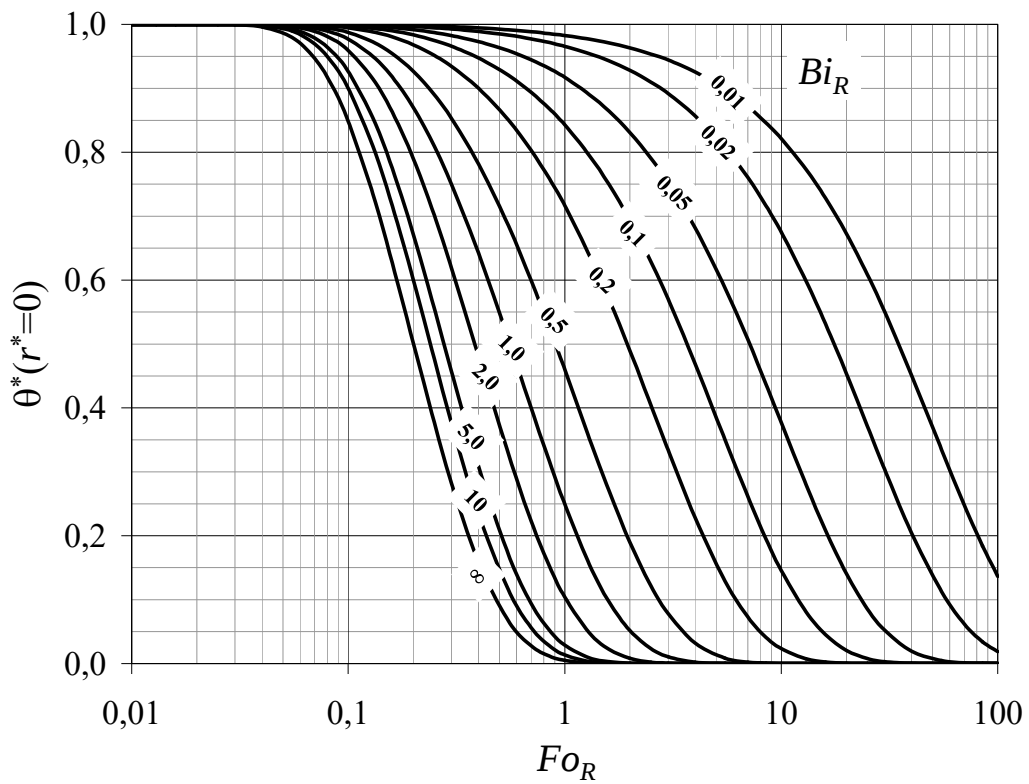


Figura 5: Temperatura central de um cilindro longo sujeito à condução transiente unidirecional (GUT e SONG, 2015).

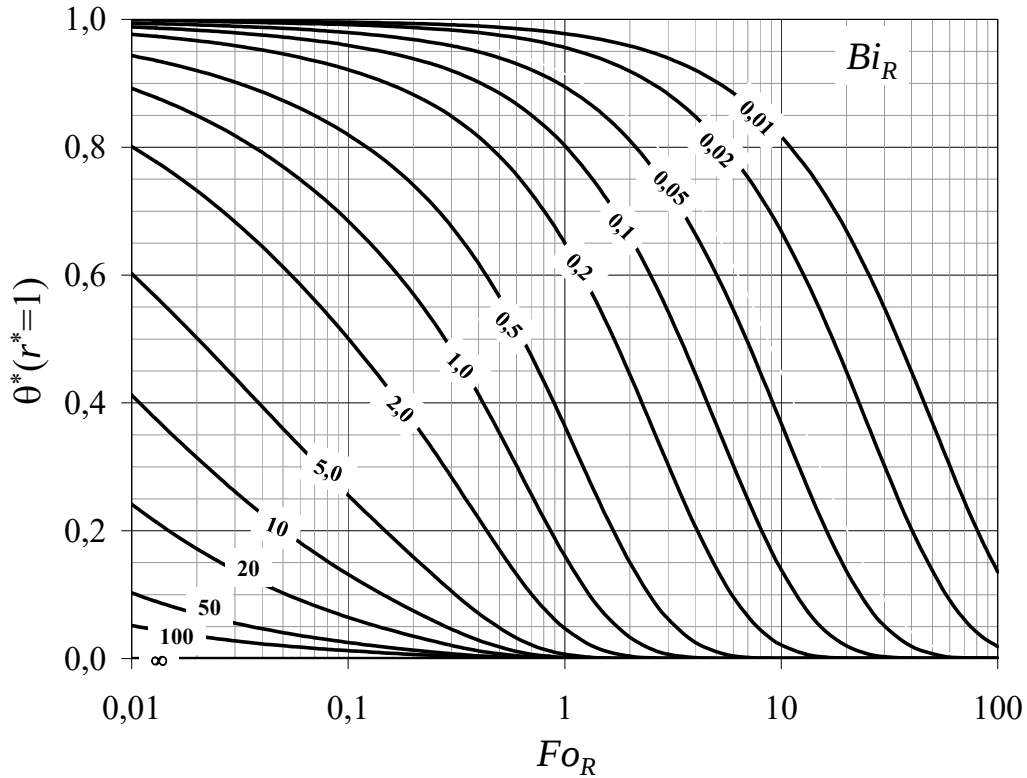


Figura 6: Temperatura superficial de um cilindro longo sujeito à condução transiente unidirecional (GUT e SONG, 2015).

No caso de um sólido esférico trocando calor com um meio fluido com coeficiente convectivo uniforme h , pode-se adotar um sistema de coordenadas esféricas e assumir também condução unidirecional (transporte somente na direção r). Neste caso a solução é:

$$\theta^*(r^*, Fo_R) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\lambda_n^2 \cdot Fo_R) \frac{\text{sen}(\lambda_n r^*)}{\lambda_n r^*}$$

$$C_n = \frac{4 \text{sen}(\lambda_n) - 4 \cdot \lambda_n \cos(\lambda_n)}{2\lambda_n - \text{sen}(2\lambda_n)}$$

sendo que λ_n (radianos) são as raízes da seguinte equação:

$$1 - \lambda_n \cot(\lambda_n) = Bi_R$$

As temperaturas no centro e na superfície da esfera em função do tempo e do Número de Biot são apresentadas nas **Figuras 7 e 8**.

A **Tabela 2** e as **Figuras 9 e 10** apresentam as raízes λ_1 e λ_2 para as três geometrias estudadas. A Tabela deve ser interpolada linearmente de acordo com o número de Biot.

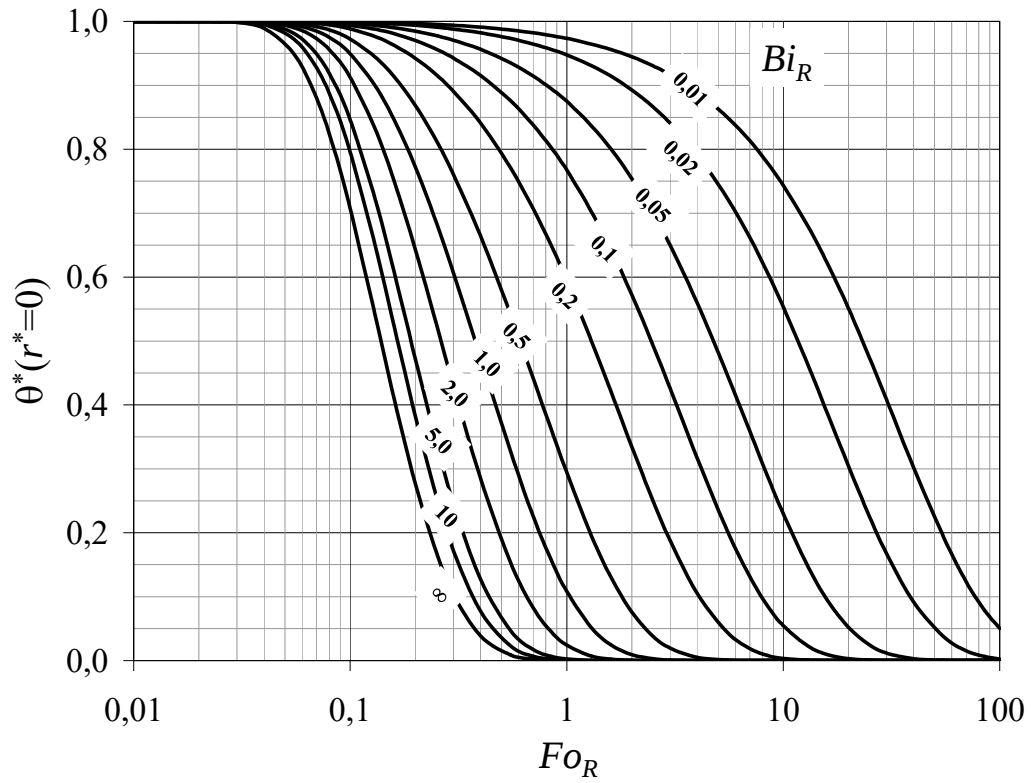


Figura 7: Temperatura central de uma esfera sujeita à condução transiente unidirecional (GUT e SONG, 2015).

