EAN, P2, 30/11/2019, Prof. Juan López Linares

Nome Completo: _____ #USP:_____

1) Encontre a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$f(x+2) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Solução:

Esse problema está resolvido na vídeo-aula 58: "Exemplo de Série de Fourier".

Devemos escrever a função f de periódo $T = 2L$ como uma combinação linear de funções senos e cossenos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right). \tag{1}$$

Os coeficientes a_0, a_n e b_n (com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) são calculados pelas integrais:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \tag{2}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx \tag{3}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx. \tag{4}$$

Neste problema o periódo da função f é $T = 2L = 2$, segue que $L = 1$.

Da equação (2) encontramos

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{1} 1\cdot dx = x\,|_0^1 = 1.$$

Da equação (3) encontramos

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)\,dx = \int_{-1}^{0} 0\cdot\cos(n\pi x)\,dx + \int_{0}^{1} 1\cdot\cos(n\pi x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\,|_0^1 = \frac{1}{n\pi}(\sin(n\pi) - \sin(0)) = 0.$$

Logo, os coeficientes $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
Da equação (4) encontramos

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)\,dx = \int_{-1}^{0} 0\cdot\sin(n\pi x)\,dx + \int_{0}^{1} 1\cdot\sin(n\pi x)\,dx = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\,|_0^1,$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}(\cos(n\pi) - \cos(0)) = \frac{1}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right).$$

Isto é, se n for par temos $b_n = 0$ e se n for ímpar então $b_n = \frac{2}{n\pi}$.
Quando n for ímpar seja $n = 2m+1$, com $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$. Segue que

$$b_{2m+1} = \frac{2}{(2m+1)\pi}.$$

Substituíndo os resultados encontrados em (1) temos

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin((2m+1)\pi x).$$

Podemos escrever as primeiras aproximações de f pela série de Fourier:

$$f_0(x) = \frac{1}{2}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(\pi x)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(\pi x) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\pi x)$$

$$f_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(\pi x) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\pi x) + +\frac{2}{5\pi}\sin(5\pi x).$$

Os gráficos da função f e das aproximações anteriores podem ser vistos em https://www.geogebra.org/m/a3v2xgsm.

2) Resolva detalhadamente o problema de valor de contorno

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = 0 \quad e \quad y(L) = 0.$$

Isto é, encontre os autovalores $\lambda \in \mathbb{R}$ e as autofunções, reais de variável real, correspondentes $y(x)$. Considere L um número real positivo.

Solução:

Esse problema está resolvido nas vídeo-aulas 65 e 66: "Autovalores e Autovetores em Problemas de Valores de Contorno I" e "Autovalores e Autovetores em Problemas de Valores de Contorno II".

Devemos encontrar a solução geral da equação diferencial de segunda ordem, linear, com coeficientes constantes e homogênea

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0. \tag{5}$$

Proponhamos uma solução da forma exponencial

$$y(x) = e^{rx}.$$

Derivando duas vezes e subtituindo a função e sua segunda derivada na equação diferencial encontramos a equação auxiliar do problema:

$$r^2 + \lambda = 0,$$

$$r^2 = -\lambda. \tag{6}$$

Vamos considerar três casos: i) $\lambda > 0$, ii) $\lambda = 0$ e iii) $\lambda < 0$.

i) $\lambda > 0$. Seja $\mu \in \mathbb{R}$ e $\mu > 0$ tal que $\lambda = \mu^2$. Substituindo esta mudança de variável em (6) temos

$$r^2 = -\mu^2 = i^2\mu^2,$$

$$r = \pm\mu i.$$

Como as soluções para r são números complexos da forma $r = \alpha \pm \beta i$ (tipo III), com $\alpha = 0$ e $\beta = \mu$, temos que a solução geral de (5) é

$$y_{g.h.}(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x), \tag{7}$$

com C_1 e C_2 números reais arbitrários.

