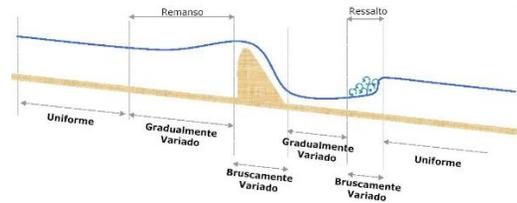


Escoamento Permanente Gradualmente Variado

LFRReis

Já vimos: tipos de escoamento



Escoamento Permanente Gradualmente Variado (EPGV)

- acontece quando:
- alterações promovidas numa seção do canal, pela introdução de **dispositivos** ou **singularidades**, provocam a variação gradual dos parâmetros hidráulicos do escoamento (velocidade, profundidade, etc.), modificando, o perfil da linha d'água original, na forma das chamadas curvas de remanso

Exemplos de dispositivos ou singularidades que podem ser responsáveis pela ocorrência do EGV :

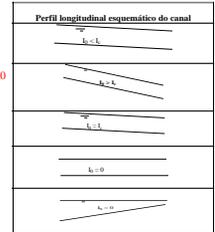
- barragem na seção de um rio ou canal (degrau de grande altura)
- degrau (AZ⁻) ou rebaixo (AZ⁺)
- alargamento ou estreitamento de seção
- comporta de fundo (adufa)
- mudança de declividade de fundo do canal
- queda brusca
- combinações de diferentes efeitos citados anteriormente

Classificação das curvas de remanso

- de acordo com a declividade de fundo do canal e;
- de acordo com a zona ou faixa de desenvolvimento do perfil d'água em relação às profundidades normal e crítica.

Classificação de acordo com a declividade de fundo do canal (5 Tipos)

- Curvas M (mild) - canais de baixa declividade ($I_0 < I_c$)
- Curvas S (Step) - canais de alta declividade ($I_0 > I_c$)
- Curvas C (Critical) - canais de declividade crítica ($I_0 = I_c$)
- Curvas H ou N (Horizontal ou Null) - canais de declividade horizontal ou nula ($I_0 = 0$)
- Curvas A (Adverse) - canais de declividade adversa ou em active ($I_0 < 0$)



Classificação de acordo com a declividade de fundo do canal (5 Tipos)

Declividade	Profundidade	Descrição	Curvas	
			Tipo	Quantidade
$I_0 > 0$	$I_0 < I_c$ $y_0 > y_c$	Declividade fraca (mild slope)	M	3 curvas
	$I_0 > I_c$ $y_0 < y_c$	Declividade forte (steep slope)	S	3 curvas
	$I_0 = I_c$ $y_0 = y_c$	Declividade Crítica	C	2 curvas
$I_0 = 0$	∞	Declividade nula (horizontal)	H	2 curvas
$I_0 < 0$	-	Declividade negativa (active)	A	2 curvas

Classificação de acordo com a zona ou faixa de desenvolvimento do perfil d'água (3 tipos)

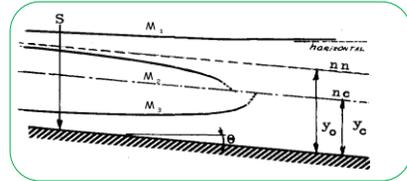
Zona 1 : profundidades maiores que y_0 e y_c

Zona 2 : profundidades entre y_0 e y_c

Zona 3 : profundidades menores que y_0 e y_c

Segundo os dois critérios anteriormente descritos é possível a composição de 12 tipos de Curvas ilustradas na sequência

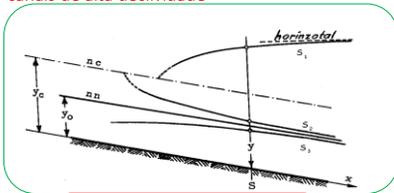
Curvas M1, M2 e M3 (MILD)
canais de baixa declividade



$y > y_0$
 $y_0 < y < y_c$
 $y < y_c$

Zona 1 : profundidades maiores que y_0 e y_c
Zona 2 : profundidades entre y_0 e y_c
Zona 3 : profundidades menores que y_0 e y_c

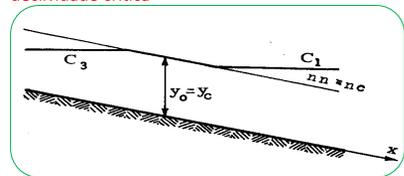
Curvas S1, S2 e S3 (STEP)
canais de alta declividade



$y > y_c$
 $y_0 < y < y_c$
 $y < y_0$

Zona 1 : profundidades maiores que y_0 e y_c
Zona 2 : profundidades entre y_0 e y_c
Zona 3 : profundidades menores que y_0 e y_c

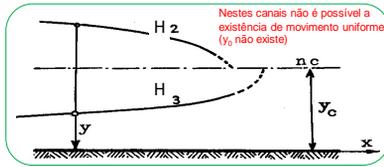
Curvas C1 e C3 (CRITICAL)
declividade crítica



$y > y_c = y_0$
 $y < y_c = y_0$

Zona 1 : profundidades maiores que y_0 e y_c
Zona 2 : não existe ($y_0 = y_c$)
Zona 3 : profundidades menores que y_0 e y_c