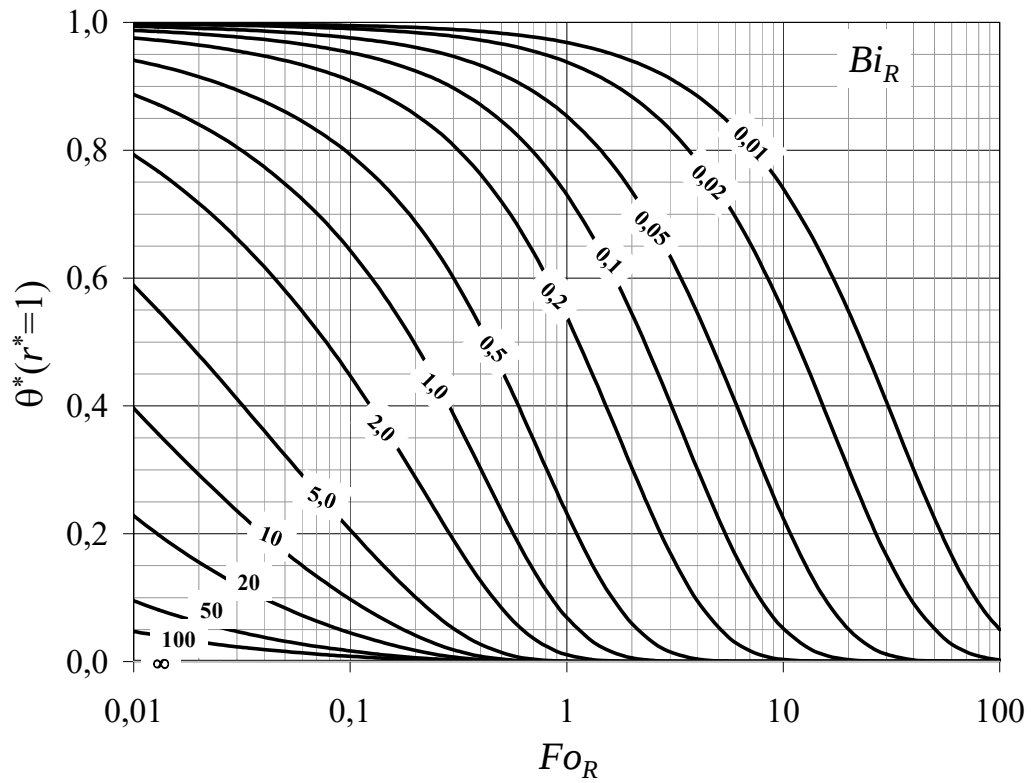


Figura 8: Temperatura superficial de uma esfera sujeita à condução transiente unidirecional (GUT e SONG, 2015).

Tabela 2: Primeira e segunda raízes da equação transcendental para a solução do problema de condução transiente unidirecional.

	Placa plana		Cilindro longo		Esfera	
Bi_L ou Bi_R	λ_1 (rad)	λ_2 (rad)	λ_1 (rad)	λ_2 (rad)	λ_1 (rad)	λ_2 (rad)
0	0,0000	3,1416	0,0000	3,8317	0,0000	4,4934
0,001	0,0316	3,1419	0,0447	3,8320	0,0548	4,4936
0,002	0,0447	3,1422	0,0632	3,8322	0,0774	4,4939
0,004	0,0632	3,1429	0,0894	3,8327	0,1095	4,4943
0,005	0,0707	3,1432	0,0999	3,8330	0,1224	4,4945
0,006	0,0774	3,1435	0,1095	3,8333	0,1341	4,4947
0,008	0,0893	3,1441	0,1264	3,8338	0,1548	4,4952
0,01	0,0998	3,1448	0,1412	3,8343	0,1730	4,4956
0,02	0,1410	3,1479	0,1995	3,8369	0,2445	4,4979
0,04	0,1987	3,1543	0,2814	3,8421	0,3450	4,5023
0,05	0,2218	3,1574	0,3143	3,8447	0,3854	4,5045
0,06	0,2425	3,1606	0,3438	3,8473	0,4217	4,5068
0,08	0,2791	3,1668	0,3960	3,8525	0,4860	4,5112
0,1	0,3111	3,1731	0,4417	3,8577	0,5423	4,5157
0,2	0,4328	3,2039	0,6170	3,8835	0,7593	4,5379
0,3	0,5218	3,2341	0,7465	3,9091	0,9208	4,5601
0,4	0,5932	3,2636	0,8516	3,9344	1,0528	4,5822
0,5	0,6533	3,2923	0,9408	3,9594	1,1656	4,6042
0,6	0,7051	3,3204	1,0184	3,9841	1,2644	4,6261
0,7	0,7506	3,3477	1,0873	4,0085	1,3525	4,6479
0,8	0,7910	3,3744	1,1490	4,0325	1,4320	4,6696
0,9	0,8274	3,4003	1,2048	4,0562	1,5044	4,6911
1,0	0,8603	3,4256	1,2558	4,0795	1,5708	4,7124
1,5	0,9882	3,5422	1,4569	4,1902	1,8366	4,8158
2	1,0769	3,6436	1,5994	4,2910	2,0288	4,9132
3	1,1925	3,8088	1,7887	4,4634	2,2889	5,0870
4	1,2646	3,9352	1,9081	4,6018	2,4556	5,2329
5	1,3138	4,0336	1,9898	4,7131	2,5704	5,3540
6	1,3496	4,1116	2,0490	4,8033	2,6537	5,4544
7	1,3766	4,1746	2,0937	4,8772	2,7165	5,5378
8	1,3978	4,2264	2,1286	4,9384	2,7654	5,6078
9	1,4149	4,2694	2,1566	4,9897	2,8044	5,6669
10	1,4289	4,3058	2,1795	5,0332	2,8363	5,7172
15	1,4729	4,4255	2,2509	5,1773	2,9349	5,8852
20	1,4961	4,4915	2,2880	5,2568	2,9857	5,9783
30	1,5202	4,5615	2,3261	5,3410	3,0372	6,0766
40	1,5325	4,5979	2,3455	5,3846	3,0632	6,1273
50	1,5400	4,6202	2,3572	5,4112	3,0788	6,1582
60	1,5451	4,6353	2,3651	5,4291	3,0893	6,1788
80	1,5514	4,6543	2,3750	5,4516	3,1023	6,2048
100	1,5552	4,6658	2,3809	5,4652	3,1102	6,2204
200	1,5630	4,6889	2,3928	5,4926	3,1259	6,2518
500	1,5677	4,7030	2,4000	5,5090	3,1353	6,2706
700	1,5686	4,7057	2,4014	5,5122	3,1371	6,2742
1,000	1,5692	4,7077	2,4024	5,5146	3,1385	6,2769
∞	1,5708	4,7124	2,4048	5,5201	3,1416	6,2832