Usando a primeira restrição $y(0) = 0$ temos que

$$0 = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)$$

$$C_1 = 0.$$

Usando a segunda restrição $y(L) = 0$ e o resultado anterior temos que

$$C_2 \sin(\mu L) = 0.$$

Não queremos que $C_2 = 0$ pois chegariamos na solução trivial $y_{PVC}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Logo, consideramos $C_2 \neq 0$ e $\sin(\mu L) = 0$. Para que a função seno se anule devemos ter que seu argumento é um múltiplo de π:

$$\mu L = n\pi$$

com $n \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\mu = \mu_n = \frac{n\pi}{L} \quad \forall n \geq 1,$$

e encontramos os autovalores

$$\lambda = \mu^2 = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \forall n \geq 1. \tag{8}$$

Substituindo $C_2 \neq 0$, $C_1 = 0$ e (8) em (7) encontramos para cada n infinitas soluções da forma

$$y_n(x) = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \forall n \geq 1.$$

Vamos considerar somente o caso em que $C_2 = 1$, ao qual chamaremos de autofunção do problema

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \forall n \geq 1. \tag{9}$$

Isto é, para $n = 1$ temos o autovalor $\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$ e a autofunção correspondente $y_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$.

Para $n = 2$ temos o autovalor $\lambda_2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ e a autofunção correspondente $y_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$ e assim por diante para todo número natural n.

ii) $\lambda = 0$. Neste caso a equação auxiliar (6) se transforma em

$$r^2 = 0,$$

logo $r = 0$ é uma raiz dupla (tipo II) e a solução da equação diferencial (5) é

$$y_{g.h.}(x) = C_1 + C_2 x,$$

com C_1 e C_2 números reais arbitrários.

Usando a primeira restrição $y(0) = 0$ temos que

$$0 = C_1 + C_2 \cdot 0$$

$$C_1 = 0.$$

Usando a segunda restrição $y(L) = 0$ e o resultado anterior temos que

$$C_2 L = 0.$$

Como $L > 0$ segue que $C_2 = 0$ e a única solução que existe neste caso é a trivial.

iii) $\lambda < 0$. Seja $\mu \in \mathbb{R}$ e $\mu > 0$ tal que $\lambda = -\mu^2$. Substituindo esta mudança de variável em (6) temos

$$r^2 = \mu^2,$$

$$r = \pm\mu.$$

Como as soluções para r são números reais diferentes (tipo I) podemos escrever a solução geral de (5) na forma

$$y_{g.h.}(x) = C_1 \cosh(\mu x) + C_2 \sinh(\mu x), \tag{10}$$

com C_1 e C_2 números reais arbitrários.

Usando a primeira restrição $y(0) = 0$ temos que

$$0 = C_1 \cosh(0) + C_2 \sinh(0)$$

$$C_1 = 0.$$

Usando a segunda restrição $y(L) = 0$ e o resultado anterior temos que

$$C_2 \sinh(\mu L) = 0.$$

Como $L > 0$ e $\mu > 0$ e a função $\sinh(x)$ somente se anula em $x = 0$ a única alternativa é que $C_2 = 0$. Isto é, neste caso tampouco existem soluções diferentes da trivial.

Concluímos que para o problema de contorno como um todo os autovalores são dados, para todo $n \in \mathbb{N}$, pela equação (8):

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \forall n \geq 1,$$

e as autofunções correspondentes são dadas pela equação (9):

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \forall n \geq 1.$$

Para $L = 1$ são mostrados os gráficos de três autofunções em C4-A11-Autofunções.

3) Deduza detalhadamente a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no caso do problema de

Dirichlet em um Retângulo:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \tag{11}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \tag{12}$$

$$u(x,b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \tag{13}$$

$$u(0,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \tag{14}$$

$$u(a,y) = f(y), \quad 0 \leq y \leq b. \tag{15}$$

Onde $f(y)$ é uma função real conhecida e não identicamente nula em $[0,b]$. Considere a e b números reais positivos.

Solução:

Esse problema está resolvido nas vídeo-aulas: "Equação de Laplace -V82" e "Problema de Dirichlet em um Retângulo -V83".

Suponhamos que exista uma solução na forma do produto de duas funções, uma parte que somente depende de x e outra parte que somente depende de y:

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y). \tag{16}$$

Derivando de forma parcial duas vezes em x e y teremos:

$$u_{xx}(x,y) = X''(x)\,Y(y), \tag{17}$$

$$u_{yy}(x,y) = X(x)\,Y''(y). \tag{18}$$

Substituindo (17) e (18) em (11) encontramos:

$$X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y) = 0.$$

Segue que

$$X''(x)\,Y(y) = -X(x)\,Y''(y)\,,$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Como na equação anterior o lado esquerdo não depende de y e o direito não depende de x a igualdade deve ser uma constante que chamaremos λ:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

A equação anterior pode ser separada em duas:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \tag{19}$$

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0. \tag{20}$$

O sistema anterior é formado por equações diferenciais ordinárias acopladas por λ.