Curvas H2 e H3 (HORIZONTAL)
canais horizontais (declividade nula)

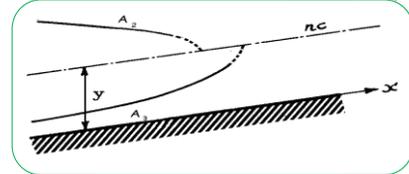


$y > y_c$

Zona 1 : profundidades maiores que y_0 e y_c
Zona 3 : profundidades menores que y_0 e y_c

$y < y_c$

Curvas A2 e A3 (ADVERSE)
canais em aclive



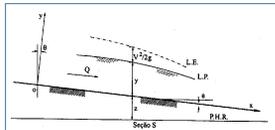
$y > y_c$

Zona 1 : profundidades maiores que y_0 e y_c
Zona 3 : profundidades menores que y_0 e y_c

$y < y_c$

Curvas de Remanso: Equacionamento

Equação da Energia Total em Uma Seção Genérica



Pela análise da Figura, a **energia total** disponível numa dada seção, por unidade de peso específico, pode ser escrita como:

$$H = z + y + \frac{V^2}{2g} = z + E$$

Curvas de Remanso: Formulação

•Equação Diferencial do Escoamento

•Hipóteses simplificadoras:

- ❖ Declividade I_0 de fundo do canal é pequena, de modo que a altura d'água medida perpendicularmente ao fundo do canal pode ser confundida com a altura d'água medida na vertical;
- ❖ Canal é prismático, ou seja, a **seção transversal é constante** ao longo do comprimento em forma e em dimensões;
- ❖ Distribuição de velocidades em uma seção é fixa, isto é, o **coeficiente de Coriolis pode ser considerado igual a um**;
- ❖ Distribuição de pressões é hidrostática, ou seja, existe **paralelismo entre as linhas de corrente do escoamento**, podendo ser desprezadas as forças verticais de pressão.

Curvas de Remanso: Equacionamento

Equação da Energia Total em uma Seção em termos de Q

$$H = z + y + \frac{V^2}{2g} = z + E$$

$$Q = V \cdot A$$

$E =$ energia específica

$$H = z + y + \frac{Q^2}{2gA^2} = z + E$$

Curvas de Remanso: Equacionamento

Derivação da Eq. da Energia Total em x

$$H = z + y + \frac{V^2}{2g} = z + E$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dE}{dx} \implies \frac{dE}{dx} = \frac{dH}{dx} - \frac{dz}{dx}$$

Curvas de Remanso: Equacionamento

•Equação Diferencial do escoamento

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dH}{dx} - \frac{dz}{dx} \quad \frac{dH}{dx} = -I_f \quad \frac{dz}{dx} = -I_0$$

I_f : é a declividade da **linha de energia**, apresentando valor negativo pois decai na direção adotada para o eixo x (escoamento).

I_0 : é a declividade de **fundo do canal**, de valor negativo, pois decai segundo a direção adotada para o eixo x (escoamento).

$$\implies \frac{dE}{dx} = I_0 - I_f$$

Curvas de Remanso: Equacionamento

•Equação Diferencial do escoamento: (dy/dx)

$$\frac{dE}{dx} = I_0 - I_f \implies \frac{dE}{dx} = \frac{I_0 - I_f}{1 - F_r^2} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dH}{dy} = \frac{dE}{dy} = 1 - F_r^2$$

Curvas de Remanso: Equacionamento

Equação Diferencial do Escoamento: dy/dx (linha d'água)

$$I_f = \left[\frac{n \cdot Q}{A \cdot R_H^{2/3}} \right]^2$$

$$F_r = \frac{V}{\sqrt{g \cdot H_M}}$$

$$F_r^2 = \frac{V^2}{g \cdot H_M}$$

$$F_r^2 = \frac{Q^2 \cdot B}{g \cdot A^3} = \frac{Q^2 \cdot B}{g \cdot A^3}$$

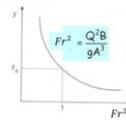
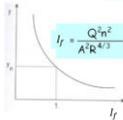
$$\frac{dy}{dx} = \frac{I_0 - \left[\frac{n \cdot Q}{A \cdot R_H^{2/3}} \right]^2}{1 - \frac{Q^2 \cdot B}{g \cdot A^3}}$$

Remanso:
análise do sinal da derivada dy/dx
curvas ascendentes ou descendentes?

Curvas ascendentes ou descendentes?