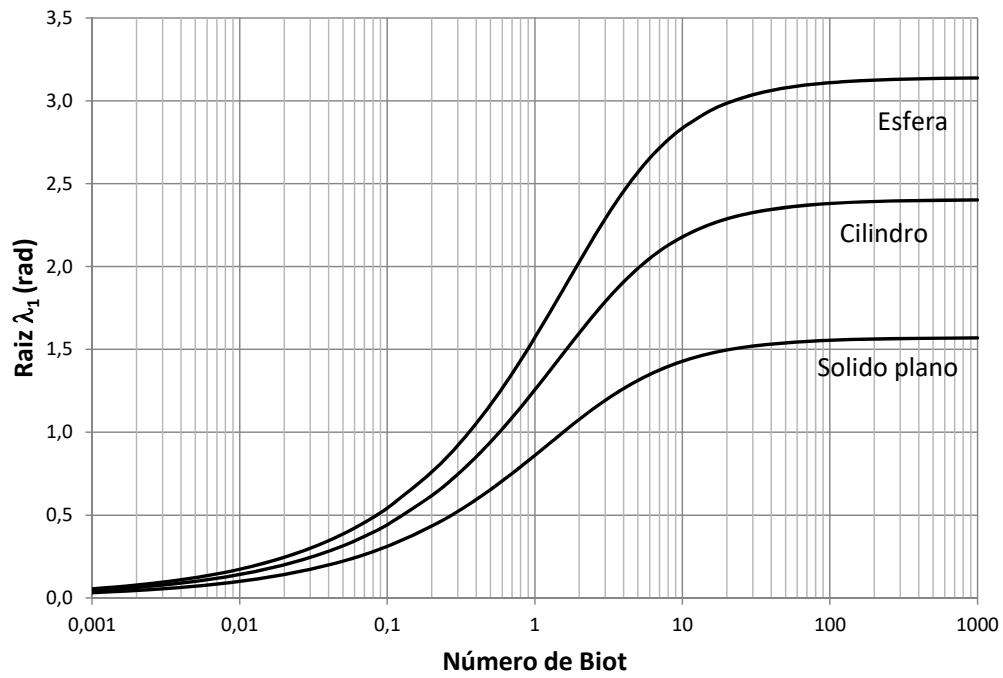


Figura 9: Primeira raiz da equação transcendental para a solução do problema de condução transiente unidirecional.

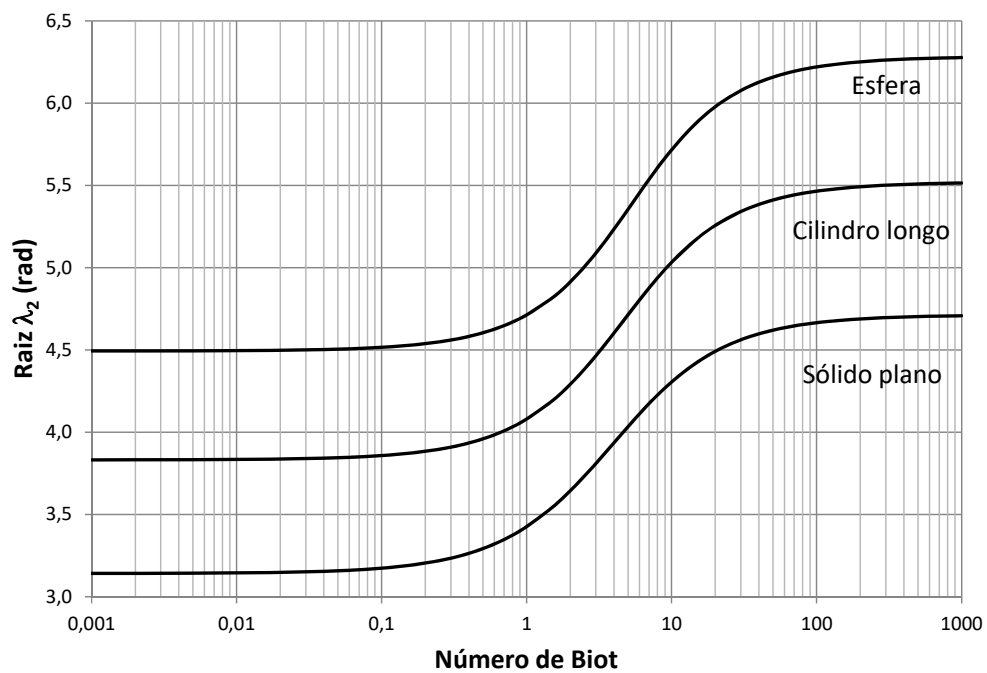


Figura 10: Segunda raiz da equação transcendental para a solução do problema de condução transiente unidirecional.

Para as três geometrias abordadas (sólido plano, cilindro longo e esfera), pode-se adotar somente o primeiro termo da somatória quando $Fo_L > 0,2$ ou $Fo_R > 0,2$. Para este caso, a **Tabela 3** sumariza as equações de condução unidirecional em estado transiente.

Tabela 3: Resultados dos problemas de condução transiente unidirecional para a condição de Número de Fourier (Fo_L ou Fo_R) superior a 0,2.

Geometria	Sólido plano de espessura $ 2L $	Cilindro longo de raio $ R $	Esfera de raio $ R $
$ \theta_0^* $	$ C_1 \cdot \exp(-\lambda_1^2 \cdot Fo_L) $	$ C_1 \cdot \exp(-\lambda_1^2 \cdot Fo_R) $	$ C_1 \cdot \exp(-\lambda_1^2 \cdot Fo_R) $
$ \theta^* $	$ \theta_0^* \cdot \cos(\lambda_1 x^*) $	$ \theta_0^* \cdot J_0(\lambda_1 r^*) $	$ \theta_0^* \cdot \frac{\text{sen}(\lambda_1 r^*)}{\lambda_1 r^*} $
$ C_1 $	$ \frac{4 \text{sen}(\lambda_1)}{2\lambda_1 + \text{sen}(2\lambda_1)} $	$ \frac{2}{\lambda_1} \cdot \frac{J_1(\lambda_1)}{J_0^2(\lambda_1) + J_1^2(\lambda_1)} $	$ \frac{4 \text{sen}(\lambda_1) - 4 \lambda_1 \cos(\lambda_1)}{2\lambda_1 - \text{sen}(2\lambda_1)} $
$ Q^* $	$ 1 - \frac{\text{sen}(\lambda_1)}{\lambda_1} \theta_0^* $	$ 1 - \frac{2 \cdot J_1(\lambda_1)}{\lambda_1} \theta_0^* $	$ 1 - \frac{3 \cdot [\text{sen}(\lambda_1) - \lambda_1 \cos(\lambda_1)]}{\lambda_1^3} \theta_0^* $

1.2 Geometria do sólido semi-infinito

Uma geometria útil para o estudo da condução transiente em sólidos é a de “sólido semi-infinito” (**Figura 11**). Trata-se de uma superfície plana que troca calor com um meio fluido sendo que a temperatura do sólido, em uma posição x bem afastada da superfície de troca, permanece inalterada. Para sólidos finitos planos, a hipótese de sólido semi-infinito pode ser adotada para os primeiros instantes após o contato do sólido com o meio fluido quente ou frio (dependendo das dimensões), quando a troca de calor é ainda superficial.

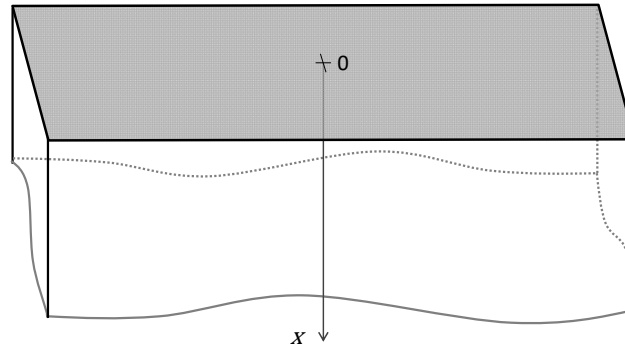


Figura 11: Representação do sólido semi-infinito. A superfície cinza representa a superfície de troca de calor por convecção.

