Apostila de Modelos de Indutores com Auto-Ressonância

Profª Drª Cinthia Itiki
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

– abril de 2019 –

Introdução

Este texto apresenta alguns modelos de bipolo com auto-ressonância e comportamento predominantemente indutivo, ou seja, a fase da impedância do bipolo tem valores positivos para frequências baixas. A auto-ressonância é oriunda de uma capacitância parasita em paralelo com a indutância.

Um modelo de indutor não-ideal é um circuito elétrico composto por componentes ideais (indutâncias, capacitâncias e resistências), que representa a variação da impedância do indutor não-ideal com a frequência. A seguir são apresentados alguns modelos e as funções módulo e fase da impedância. Também é apresentado o módulo da admitância, para o auxílio à determinação das capacitâncias parasitas.

LC paralelo

O circuito LC paralelo é um modelo do bipolo, no caso um indutor não-ideal, com indutância L e capacitância C ideais, conforme ilustrado na figura 1.

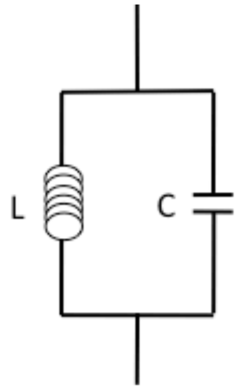

Figura 1 – Modelo LC paralelo de um indutor não ideal com auto-ressonância.

A impedância desse modelo de indutor não-ideal é dada por $Z_B(j\omega)=\dfrac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$.

Tanto para ω=0 quanto para ω→∞, o módulo da impedância | Z_B (jω) | tende a zero, conforme ilustrado na figura 2b. Na frequência de auto-ressonância, $\omega=\omega_R=1/\sqrt{LC}$, o módulo da impedância tende a infinito, o que é confirmado pelo módulo da admitância ser nulo, segundo a figura 2c.

Neste modelo, obtém-se $2\pi L$ pela inclinação da reta do módulo da impedância | Z_B (jω) | para ω≈0 rad/s. Por outro lado, obtém-se $2\pi C$ pela inclinação da reta do módulo da admitância | Y_B (jω) | para ω>>ω_R.

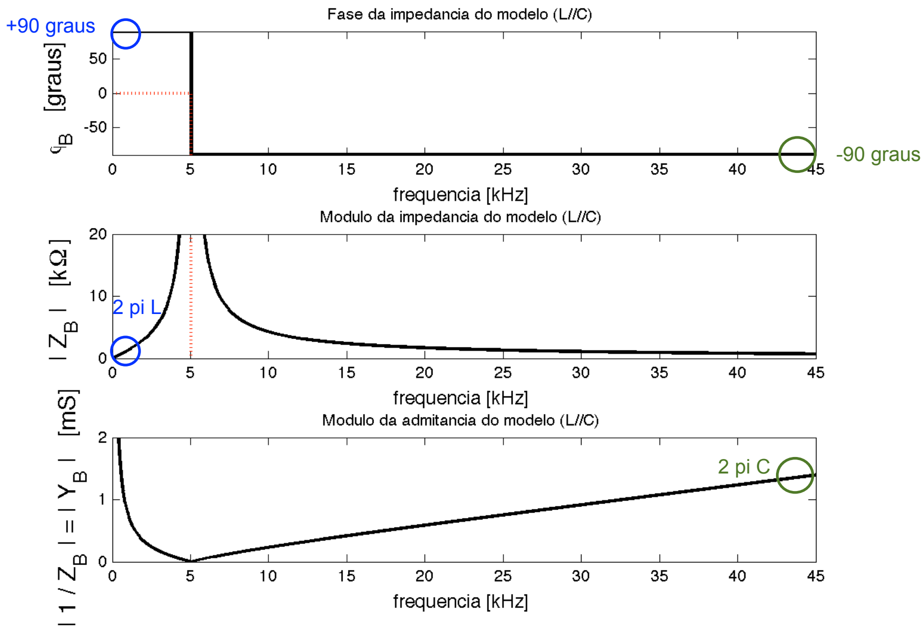

Figura 2 – Impedância do modelo LC paralelo descrita pela (a) fase e pelo (b) módulo, além do (c) módulo da admitância.

