1. CONJUNTOS, RELAÇÕES e LINGUAGENS

Conjuntos

- conjuntos são coleções de objetos $L = \{a,b,c\}$
- cada objeto é um *membro* ou *elemento* do conjunto
- conjuntos *contêm* cada um de seus elementos $a \in L$
- não há elementos repetidos em um conjunto
- conjuntos *iguais* contêm os mesmos elementos
- conjuntos *unitários* contêm um só elemento $\{a\} \neq a.$
- o conjunto *vazio* não contém elemento algum $\varnothing = \{\}$
- conjuntos *infinitos* contêm infinitos elementos $\mathbb{N} = \{0,l,...\}$

- B é *subconjunto* de A se todos os elementos de B forem também elementos de A. $B \subseteq A$
- Conjuntos podem ser dados por regras que definem as *propriedades* de seus elementos $\{x \mid x>0\}$
- C é a *união* de A e B se todos os seus elementos pertencerem ou a A ou a B, $C=A\cup B$
- C é a *intersecção* de A e B se todos os seus elementos pertencerem a A e a B, $C=A\cap B$
- C é a *diferença* entre A e B se seus elementos pertencerem a A, mas não a B, $C=A - B$

- ***Idempotência*** - um conjunto não se altera sob união ou intersecção consigo mesmo
- ***Comutativa*** - a ordem dos conjuntos não altera o resultado das operações de união ou intersecção
- ***Associativa*** - a seqüência de aplicação de operações de união (ou de intersecção) a três conjuntos é irrelevante
- ***Distributiva*** - vale a distributividade para a união em relação à intersecção e vice-versa
- ***Absorção*** - um conjunto não se altera sob união (intersecção) com o resultado de sua intersecção (união) com outro conjunto

Leis de De Morgan - a diferença entre um conjunto e uma união (intersecção) de outros dois é igual à intersecção (união) das diferenças entre esse conjunto e cada um dos outros dois

A e B são *disjuntos* se não tiverem intersecção
Uniões e intersecções se aplicam também a mais de dois conjuntos

Conjunto-potência de A (2^A) é o conjunto de todos os possíveis subconjuntos de A

Partição de A é qualquer subconjunto de 2^A que não inclua o conjunto vazio, que tenha elementos disjuntos dois a dois e que seja tal que a união de todos os seus elementos seja A

Teoremas de De Morgan

- $A - (B\cup C) = (A -. B) \cap (A - C)$
- $A - (B\cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
- $A\cup(A\cap B) = A$
- $A\cap(A\cup B) = A$

Relações

Par ordenado (a,b) distingue os elementos a e b
Produto cartesiano $A\times B$ de A por B é o conjunto de todos os possíveis pares ,ordenados (a,b) tais que $a\in A$ e $b\in B$
Uma *relação binária* sobre dois conjuntos é qualquer subconjunto de seu produto cartesiano
Ênupla ordenada $(a_l,a_2, \ldots , a_n)$
Seqüência é uma ênupla ordenada em que não está fixado o número de elementos componentes
Comprimento de uma seqüência é o número de seus elementos
Produto cartesiano $A_l\times A_2\times\ldots\times A_n$ é o conjunto de todas as possíveis ênuplas ordenadas $(a_l,a_2, \ldots ,a_n)$ tais que $a_i \in A_i$
Uma *relação n-ária* sobre A_1, A_2, ... ,A_n é um subconjunto qualquer de $A_1\times A_2 \ldots \times A_n$

Funções

Uma função f: $A \to B$, de A para B, é uma relação binária R sobre A e B tal que para cada $a\in A$ existe um e só um par ordenado de R, cuja forma seja (a,x).
O conjunto A é o *domínio* de *f*.
Para $a\in A$ denota-se como $f(a)$ o elemento $b\in B$ tal que $(a,b) \in f$, $f(a)$ é dito *imagem* do elemento a, segundo *f*.
Se f: $A_l\times A_2\times\ldots\times A_n \to B$ é função, e $f(a_l,a_2, \ldots ,a_n) = b$, então os a_i são chamados *argumentos* de *f*, e b é o correspondente *valor* de *f*.

f: $A \to B$ é ***injetora*** se para todo $a \neq b$, $f(a) \neq f(b)$
f: $A \to B$ é ***sobrejetora*** se cada elemento de B é imagem de algum elemento de A
f: $A \to B$ é ***bijetora*** se for injetora e sobrejetora