Desenvolvendo o balanço microscópico de energia térmica (transiente e unidirecional):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T - \alpha \nabla^2 T - \frac{\dot{q}_V}{\rho c_P} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

tem-se a mesma expressão obtida para o caso de um sólido plano; entretanto, as condições de contorno são diferentes. Considera-se, inicialmente, que a temperatura superficial T_s é constante e uniforme. Esta condição pode ser válida quando o coeficiente de convecção é muito intenso na superfície, reduzindo o potencial térmico de troca: $T_s \cong T_\infty$. São estas as condições de contorno e inicial para a temperatura do sólido $T(x, t)$:

- Temperatura no instante inicial: $T(x, 0) = T_i$
- Temperatura superficial: $T(0, t) = T_s$
- Condição de sólido semi-infinito: $T(x \rightarrow \infty, t) = T_i$

Este problema pode ser resolvido pelo artifício da variável de similaridade que combina as duas variáveis independentes do problema de forma em que $T(x, t)$ possa ser expresso como $T(\eta)$, em que $\eta(x, t)$ é a variável de similaridade. Para este problema específico tal variável é:

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t}}$$

Escrevendo as derivadas parciais do balanço em função de η :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial T}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial T}{\partial \eta} \cdot \frac{x}{\sqrt{4 \cdot \alpha}} \cdot \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2} = -\frac{x}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t}} \cdot \frac{1}{2t} \cdot \frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{\eta}{2t} \cdot \frac{\partial T}{\partial \eta} \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial T}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t}} \quad ; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{4 \cdot \alpha \cdot t} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial, tem-se uma equação diferencial para $T(\eta)$:

$$\begin{aligned} -\frac{\eta}{2t} \cdot \frac{\partial T}{\partial \eta} &= \alpha \cdot \frac{1}{4 \cdot \alpha \cdot t} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} &= -2\eta \cdot \frac{\partial T}{\partial \eta} \end{aligned}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(\partial T / \partial \eta)} d(\partial T / \partial \eta) &= \int -2\eta d\eta \\ \ln\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right) &= -\eta^2 + c'_1 \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} &= e^{-\eta^2 + c'_1} = c_1 \cdot e^{-\eta^2} \\ \therefore T(\eta) &= c_2 + c_1 \cdot \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \end{aligned}$$

A integral de $e^{-\eta^2}$ não é definida analiticamente e precisa ser calculada numericamente.

As condições de contorno e inicial também devem ser expressas na variável de similaridade.

$$\begin{aligned} T(x, 0) = T_i & \rightarrow T(\eta \rightarrow \infty) = T_i \\ T(0, t) = T_S & \rightarrow T(\eta = 0) = T_S \\ T(x \rightarrow \infty, t) = T_i & \rightarrow T(\eta \rightarrow \infty) = T_i \end{aligned}$$

Note que a última condição é redundante, deixando o problema com duas condições na variável de similaridade, de forma coerente com a equação diferencial. Aplicando estas condições tem-se que:

$$c_2 = T_S \quad c_1 = \frac{(T_i - T_S)}{\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} = \frac{2(T_i - T_S)}{\sqrt{\pi}}$$

Como resultado tem-se a função Erro de Gauss (erf), que foi criada para calcular a integral da distribuição normal de probabilidade. Esta função está apresentada na Tabela 4 em função de uma variável geral x e ela assume valor unitário para $x \geq 3,3$.

$$\frac{T(\eta) - T_S}{T_i - T_S} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta = \text{erf}(\eta)$$

Tabela 4: Função Erro de Gauss.

x	$\text{erf}(x)$	x	$\text{erf}(x)$	x	$\text{erf}(x)$
0	0	0,15	0,16800	0,85	0,77067
0,0025	0,00282	0,20	0,22270	0,90	0,79691
0,0050	0,00564	0,25	0,27633	0,95	0,82089
0,0075	0,00846	0,30	0,32863	1,0	0,84270
0,01	0,01128	0,35	0,37938	1,1	0,88021
0,02	0,02256	0,40	0,42839	1,2	0,91031
0,03	0,03384	0,45	0,47548	1,3	0,93401
0,04	0,04511	0,50	0,52050	1,4	0,95229
0,05	0,05637	0,55	0,56332	1,5	0,96611
0,06	0,06762	0,60	0,60386	1,8	0,98909
0,07	0,07886	0,65	0,64203	2,0	0,99532
0,08	0,09008	0,70	0,67780	2,5	0,99959
0,09	0,10128	0,75	0,71116	3,0	0,99998
0,10	0,11246	0,80	0,74210	3,3	1,00000

Neste caso, o fluxo de calor na superfície do sólido é:

$$q_S'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = -k \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{x=0} = -k \cdot c_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t}} = \frac{k(T_S - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

Um caso mais geral do problema do sólido semi-infinito haveria troca de calor por convecção na superfície com $q_s'' = h(T_\infty - T_s)$ e a temperatura superficial do sólido variaria com o tempo em vez de ser constante. Para este caso, a condição de contorno da temperatura constante na superfície é substituída pela condição de troca por convecção. A equação final obtida para a temperatura do sólido é:

$$\theta^*(\eta) = \operatorname{erf}(\eta) + \operatorname{erfc}(\eta + \sqrt{Bi^2 \cdot Fo}) \cdot \exp(2\eta \cdot \sqrt{Bi^2 \cdot Fo} + Bi^2 \cdot Fo)$$

sendo que $\operatorname{erfc}(\eta) = 1 - \operatorname{erf}(\eta)$ é a função complementar do Erro de Gauss, $Bi^2 \cdot Fo = \frac{h^2 \alpha t}{k^2}$ e $\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$ é a temperatura adimensional. Este resultado é apresentado na **Figura 12** em função de $\sqrt{Bi^2 \cdot Fo}$. Note que o caso de temperatura superficial constante está contemplado neste gráfico, pois $T_s = T_\infty$ na condição de $h \rightarrow \infty$ (ou seja, $Bi^2 \cdot Fo \rightarrow \infty$).

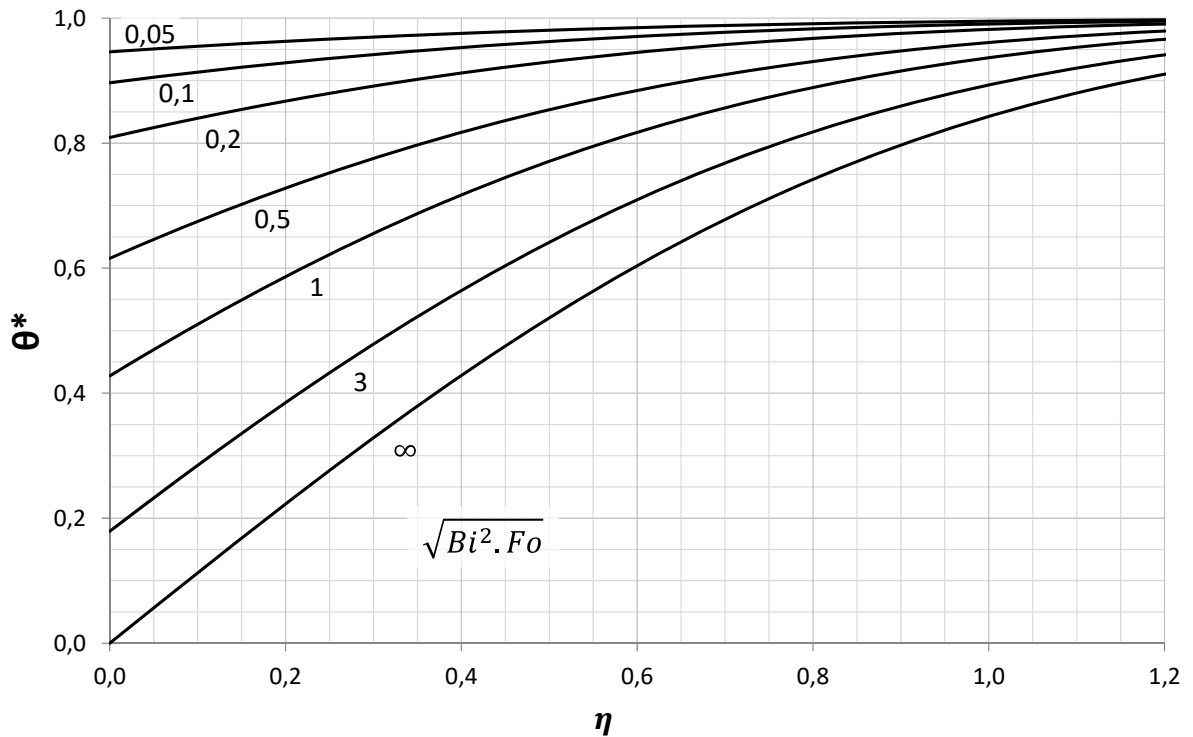


Figura 12: Solução gráfica do caso do sólido semi-infinito com convecção na superfície.

