

A SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS É INDIVIDUAL!

1) Entregar um relatório em papel, contendo todas as figuras e demais itens solicitados nos exercícios, bem como os scripts utilizados para a solução.

2) Enviar os scripts (apenas os scripts) como anexo de e-mail (enviar para calbertomc@usp.br).

A avaliação será feita considerando a metodologia, os resultados obtidos e a clareza da formulação, ajudada por comentários e explicações adequadamente inseridos nos scripts.

EXERCÍCIO 1 (10.0) – A finalidade deste exercício é a aplicação da linearização de dados a um problema de gamaespectrometria, um método geofísico.

Introdução

Dentre os diversos métodos empregados em geofísica aerotransportada, figura a aerogamaespectrometria, a qual ocupa-se em medir a atividade de isótopos radioativos naturais presentes em maior ou menor quantidade em todos os tipos de rocha que ocorrem na crosta terrestre.

Os elementos radioativos de interesse são o Tório, o Urânio e o Potássio, cuja presença é detectada através da radiação gama emitida pelos mesmos. Os fótons gama provenientes do decaimento radioativo de cada um dos isótopos de Th, U, K apresentam energia característica distinta, o que possibilita discriminá-los por meio do gamaespectrômetro. Os fótons gama discriminados pelo gamaespectrômetro são contados pelo sistema de aquisição de dados, obtendo-se assim os valores da atividade de cada um dos elementos Th, U, K usualmente na forma de contagens por segundo (cps), ou seja o número de fótons gama detectados por segundo.

Na aerogamaespectrometria o gamaespectrômetro é montado em uma aeronave (avião de asas fixas ou helicóptero). As medições são realizadas sobrevoando o terreno a uma determinada altura. Um fator importante que dever ser levado em conta em levantamentos aerogamaespectrométricos é que os fótons gama emitidos pelas rochas do solo devem atravessar a atmosfera para chegar ao gamaespectrômetro. No trajeto através do ar atmosférico, os fótons gama são parcialmente absorvidos, o que faz com que a radiação gama seja enfraquecida ou atenuada pela atmosfera, conforme o diagrama ilustrativo da Figura 1.

Quanto maior a altura de voo relativamente ao terreno, tão mais atenuada é a radiação medida pelo sensor. Para altura de voo entre 50 m e 250 m, a atenuação é descrita pelo modelo:

$$c = c_0 e^{-\lambda h} \quad (1)$$

sendo c a contagem por segundo de fótons gama medida à altura de voo h , c_0 a contagem por segundo de fótons gama que seria medida ao nível do solo ($h = 0$), e λ é uma constante, denominada coeficiente de atenuação.

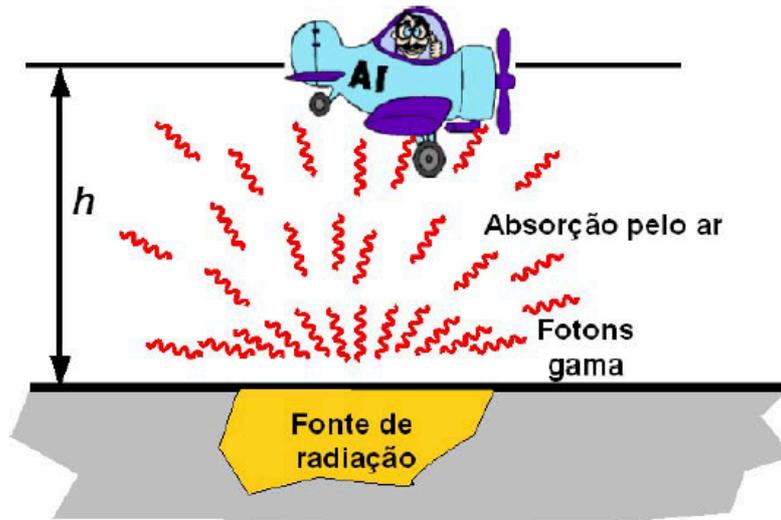


Figura 1 - Fótons gama emitidos pelas rochas do solo atravessam a atmosfera para chegar ao gamaespectrômetro que sobrevoa o terreno. No trajeto através do ar atmosférico, os fótons gama são parcialmente absorvidos, atenuando (enfraquecendo) a radiação que alcança o detector.

Devido à forte dependência da atenuação atmosférica com a distância ao solo, os levantamentos aerogamaespectrométricos são realizados idealmente a uma altura constante em relação ao solo, chamado voo “drapeado”, conforme mostrado na Figura 2. No entanto, quando uma linha de aquisição de dados é efetivamente voada, diversos fatores contribuem para que o piloto não consiga manter uma altura constante em relação ao terreno, entre eles:

- (a) Características aerodinâmicas da aeronave;
- (b) Habilidade e tempo de resposta do piloto;
- (c) Efeitos de vento e turbulência;

A altura de voo variável, conforme mostrado na Figura 3, produz uma atenuação atmosférica variável, que deve ser corrigida utilizando o modelo dado pela equação (1):

$$c = \tilde{c} e^{\lambda(h-h_0)} \quad (2)$$

sendo \tilde{c} a taxa de contagens por segundo registrada à altura h e c é a contagem corrigida para a altura padrão h_0 . A aplicação da fórmula de correção dada pela equação (2) requer que o coeficiente de atenuação λ seja determinado. Isso é feito, medindo-se a atividade gama em diversos sobrevoos de uma mesma região a diferentes alturas, o que permite determinar os parâmetros do modelo (1) através da estimativa por quadrados mínimos. Deve-se notar que o modelo (1) é não linear em relação aos parâmetros c_0 e λ . Nessa situação, a estimativa dos parâmetros por quadrados mínimos pode ser efetuada através de técnicas de linearização. Em sala, vimos os métodos de linearização por mudança de variável e linearização diferenciável.

