Física IV — 7600008

Quinta Lista — Solução

1. Temos duas expressões para a energia cinética, a de Newton e a de Einstein. Vamos estabelecer 1% como limite do erro aceitável. Qual é a maior velocidade v que uma partícula pode ter para que a expressão de Newton ainda possa ser usada?

   A expressão de Einstein é

   $$T_E = m_0c^2(1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2} - m_0c^2.$$

   Podemos expandir o termo entre parênteses à direita em série de Taylor, e resulta que

   $$T_E \approx m_0c^2(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{4}\frac{v^4}{c^4})^{-1/2} - m_0c^2,$$

   ou após simplificação do lado direito

   $$T_E \approx \frac{m_0v^2}{2} - \frac{m_0v^2}{2}\frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0v^2}{2}(1-\frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2})$$

   Como $m_0v^2/2$ é a expressão de Newton, para que o erro seja inferior a 1%, é necessário que $(3/2)v^2/c^2$ seja inferior a 1%, ou seja que $v < \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{c}{10}$. O limite é aproximadamente $24\,500\,\mathrm{km/s}$.

2. Mercúrio é o planeta mais rápido do Sistema Solar. A sua órbita é bem elíptica, mas vamos tratá-la como se fosse circular. Aproxime a órbita por uma circunferência de raio $R = 5.8\times10^{10}\,\mathrm{m}$, que o planeta orbita a cada 88 dias. Qual é o erro porcentual de quem emprega a expressão de Newton para calcular sua energia cinética?

   A velocidade calculada a partir da distância andada na órbita e do tempo dado é aproximadamente 48 km/s. Com isso o erro relativo obtido na questão 1 dá aproximadamente $4\times10^{-6}\,\%$.

3. Uma partícula em repouso tem massa m_0. Em relação a um referencial fixo S ela tem velocidade $v = V + u$, onde $V = (3/4)c$ e $u = c/100$. Calcule o seu momento de duas formas e compare os resultados

   (a) No referencial S;

   (b) Num referencial S' que tem velocidade V em relação a S e depois, por meio da Transformação de Galileu (boa aproximação, já que $u \ll c$) apropriada, no referencial S.

   a. No referencial S, o momento é

   $$p = m_0\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(V+u)^2}{c^2}}}(V+u) \approx 1.17m_0c.$$

   b. A velocidade relativa entre a partícula e o referencial S' é

   $$u' = \frac{V+u-V}{1-\dfrac{(V+u)(-V)}{c^2}} \approx 0.023\,c.$$

   Como $u' \ll c$, podemos usar Galileu para dizer que $p' = m_0u'$, válida no referencial S'. A Transformação de Lorentz (inversa) permite então calcular o momento no referencial S:

   $$pc = \gamma(p'c + \beta E') \approx \frac{1}{\sqrt{1-9/16}}(0.023m_0\,c^2 + 0.75m_0c^2) = 1.17\,m_0c^2.$$

4. Repita o problema 3, mas calcule a energia da partícula, em lugar do momento.

a. A energia é

$$E = m_0c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{(V+u)^2}{c^2}}} \approx 1.54\, m_0c^2.$$

b. No referencial S', a energia é aproximadamente $E' = m_0c^2$. No referencial S, a Transformação de Lorentz inversa dá

$$E = \gamma(E' + \beta p'c) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}(m_0c^2 + 0.75 * 0.023 m_0c^2) = 1.54\, m_0c^2.$$

5. São dados um referencial S, fixo, outro S', que tem velocidade V em relação a S, e um terceiro S'', que tem velocidade W em relação a S'. Aplique duas Transformações de Lorentz sucessivas para expressar $p"_x$ e $E"$ em função de p_x e E.

$$\begin{bmatrix} p'_x c \\ E' \end{bmatrix} = \gamma_V \begin{bmatrix} 1 & -\beta_V \\ -\beta_V & 1 \end{bmatrix} \gamma_W \begin{bmatrix} 1 & -\beta_W \\ -\beta_W & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x c \\ E, \end{bmatrix} = \gamma_V\gamma_W \begin{bmatrix} 1+\beta_V\beta_W & -(\beta_V+\beta_W) \\ -(\beta_V+\beta_W) & 1+\beta_V\beta_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x c \\ E, \end{bmatrix}$$

6. Mostre que o resultado do problema 6 equivale a uma única Transformação de Lorentz e identifique a velocidade que define essa transformação. *Sugestão: Na questão 6, você deve ter feito um produto de duas matrizes. Antes de efetuar o produto, escreva os elementos de cada matriz como cossenos ou senos hiperbólicos. E procure expressar os resultados como senos hiperbólicos ou cossenos hiperbólicos da soma de dois argumentos.*