R_pLC paralelo

O modelo anterior apresenta uma auto-ressonância em $\omega=\omega_R=1/\sqrt{LC}$, quando o módulo da impedância tende a infinito. No entanto, usualmente os indutores apresentam uma auto-ressonância, em que o módulo da impedância atinge um valor máximo limitado (e não infinito). A inclusão de uma resistência em paralelo com a indutância e a capacitância resulta no circuito R_pLC paralelo (figura 3), cuja impedância é $Z_B(j\omega)=\dfrac{j\omega L R_p}{R_p(1-\omega^2 LC)+j\omega L}$.

Observe que, semelhantemente ao modelo anterior, o módulo da impedância tende a zero, para ω=0 e ω→∞.

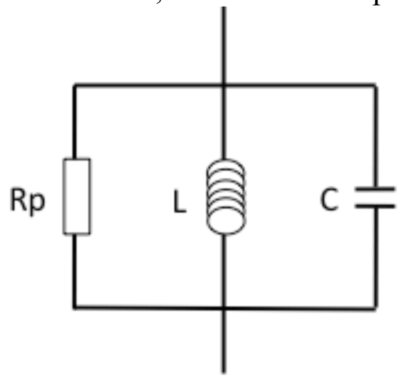

Figura 3 – Modelo R_pLC paralelo de um indutor não ideal com auto-ressonância.

Obtém-se a resistência R_p em $\omega=\omega_R=1/\sqrt{LC}$, quando a impedância vale $Z_B(j\omega_R)=R_p e^{+j0}$, ou seja, quando a defasagem entre tensão e corrente é nula nesse modelo de indutor.

Neste modelo, obtém-se a capacitância pela inclinação da reta do módulo da admitância | Y_B ($j\omega$) |, que é igual a $2\pi C$ quando a fase for –90º, ou seja, para $\omega >> \omega_R$.

Por outro lado, obtém-se a indutância pela tangente da reta do módulo da impedância | Z_B ($j\omega$) |, que é igual a $2\pi L$ quando a fase for +90º, ou seja, para ω≈0 rad/s.

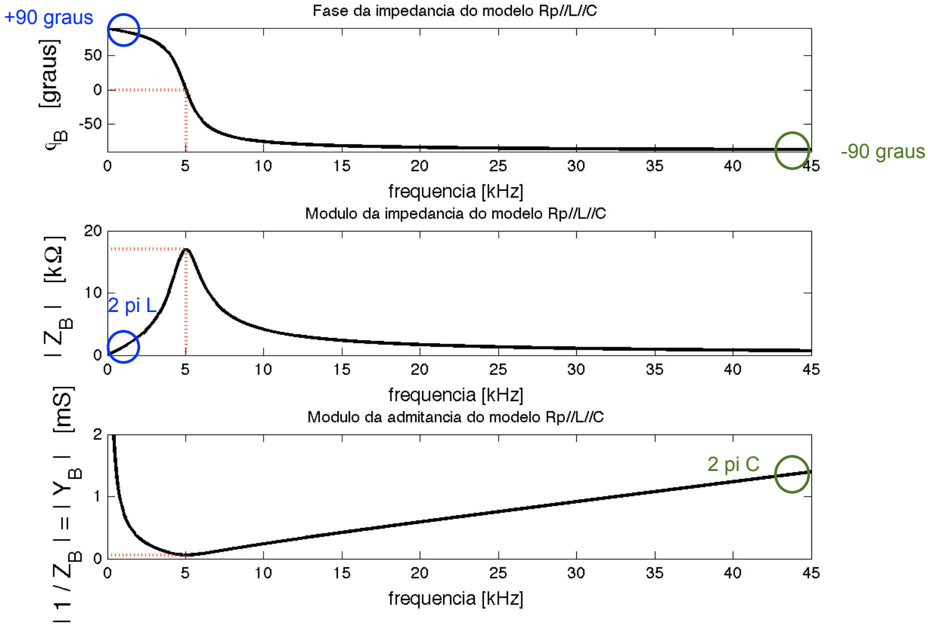

Figura 4 – Impedância do modelo R_pLC paralelo descrita pela (a) fase e pelo (b) módulo, além do (c) módulo da admitância.

