EAD, P2, 18/11/2019, Prof. Juan López Linares

Nome Completo: _____ #USP:_____

1) a) Escreva a extensão periódica ímpar da função dada. b) Encontre a série de Fourier da extensão periódica ímpar da função dada.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x-1, & \text{se } 1 \leq x < 2 \end{cases}.$$

Solução:

Esse problema está resolvido nas vídeo-aulas 63 e 64: "Extensão Periódica Ímpar" e "Exemplo de Série de Fourier em Senos".

a) Sejam $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A extensão periódica ímpar $g(x)$ de uma função $f(x)$ é

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 < x < L \\ 0 & \text{se } x = -L \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = L \\ -f(-x) & \text{se } -L < x < 0 \end{cases}$$

$$\text{e } g(x+2L) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, neste problema temos

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x = -2 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 2 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ x+1 & \text{se } -2 < x \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{e } g(x+4) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Como $g(x)$ é uma função ímpar sua série de Fourier será da forma

$$g\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right). \tag{1}$$

Os coeficientes b_n (com $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$) são calculados pelas integrais:

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L g\left(x\right)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx. \tag{2}$$

Neste problema o periódo da função g é $T=2L=4$, com $L=2$.
Da equação (2) encontramos

$$b_n=\int_0^2 g\left(x\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx=\int_0^1 0\cdot\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx+\int_1^2\left(x-1\right)\cdot\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx=I_1+I_2. \tag{3}$$

$$I_1=\int_1^2 x\cdot\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$I_2=-\int_1^2\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

Vamos calcular por separado as integrais I_1 e I_2. Para calcular a primeira integral usaremos a fórmula de integração por partes:

$$\int_a^b udv=uv\mid_a^b-\int_a^b vdu.$$

Sejam $u=x$ e $dv=\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx$. Derivando a primeira e integrando a segunda segue que $du=dx$ e $v=\frac{-2}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)$. Logo

$$I_1 = \int_1^2 x \cdot \sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{-2}{n\pi} x \cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{-2}{n\pi} \cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right) dx,$$

$$I_1 = \frac{-2}{n\pi}\left[2\cos(n\pi) - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right] + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_1^2,$$

$$I_1 = \frac{2}{n\pi}\left[-2(-1)^n + \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right] + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \left[\sin(n\pi) - \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$I_1 = \frac{2}{n\pi}\left[-2(-1)^n + \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

A seguir calculamos I_2:

$$I_2 = -\int_1^2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right) dx = -\frac{-2}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_1^2 = \frac{2}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$I_2 = \frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Somando os resultados encontrados para I_1 e I_2 temos

$$b_n = I_1 + I_2 = \frac{2}{n\pi}\left[-(-1)^n\right] - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$b_n = \frac{-2}{n\pi}\left[(-1)^n + \frac{2}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Substituíndo o resultado anterior em (1) temos

$$g(x) = \frac{-2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[(-1)^n + \frac{2}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right).$$

Podemos escrever as primeiras aproximações de g pela série de Fourier:

$$g_1(x) = \frac{2}{\pi}\left[1 - \frac{2}{\pi}\right]\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

$$g_2(x) = g_1(x) - \frac{1}{\pi}\sin(\pi x),$$

$$g_3(x) = g_2(x) + \frac{2}{3\pi}\left[1 + \frac{2}{3\pi}\right]\sin\left(3\frac{\pi}{2}x\right),$$

$$g_4(x) = g_3(x) - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x),$$

$$g_5(x) = g_4(x) + \frac{2}{5\pi}\left[1 - \frac{2}{5\pi}\right]\sin\left(5\frac{\pi}{2}x\right).$$

Os gráficos da função f e das aproximações anteriores da função g podem ser vistos em https://www.geogebra.org/m/spbf68zp.

2) Resolva detalhadamente o problema de valor de contorno

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad e \quad y'(L) = 0.$$

Isto é, encontre os autovalores $\lambda \in \mathbb{R}$ e as autofunções, reais de variável real, correspondentes $y(x)$. Considere L um número real positivo.

Solução:

Esse problema está resolvido nas vídeo-aulas 72 e 73: "Barra com Extremidades Isoladas I" e "Barra com Extremidades Isoladas II".

