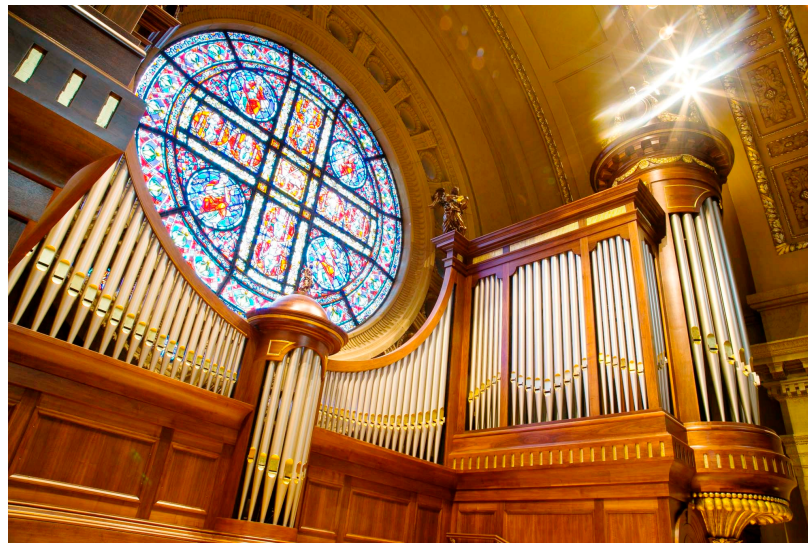


**MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS II**

2º Semestre - 2019

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br



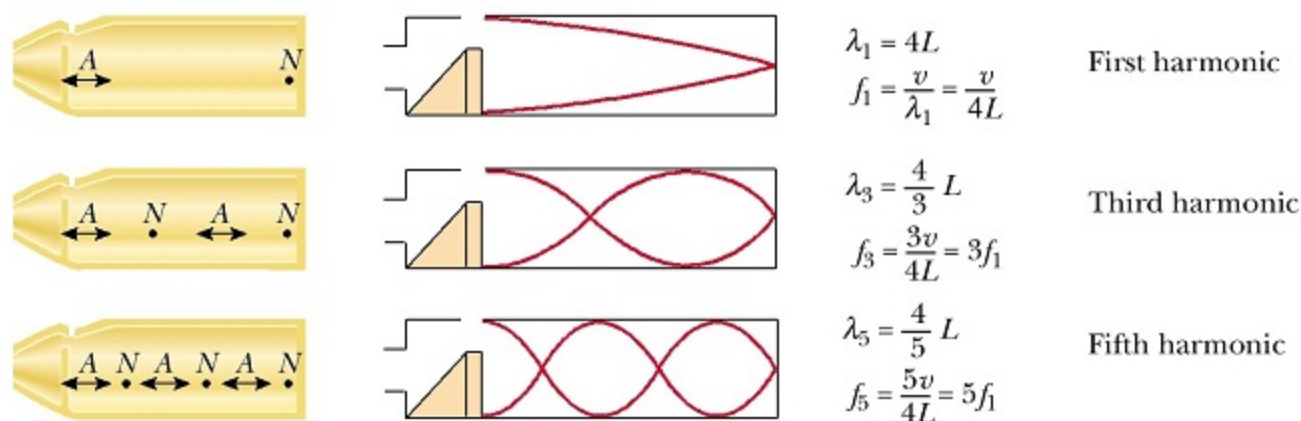
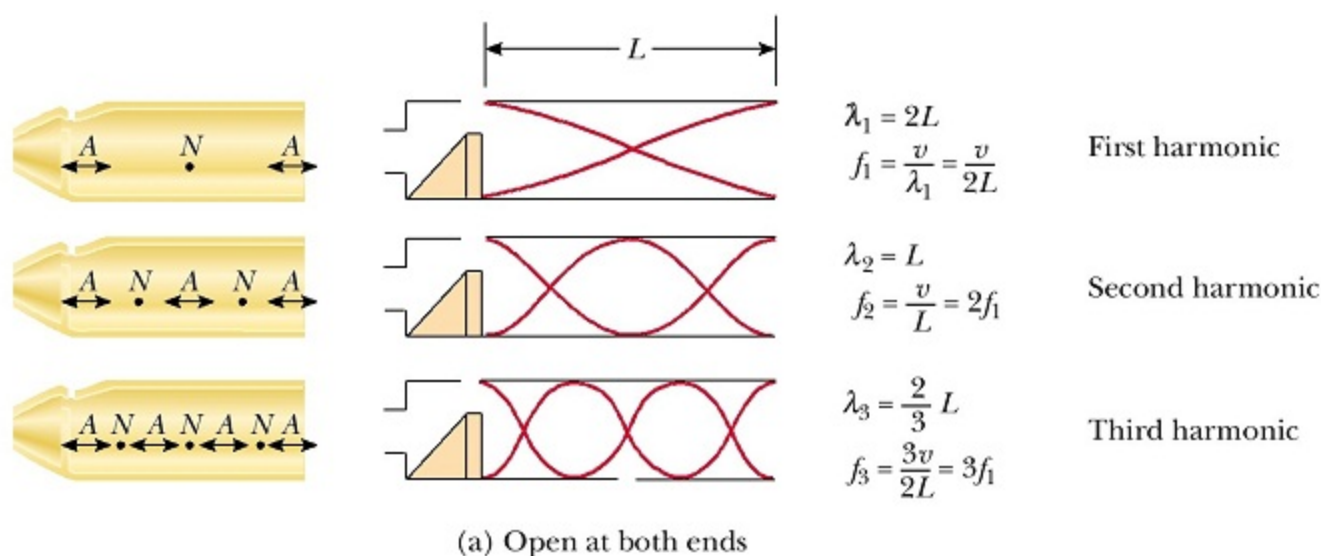