I_f e F_r^2 são funções de y decrescentes → análise da linha d'água → análise do numerador e do denominador da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I_0 - I_f}{1 - F_r^2}$$

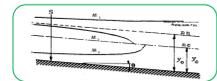


Curvas M1, M2 e M3

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j=fi	k
Vel. fundo do Canal	Tipo de perfil	Faixa de profund.	Comparação $y < y_0$	Comparação I_0 e I_f	Valor de $(I_0 - I_f)$ numerador	Comparação $y < y_c$	Valor de F_r^2	Valor de $(1 - F_r^2)$ denominador	Valor de dy/dx	Descrição da curva
M1d	M1	$y > y_0$	$y > y_0$	$I_0 < I_f$	>0	$y > y_c$	<1	>0	$+$ $+$ $+$	ascendente
$I_0 < I_c$	M2	$y_0 > y > y_c$	$y > y_0$	$I_0 < I_f$	<0	$y > y_c$	<1	>0	$+$ $+$ $-$	descendente
$y_0 > y_c$	M3	$y_0 > y > y_c$	$y > y_0$	$I_0 > I_f$	<0	$y > y_c$	>1	<0	$-$ $-$ $+$	ascendente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I_0 - I_f}{1 - F_r^2}$$

$$I_f = \left[\frac{n \cdot Q}{A \cdot R_H^{2/3}} \right]^2$$

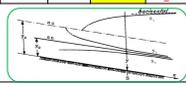


Curvas S1, S2 e S3

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j=fi	k
Decliv. fundo do Canal	Tipo de perfil	Faixa de profund. y e y ₀	Comparaçã o y e y ₀	Comparaçã o l ₀ e l ₁	Valor de (l ₀ l ₁) numerador	Comparaçã o y e y ₀	Valor de Fr ²	Valor de (1- Fr ²) denominador	Valor de dy/dx	Desenvolv. da curva
Steep l ₀ >l ₁ y ₀ >y _c	S1	y>y ₀ >y _c	y>y ₀	l ₀ <l ₁	<0	y>y ₀	<1	>0	$\frac{+}{-} = +$	ascendente
	S2	y ₀ >y>y _c	y>y ₀	l ₁ >l ₀	<0	y>y ₀	<1	>0	$\frac{-}{+} = -$	descendente
	S3	y ₀ >y>y _c	y>y ₀	l ₀ <l ₁	<0	y>y ₀	>1	>0	$\frac{-}{-} = +$	ascendente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I_0 - I_f}{1 - F_r^2}$$

$$I_f = \left[\frac{nQ}{AR_H^{2/3}} \right]^2$$

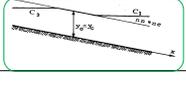


Curvas C1 e C3

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j=fi	k
Decliv. fundo do Canal	Tipo de perfil	Faixa de profund. y e y ₀	Comparaçã o y e y ₀	Comparaçã o l ₀ e l ₁	Valor de (l ₀ l ₁) numerador	Comparaçã o y e y ₀	Valor de Fr ²	Valor de (1- Fr ²) denominador	Valor de dy/dx	Des. da curva
Critical l ₀ =l ₁ y ₀ =y _c	C1	y>y ₀ >y _c	y>y ₀	l ₀ <l ₁	<0	y>y ₀	<1	>0	$\frac{+}{-} = +$	ascendente
	C2	Não existe esta faixa de desenvolvimento da curva pois y ₀ =y _c .								
	C3	y>y ₀ >y _c	y>y ₀	l ₀ >l ₁	<0	y>y ₀	>1	<0	$\frac{-}{-} = +$	ascendente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I_0 - I_f}{1 - F_r^2}$$

$$I_f = \left[\frac{nQ}{AR_H^{2/3}} \right]^2$$

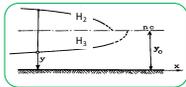


Curvas H2 e H3

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j=fi	k
Decliv. fundo do Canal	Tipo de perfil	Faixa de profund. y e y ₀	Comparaçã o y e y ₀	Comparaçã o l ₀ e l ₁	Valor de (l ₀ l ₁) numerador	Comparaçã o y e y ₀	Valor de Fr ²	Valor de (1- Fr ²) denominador	Valor de dy/dx	Desenvolv. da curva
Horizontal l ₀ =0 y ₀ =+∞	H1	Não existe esta faixa de desenvolvimento da curva pois y ₀ teoricamente encontra-se em +∞								
	H2	y ₀ >y>y _c	y>y ₀	l ₀ >l ₁	<0	y>y ₀	<1	>0	$\frac{-}{-} = +$	descendente
	H3	y>y ₀ >y _c	y>y ₀	l ₀ <l ₁	<0	y>y ₀	>1	>0	$\frac{-}{-} = +$	ascendente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I_0 - I_f}{1 - F_r^2}$$

$$I_f = \left[\frac{nQ}{AR_H^{2/3}} \right]^2$$

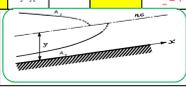


Curvas A2 e A3

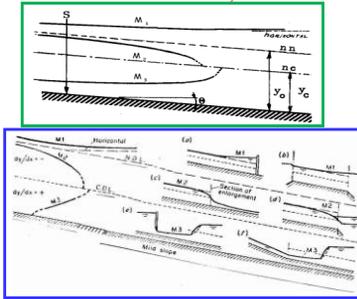
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j=fi	k
Decliv. fundo do Canal	Tipo de perfil	Faixa de profund. y e y ₀	Comparaçã o y e y ₀	Comparaçã o l ₀ e l ₁	Valor de (l ₀ l ₁) numerador	Comparaçã o y e y ₀	Valor de Fr ²	Valor de (1- Fr ²) denominador	Valor de dy/dx	Desenvolv. da curva
Steep l ₀ >0 y ₀ =+∞	A1	Não existe esta faixa de desenvolvimento da curva pois y ₀ teoricamente encontra-se em +∞								
	A2	y ₀ >y>y _c	y>y ₀	l ₀ >l ₁	<0	y>y ₀	<1	>0	$\frac{-}{-} = +$	descendente
	A3	y>y ₀ >y _c	y>y ₀	l ₀ <l ₁	<0	y>y ₀	>1	<0	$\frac{-}{-} = +$	ascendente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I_0 - I_f}{1 - F_r^2}$$