R em série com R_pLC paralelo

Ambos os modelos anteriores apresentam impedância nula nas frequências $\omega=0$ e $\omega\rightarrow\infty$. Caso se tenha um valor não-nulo de impedância, é importante acrescentar uma resistência em série. Uma possibilidade é acrescentar uma resistência em série com o conjunto RLC paralelo, conforme a figura 5.

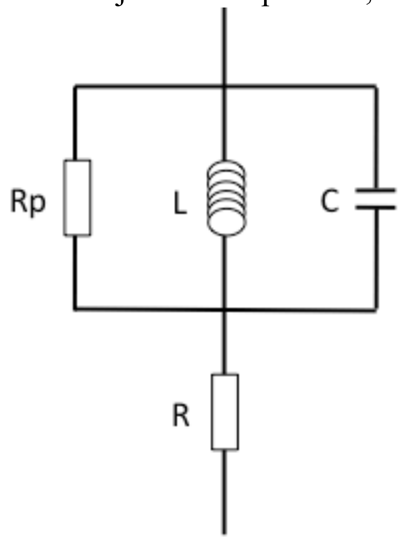

Figura 5 – Modelo R série com R_pLC paralelo de um indutor não ideal com auto-ressonância.

Neste caso, tem-se que a impedância é dada por $Z_B(j\omega)=\dfrac{R R_p(1-\omega^2 LC)+j\omega L(R+R_p)}{R_p(1-\omega^2 LC)+j\omega L}$.

Para determinar os valores das resistências, observe que, tanto para $\omega=0$ quanto para $\omega\rightarrow\infty$, a impedância tende ao mesmo valor da resistência em série, ou seja, $Z_B(j0)=Re^{+j0}$. Em $\omega=\omega_R=1/\sqrt{LC}$, a impedância vale $Z_B(j\omega_R)=(R+R_p)e^{+j0}$, o que permite determinar a resistência em paralelo.

Uma desvantagem deste modelo é que a fase não atinge os valores de ±90º, de acordo com a figura 6a. Por isso, esse modelo não permite estimar valores precisos de L e C. Observe que para $\omega\approx 0$ e $\omega>>\omega_R$, não é possível estimar a indutância e a capacitância, porque a fase é nula. Pode-se estimar $2\pi C$ pela inclinação da reta do módulo da admitância | Y_B $(j\omega)$ | na frequência em que a fase atinge o valor mínimo. Também se pode estimar $2\pi L$ pela inclinação da reta do módulo da impedância | Z_B $(j\omega)$ | na frequência em que a fase atinge o valor máximo.

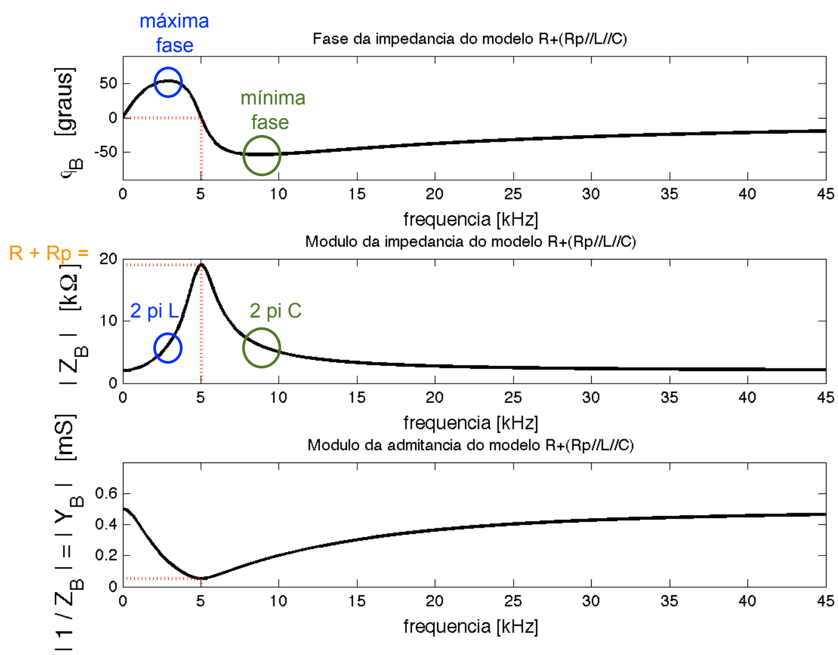

Figura 6 – Impedância do modelo R em série com R_pLC paralelo descrita por (a) fase, (b) módulo e (c) módulo da admitância.