Figure 18.14 Motion of air molecules in standing longitudinal waves in a pipe, along with schematic representations of the waves. The graphs represent the displacement amplitudes, not the pressure amplitudes. (a) In a pipe open at both ends, the harmonic series created consists of all integer multiples of the fundamental frequency: $f_1, 2f_1, 3f_1, \dots$. (b) In a pipe closed at one end and open at the other, the harmonic series created consists of only odd-integer multiples of the fundamental frequency: $f_1, 3f_1, 5f_1, \dots$.

Fixed and Free End Springs

<https://youtu.be/ZxIllyptT1FY>

Boundary Conditions on a String

<https://youtu.be/1GyiHMj67JE>

Boundary Conditions on a String II

<https://youtu.be/lisLZtm-v7w>

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução (Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
<http://www.mat.ufmg.br/~regi>

4	Equação da Onda Unidimensional	330
4.1	Corda Elástica Presa nas Extremidades	330
4.1.1	Com Velocidade Inicial Nula	331
4.1.2	Com Deslocamento Inicial Nulo	345
4.1.3	Caso Geral	354
	Exercícios	360
4.2	Corda Elástica Solta em uma Extremidade	363
4.2.1	Com Velocidade Inicial Nula	364
4.2.2	Com Deslocamento Inicial Nulo	374
4.2.3	Caso Geral	382
	Exercícios	386
4.3	Corda Elástica Infinita	389
4.3.1	Solução Geral	389
4.3.2	Problema de Valor Inicial	390
	Exercícios	392
4.4	Respostas dos Exercícios	394

4.2 Corda Elástica Solta em uma Extremidade

Vamos considerar uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade esquerda, enquanto que na extremidade direita é colocado um anel que corre sem atrito em volta de uma barra vertical. Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x, t)$, de cada ponto da corda elástica sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, vamos resolver o PVIF

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \end{array} \right.$$

A solução deste problema é a soma da solução do problema com deslocamento inicial nulo ($f(x) = 0$),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \end{array} \right.$$

com a solução do problema com velocidade inicial nula ($g(x) = 0$),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0. \end{array} \right.$$

4.2.1 Com Velocidade Inicial Nula

Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x, t)$, de cada ponto de uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade esquerda, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é nula, ou seja, vamos resolver (PVIF)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \end{array} \right.$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t , ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t).$$

Dividindo-se por $a^2 X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x , enquanto o segundo depende apenas de t . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = 0, X'(L) = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\begin{cases} T''(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0, & T'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

As condições $X(0) = X'(L) = 0$ decorrem do fato de que $0 = u(0, t) = X(0)T(t)$ e $0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = X'(L)T(t)$. A condição $T'(0) = 0$, decorre do fato de que a velocidade inicial é nula, ou seja,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = X(x)T'(0).$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$: $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