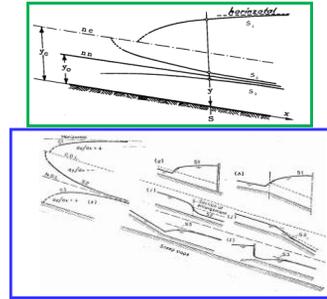
$$I_f = \left[\frac{nQ}{AR_H^{2/3}} \right]^2$$



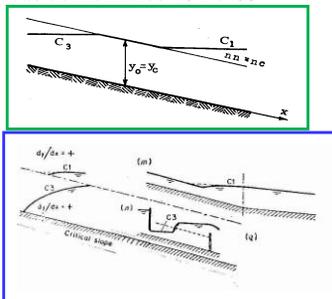
Curvas de Remanso: M1, M2 e M3



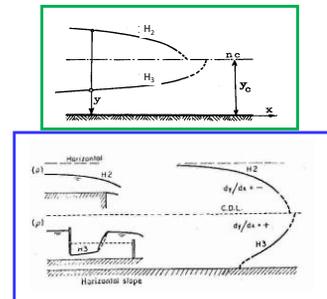
Curvas de Remanso: S1, S2 e S3



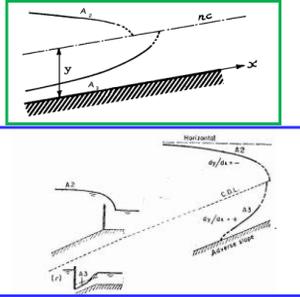
Curvas de Remanso: C1 e C3



Curvas de Remanso: H2 e H3



Curvas de Remanso: A2 e A3



Conclusão:

curvas nas regiões 1 e 3 – curvas crescentes

na região 2 – curvas decrescentes

Curvas de Remanso: Avaliação Numérica

Equação Diferencial do EPGV: dy/dx (linha d'água)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I_0 - \left[\frac{n \cdot Q}{A \cdot R^{2/3}} \right]^2}{1 - \frac{Q^2 B}{g A^3}}$$

Equação diferencial do escoamento permanente gradualmente variado, onde (dy/dx) é a declividade da superfície livre do canal, tendo como referência o próprio fundo do canal.

A Equação não tem solução explícita, ou seja, não é integrável para que se obtenha uma expressão $y=f(x)$, exigindo, portanto, métodos numéricos para sua resolução.

Cálculo das Curvas através do "Direct Step Method" (Diferenças Finitas)

Recorrendo à Equação 1.7, que se apresenta em termos da derivada da Energia específica em relação a x:

$$\frac{dE}{dx} = I_0 - I_f$$

Rearranjando-se e explicitando-se em termos de dx;

$$dx = \frac{dE}{I_0 - I_f}$$

Cálculo das Curvas através do "Direct Step Method" (Diferenças Finitas)-cont.

Na forma de diferenças finitas pode-se escrever (Eq.13):

$$\Delta x = \frac{\Delta E}{I_0 - I_f} = \frac{\Delta \left(y + \frac{v^2}{2g} \right)}{I_0 - I_f}$$

Relembrando-se que I_f pode ser representada por Chezy ou Manning;

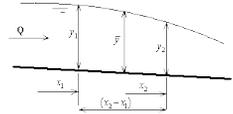
$$I_f = \left[\frac{nQ}{A R_h^{2/3}} \right]^2$$

Na Equação 1.13, ΔE e I_f são dependentes de y , para um valor de Q e n constantes.

Cálculo das Curvas através do "Direct Step Method" (Diferenças Finitas)-cont.

A aplicação da Equação 1.13, para um trecho de tamanho $\Delta x = x_2 - x_1$, entre duas seções 1 e 2, pode ser expressa por:

$$\Delta x = \frac{\Delta E}{I_0 - I_f} = \frac{\Delta \left(y + \frac{v^2}{2g} \right)}{I_0 - I_f} \quad \text{Eq.13}$$



$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{E_2 - E_1}{I_0 - I_f} \quad \text{Eq. 14}$$

O valor de \bar{y} é calculado considerando-se a altura média da água entre as seções 1 e 2, ou seja:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \bar{I}_f = f(\bar{y})$$

Cálculo das Curvas através do "Direct Step Method" (Diferenças Finitas)-cont.