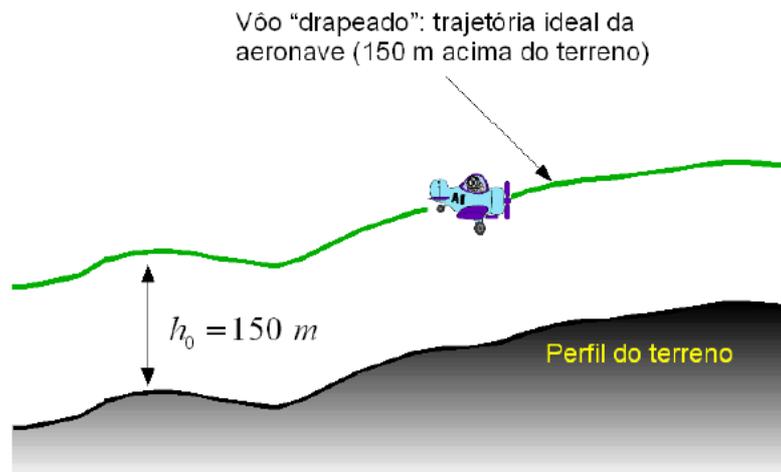


Figura 2 - Linha de voo em draping. O voo é realizado a uma altura fixa em relação ao terreno, de modo a manter a atenuação atmosférica constante.

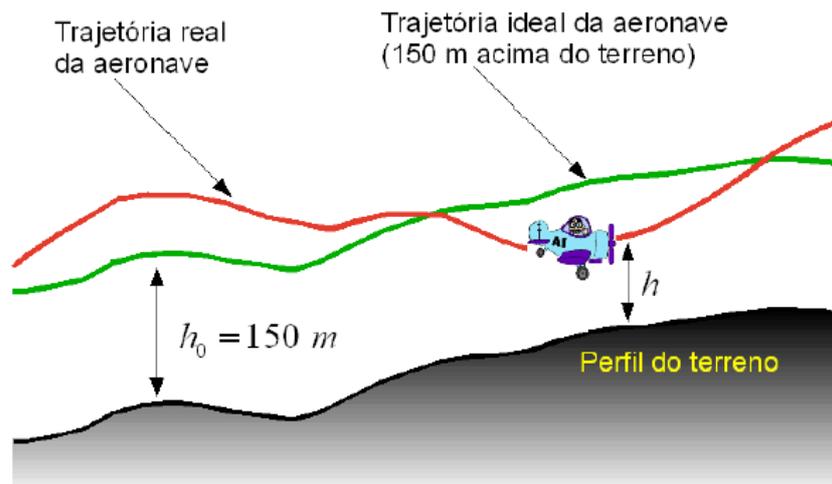


Figura 3 - Trajetória ideal para linha de voo em draping e trajetória real, afetada por diversos fatores, tais como características aerodinâmicas da aeronave, habilidade e tempo de resposta do piloto e efeitos de vento e turbulência.

Atividades do exercício:

Utilizando a planilha *atenua_gama.xls*, pede-se:

- (a) Linearize a equação (1) utilizando o método de mudança de variáveis. Em seguida, forneça a expressão do estimador de quadrados mínimos do problema, ou seja, o vetor de estimativa dos parâmetros;
- (b) Determine os parâmetros do modelo (1) para o Tório com o estimador obtido no item (a);
- (c) Faça um gráfico mostrando o ajuste do modelo (1) aos dados experimentais, usando os parâmetros estimados em (b);
- (d) Faça um gráfico mostrando o ajuste do modelo linearizado (3) aos dados experimentais transformados, usando os parâmetros estimados no item (b);
- (e) Repita as etapas (b), (c) e (d) acima para os dados do Urânio e do Potássio. Apresente uma tabela com o valor dos parâmetros obtidos para cada um dos elementos Th, U, K;
- (f) Linearize a equação (1) utilizando o método de linearização diferencial. Em seguida, forneça a expressão do estimador de quadrados mínimos do problema passo a passo;
- (g) Determine os parâmetros do modelo (1) para o Tório, utilizando o estimador obtido no item (f). Utilize como estimativa inicial os parâmetros obtidos nos itens (b) e (e). Aplique o critério de convergência dado por:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{m}^{(k)}\|}{\|\mathbf{m}^{(k)}\|} < \varepsilon, \text{ com } \varepsilon = 10^{-7}$$

sendo k o número de iterações.

- (h) Faça um gráfico mostrando o ajuste do modelo (1) aos dados experimentais, usando os parâmetros estimados em (g). Faça uma curva usando a estimativa inicial dos parâmetros e outra curva usando o valor final dos parâmetros ao término do processo iterativo. Utilize uma função errorbar em Matlab ou Python para colocar barras de erro nos dados experimentais, de acordo com o desvio padrão contido na planilha;
- (i) Repita as etapas (g) e (h) acima para os dados do Urânio e do Potássio. Apresente uma tabela onde para cada um dos elementos Th, U, K, constem os valores iniciais e finais dos parâmetros, bem como os correspondentes valores da função objetivo $F(\mathbf{m}) = \|\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m})\|^2$, sendo \mathbf{e} o vetor erro de predição, \mathbf{d} o vetor de dados reais e $\mathbf{f}(\mathbf{m})$ o vetor função do modelo físico do problema.