Se $\lambda = 0$: $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$: $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam, como foi mostrado na Subseção 3.3.1 página 302 para o caso da equação do calor, que (4.15) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ou seja, a equação o problema de valores de fronteira (4.15) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (4.16) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}T(t) = 0$$

que com a condição inicial $T'(0) = 0$ tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_{2n+1}(t) = \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L \end{cases} \quad (4.17)$$

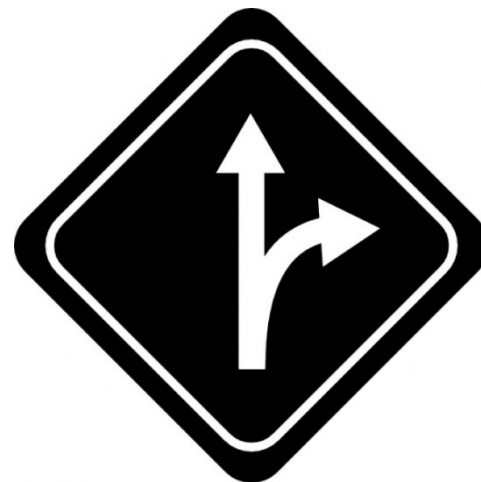
tem soluções fundamentais

$$u_{2n+1}(x, t) = X_{2n+1}(x)T_{2n+1}(t) = \text{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}, \quad (4.18)$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} u_{2n+1}(x, t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \text{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}. \end{aligned} \quad (4.19)$$



Teorema 2.1 (Fourier). *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, a série de Fourier de f*

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

converge para f nos pontos de $(-L, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in (-L, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

2.1.4 Tabela de Coeficientes de Séries de Fourier

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares

$f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}, -1 \leq c < d \leq 1$	$a_n(f, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$	$b_n(f, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt$
$f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\begin{aligned} a_0(f_{c,d}^{(0)}, L) &= d - c \\ a_n(f_{c,d}^{(0)}, L) &= \frac{1}{n\pi} \sin s \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$	$b_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = -\frac{1}{n\pi} \cos s \Big _{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\begin{aligned} a_0(f_{c,d}^{(1)}, L) &= \frac{L}{2}(d^2 - c^2) \\ a_n(f_{c,d}^{(1)}, L) &= \frac{L}{n^2\pi^2} (s \sin s + \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$	$\begin{aligned} b_n(f_{c,d}^{(1)}, L) &= \frac{L}{n^2\pi^2} (-s \cos s + \sin s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$
$f_{c,d}^{(2)}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\begin{aligned} a_0(f_{c,d}^{(2)}, L) &= \frac{L^2}{3}(d^3 - c^3) \\ a_n(f_{c,d}^{(2)}, L) &= \frac{L^2}{n^3\pi^3} ((s^2 - 2) \sin s + 2s \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$	$\begin{aligned} b_n(f_{c,d}^{(2)}, L) &= \frac{L^2}{n^3\pi^3} (2s \sin s + (2 - s^2) \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$

Corolário 2.4. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes. A série de Fourier de cossenos de f*

$$Sc_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de cossenos de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

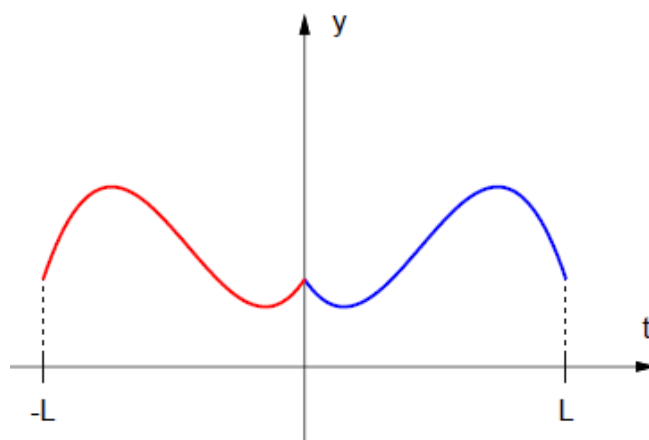


Figura 2.3 – Prolongamento par de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

Corolário 2.5. Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes. A série de Fourier de senos de f

$$Ss_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de senos de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