A partir da Equação 14, discretizada:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{E_2 - E_1}{I_0 - I_f}$$

Assumindo-se válido o emprego de uma equação de resistência do movimento uniforme para o cálculo de I_f , por exemplo a equação de Manning:

$$I_f = \left[\frac{nQ}{A R_h^{2/3}} \right]^2$$

O procedimento de cálculo pode seguir os seguintes passos:

Cálculos- passo a passo "Direct Step Method" (Diferenças Finitas)

1. O cálculo tem início com um y_1 conhecido (a altura d'água y na seção de controle)
2. Adota-se um valor para Δy , positivo ou negativo, se a curva for ascendente ou descendente, respectivamente. Positivo quando o cálculo se iniciar da região montante para jusante e negativo quando iniciar da região jusante para montante.
3. Com o Δy conhecido, temos o valor de y_2 , que pode ser maior ou menor que y_1
4. Tendo y_1 e y_2 , calcula-se E_1 e E_2 , portanto tem-se o valor do numerador das Equações 1.14.
5. Tendo y_1 e y_2 , é possível determinar o valor de $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$ e assim calcular, através de Manning $\bar{I}_f = f(\bar{y})$. Tem-se, portanto, o denominador das equações 1.14
6. Utilizando-se a equação 1.14, e conhecendo-se $(E_2 - E_1)$ e \bar{I}_f , calcula-se o primeiro valor de Δx . A partir da seção 2, os procedimentos se sucedem, passo a passo, até atingir um valor coerente da extensão total x (dimensão longitudinal da curva).

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{E_2 - E_1}{I_0 - I_f} (M_1, S_2) \quad \text{ou, alternativamente} \quad \Delta x = x_2 - x_1 = \frac{E_2 - E_1}{I_0 - \frac{1}{2}(I_{f1} + I_{f2})} (M_2, M_1, S_1 \text{ e } S_2)$$

Outro método de integração numérica

O método Runge-Kutta clássico de quarta ordem [solter / solter / solter / solter](#)

Um membro da família de métodos Runge-Kutta é usado com tanta frequência que costuma receber o nome de "RK4" ou simplesmente "o método Runge-Kutta".

Seja um problema de valor inicial (PVI) especificado como segue:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Então o método RK4 para este problema é dado pelas seguintes equações:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

onde y_{n+1} é a aproximação por RK4 de $y(x_{n+1})$, e

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

Nosso problema

$$y' = f(y) = \frac{dy}{dx} = \frac{I_0 - \left[\frac{n \cdot Q}{A \cdot R_H^{2/3}} \right]^2}{1 - \frac{Q^2 B}{g A^3}}$$

$$k_1 = f(y_1)$$

$$k_2 = f\left(y_1 + \frac{\Delta x}{2} k_1\right) \quad y_2 = y_1 + \frac{\Delta x}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_3 = f\left(y_1 + \frac{\Delta x}{2} k_2\right) \quad x_2 = x_1 + \Delta x$$

$$k_4 = f(y_1 + \Delta x k_3)$$

Observações:

Δx : positivos ou negativos. Positivo quando o cálculo se iniciar na região montante e negativo quando iniciar na região jusante. **(depende do sentido em que o controle é exercido)**

Os valores da extensão total, L , ou L_{ext} devem estar de acordo e estarem compatíveis com as condições de contorno do problema. Por exemplo, no cálculo da curva M1, a extensão total da curva, L , pode ter início nas proximidades do ponto de descarga do vertedor, terminando no ponto de equivalência com a altura normal situada na porção montante do canal.

No "passo a passo", nas mudanças progressivas das seções, costuma-se adotar um valor constante para Δy para cálculo dos valores correspondentes de Δx . Conforme já citado, a precisão dos cálculos será tão maior quanto menor for o intervalo de discretização.

No cálculo por exemplo da citada curva M3, trata-se de uma curva relativamente curta e devido a isto, há que se tomar o cuidado em adotar valores relativamente menores de Δy , quando comparados ao caso da curva M1, em geral de longa extensão.

Exercício completo (13-6 do livro)

Um canal retangular, suficientemente longo, de 1,0 m de largura, $I_0 = 0,001$, $n = 0,015$, transporta em regime permanente e uniforme uma certa vazão com altura d'água 0,50m. Em uma determinada seção necessita-se de uma altura d'água igual a 0.8m e para isso instalou-se um vertedor retangular de parede delgada (que satisfaz eq. de Francis), com a mesma largura do canal. Determine a altura que deve ter o vertedor. **Desenhe o perfil do escoamento**, com as alturas que seja possível calcular. Lembrando, para vertedor retangular de parede fina, eq. de Francis (eq. 12.75): $Q = 1.838Lh^{3/2}$, com h carga sobre o vertedor.