Estudaremos agora as consequências da hipótese da separação de variáveis (16) sobre as condições de contorno (12), (13) e (14).

Para a equação de fronteira (12):

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$X(x)\,Y(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq a.$$

Se $X(x) = 0$ para todo $0 \leq x \leq a$ substituindo esse resultado em (16) encontraremos a solução identicamente nula (trivial), na qual não estamos interessados. Segue que devemos ter que

$$Y(0) = 0. \tag{21}$$

Para a equação de fronteira (13):

$$u(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$X(x)\, Y(b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a.$$

Se $X(x) = 0$ para todo $0 \leq x \leq a$ substituindo esse resultado em (16) encontraremos a solução trivial, na qual não estamos interessados. Segue que devemos ter que

$$Y(b) = 0. \tag{22}$$

Para a equação de fronteira (14):

$$u(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b,$$

$$X(0)\, Y(y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Se $Y(y) = 0$ para todo $0 \leq y \leq b$ substituindo esse resultado em (16) encontraremos a solução trivial, na qual não estamos interessados. Segue que devemos ter que

$$X(0) = 0. \tag{23}$$

Estudaremos agora as equações (20), (21) e (22):

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0,$$

$$Y(0) = 0,$$

$$Y(b) = 0.$$

O conjunto anterior de equações é o problema de valor de contorno homogêneo resolvido no exercício 2 desta prova, somente devemos trocar $y(x)$ por $Y(y)$ e L por b.

Os autovalores são dados, para todo $n \in \mathbb{N}$, por

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad \forall n \geq 1, \tag{24}$$

e as autofunções correspondentes são dadas por

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad \forall n \geq 1. \tag{25}$$

Estudaremos agora as equações (19) e (23):

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,$$

$$X(0) = 0.$$

O conjunto anterior é um problema de valor de contorno incompleto (PVCI). Seja $\lambda = \lambda_n = \mu_n^2 = \mu^2$, sabemos que $\mu = \frac{n\pi}{b} > 0$.

Para resolver a equação diferencial proponhamos uma solução de tipo exponencial: $X(x) = e^{rx}$. Derivando duas vezes e substituindo na equação diferencial encontramos o polinômio caraterístico:

$$r^2 - \mu^2 = 0.$$

As soluções são número reais diferentes (Tipo I):

$$r = \pm\mu.$$

Logo, a solução geral da equação homogênea pode ser escrita como

$$X_{gh}(x) = C_1 \cosh(\mu x) + C_2 \sinh(\mu x),$$

onde C_1 e C_2 números reais arbitrários.
A seguir usaremos a condição de fronteira $X(0) = 0$:

$$X_{gh}(0) = 0 = C_1 \cosh(0) + C_2 \sinh(0).$$

Como $\cosh(0) = 1$ e $\sinh(0) = 0$ encontramos que $C_1 = 0$. Isto é, existem infinitas soluções do problema de valor de contorno incompleto da forma:

$$X_{PVCI}(x) = C_2 \sinh(\mu x).$$

Tomando $C_2 = 1$ e escrevendo $\mu = \frac{n\pi}{b}$ encontramos as autofunções em x:

$$X_n(x) = \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \quad \forall n \geq 1. \tag{26}$$

De (16), (25) e (26) as autofunções em u são:

$$u_n(x, y) = \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad \forall n \geq 1.$$

A solução do problema é uma combinação linear de todas as autofunções em u:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \tag{27}$$

Neste ponto podemos usar a condição de contorno (15):

$$u(a,y) = f(y), \quad 0 \leq y \leq b,$$

$$u(a,y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

O lado direito da equação anterior é a série de Fourier da extensão periódica ímpar de $f(y)$ onde

$$c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) = \frac{2}{b}\int_0^b f(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy,$$

$$c_n = \frac{2}{b\sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy. \tag{28}$$

Resumindo, as equações (27) e (28) representam a solução do problema de Dirichlet no Retângulo dado.