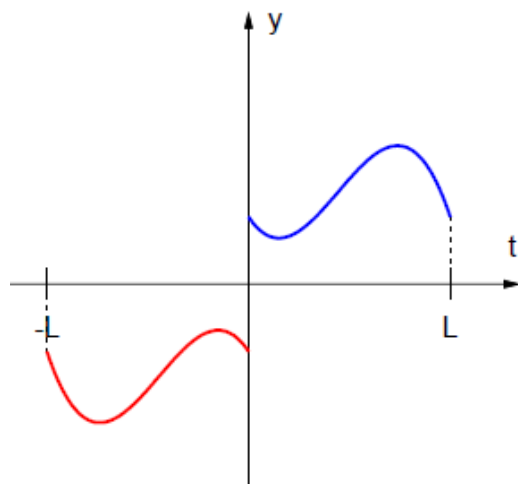


Figura 2.4 – Prolongamento ímpar de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

Corolário 2.9. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes. A série de Fourier de senos de índice ímpar de f*

$$Ssif(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L},$$

em que

$$b_{2k+1} = \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de senos de Fourier de índice ímpar:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

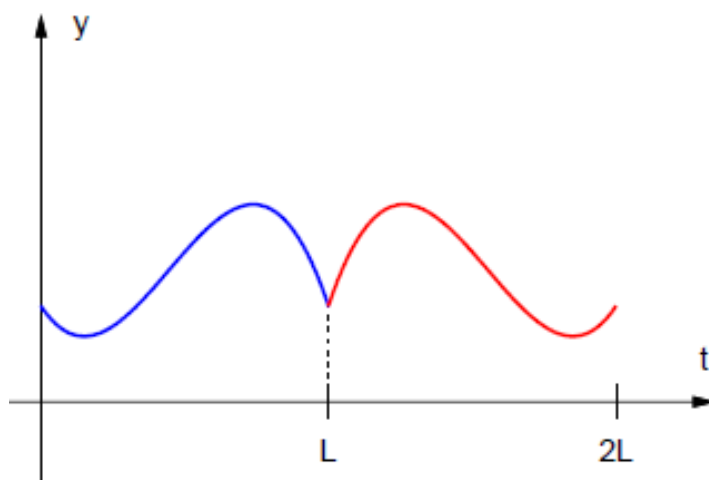


Figura 2.21 – Prolongamento com simetria em relação à reta $t = L$ de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

Corolário 2.10. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes. A série de Fourier de cossenos de índice ímpar de f*

$$Sci_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L},$$

em que

$$a_{2k+1} = \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de cossenos de Fourier de índice ímpar:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

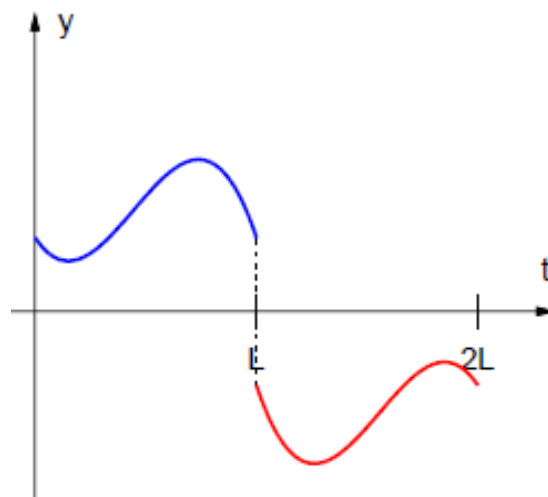


Figura 2.23 – Prolongamento com simetria em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$ de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$



Então para satisfazer a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta não é a série de Fourier de senos de $f(x)$ de período L . Entretanto, estendendo f ao intervalo $[0, 2L]$ de forma que ela seja simétrica em relação a reta $x = L$, ou seja,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, L] \\ f(2L - x) & \text{se } x \in [L, 2L] \end{cases}$$

então

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}. \quad (4.20)$$

Assim, se a função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_{2n+1} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} dx, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (4.21)$$

Observe que a solução do problema de valor inicial e de fronteira

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

para cada x , é periódica com relação a t com período fundamental $T = \frac{4L}{a}$, se $c_1 \neq 0$.