Exercício 13-6: resolução-Step Method: $\bar{I}_y = f(\bar{y})$

canal		dy = -0,010											
E (m)	I ₀	n	Q (m³/s)	A (m²)	E (m)	dE (m)	ym (m)	A (m²)	AR _H ^{2/3} /n	dx (m)	x (m)		
1,000	0,001	0,015	0,500	0,750	0,750	0,000	0,750	0,750	24,117	0,0003	-11,796	-11,796	
				0,750	0,750	0,750	-0,010	0,760	0,760	22,236	0,0003	-11,976	-23,772
				0,750	0,750	0,785	-0,010	0,775	0,775	20,355	0,0003	-12,159	-35,931
				0,750	0,750	0,775	-0,010	0,765	0,765	22,275	0,0003	-12,163	-48,094
				0,750	0,750	0,766	-0,010	0,750	0,750	22,506	0,0003	-12,183	-60,277
				0,750	0,750	0,766	-0,010	0,745	0,745	22,218	0,0004	-12,183	-72,460
				0,750	0,750	0,747	-0,010	0,730	0,730	21,860	0,0004	-12,185	-84,645
				0,750	0,750	0,737	-0,010	0,715	0,715	21,463	0,0004	-12,176	-96,829
				0,750	0,750	0,728	-0,010	0,710	0,710	21,087	0,0004	-12,164	-109,014
				0,750	0,750	0,718	-0,009	0,705	0,705	20,712	0,0004	-12,150	-121,198
				0,680	0,680	0,709	-0,009	0,695	0,695	20,337	0,0004	-12,113	-133,382
				0,680	0,680	0,699	-0,009	0,690	0,690	19,963	0,0004	-12,076	-145,566
				0,670	0,670	0,690	-0,009	0,675	0,675	19,589	0,0005	-12,039	-157,750
				0,660	0,660	0,680	-0,009	0,665	0,665	19,218	0,0005	-12,002	-169,934
				0,650	0,650	0,671	-0,009	0,655	0,655	18,847	0,0005	-11,965	-182,118
				0,640	0,640	0,662	-0,009	0,645	0,645	18,476	0,0005	-11,928	-194,302
				0,630	0,630	0,652	-0,009	0,635	0,635	18,107	0,0005	-11,892	-206,486
				0,620	0,620	0,643	-0,009	0,630	0,630	17,739	0,0006	-11,857	-218,670
				0,610	0,610	0,634	-0,009	0,625	0,625	17,371	0,0006	-11,823	-230,854
				0,600	0,600	0,625	-0,009	0,615	0,615	17,005	0,0007	-11,790	-243,038
				0,590	0,590	0,616	-0,009	0,595	0,595	16,640	0,0006	-11,874	-255,222
				0,580	0,580	0,607	-0,009	0,585	0,585	16,275	0,0007	-11,949	-267,406
				0,570	0,570	0,597	-0,009	0,575	0,575	15,912	0,0007	-12,027	-279,590
				0,560	0,560	0,588	-0,009	0,565	0,565	15,550	0,0007	-12,108	-291,774
				0,550	0,550	0,579	-0,009	0,555	0,555	15,189	0,0008	-12,193	-303,958
				0,540	0,540	0,571	-0,009	0,545	0,545	14,830	0,0008	-12,281	-316,142
				0,530	0,530	0,562	-0,009	0,535	0,535	14,472	0,0008	-12,373	-328,326
				0,520	0,520	0,553	-0,009	0,525	0,525	14,115	0,0009	-12,469	-340,510
				0,510	0,510	0,544	-0,009	0,515	0,515	13,759	0,0009	-12,569	-352,694
				0,500	0,500	0,536	-0,009	0,505	0,505	13,405	0,0010	-12,673	-364,878

Exercício 13-6: resolução modo alternatido Step method

n [m]	A [m]	E [m]	H [m]	v [m]	A [m]	ANIZ [m]	f	A [m]	v [m]
0.800	0.800	0.814	0.000	0.795	0.795	24.117	0.0003	-11.795	0.900
0.795	0.795	0.804	-0.010	0.795	0.795	24.117	0.0003	-11.795	0.900
0.790	0.790	0.795	-0.010	0.795	0.795	24.117	0.0003	-11.795	0.900
0.775	0.775	0.785	-0.010	0.775	0.775	24.115	0.0003	-11.810	0.915
0.760	0.760	0.775	-0.010	0.765	0.765	22.975	0.0003	-14.363	0.628
0.745	0.745	0.765	-0.020	0.745	0.745	22.218	0.0004	-16.823	0.436
0.730	0.730	0.747	-0.010	0.735	0.735	21.640	0.0004	-15.085	0.05779
0.715	0.715	0.735	-0.020	0.715	0.715	21.483	0.0004	-16.170	0.11130
0.700	0.700	0.728	-0.020	0.705	0.705	21.087	0.0004	-16.864	0.13134
0.685	0.685	0.699	-0.010	0.685	0.685	20.712	0.0004	-16.209	0.07264
0.670	0.670	0.709	-0.010	0.685	0.685	20.317	0.0004	-16.413	0.04277
0.655	0.655	0.699	-0.010	0.685	0.685	19.912	0.0004	-16.209	0.01116
0.670	0.670	0.690	-0.009	0.675	0.675	19.500	0.0005	-17.315	0.04313
0.685	0.685	0.680	-0.009	0.685	0.685	19.118	0.0005	-17.811	0.11232
0.650	0.650	0.671	-0.009	0.655	0.655	18.647	0.0005	-18.453	0.24741
0.640	0.640	0.662	-0.009	0.645	0.645	18.476	0.0005	-18.113	0.21814
0.630	0.630	0.652	-0.009	0.635	0.635	18.107	0.0005	-18.912	0.27146
0.620	0.620	0.643	-0.009	0.625	0.625	17.738	0.0006	-19.362	0.30478
0.610	0.610	0.634	-0.009	0.615	0.615	17.371	0.0006	-19.878	0.31576
0.600	0.600	0.625	-0.009	0.605	0.605	17.005	0.0006	-20.388	0.31992
0.590	0.590	0.616	-0.009	0.595	0.595	16.640	0.0006	-20.914	0.30656
0.580	0.580	0.607	-0.009	0.585	0.585	16.275	0.0007	-21.460	0.28170
0.570	0.570	0.597	-0.009	0.575	0.575	15.912	0.0007	-21.917	0.24121
0.560	0.560	0.588	-0.009	0.565	0.565	15.550	0.0007	-22.408	0.21111
0.550	0.550	0.579	-0.009	0.555	0.555	15.189	0.0008	-22.929	0.18070
0.540	0.540	0.571	-0.009	0.545	0.545	14.830	0.0008	-23.487	0.14977
0.530	0.530	0.562	-0.009	0.535	0.535	14.472	0.0008	-24.079	0.08820
0.520	0.520	0.553	-0.009	0.525	0.525	14.115	0.0009	-24.684	0.00070
0.510	0.510	0.544	-0.009	0.515	0.515	13.758	0.0009	-25.314	0.00000
0.500	0.500	0.536	-0.009	0.505	0.505	13.400	0.0010	-25.971	0.00000