Uma relação binária $R \subseteq A\times B$ tem uma relação *inversa* $R^{-1} \subseteq B\times A$ dada por $(b,a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a,b) \in R$
A inversa de uma função nem sempre é função

Se *f* for uma bijeção, f^{-1} também será uma bijeção
Em bijeções simples, em que o argumento pode ser confundido com sua imagem, caracterizam-se os *isomorfismos naturais*

Para relações binárias Q e R, define-se *composição* $Q\circ R$ ou QR como sendo o conjunto:
$Q\circ R = \{ (a,b) \mid \text{para algum } c, (a,c) \in Q \text{ e } (c,b) \in R\}$

Relações Binárias Especiais (1)

Uma relação $R \subseteq A\times A$ pode ser representada através de um *grafo orientado*
Elementos de A correspondem a *nós* do grafo

$R \subseteq A\times A$ é *reflexiva* se todo $(a,a) \in R$
$R \subseteq A\times A$ é *simétrica* se $(a,b) \in R$ sempre que $(b,a) \in R$
$R \subseteq A\times A$ é *anti-simétrica* se para todo $(a,b) \in R$, com $a\neq b$, implicar que $(b,a) \notin R$
$R \subseteq A\times A$ é *transitiva* se $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

Uma relação reflexiva, simétrica e transitiva é dita *relação de equivalência*
Cada grupo de nós conexos do grafo forma uma classe de equivalência
As classes de equivalência de uma relação de equivalência sobre A criam uma partição de A

Uma relação reflexiva, anti-simétrica e transitiva é chamada *relação de ordem parcial*
Uma relação de ordem parcial $R \subseteq A\times A$ é chamada *relação de ordem total* se, para todo a, $b \in A$, tem-se que ou $(a,b) \in R$ ou $(b,a) \in R$

Uma cadeia em uma relação binária é uma seqüência $(a_l,a_2, \ldots ,a_n)$, $n \geq 1$, tal que $(a_i, a_{i+1}) \in R$, i = 1, ... , n-1. Diz-se que esta cadeia vai de a_1 até a_n

Uma cadeia é um *ciclo* se os a_i são distintos, e também $(a_n,a_1) \in R$
Um ciclo é *trivial* se n=1. Se não, será *não-trivial*
Uma relação é de ordem parcial se e somente se for reflexiva e transitiva, e isenta de ciclos não-triviais

Fechamentos

Se D é um conjunto e $n \geq 0$, seja $R \subseteq D^{n+1}$ uma relação (n+l)-ária sobre D. Então um subconjunto $B \subseteq D$ é dito *fechado em relação a* R sempre que $(b_l, \ldots , b_{n+1}) \in R$, caracterizando uma *propriedade de fechamento* de B.
Seja P *uma propriedade de fechamento definida por relações sobre um conjunto* D, *e seja* $A \subseteq D$. Nessas condições, existirá um conjunto mínimo B, que contém o conjunto A. e que guarda a propriedade P.
B é *o fechamento de A* em relação às relações $R_l \ldots R_n$
No particular caso de $R \subseteq A\times A$ define-se R* como *fechamento reflexivo e transitivo* de R.
O fechamento reflexivo e *transitivo* R* *é dado por:*
$R \cup \{ (a,b) \mid$ *existe uma cadela de a para* b, *em* R$\}$
Relação binária pode ser fechada para uma ou mais propriedades.

Ex.: R^+ *fechamento transitivo*

Conjuntos Finitos e Infinitos

Tamanho (número de elementos) finito caracteriza *conjuntos finitos.*
Dois conjuntos finitos A e B são *equinumerosos* se for possível obter alguma bijeção f: $A \rightarrow B$. É uma relação de *simetria.*
Um conjunto finito é equinumeroso em relação a {l, ..., n}, com $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, diz-se que a *cardinalidade* do conjunto é n.

Para conjuntos infinitos não é possível contar os elementos,
Um conjunto é *infinitamente enumerável* se for equinumeroso em relação a $\mathbb{N}$.