Conforme a sugestão, definimos os ângulos θ e φ pelas igualdades

$$\cosh\theta = \gamma_V$$
$$\cosh\varphi = \gamma_W,$$

que equivalem a

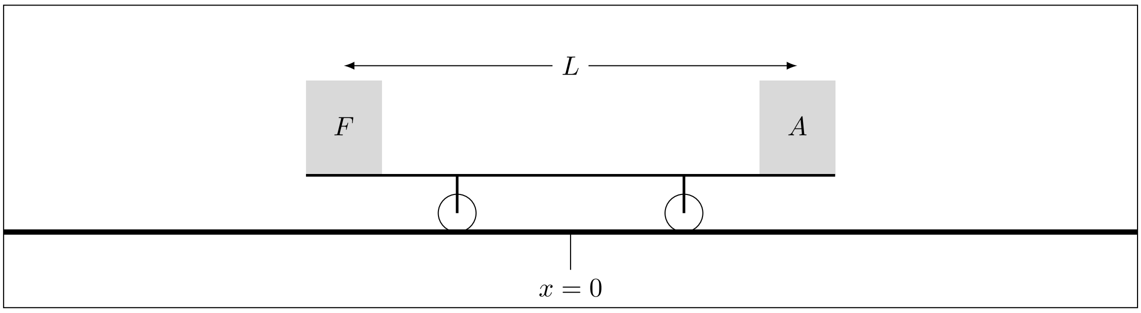
$$\operatorname{senh}\theta = \beta_V\gamma_V$$
$$\operatorname{senh}\varphi = \beta_W\gamma_W.$$

Substituição no resultado do problema anterior conduz imediatamente à expressão

$$\begin{bmatrix} p'_x c \\ E', \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\theta+\varphi) & -\sinh(\theta+\varphi) \\ -\sinh(\theta+\varphi) & \cosh(\theta+\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x c \\ E, \end{bmatrix}$$

, que é uma Transformação de Lorentz com velocidade $\beta = \tanh(\theta+\varphi)$.

7. Num arranjo experimental, uma fonte de luz F e um absorvedor de luz A têm massas iguais m e estão fixos sobre uma plataforma de massa M, que está sobre trilhos e pode mover-se livremente na direção do eixo x. Como mostra a figura, a separação entre F e A é L.



O centro de massa do sistema está inicialmente em $x = 0$. Um pulso de luz é então emitido pela fonte F, em $t = 0$, e mais tarde absorvida pelo absorvedor A. Seja E a energia desse pulso. Calcule o momento p desse pulso e, a partir da conservação do momento, a velocidade com que a plataforma se desloca. *Sugestão: O movimento da plataforma é não-relativístico.*

Para a luz, $E = pc$. Assim, o momento do pulso é $p = E/c$. A conservação do momento exige que o momento da plataforma seja $P = -p$. Uma vez que $P = (M + 2m)V$, onde V é a velocidade do pulso, concluímos que

$$V = -\frac{E}{c(M + 2m)}.$$

Essa velocidade é muito pequena, porque a energia E é microscópica, enquanto as massas M e m são macroscópicas.

8. Nas condições do problema 7 anterior, calcule

   (a) O tempo que a luz demora até alcançar o absorvedor A.

   (b) A distância que a plataforma percorre, até a luz ser absorvida e ela parar.

   (c) A posição do centro de massa do sistema após a absorção. *Sugestão: A luz transporta massa de F para A.* a. A luz tem de andar distância praticamente igual a L (um pouco menos, porque a plataforma se desloca enquanto a luz corre, mas essa distância é ínfima). O tempo, portanto, é $\Delta t = L/c$

   b. Nesse tempo, a plataforma recua

$$\Delta x = V\frac{L}{c} = -\frac{EL}{(M + 2m)c^2},$$

   a partir do resultado do problema 7 para V.

   c. A posição final do centro de massa é

$$x_{CM} = \frac{M\Delta x + (m - \frac{E}{c^2})(-\frac{L}{2} + \Delta x) + (m + \frac{E}{c^2})(\frac{L}{2} + \Delta x)}{M + 2m}.$$

   ou

$$x_{CM} = \frac{(M + 2m)\Delta x + \frac{EL}{c^2}}{M + 2m}.$$

   ou, se substituirmos o resultado do item b para Δx,

$$x_{CM} = 0.$$

   .

9. No problema 7, imagine agora que um espelho 100% refletor, cuja massa pode ser desconsiderada, é posicionado no ponto médio entre F e A. O mesmo pulso é emitido, mas agora é refletido de volta pelo espelho e acaba absorvido em F. Calcule a velocidade com que a plataforma se move após a reflexão no espelho.

   No instante em que a luz colide com o espelho, a plataforma tem a velocidade negativa V, calculada no problema 7. A luz inverte seu momento e portanto transfere momento $\Delta p = 2E/c$ para a plataforma. Após a reflexão, portanto, a plataforma passa a mover-se para a direita com velocidade positiva

$$V_d = \frac{E}{c(M + 2m)}.$$

10. Nas condições do problema 9, calcule

    (a) O tempo que a luz avança até ser refletida;

    (b) O tempo que a luz recua, depois de refletida, até ser absorvida em F;

    (c) As distâncias que a plataforma percorre, até o momento da reflexão, e que ela percorre de volta, da reflexão até a absorção;

    (d) A posição final do centro de massa do sistema.

a. O tempo que a luz avança até ser refletida é $L/(2c)$.

b. O tempo que ela recua, em seguida, até ser absorvida em F, é o mesmo, mais $L/(2c)$.

c. No primeiro período, a plataforma recua metade do que andou na questão 8:

$$\Delta x = -\frac{EL}{2(M + 2m)c^2}.$$

d. No segundo período, entre a colisão da luz com o espelho e absorção da luz, a plataforma avança com a velocidade encontrada na questão 9 durante o intervalo de tempo $L/(2c)$. Ela recupera, portanto, o terreno que perdeu entre a emissão da luz e a reflexão e volta à situação inicial. Uma vez que a luz é absorvida em F, não há transferência de massa entre F e A. No final, o centro de massa tem, portanto, de estar na posição $x = 0$.