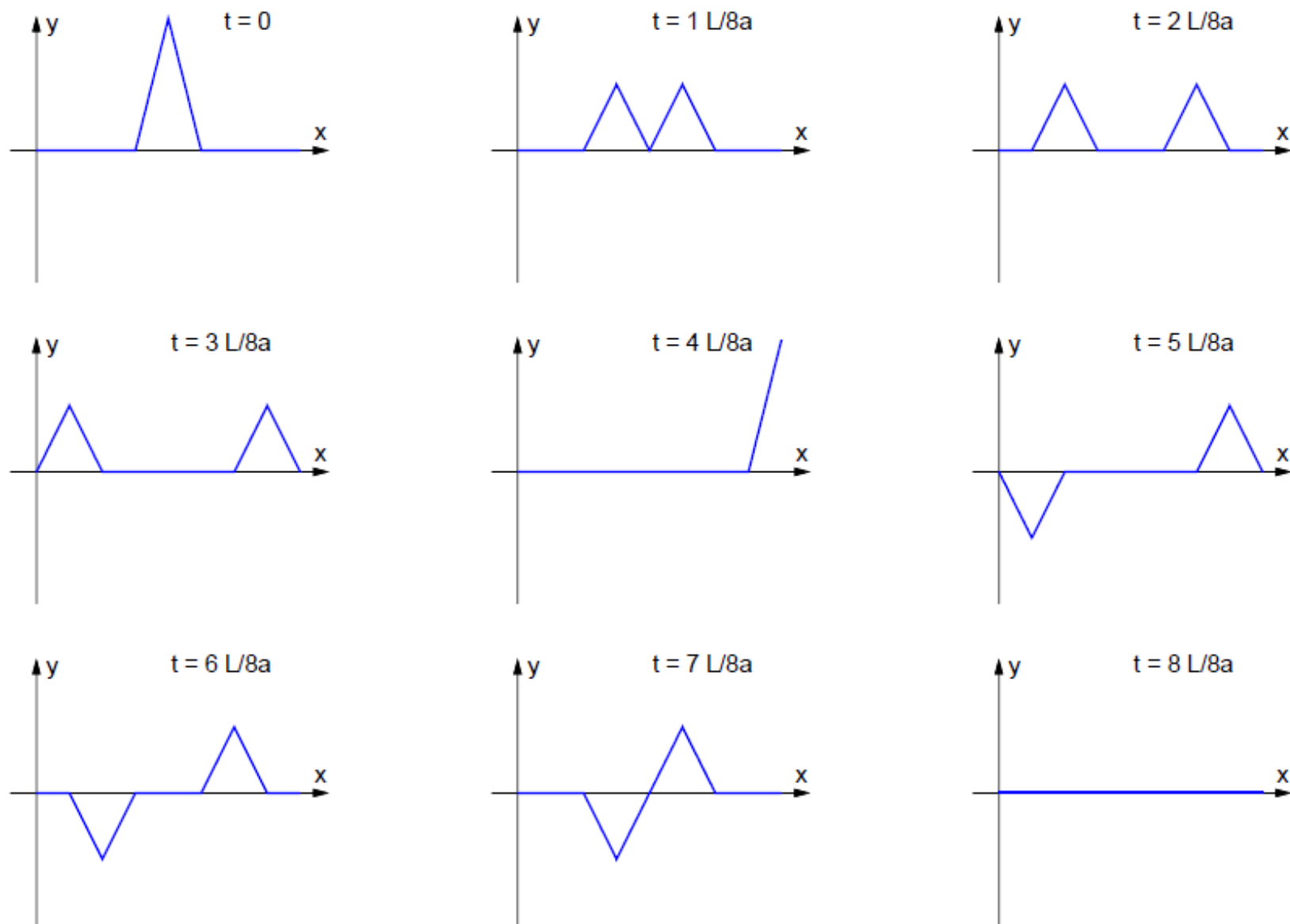


Figura 4.8 – Solução, $u(x,t)$, do problema da corda presa na extremidade esquerda com velocidade inicial nula, para t variando entre 0 e $T/4$.