RL série em paralelo com C

Uma outra forma de considerar uma impedância não-nula na frequência ω=0 rad/s seria colocar uma resistência em série com a indutância, conforme a figura 7.

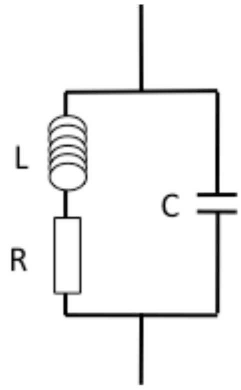

Figura 7 – Modelo RL série em paralelo com C de um indutor não ideal com auto-ressonância.

A impedância deste modelo de indutor não ideal é dada por $Z_B(j\omega)=\dfrac{R+j\omega L}{(1-\omega^2 LC)+j\omega RC}$.

Para determinar os valores das resistências, observe que, para ω=0, a impedância tende ao mesmo valor da resistência em série, ou seja, $Z_B(j0)=Re^{+j0}$.

Neste modelo, deve-se tomar cuidado com a definição da frequência de ressonância. Em $\omega=\omega_R=\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$, a impedância não tem fase nula. É na frequência $\omega=\omega_0=\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{L^2}}$ que a fase da impedância é nula. A impedância nessa frequência é dada por $Z_B(j\omega_R)=\dfrac{L}{RC}e^{+j0}$.

Neste modelo, de acordo com a figura 8c, obtém-se a capacitância pela inclinação da reta do módulo da admitância | Y_B (jω) |, que é igual a 2πC quando a fase for –90º, ou seja, para ω>>ω$_R$. Como no modelo anterior, também se pode estimar a indutância pela inclinação 2πL da reta do módulo da impedância | Z_B (jω) | na frequência em que a fase atinge o valor máximo.

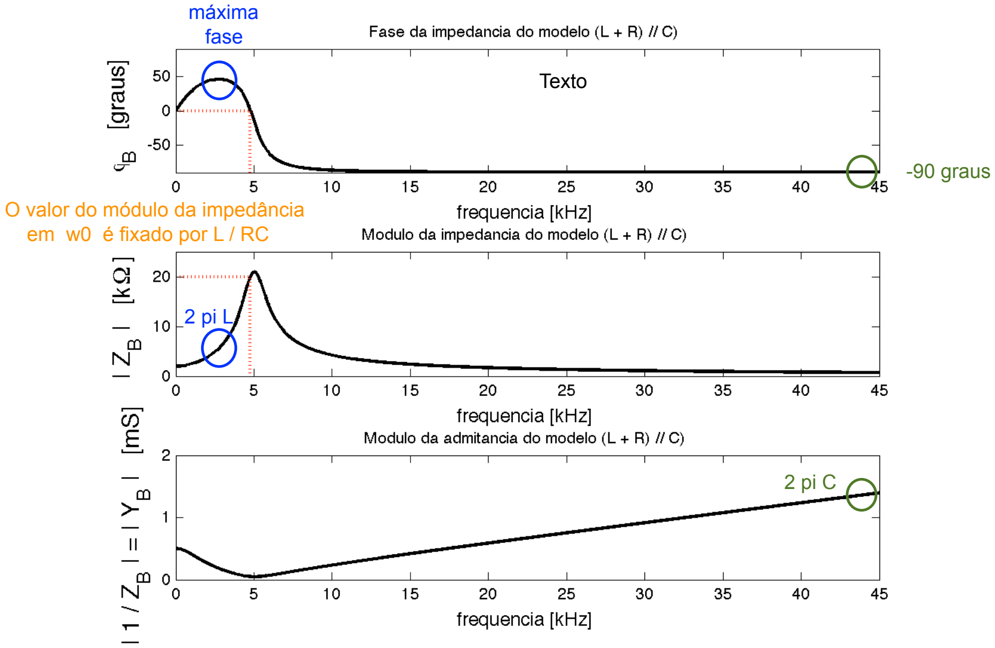

Figura 6 – Impedância do modelo RL série em paralelo com C descrita por (a) fase, (b) módulo e (c) módulo da admitância.