Devemos encontrar a solução geral da equação diferencial de segunda ordem, linear, com coeficientes constantes e homogênea

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0. \tag{4}$$

Proponhamos uma solução da forma exponencial

$$y(x) = e^{rx}.$$

Derivando duas vezes e subtituindo a função e sua segunda derivada na equação diferencial encontramos a equação auxiliar do problema:

$$r^2 + \lambda = 0,$$

$$r^2 = -\lambda. \tag{5}$$

Vamos considerar três casos: i) $\lambda > 0$, ii) $\lambda = 0$ e iii) $\lambda < 0$.

i) $\lambda > 0$. Seja $\mu \in \mathbb{R}$ e $\mu > 0$ tal que $\lambda = \mu^2$. Substituindo esta mudança de variável em (5) temos

$$r^2 = -\mu^2 = i^2\mu^2,$$

$$r = \pm\mu i.$$

Como as soluções para r são números complexos da forma $r = \alpha \pm \beta i$ (tipo III), com $\alpha = 0$ e $\beta = \mu$, temos que a solução geral de (4) é

$$y_{g.h.}(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x), \tag{6}$$

com C_1 e C_2 números reais arbitrários. Como as retrições são sobre as derivadas devemos derivar a equação anterior:

$$y'_{g.h.}(x) = -C_1\mu \sin(\mu x) + C_2\mu \cos(\mu x), \tag{7}$$

Usando a primeira restrição $y^{\prime}(0) = 0$ temos que

$$0 = C_1 \mu \sin(0) + C_2 \mu \cos(0)$$

$$C_2 = 0.$$

Usando a segunda restrição $y^{\prime}(L) = 0$ e o resultado anterior temos que

$$C_1 \mu \sin(\mu L) = 0.$$

Não queremos que $C_1 = 0$ pois chegariamos na solução trivial $y_{PVC}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Logo, consideramos $C_1 \neq 0$ e $\sin(\mu L) = 0$. Para que a função seno se anule devemos ter que seu argumento é um múltiplo de π:

$$\mu L = n\pi$$

com $n \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\mu = \mu_n = \frac{n\pi}{L} \quad \forall n \geq 1,$$

e encontramos os autovalores

$$\lambda = \mu^2 = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \forall n \geq 1. \tag{8}$$

Substituindo $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$ e (8) em (6) encontramos para cada n infinitas soluções da forma

$$y_n(x) = C_2 \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad \forall n \geq 1.$$

Vamos considerar somente o caso em que $C_1 = 1$, ao qual chamaremos de autofunção do problema

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \forall n \geq 1. \tag{9}$$

Isto é, para $n = 1$ temos o autovalor $\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$ e a autofunção correspondente $y_1(x) = \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)$. Para $n = 2$ temos o autovalor $\lambda_2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ e a autofunção correspondente $y_2(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$ e assim por diante para todo número natural n.

ii) $\lambda = 0$. Neste caso a equação auxiliar (5) se transforma em

$$r^2 = 0,$$

logo $r = 0$ é uma raiz dupla (tipo II) e a solução da equação diferencial (4) é

$$y_{g.h.}(x) = C_1 + C_2 x,$$

com C_1 e C_2 números reais arbitrários. Como as retrições são sobre as derivadas devemos derivar a equação anterior:

$$y'_{g.h.}(x) = C_2.$$

Usando a primeira restrição $y'(0) = 0$ temos que $C_2 = 0$. Usando a segunda restrição $y'(L) = 0$ também temos que $C_2 = 0$. Como C_1 pode ser um número real arbitrâario temos soluções da forma

$$y_{PCV}(x) = C_1.$$

Fazendo $C_1 = 1$ temos para o autovalor $\lambda = 0$ a autofunção associada $y_0(x) = 1$.

iii) $\lambda < 0$. Seja $\mu \in \mathbb{R}$ e $\mu > 0$ tal que $\lambda = -\mu^2$. Substituindo esta mudança de variável em (5) temos

$$r^2 = \mu^2,$$

$$r = \pm\mu.$$

Como as soluções para r são números reais diferentes (tipo I) podemos escrever a solução geral de (4) na forma

$$y_{g.h.}(x) = C_1 \cosh(\mu x) + C_2 \sinh(\mu x), \tag{10}$$

com C_1 e C_2 números reais arbitrários. Como as retrições são sobre as derivadas devemos derivar a equação anterior:

$$y'_{g.h.}(x) = C_1\mu \sinh(\mu x) + C_2\mu \cosh(\mu x), \tag{11}$$

Usando a primeira restrição $y'(0) = 0$ temos que

$$0 = C_1\mu \sinh(0) + C_2\mu \cosh(0)$$

$$C_2 = 0.$$

Usando a segunda restrição $y'(L) = 0$ e o resultado anterior temos que

$$C_1\mu \sinh(\mu L) = 0.$$

Como $L > 0$ e $\mu > 0$ e a função $\sinh(x)$ somente se anula em $x = 0$ a única alternativa é que $C_1 = 0$. Isto é, neste caso tampouco existem soluções diferentes da trivial.

Concluímos que para o problema de contorno como um todo os autovalores e autofunções são:

$$\lambda = 0 \quad y_0(x) = 1$$
$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \forall n \geq 1,$$

Para $L = 1$ são mostrados os gráficos de três autofunções em C4-A12-Autofunções Extremidades Isoladas.