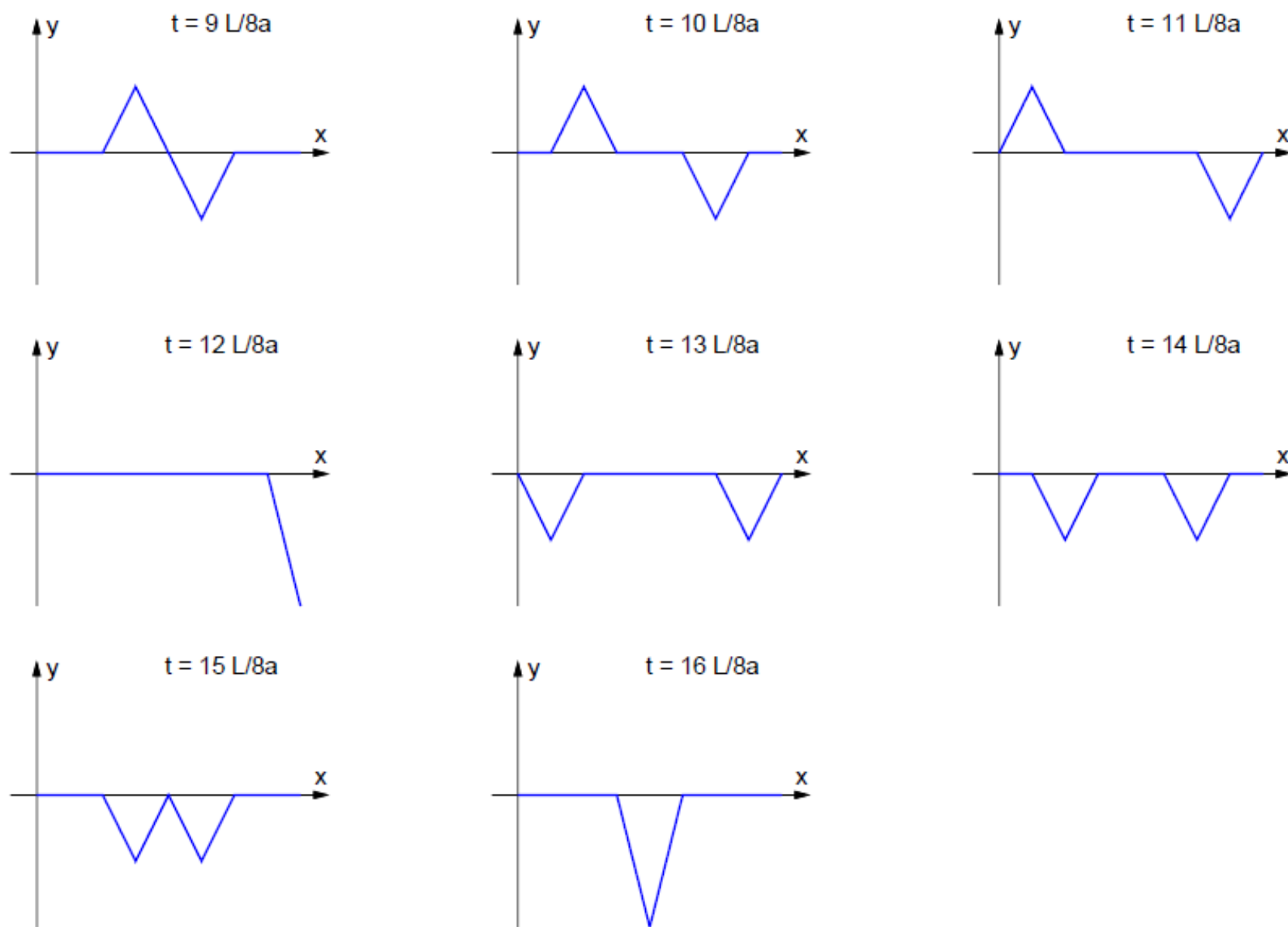


Figura 4.9 – Solução, $u(x, t)$, do problema da corda presa na extremidade esquerda com velocidade inicial nula, para t variando entre $T/4$ e $T/2$.