Um conjunto é *enumerável* se for finito ou então infinitamente enumerável. Caso contrário será dito *não-enumerável.*
A forma mais direta de mostrar que um conjunto é enumerável consiste em estabelecer uma *bijeção* deste conjunto com outro conjunto enumerável, como por exemplo o conjunto dos naturais.
Uma união finita de conjuntos enumeráveis é enumerável.
Um produto cartesiano de um número finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Técnicas de Demonstração

Há vários tipos de demonstrações, baseados em três princípios:

(a) Principio da indução matemática
Seja A um subconjunto dos números naturais tal que O e *Ao* e *para cada natural n. se {0,1, ..., n}* $\in$ *A. então n+1* $\in$ *A. Nessas condições tem-se* $A=\mathbb{N}$. Usa-se para provar asserções do tipo:

"Para todo natural n, a propriedade P é válida".
Para isso, deve ser provada a validade de:
(1) Base da indução - provar P para n=0
(2) Hipótese de indução: admitir que P valha para naturais 0,1,...,n
(3) Passo indutivo: provar que P é válido também para n+1

(b) Principio das Casas de Pombos
Se A e B forem conjuntos finitos não-vazios, e se a cardinalidade de A for maior que a de B, então não haverá nenhuma função injetora de A para B (prova-se por indução).

Teorema: se R é uma relação binária sobre um conjunto A finito, caso haja em R cadeias arbitrariamente longas, então certamente haverá ciclos em R (prova-se pelo princípio das casas de pombos)

(c) Principio da diagonalização
Para R, uma relação binária sobre A, define-se D, conjunto-diagonal como $D = \{ a \mid a \in A \wedge (a,a) \notin R \}$. Para cada $a \in A$, seja $R_a = \{ b \mid b$ e $A \wedge (a,b) \in R \}$ Nessas condições, D é distinto de cada R_a.
Cada linha da matriz é diferente do complemento de sua diagonal.

Teorema de Cantor: $2^{\mathbb{N}}$ é não-enumerável. (prova-se pelo principio da diagonalização)

Alfabetos e Linguagens (1)

Alfabetos e *linguagens* podem ser usados como modelos para os dados que o computador manipula, na forma de cadeia de símbolos.
O *alfabeto binário* {0,1} é particularmente útil.

Uma *cadeia* sobre um alfabeto é uma seqüência finita de símbolos do alfabeto
A cadeia vazia **ε** não contém símbolos

Σ^* é o conjunto de todas as cadeia sobre o alfabeto Σ
Comprimento de uma cadeia é o número de símbolos da seqüência que a compõe

Um mesmo símbolo σ pode ocorrer mais de uma vez em uma cadeia

Concatenação w de duas cadeias x e y é a cadeia formada pela justaposição de x com y: $w=x\circ y$. Não havendo ambigüidade, pode-se omitir o"$\circ$".

A concatenação é associativa, não-comutativa e seu elemento neutro é a cadeia vazia.
Uma cadeia v é *sub-cadeia* de outra cadeia w se e somente se existirem x e y tais que $w=x\circ v\circ y$.
Se $w = x\circ v$, v é *sufixo* de w.
Se $w = v\circ y$, v é *prefixo* de w.
Par:a cada natural i e cada cadeia w define-se indutivamente:
$w^0=\varepsilon$; $w^{i+1}=w\circ w^i$
Define-se *cadeia reversa* w^R de uma cadeia w:
Se $w=\varepsilon$, então $w^R = w = \varepsilon$.
Se $|w| = n+ 1 > 0$, e $w=u\circ a$ para $a\in\Sigma$, então $w^R =a\circ u^R$ (demonstra-se por indução).

Um conjunto de cadeias sobre Σ (um subconjunto de Σ^*) é chamado *linguagem*.
Linguagens infinitas são conjuntos do tipo
$L=\{ w\in\Sigma^* \mid$ w tem a propriedade P$\}$
Se Σ é finito, Σ^* será um conjunto infinito enumerável (prova-se construindo uma bijeção, através da enumeração de Σ^* de acordo com alguma ordenação lexicográfica).

Pode-se definir para linguagens L, L':
- Complemento de uma linguagem L: Σ^* - L
- Concatenação de linguagens $L\circ L'$
- Fechamento de K1eene de uma linguagem: L^*
- Fechamento $L^+ = L\circ L^*$

Representação finita de Linguagens

Representações de linguagens são cadeias finitas sobre um alfabeto finito. Logo existe um número infinito, enumerável, de representações para linguagens.

O conjunto de linguagens possíveis sobre um alfabeto Σ é 2^{Σ^*} , não-enumerável de acordo com o teorema de Cantor.

Assim, há linguagens que não são finitamente representáveis, independentemente do tipo escolhido de representação.

Algumas representações usuais de linguagens:
- expressões regulares, para linguagens regulares
- geradores ou gramáticas
- reconhecedores ou autômatos
- algoritmos