Caso a condição de contorno na superfície seja de fluxo de calor constante q_s'' , então o desenvolvimento do balanço diferencial de energia térmica resulta em:

$$T(\eta) - T_i = q_s'' \frac{x}{k} \cdot \left(\frac{\exp(-\eta^2)}{\eta \cdot \sqrt{\pi}} - \operatorname{erfc}(\eta) \right)$$

1.3 Outras geometrias (condução multidirecional)

Há casos de condução transiente multidirecional cuja solução analítica pode ser obtida a partir da combinação das soluções unidirecionais já conhecidas (sólido plano, cilindro longo e sólido semi-infinito). Exemplos: cilindro curto, paralelepípedo, barra de seção retangular.

Basta decompor o problema multidirecional em problemas unidirecionais complementares, como mostra o exemplo na **Figura 13** para a geometria de cilindro curto. Neste problema, a condução é bidirecional (direções r e z), ou seja, a temperatura é expressa como $T(r, z, t)$. A condução transiente no cilindro curto pode ser decomposta como a condução axial em um sólido plano e a condução radial em um cilindro longo. Estes problemas são resolvidos separadamente, para uma dada posição e instante de tempo, usando as soluções já apresentadas e multiplica-se as temperaturas adimensionais resultantes para obter a temperatura adimensional no cilindro curto.

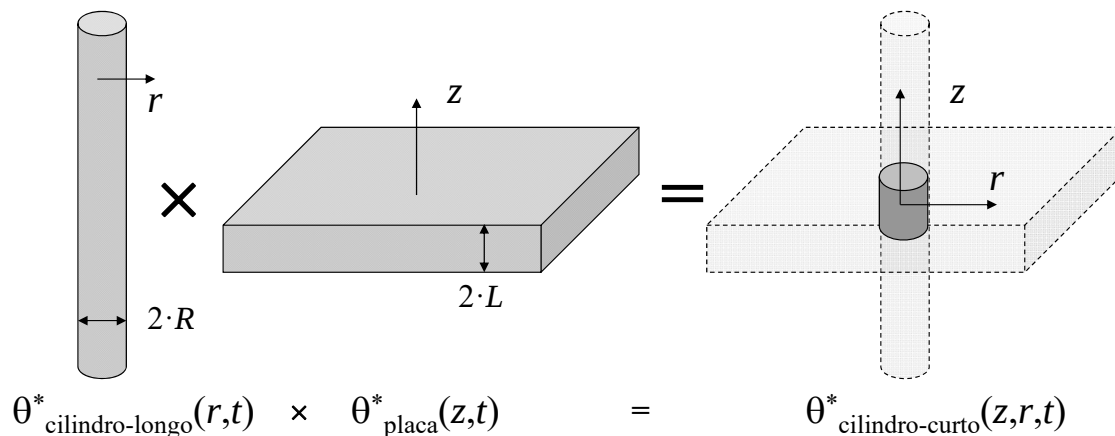


Figura 13: Cilindro curto como a intersecção de uma parede plana e um cilindro longo.
(GUT e SONG, 2015)

A **Figura 14** apresenta mais possibilidades de combinações de soluções unidirecionais para representar problemas multidirecionais. Especificamente nesta figura, $S(x, t)$ representa a temperatura adimensional no meio semi-infinito, $P(x, t)$ representa a temperatura adimensional no sólido plano e $C(r, t)$ representa a temperatura adimensional no cilindro longo.

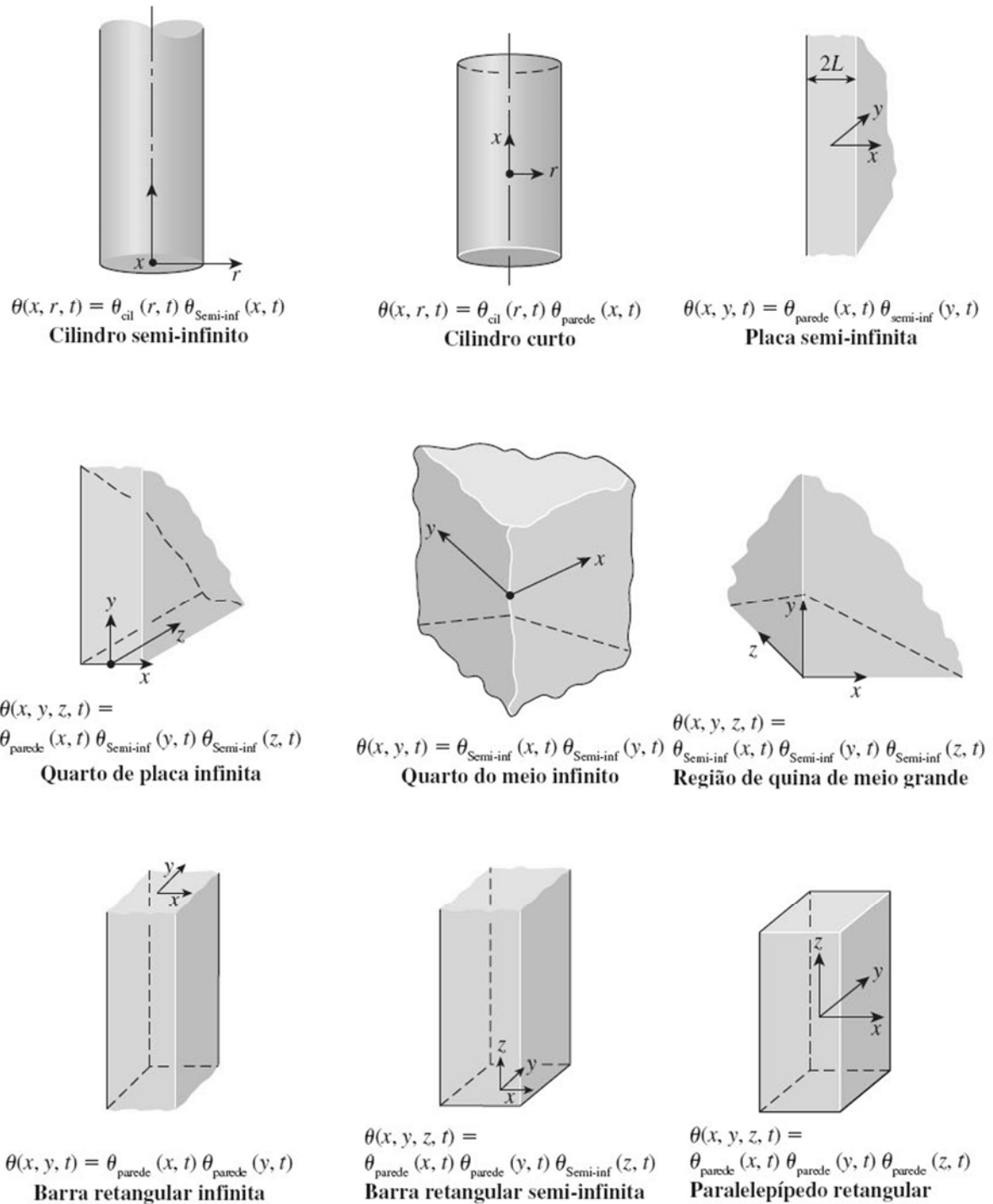


Figura 14: Combinações de soluções para condução transiente bidimensional e tridimensional.

(fonte: ÇENGEL e GHAJAR, 4ª edição)

1.4 Simplificações para a condição transiente

Para a resolução de problemas de condução transiente em sólidos, há algumas simplificações úteis que foram apresentadas nesta apostila. Tomando o caso de um sólido plano, por exemplo, valores extremos de número de Biot ou de Fourier permitem o uso de algumas hipóteses.

Valores altos de Biot indicam uma troca de calor por convecção muito eficiente na superfície, o que permite assumir $T_s = T_\infty$. Já valores baixos de Biot indicam rápida dispersão de energia no interior do sólido, permitindo considerar que a temperatura do sólido é espacialmente uniforme e independente de seu formato. Com relação ao tempo, valores altos de Fourier permitem o uso de apenas o primeiro termo do somatório presente na solução analítica de $\theta^*(x^*, Fo_L)$ (vide **Tabela 3**), o que simplifica os cálculos. Já para valores baixos de Fourier, a troca de calor é superficial e pode-se considerar uma situação de sólido semi-infinito.

