Sexta Lista de Exercícios - SEL 5739 Sistemas Não Lineares

Prof. Luís Fernando Costa Alberto

18 de Novembro de 2013

EXERCÍCIO 1) Considere o sistema linear $\dot{x} = Ax$ e seja $V(x) = x^T P x$ uma candidata a função de Lyapunov. Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Dada $Q = I$, encontre P que satisfaça a equação de Lyapunov $A^T P + PA = -Q$. Mostre que P é definida positiva. Mostre que V é uma função de Lyapunov.

EXERCÍCIO 2) Um sistema massa-mola é modelado pelas seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -kx_1 - dx_2 \end{aligned}$$

onde k é a constante de elasticidade da mola e d é o coeficiente de amortecimento.

Prove que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável utilizando uma função de Lyapunov. O que acontece com a estabilidade da origem se a mola fosse não linear e o sistema fosse descrito pelas seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -kx_1 + \gamma x_1^3 - dx_2 \end{aligned}$$

A função de Lyapunov escolhida para o sistema linear é adequada para provar estabilidade assintótica da origem do sistema não linear?

EXERCÍCIO 3) Seja a equação de Liénard

$$\ddot{y} + h(y)\dot{y} + g(y) = 0.$$

(i) Escolhendo $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$, reescreva a equação anterior como um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem. Que condições as funções h e g devem satisfazer para que a origem seja um ponto de equilíbrio isolado?
(ii) Usando $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(s)ds$ como uma candidata a função de Lyapunov, imponha condições sobre as funções h e g que garantam estabilidade assintótica da origem.
(iii) Usando a função $U(x_1, x_2) = V(x_1, x_2) + \beta g(x_1)x_2$ como candidata a função de Lyapunov. Determine β e imponha condições sobre as funções h e g que garantam estabilidade assintótica.
(iv) Usando a função $W(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left[x_2 + \int_0^{x_1} h(s)ds\right]^2 + \int_0^{x_1} g(s)ds$ como candidata a função de Lyapunov, imponha condições sobre as funções h e g tal que a estabilidade assintótica da origem seja assegurada.

EXERCÍCIO 4) Seja o sistema não linear $\dot{x} = f(x)$ com $f(0) = 0$. Admita que f seja continuamente diferenciável e que o Jacobiano $J = \frac{\partial f}{\partial x}$ satisfaça a seguinte equação de Lyapunov

$$J^T P + PJ \leq -I, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ com P = P^T > 0$$

Tome $V(x) = x^T P x$ como candidata a função de Lyapunov. Mostre que $\dot{V}$ é definida negativa e portanto a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

EXERCÍCIO 5) Considere o sistema não linear

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -asin(x_1) - kx_1 - dx_2 - cx_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + x_2 \end{aligned}$$

onde todos coeficientes são positivos e $k > a$. Utilizando a seguinte candidata a função de Lyapunov,

$$V(x_1, x_2, x_3) = 2a \int_0^{x_1} sin(y)dy + kx_1^2 + x_2^2 + px_3^2$$

mostre, para algum p, que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

EXERCÍCIO 6) Considere o sistema não linear:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1^k \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

onde $a \in \mathbb{R}$ e k é um número natural maior do que 1.

(i) Para que valores de a e k a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável?

Vamos estudar a estabilidade da origem do seguinte sistema mais geral:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

onde $f(0,0) = \begin{pmatrix} f_1(0,0) \\ f_2(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Df(0) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(0,0) & D_2 f_1(0,0) \\ D_1 f_2(0,0) & D_2 f_2(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A matriz Jacobiana deste sistema calculada na origem possui um autovalor nulo, logo, nada podemos concluir a respeito da estabilidade analisando o sistema linearizado. Para estudar a estabilidade vamos explorar o fato do subsistema 2 ser mais "rápido" que o subsistema 1 nas vizinhanças da origem. Para isto vamos imaginar inicialmente que o subsistema 2 encontra-se em equilíbrio. Para isto considere a função:

$$g(x_1, x_2) = -x_2 + f_2(x_1, x_2)$$

É fácil verificar que $g(0,0) = 0$ e que $D_2 g(0,0) \neq 0$, logo do Teorema da Função Implicita, existe função $\psi(x_1)$ satisfazendo $\psi(0) = 0$ tal que $-\psi(x_1) + f_2(x_1, \psi(x_1)) = 0$ numa vizinhança da origem.

(ii) Prove que $\psi'(0) = 0$.

Substituindo a função ψ na equação do subsistema 1, chegamos a uma equação diferencial apenas na variável x_1, ou seja, obtemos o seguinte sistema reduzido:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \psi(x_1))$$

Suponha que nas vizinhanças da origem, $f_1(x_1, \psi(x_1)) = ax_1^k + O(|x_1^{k+1}|)$, onde $h(x_1) = O(|x_1^{k+1}|)$ se existem constantes $A > 0$ e $\alpha > 0$ tal que $h(x_1) < A|x_1^{k+1}|$ para todo $|x_1| < \alpha$.

(iii) Para que valores de a e k a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema reduzido?

Agora vamos provar que estabilidade do sistema reduzido implica em estabilidade do sistema original. Considere agora a mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 + \psi(y_1) \end{aligned}$$

(iv) Mostre que nas novas variáveis, o sistema de equações diferenciais possui a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= g_1(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 &= -y_2 + g_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

onde $g_1(y_1, y_2) = f_1(y_1, y_2 + \psi(y_1))$ e $g_2(y_1, y_2) = f_2(y_1, y_2 + \psi(y_1)) - f_2(y_1, \psi(y_1)) - \psi'(y_1) f_1(y_1, y_2 + \psi(y_1))$.

(v) Mostre que o equilíbrio $y = 0$ do sistema anterior possui as mesmas propriedades do equilíbrio $x = 0$ do sistema original.

(vi) Utilize a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V(y_1, y_2) = -\frac{1}{a(k+1)} y_1^{k+1} + \frac{1}{2} y_2^2$$

e encontre para que valores de a e k a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema original.
Sugestão: Expanda a função $f_1(y_1, y_2 + \psi(y_1))$ em série de Taylor na variável y_2 em torno de $y_2 = 0$.

EXERCÍCIO 7) Considere o sistema não linear

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + g(x_3) \\ \dot{x}_2 &= -g(x_3) \\ \dot{x}_3 &= -ax_1 + bx_2 - cg(x_3) \end{aligned}$$

onde a, b e c são constantes positivas e g é uma função contínua que satisfaz:

- $g(0) = 0$;
- $g(s)s > 0$ para todo $|s| \in (0, K)$, onde $K > 0$.

(a) Mostre que a origem é um ponto de equilíbrio isolado; (b) Utilize a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2 + \int_0^{x_3} g(s)ds$$

para mostrar que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

EXERCÍCIO 8) Considere o sistema não linear:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 sat(x_2^2 - x_3^2) \\ \dot{x}_3 &= x_3 sat(x_2^2 - x_3^2) \end{aligned}$$

onde $sat(y)$ é a função saturação, isto é, $sat(y) = y$ se $|y| \leq 1$, $sat(y) = 1$ se $y > 1$ e $sat(y) = -1$ se $y < -1$. Utilize a função escalar auxiliar $V(x) = x^T x$, com $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, e o Princípio de Invariância de LaSalle para mostrar que a origem é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.