$$\bar{f}_j = \frac{1}{2}(f_{j1} + f_{j2})$$

Exercício 13-6: resolução Runge Kutta ordem 4

n	t [m]	A [m]	E [m]	H [m]	v [m]	A [m]	ANIZ [m]	f	A [m]	v [m]
0	0.800	0.800	0.814	0.000	0.795	24.117	0.0003	-11.795	0.900	0.900
5	0.796	0.796	0.804	-0.010	0.795	24.100	0.0003	-11.800	0.896	0.896
10	0.792	0.792	0.799	-0.010	0.795	24.083	0.0003	-11.813	0.892	0.892
15	0.788	0.788	0.794	-0.010	0.795	24.066	0.0003	-11.826	0.888	0.888
20	0.784	0.784	0.789	-0.010	0.795	24.049	0.0003	-11.839	0.884	0.884
25	0.780	0.780	0.784	-0.010	0.795	24.032	0.0003	-11.852	0.880	0.880
30	0.776	0.776	0.779	-0.010	0.795	24.015	0.0003	-11.865	0.876	0.876
35	0.772	0.772	0.774	-0.010	0.795	24.000	0.0003	-11.878	0.872	0.872
40	0.768	0.768	0.769	-0.010	0.795	23.985	0.0003	-11.891	0.868	0.868
45	0.764	0.764	0.764	-0.010	0.795	23.970	0.0003	-11.904	0.864	0.864
50	0.760	0.760	0.759	-0.010	0.795	23.955	0.0003	-11.917	0.860	0.860
55	0.756	0.756	0.754	-0.010	0.795	23.940	0.0003	-11.930	0.856	0.856
60	0.752	0.752	0.749	-0.010	0.795	23.925	0.0003	-11.943	0.852	0.852
65	0.748	0.748	0.744	-0.010	0.795	23.910	0.0003	-11.956	0.848	0.848
70	0.744	0.744	0.739	-0.010	0.795	23.895	0.0003	-11.969	0.844	0.844
75	0.740	0.740	0.734	-0.010	0.795	23.880	0.0003	-11.982	0.840	0.840
80	0.736	0.736	0.729	-0.010	0.795	23.865	0.0003	-11.995	0.836	0.836
85	0.732	0.732	0.724	-0.010	0.795	23.850	0.0003	-12.008	0.832	0.832
90	0.728	0.728	0.719	-0.010	0.795	23.835	0.0003	-12.021	0.828	0.828
95	0.724	0.724	0.714	-0.010	0.795	23.820	0.0003	-12.034	0.824	0.824
100	0.720	0.720	0.709	-0.010	0.795	23.805	0.0003	-12.047	0.820	0.820
105	0.716	0.716	0.704	-0.010	0.795	23.790	0.0003	-12.060	0.816	0.816
110	0.712	0.712	0.699	-0.010	0.795	23.775	0.0003	-12.073	0.812	0.812
115	0.708	0.708	0.694	-0.010	0.795	23.760	0.0003	-12.086	0.808	0.808
120	0.704	0.704	0.689	-0.010	0.795	23.745	0.0003	-12.099	0.804	0.804
125	0.700	0.700	0.684	-0.010	0.795	23.730	0.0003	-12.112	0.800	0.800
130	0.696	0.696	0.679	-0.010	0.795	23.715	0.0003	-12.125	0.796	0.796
135	0.692	0.692	0.674	-0.010	0.795	23.700	0.0003	-12.138	0.792	0.792
140	0.688	0.688	0.669	-0.010	0.795	23.685	0.0003	-12.151	0.788	0.788
145	0.684	0.684	0.664	-0.010	0.795	23.670	0.0003	-12.164	0.784	0.784
150	0.680	0.680	0.659	-0.010	0.795	23.655	0.0003	-12.177	0.780	0.780
155	0.676	0.676	0.654	-0.010	0.795	23.640	0.0003	-12.190	0.776	0.776
160	0.672	0.672	0.649	-0.010	0.795	23.625	0.0003	-12.203	0.772	0.772
165	0.668	0.668	0.644	-0.010	0.795	23.610	0.0003	-12.216	0.768	0.768
170	0.664	0.664	0.639	-0.010	0.795	23.595	0.0003	-12.229	0.764	0.764
175	0.660	0.660	0.634	-0.010	0.795	23.580	0.0003	-12.242	0.760	0.760
180	0.656	0.656	0.629	-0.010	0.795	23.565	0.0003	-12.255	0.756	0.756
185	0.652	0.652	0.624	-0.010	0.795	23.550	0.0003	-12.268	0.752	0.752
190	0.648	0.648	0.619	-0.010	0.795	23.535	0.0003	-12.281	0.748	0.748
195	0.644	0.644	0.614	-0.010	0.795	23.520	0.0003	-12.294	0.744	0.744