Estas condições estão sumarizadas na **Figura 15** para o caso do sólido plano, sendo que os limites numéricos das restrições são apenas indicativos e não são rigorosos. Uma outra opção de resolução simplificada do problema de sólido plano é a resolução gráfica usando as **Figuras 2 e 3**.

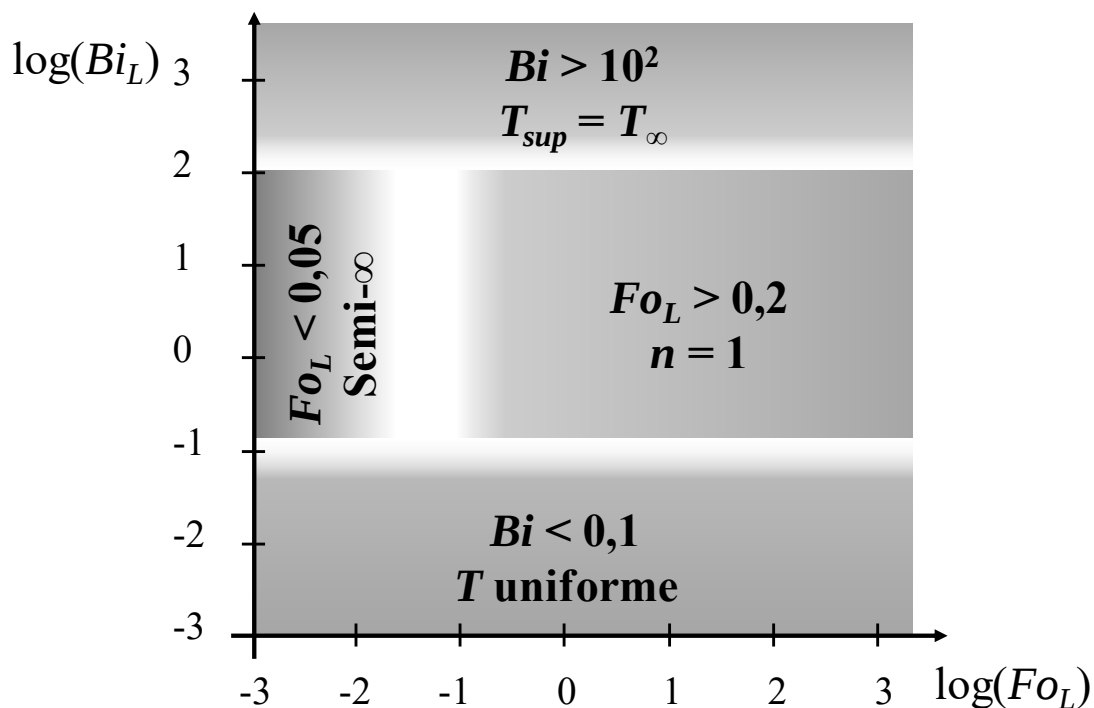


Figura 15: Resumo das simplificações possíveis para o problema de condição transiente em um sólido plano.

Para o caso de cilindros longos e esferas, a Figura 15 pode ser adotada, substituindo Fo_L por Fo_R e eliminando a hipótese de sólido semi-infinito, não coerente com estas geometrias curvas. A resolução gráfica de problemas usando as **Figuras 5 a 8** também é uma opção viável. É importante salientar que para estas geometrias a verificação de $Bi < 0,1$ deve ser feita com o Bi e não com Bi_R .

2. EXERCÍCIOS

- 1) O coeficiente convectivo de transferência de calor para ar escoando ao redor de uma esfera pode ser determinado experimentalmente usando uma esfera maciça de cobre puro com um sensor de temperatura bem fixo à sua superfície. Em um experimento deste tipo, uma esfera com diâmetro de 50 mm se encontra inicialmente a uma temperatura de 70 °C. Ela é inserida numa corrente de ar a 25 °C. Passados 240 segundos, o sensor registra uma temperatura de 57 °C.
 - a) Determine o coeficiente convectivo de troca térmica do ar sobre a esfera.
 - b) Verifique o número de Biot deste fenômeno.
 - c) Qual a quantidade de energia transferida neste intervalo de tempo?

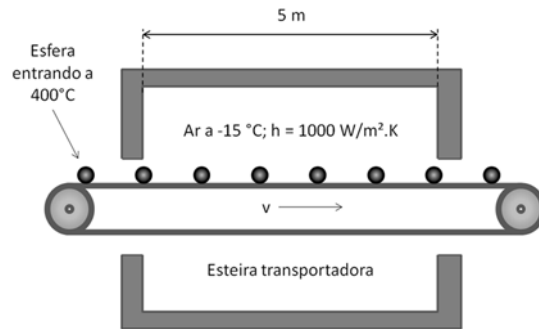
- 2) Em uma produtora de equipamentos mecânicos, eixos metálicos cilíndricos devem receber um tratamento térmico antes de serem enviados ao setor de montagem. Para realizar tal tratamento, são usados gases quentes provenientes de um forno de combustão. O engenheiro responsável pelo tratamento térmico determinou que, para o tratamento ser eficaz, a linha de centro dos eixos deve atingir uma temperatura de 850 K. Como dados de projeto, considere que os gases do forno se encontram a 1100 K e que a troca de calor ocorre com um coeficiente convectivo de 120 W/K.m². Para fins didáticos não leve em conta as trocas por radiação térmica. Os eixos são barras cilíndricas com diâmetro de 8,4 cm e comprimento de 95,0 cm, são construídos em aço carbono AISI 1010 e entram no forno a cerca de 300 K. Pede-se o tempo necessário para o tratamento térmico.

- 3) Dentro de um equipamento de alta tensão, tem-se um fio de cobre padrão AWG15 (diâmetro de 1,45 mm) submerso em óleo mineral. A resistência elétrica deste fio, por unidade de comprimento, é de 0,0104 Ω/m e por ele passa uma corrente de 35 A (a potência elétrica dissipada como calor pode ser obtida como *resistência*×*corrente*²). O óleo é mantido a 25 °C e o coeficiente de convecção do óleo sobre o fio é de 150 W/K.m². Pergunta-se:
 - a) No estado estacionário, qual é a temperatura que o fio vai atingir?
 - b) Quanto tempo após início da passagem de corrente será necessário para que a temperatura do fio seja 1 °C inferior à do regime estacionário?

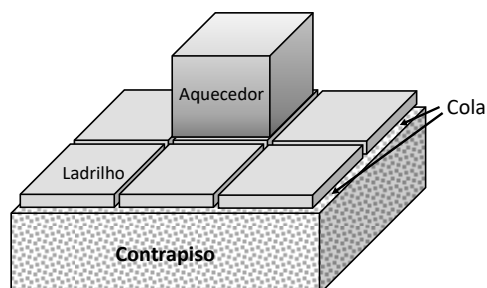
- 4) Para um estudo de transferência de calor em estado transiente, três placas feitas de materiais diferentes (cobre, quartzo e madeira) são mergulhadas em um banho de água fria e suas temperaturas são monitoradas ao longo do tempo. Com base na teoria de transferência de calor, modele e resolva este problema. As placas têm espessura de 10 cm e foram mantidas previamente em uma estufa a 90 °C. O banho de água é mantido a 20 °C e estima-se um coeficiente de convecção de 100 W/K.m² na superfície das placas. Pede-se:
 - a) Temperatura no plano central após uma hora de imersão.
 - b) Tempo necessário para a temperatura da superfície atingir 40 °C.
 - c) Tempo para que 95% da energia térmica possível tenha sido transferida.