3) Considere a corda vibrante de 30 cm de comprimento que satisfaz a equação de onda

$$4u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t), \quad 0 < x < 30, \quad t > 0. \tag{12}$$

Suponha que as extremidades da corda estão fixas e que a corda é colocada em movimento, sem velocidade inicial, da posição inicial

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10}, & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ \frac{30-x}{20}, & \text{se } 10 < x \leq 30 \end{cases}. \tag{13}$$

Encontre o deslocamento vertical $u(x,t)$ da corda e descreva o seu movimento durante um período.

Solução:

Este problema está resolvido na vídeo-aula Exemplo de Corda Elástica com Deslocamento Inicial Não Nulo -V79.

Este é um problema de propagação de ondas dado por (12), com extremos fixos

$$u(0,t) = u(30,t) = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

velocidade inicial vertical zero

$$u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 30,$$

e posição inicial

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 30.$$

A solução deste tipo de problema é da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(na\frac{\pi}{L}t\right), \tag{14}$$

onde $L = 30$, $a = 2$, e os coeficientes c_n são dados por

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx, \quad \forall n \geq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como a função f é definida em duas partes a integral anterior separa em duas

$$c_n = \frac{2}{30}\int_0^{10} \frac{x}{10}\sin\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx + \frac{2}{30}\int_{10}^{30}\left(\frac{30-x}{20}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx.$$

A segunda integral também separa em duas integrais

$$c_n = \frac{1}{150}\int_0^{10} x\sin\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx + \frac{1}{10}\int_{10}^{30}\sin\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx - \frac{1}{300}\int_{10}^{30} x\sin\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx.$$

Vamos definir

$$I_1 = \int_0^{10} x\sin\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx,$$

$$J = \int_{10}^{30}\sin\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx,$$

$$I_2 = \int_{10}^{30} x\sin\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx.$$

Segue que

$$c_n = \frac{1}{150} I_1 + \frac{1}{10} J - \frac{1}{300} I_2. \tag{15}$$

Para a integral J temos

$$J = -\frac{30}{n\pi} \cos\left(n\frac{\pi}{30}x\right)\Big|_{10}^{30} = -\frac{30}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{30}{n\pi}\left((-1)^n - \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

As integrais I_1 e I_2 somente diferem nos limites de integração. Vamos primeiro calcular a integral indefinida

$$I = \int x \sin\left(n\frac{\pi}{30}x\right) dx,$$

usando integração por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Sejam $u = x$ e $dv = \sin\left(n\frac{\pi}{30}x\right) dx$. Derivando a primeira e integrando a segunda segue que $du = dx$ e $v = -\frac{30}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{30}x\right)$. Logo

$$I = \int x \cdot \sin\left(n\frac{\pi}{30}x\right) dx = -\frac{30}{n\pi} x \cos\left(n\frac{\pi}{30}x\right) - \int \frac{-30}{n\pi} \cos\left(n\frac{\pi}{30}x\right) dx,$$

$$I = -\frac{30}{n\pi} x \cos\left(n\frac{\pi}{30}x\right) + \left(\frac{30}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n\frac{\pi}{30}x\right).$$

Agora encontramos I_1 e I_2 como

$$I_1 = I|_0^{10} = -\frac{300}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{30}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right),$$

$$I_2 = I|_{10}^{30} = -\frac{300}{n\pi}\left[3\cdot(-1)^n - \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right] - \left(\frac{30}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right).$$

Substituindo os valores encontrados para J, I_1 e I_2 em (15) encontramos

$$c_n = \frac{1}{150}\left[-\frac{300}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{30}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right] + \frac{1}{10}\left[-\frac{30}{n\pi}\left((-1)^n - \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{300}\left[-\frac{300}{n\pi}\left[3\cdot(-1)^n - \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right] - \left(\frac{30}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$c_n = -\frac{2}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + 6\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{n\pi}\left((-1)^n - \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{n\pi}\left[3\cdot(-1)^n - \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right] + 3\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right),$$

$$c_n = -\frac{2}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + 6\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{n\pi}(-1)^n + \frac{3}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) +$$

$$+3\cdot\frac{1}{n\pi}(-1)^n - \frac{1}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right),$$

$$c_n = 9\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right).$$

Substituindo o valor encontrado para c_n e os valores de L e a em (14) encontramos a solução do problema

$$u(x,t) = \left(\frac{3}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(n\frac{\pi}{30}x\right) \cos\left(n\frac{\pi}{15}t\right).$$

Pode ser mostrado que a série encontrada é convergente por comparação com a série p convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Note que

$$-1 \leq \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(n\frac{\pi}{30}x\right) \cos\left(n\frac{\pi}{15}t\right) \leq 1.$$

As duas primeiras aproximações para $u(x,t)$ são

$$u_1(x,t) = \left(\frac{3}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{30}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{15}t\right),$$

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) + \left(\frac{3}{2\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{15}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{15}t\right).$$

Do argumento da função cosseno em u_1 nota-se que um período em t é de 30 s.

As figuras correspondentes a solução do problema podem ser encontradas em C4-A13-Ex-1 e C4-A13-Ex-1b.