Desafio

Considere a impedância e o módulo da admitância de um indutor não-ideal fornecidos pela figura 7.

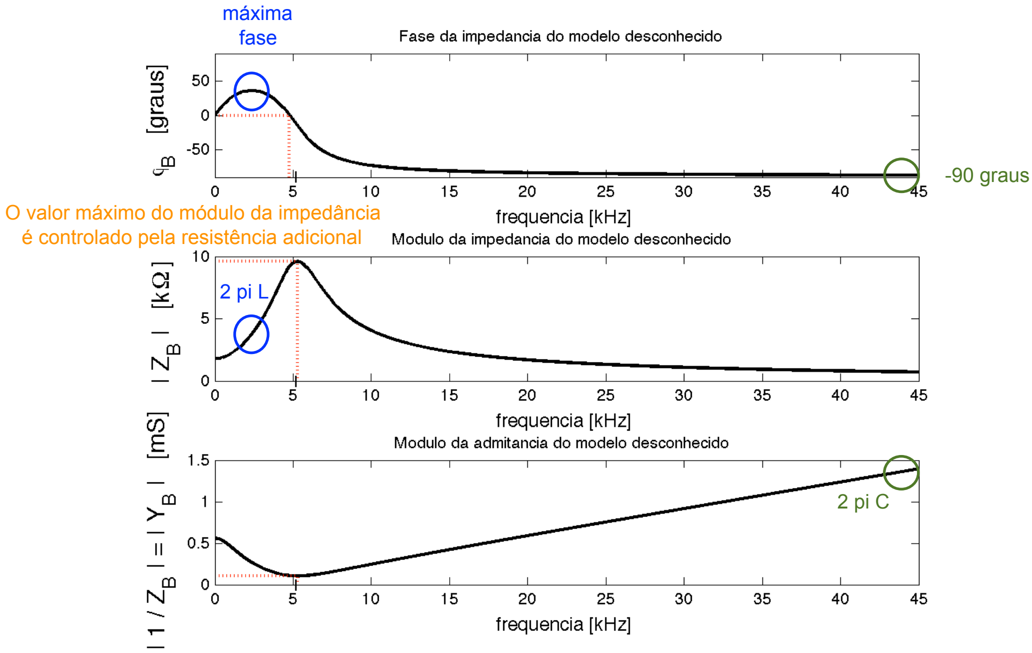

Figura 7 – Impedância do modelo desconhecido descrita pela (a) fase e pelo (b) módulo, além do (c) módulo da admitância.

Observe que, para ω=0, a impedância tem um comportamento resistivo. Essa resistência R estaria em série ou paralelo com a indutância L? Por quê?

Por outro lado, para $\omega \rightarrow \infty$, a impedância tende a zero, então não deve haver nenhuma resistência em série com a capacitância C. Por quê? Obtém-se $2\pi C$ pela inclinação da reta do módulo da admitância $| Y_B (j\omega) |$ quando a fase for aproximadamente –90º, ou seja, para $\omega >> \omega_R$.

Como a fase não atinge +90º, a curva do módulo da impedância não permite estimar L precisamente. Mas pode-se medir a frequência ω_0 em que a fase é nula, e calcular uma estimativa de L a partir da estimativa de C. Como? É importante observar que apesar de $\omega_0 \neq \omega_R$ nesse modelo, tem-se $\omega_0 \approx \omega_R = (LC)^{-2}$. Depois de se definir o modelo com componentes ideais, é possível deduzir a fórmula da impedância Z_B e calcular o valor do módulo na frequência ω_0. Assim se obtém uma estimativa mais precisa de L.

Por fim, o valor do módulo da impedância na frequência ω_0 permite obter o valor da outra resistência presente no modelo. Essa resistência está em série ou em paralelo com o capacitor? Por quê?