Placa	k (W/K.m)	ρ (kg/m ³)	c_p (J/kg.K)
1) Cobre	400	8933	388
2) Quartzo	7,7	2650	784
3) Madeira	0,17	545	2385

- 5) Um forno industrial tem paredes feitas com tijolos refratários de cromita com 171 mm de espessura. A face interna da parede fica exposta aos gases de combustão a cerca de 1000 °C, enquanto a face externa é isolada termicamente. O coeficiente convectivo estimado é de 100 W/K.m². A temperatura inicial do forno, antes de partida, é 30 °C e deseja-se saber quanto tempo de operação é necessário para que a face isolada da parede de tijolo refratário atinja uma temperatura de 800 °C, que poderia ser prejudicial ao isolamento térmico.
- 6) Um aluno de Fenômenos de Transporte II acabava de sair da aula e chegou à sua república com fome. Decidiu fazer um cachorro-quente e viu nisto uma boa oportunidade de testar seus conhecimentos recém-adquiridos: resolveu estimar quanto tempo levaria para a salsicha ficar pronta. A panela tinha água fervendo em fogo baixo e, consultando seu livro-texto da disciplina, ele verificou que um coeficiente convectivo de troca térmica de 100 W/K.m² podia ser admitido. A salsicha tem diâmetro de 2,0 cm e estava à temperatura da geladeira quando foi colocada na panela (5 °C). Quanto tempo leva para a salsicha ficar pronta, considerando que o parâmetro para tal é quando a linha central do alimento atinge 80 °C? Considere que a salsicha tem as seguintes propriedades termofísicas: $k = 0,50$ W/K.m; $\rho = 890$ kg/m³; $c_p = 3,40$ kJ/kg.K.
- 7) Como parte de um processamento térmico, barras de aço inoxidável AISI304 a 500 °C (100 mm de diâmetro e 1,0 m de comprimento) devem ser resfriadas por imersão em óleo mineral, que se contra a 30 °C e cuja circulação cria convecção tal que $h = 500$ W/K.m². As barras podem ser retiradas do banho quando a temperatura na linha central atingir 50 °C. Qual é o tempo de imersão? Em um processo contínuo tem-se 10 barras por hora passando pelo banho, qual deve ter a carga térmica retirada do banho de óleo para manter sua temperatura constante?
- 8) Em um processo de produção de esferas para moinhos de bolas, esferas com 20 cm de diâmetro a 400 °C devem ser resfriadas numa câmara de ar frio, especialmente projetada para que as esferas saiam da câmara após perder 3/4 da energia em relação à condição de equilíbrio térmico com o meio ($Q/Q_\infty = 75\%$). O ar da câmara é mantido a 10 °C por um sistema de refrigeração. Um sistema de ventilação garante que um alto coeficiente convectivo de $1,0 \times 10^3$ W/m².K seja mantido na câmara. Conforme mostra o esquema abaixo, as esferas atravessam a câmara por meio de uma esteira rolante com 5,0 m de comprimento. Calcule o tempo de residência de uma esfera na câmara e a respectiva velocidade da esteira. Considere as seguintes propriedades para as esferas: $k = 50$ W/K.m; $\alpha = 20 \times 10^{-6}$ m²/s; $c_p = 450$ J/kg.K.



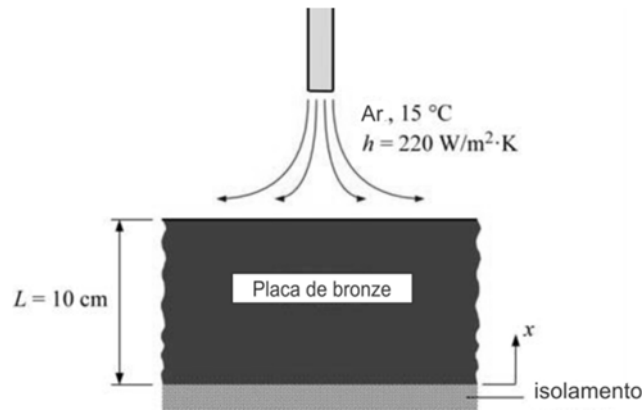
- 9) Uma fábrica de colares de conta estuda o uso de um novo pigmento em seus produtos. As contas pigmentadas são mantidas a $350\text{ }^{\circ}\text{C}$ em um forno. Uma vez saída do forno, as contas devem ser resfriadas usando ar soprado a $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ até que seus pontos centrais atinjam $40\text{ }^{\circ}\text{C}$. O diâmetro das contas é de $5,0\text{ mm}$ e o coeficiente de convecção é de $400\text{ W/K}\cdot\text{m}^2$. Estimando que as propriedades do vidro colorido sejam: $k = 1,1\text{ W/K}\cdot\text{m}$; $\rho = 2300\text{ kg/m}^3$; $c_p = 800\text{ J/kg}\cdot\text{K}$, pede-se:
- O tempo necessário de resfriamento.
 - A temperatura da superfície da conta após o resfriamento.
- 10) Dois grandes blocos, um deles de cobre e outro de concreto, ficaram por um longo tempo expostos a um ambiente a $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Um operário entra no ambiente para buscar os blocos. Considerando que a pele da mão do operário está a $32\text{ }^{\circ}\text{C}$ e que ele não usa luvas, qual dos blocos parecerá mais frio ao toque da sua mão? Calcule a razão entre as taxas de resfriamento da pele logo após o contato.
- 11) Uma empresa desenvolveu um aparelho para facilitar a remoção de ladrilhos colados a um contrapiso com cola plástica. O aparelho consiste de uma placa metálica aquecida eletricamente e mantida a $150\text{ }^{\circ}\text{C}$. A placa tem dimensões de $10 \times 10\text{ in}$ e é pressionada sobre o ladrilho, aquecendo-o. A camada de cola plástica entre o ladrilho e o contrapiso deve ficar acima de $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ por pelo menos 3 minutos para ser possível a remoção. Entretanto, se a temperatura do adesivo ultrapassar $120\text{ }^{\circ}\text{C}$, ele se decompõe e danifica o material. Considere que o ladrilho e o contrapiso tenham propriedades termofísicas similares ($k = 0,15\text{ W/K}\cdot\text{m}$; $\rho \cdot c_p = 1,5 \cdot 10^6\text{ J/K}\cdot\text{m}^3$), que o ladrilho tenha espessura de $4,0\text{ mm}$, que a camada de cola tenha espessura desprezível e contato perfeito entre placa e ladrilho. Pergunta-se:
- Qual o tempo necessário de contato do aparelho com o ladrilho para amolecer a cola? (Temperatura inicial é de $25\text{ }^{\circ}\text{C}$)
 - Neste tempo, há risco de a temperatura do adesivo ultrapassar $120\text{ }^{\circ}\text{C}$?



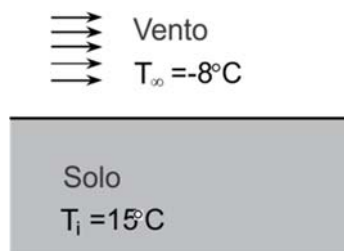
- 12) No tratamento térmico de um alimento enlatado utiliza-se vapor saturado a $120\text{ }^{\circ}\text{C}$ sobre as latas com um coeficiente convectivo de $2,5 \times 10^3\text{ W/K.m}^2$. As latas encontram-se inicialmente a $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ e deseja-se saber qual será a temperatura no seu ponto mais frio após 30 min de imersão no vapor. Nesta condição, pede-se também a temperatura no ponto central da tampa circular. Como o alimento é pastoso, pode-se desprezar a advecção no interior da lata. Não há *headspace* nas latas (ar no topo do alimento) e pode-se desprezar a resistência térmica da chapa metálica. As latas têm 10,0 cm de altura e 8,0 cm de diâmetro. As propriedades médias do alimento são: $\rho = 1,1 \times 10^3\text{ kg/m}^3$; $c_p = 3,4\text{ kJ/kg.K}$; $k = 1,2\text{ W/K.m}$.
- 13) Uma peça de aço carbono está inicialmente a $40\text{ }^{\circ}\text{C}$. Ela é então levada a um forno onde o ar está a $750\text{ }^{\circ}\text{C}$ e o coeficiente convectivo do ar sobre a peça é de 100 W/K.m^2 . A peça é uma longa viga de seção quadrada com aresta 30 cm. Pede-se para determinar o tempo necessário para que o centro da viga atinja uma temperatura de $600\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Exercícios complementares