200	0.640	0.640	0.609	-0.010	0.795	23.505	0.0003	-12.307	0.740	0.740
205	0.636	0.636	0.604	-0.010	0.795	23.490	0.0003	-12.320	0.736	0.736
210	0.632	0.632	0.599	-0.010	0.795	23.475	0.0003	-12.333	0.732	0.732
215	0.628	0.628	0.594	-0.010	0.795	23.460	0.0003	-12.346	0.728	0.728
220	0.624	0.624	0.589	-0.010	0.795	23.445	0.0003	-12.359	0.724	0.724
225	0.620	0.620	0.584	-0.010	0.795	23.430	0.0003	-12.372	0.720	0.720
230	0.616	0.616	0.579	-0.010	0.795	23.415	0.0003	-12.385	0.716	0.716
235	0.612	0.612	0.574	-0.010	0.795	23.400	0.0003	-12.398	0.712	0.712
240	0.608	0.608	0.569	-0.010	0.795	23.385	0.0003	-12.411	0.708	0.708
245	0.604	0.604	0.564	-0.010	0.795	23.370	0.0003	-12.424	0.704	0.704
250	0.600	0.600	0.559	-0.010	0.795	23.355	0.0003	-12.437	0.700	0.700
255	0.596	0.596	0.554	-0.010	0.795	23.340	0.0003	-12.450	0.696	0.696
260	0.592	0.592	0.549	-0.010	0.795	23.325	0.0003	-12.463	0.692	0.692
265	0.588	0.588	0.544	-0.010	0.795	23.310	0.0003	-12.476	0.688	0.688
270	0.584	0.584	0.539	-0.010	0.795	23.295	0.0003	-12.489	0.684	0.684
275	0.580	0.580	0.534	-0.010	0.795	23.280	0.0003	-12.502	0.680	0.680
280	0.576	0.576	0.529	-0.010	0.795	23.265	0.0003	-12.515	0.676	0.676
285	0.572	0.572	0.524	-0.010	0.795	23.250	0.0003	-12.528	0.672	0.672
290	0.568	0.568	0.519	-0.010	0.795	23.235	0.0003	-12.541	0.668	0.668
295	0.564	0.564	0.514	-0.010	0.795	23.220	0.0003	-12.554	0.664	0.664
300	0.560	0.560	0.509	-0.010	0.795	23.205	0.0003	-12.567	0.660	0.660
305	0.556	0.556	0.504	-0.010	0.795	23.190	0.0003	-12.580	0.656	0.656
310	0.552	0.552	0.499	-0.010	0.795	23.175	0.0003	-12.593	0.652	0.652
315	0.548	0.548	0.494	-0.010	0.795	23.160	0.0003	-12.606	0.648	0.648
320	0.544	0.544	0.489	-0.010	0.795	23.145	0.0003	-12.619	0.644	0.644
325	0.540	0.540	0.484	-0.010	0.795	23.130	0.0003	-12.632	0.640	0.640
330	0.536	0.536	0.479	-0.010	0.795	23.115	0.0003	-12.645	0.636	0.636
335	0.532	0.532	0.474	-0.010	0.795	23.100	0.0003	-12.658	0.632	0.632
340	0.528	0.528	0.469	-0.010	0.795	23.085	0.0003	-12.671	0.628	0.628
345	0.524	0.524	0.464	-0.010	0.795	23.070	0.0003	-12.684	0.624	0.624
350	0.520	0.520	0.459	-0.010	0.795	23.055	0.0003	-12.697	0.620	0.620
355	0.516	0.516	0.454	-0.010	0.795	23.040	0.0003	-12.710	0.616	0.616
360	0.512	0.512	0.449	-0.010	0.795	23.025	0.0003	-12.723	0.612	0.612
365	0.508	0.508	0.444	-0.010	0.795	23.010	0.0003	-12.736	0.608	0.608
370	0.504	0.								

Exemplo de aplicação 1

Um vertedor de uma barragem descarrega uma vazão unitária $q = 7.0 \text{ m}^3/(\text{s}\cdot\text{m})$ em uma bacia de dissipação retangular de mesma largura que o vertedor. A formação de um ressalto hidráulico deverá ser ocorer pela colocação de uma soleira elevada na extremidade da bacia. Supondo escoamento crítico sobre a soleira, determine a altura ΔZ requerida pela soleira para que o ressalto se forme dentro da bacia de dissipação. Despreze as perdas de carga no escoamento pelo vertedor.

