

LISTA DE EXERCÍCIOS – PCS 2046

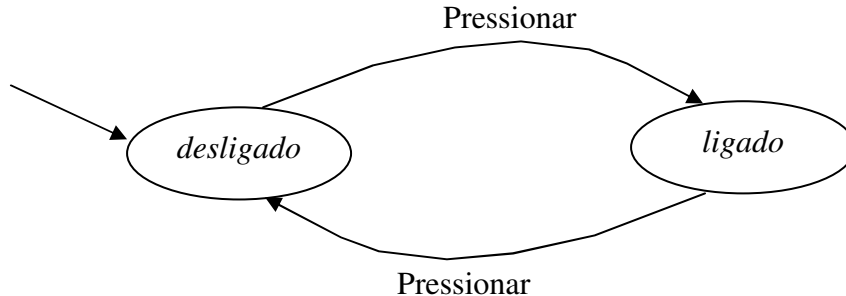
1. Defina-se $(x; y)$ como: $(x; y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Usando esta definição mostre que $(a; b) = (c; d)$, se e somente se, $a = c$ e $b = d$.
2. Estabeleça bijeções com os números naturais para os seguintes conjuntos: (a) os inteiros; (b) os naturais múltiplos de 3; (c) os membros do produto cartesiano dos conjuntos (a) e (b).
3. Prove que uma relação é simétrica se e somente se $R = R^{-1}$.
4. Prove que uma relação em um conjunto A é anti-simétrica se e somente se:

$$R \cap R^{-1} \subseteq \{(a, a) : a \in A\}.$$

5. Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A e suponha que $a, b \in A$. Prove que $a \in [b] \Leftrightarrow b \in [a]$.
6. Sejam R e S relações de equivalência em um conjunto A . Prove que $R = S$ se e somente se as classes de equivalência de R são as mesmas que as de S .
7. Suponha que $f: A \rightarrow B$ seja uma bijeção. Prove que $f^{-1}: B \rightarrow A$ também é uma bijeção.
8. Prove que o conjunto \mathbb{Q} é contável.
9. Seja $f: A \rightarrow B$ uma função. Uma função $g: A \rightarrow B$ é dita inversa à esquerda de f se $g \circ f = \text{id}_A$; e inversa à direita de f se $f \circ g = \text{id}_B$. Prove que se f é injetora, então tem inversa à esquerda, e que se f é sobrejetora então tem inversa à direita.
10. Usando o princípio da indução matemática, prove que todo quadrado perfeito positivo pode ser obtido como a soma de uma seqüência dos primeiros números naturais ímpares.
11. Usando o princípio da indução matemática, prove que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, com primeiro termo a e razão q vale $a(q^n - 1)/(q - 1)$.
12. Novamente usando indução prove que $(n^4 - 4n^2)$ é divisível por 3, para todo n natural.
13. O problema das torres de Hanói com n discos possui uma solução recursiva para o número de movimentos que é: $M(n) = 2^n - 1$. Prove que a solução é correta.
14. Usando o princípio da casa de pombos, mostre que se uma relação binária sobre um conjunto finito apresentar cadeias de comprimento arbitrário, então nela existe pelo menos um ciclo.
15. Suponha que você trabalha para o INPE, e seu chefe solicitou a você uma rotina (função) para mapear as imagens de satélite da cidade de São Paulo em uma tela de vídeo de 640×480 pontos, sem perder qualquer detalhe. É possível cumprir a tarefa? Por quê?
16. Prove que, se $A \subseteq B$, e A é não enumerável, então B é não enumerável.
17. Mostre que o conjunto dos números reais no intervalo $[0, 1]$ é não enumerável.
18. Defina-se que qualquer expressão aritmética E :
 - a) É qualquer número ou letra (variável) é uma expressão;
 - b) Se F e G são expressões, então $E = F + G$, $E = F * G$, e $E = (F)$ também são expressões;Prove que toda expressão assim definida tem um número igual de parênteses à esquerda e à direita.

LISTA DE EXERCÍCIOS – PCS 2046

19. Usando como base o autômato da figura abaixo, prove as afirmações S_1 e S_2 :
 $S_1(n)$ =O autômato está no estado *desligado* após n acionamentos se e somente se n é par;
 $S_2(n)$ =O autômato está no estado *ligado* após n acionamentos se e somente se n é ímpar;



Sugestão: Use o princípio da indução.

20. Considere a parte de um programa de computador descrita abaixo:

```
function findMax(array, first, last) {  
    if (first == last) return array[first];  
    mid = first + (last - first)/2;  
    a = findMax(array, first, mid);  
    b = findMax(array, mid + 1, last);  
    if (a < b) return b;  
    return a;  
}
```

Onde array representa uma seqüência de inteiros. Todas as demais variáveis são inteiras. Suponha que first e last estejam entre 1 e o número de elementos da seqüência ordenada, e que first ≤ last. O objetivo do programa é encontrar o maior valor na seqüência entre dois índices (first e last). Prove que o programa desempenha o seu objetivo. [Nota: $(last - first) / 2$, tem como resultado o maior inteiro que seja menor do que o valor racional obtido, ou seja, o seu "piso"].

21. Prove usando o princípio das casas de pombo que dado $n \in \mathbf{N}$, então há inteiros positivos a e b , $a \neq b$, tais que $n^a - n^b$ seja divisível por 10.