- 14) A temperatura do fluxo de gás é medida por um sensor do tipo termopar que pode ser considerado como sendo uma esfera de 1,2 mm de diâmetro. As propriedades do material são $k = 35\text{ W/K.m}$, $\rho = 8500\text{ kg/m}^3$ e $c_p = 320\text{ J/kg.K}$. O coeficiente de transferência de calor entre o gás e o sensor é $h = 110\text{ W/K.m}^2$. Determine o tempo necessário para o sensor atingir a temperatura do gás, ou seja, sofre um aquecimento de 99% da diferença inicial de temperatura entre sensor e gás.
- 15) Uma pessoa é encontrada morta às 17 h em uma sala cuja temperatura é $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. A temperatura média do corpo quando encontrado foi medida a $25\text{ }^{\circ}\text{C}$, e o coeficiente de transferência de calor estimado em $h = 8\text{ W/K.m}^2$. Modelando o corpo como um cilindro de 30 cm de diâmetro, 1,70 m de comprimento e considerando que a temperatura do corpo é espacialmente uniforme como aproximação grosseira, estime o tempo de morte dessa pessoa. Dica: adote $37\text{ }^{\circ}\text{C}$ como a temperatura corporal inicial (antes da morte) e utilize as propriedades da água para o corpo humano (composto por aproximadamente 72 % de água em massa).
- 16) Uma haste longa de cobre de 2,0 cm de diâmetro está inicialmente a uma temperatura uniforme de $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. A haste é então exposta a uma corrente de ar a $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ com coeficiente convectivo de 200 W/K.m^2 . Quanto tempo é necessário para a haste esfriar a uma temperatura média de $25\text{ }^{\circ}\text{C}$?
- 17) Uma placa de bronze está tendo a superfície superior refrigerada por jato de ar a uma temperatura de $15\text{ }^{\circ}\text{C}$, e o coeficiente de transferência de calor por convecção é de 220 W/K.m^2 . A placa de bronze tem 10 cm de espessura, $\rho = 8530\text{ kg/m}^3$, $c_p = 380\text{ J/K.kg}$, $k = 110\text{ W/K.m}$, uma temperatura uniforme inicial de $650\text{ }^{\circ}\text{C}$ e sua superfície inferior pode ser considerada isolada termicamente. Determine a temperatura no plano central da placa de bronze (5,0 cm) após 3,0 min de resfriamento.



- 18) Um eixo cilíndrico longo de aço inoxidável 304 ($\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 477 \text{ J/kg.K}$, $k = 14,9 \text{ W/K.m}$) de 35 cm de diâmetro deixa uma estufa a uma temperatura uniforme de 500 °C . O eixo é, então, esfriado lentamente em uma câmara a 150 °C com coeficiente médio de transferência de calor por convecção de 60 W/K.m^2 . Determine a temperatura no centro do eixo 20 minutos após o início do processo de resfriamento. Além disso, determine a quantidade de energia térmica transferida por unidade de comprimento do eixo durante esse período.
- 19) Batatas brancas ($k = 0,50 \text{ W/K.m}$ e $\alpha = 0,13 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) com diâmetro médio de 6,0 cm, inicialmente a uma temperatura uniforme de 25 °C , devem ser resfriadas por ar refrigerado a 2 °C fluindo a uma velocidade de $3,0 \text{ m/s}$. O coeficiente médio de transferência de calor entre as batatas e o ar foi determinado experimentalmente como sendo 19 W/K.m^2 . Determine o tempo necessário para que a temperatura no centro das batatas diminua para 6 °C . Além disso, verifique se há risco de dano à superfície da batata (temperaturas abaixo de 3 °C).
- 20) A temperatura do solo nas camadas superiores varia de acordo com as condições atmosféricas. Antes de uma frente fria chegar, o solo no local está inicialmente a uma temperatura uniforme de 15 °C . Em seguida, a área é submetida a uma temperatura de -8 °C e a ventos que resultam em um coeficiente de transferência de calor por convecção de 40 W/K.m^2 na superfície, por um período de 10 horas. Considerando que as propriedades médias do solo no local são $k = 0,90 \text{ W/K.m}$ e $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, estime a temperatura do solo para as distâncias de 0, 10, 20 e 50 cm a partir da sua superfície, no final do período de 10 horas.



RESPOSTAS

Questão	Respostas
1	a) $h = 41 \text{ W/K.m}^2$ b) $Bi = 0,00086$ c) $Q = 2,96 \text{ kJ}$
2	$t = 877 \text{ s}$ assumindo T uniforme ($Bi \leq 0,1$) $t = 887 \text{ s}$ pela equação geral ($Fo > 0,2$)
3	a) $T = 43,6 \text{ }^\circ\text{C}$ b) $t = 24,3 \text{ s}$
4	a) $29 \text{ }^\circ\text{C}, 24 \text{ }^\circ\text{C}, 77 \text{ }^\circ\text{C}$ b) $37 \text{ min}, 22 \text{ min}, < 3 \text{ min}$ c) $89 \text{ min}, 63 \text{ min}, 6,4 \text{ h}$
5	$t = 9,3 \text{ h}$
6	$t = 7,3 \text{ min}$
7	$t = 17 \text{ min}; Q = 1,59 \times 10^7 \text{ J}; q = 43 \text{ kW}$
8	$t = 163 \text{ s}; v = 3,07 \text{ cm/s}$
9	a) $t = 27,6 \text{ s}$ b) $T = 37,1 \text{ }^\circ\text{C}$
10	$\frac{q''_{\text{cobre}}}{q''_{\text{concreto}}} = 22$
11	a) $t = 3,81 \text{ min}$ b) Não, pois $T_{\text{max}} = 94 \text{ }^\circ\text{C}$
12	$T = 105 \text{ }^\circ\text{C}$ e $T = 120 \text{ }^\circ\text{C}$
13	$t = 100 \text{ min}$
14	$22,8 \text{ s}$
15	$12,2 \text{ h}$
16	$4,0 \text{ min}$
17	$585 \text{ }^\circ\text{C}$
18	$486 \text{ }^\circ\text{C}$ e $22,3 \text{ kJ/m}$
19	$1,27 \text{ h}$ e $4,4 \text{ }^\circ\text{C}$ (sem dano)
20	$-8,0 \text{ }^\circ\text{C}; -6,3 \text{ }^\circ\text{C}; -4,6 \text{ }^\circ\text{C};$ e $-0,2 \text{ }^\circ\text{C}$

3. SÍMBOLOS

Símbolo	Nome	Modificador	Unidade (SI)
A	Área		m ²
Bi	Número de Biot	R - sistema radial ou esférico	Adim.
C	Coeficiente da equação	-	Adim.
c_p	Calor específico à pressão constante	-	J/kg.K
E	Energia	-	J
Fo	Número de Fourier	R - sistema radial ou esférico	Adim.
h	Coeficiente convectivo	-	W/K.m ²
J_0, J_1	Funções de Bessel de primeira espécie	-	Adim.
k	Condutividade térmica	-	J/K.m
L	Comprimento	c - característico	m
m	massa	-	kg
Q	Quantidade de calor	∞ - trocado até regime permanente * - adimensional	J
$\bar{q}''$	Fluxo de calor	-	W/m ²
R_{term}	Resistência térmica	cond – devido à condução conv – devido à convecção	K.m ² /W
r	raio	* - adimensional	m
T	Temperatura	S – da superfície ∞ - do “bulk” do fluido i – inicial	K
t	Tempo	* - adimensional	s
V	Volume	-	m ³
x, z, r	Posição	* - adimensional sim – onde há simetria S - superfície	m
α	Difusividade térmica	-	m ² /s
ρ	Densidade volumétrica	-	kg/m ³
η	Variável de similaridade	-	Adim.
λ	Raiz de equação transcendental	-	Adim.
θ	Diferença de temperatura	$0, c$ – central S - superficial i – inicial * - adimensional	K ou Adim.

4. BIBLIOGRAFIA

ÇENGEL, Y. A., GHAJAR, A.J. Transferência de Calor e Massa – 4ª Edição – 2012 – AMGH – Porto Alegre, Brasil.

GUT, J.A.W; SONG, T.W. Transferência de calor por condução e convecção. Em: TADINI, C.C et al. – Operações Unitárias na Indústria de Alimentos – V.1 – 2015 – LTC – Rio de Janeiro, Brasil.

INCROPERA, F.P et al. Fundamentos de Transferência de Calor e Massa – 6ª Edição – 2008 – LTC – Rio de Janeiro, Brasil.