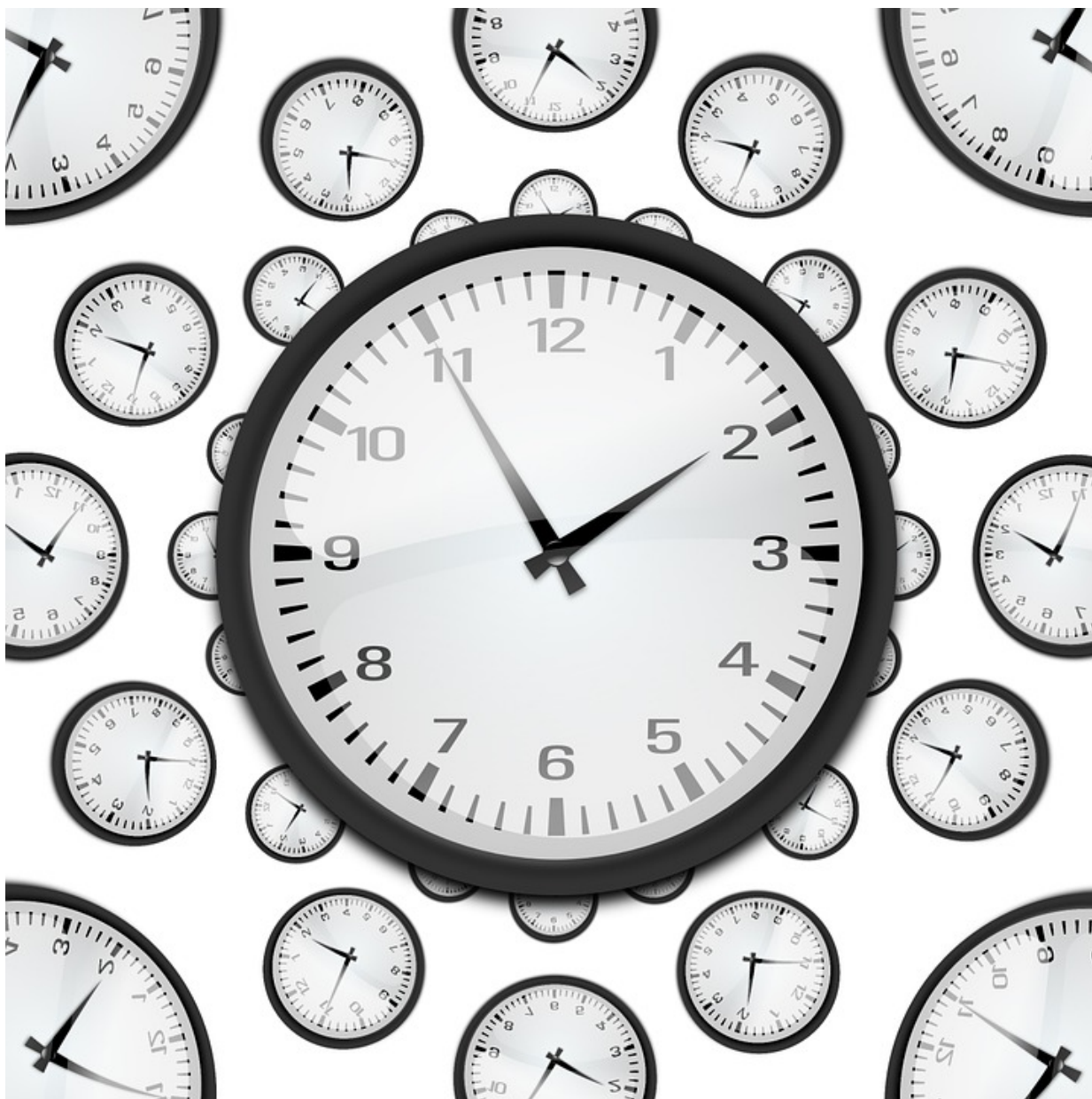


Exemplo 4.4. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa somente na extremidade esquerda, com coeficiente $a = 2$ solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ x - 20, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(40, t) = 0. \end{cases}$$



$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{40} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{80}$$

em que c_{2n+1} são os coeficientes da série de senos de índice ímpar de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= 4 \left(b_{2k+1}(f_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(1)}, 80) - 20b_{2k+1}(f_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(0)}, 80) \right) \\ &= 4 \cdot \frac{80}{(2n+1)^2 \pi^2} (-s \cos s + \sin s) \Big|_{\frac{(2n+1)\pi}{4}}^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} - 20 \cdot 4 \cdot \frac{-1}{(2n+1)\pi} \cos s \Big|_{\frac{(2n+1)\pi}{4}}^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \\ &= \frac{320}{(2n+1)^2 \pi^2} \left(\sin \frac{(2n+1)\pi}{2} - \sin \frac{(2n+1)\pi}{4} \right) - \frac{80}{(2n+1)\pi} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x, t) = \frac{80}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{4 \left(\sin \frac{(2n+1)\pi}{2} - \sin \frac{(2n+1)\pi}{4} \right)}{(2n+1)^2 \pi} - \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi}{2}}{(2n+1)} \right] \cos \frac{(2n+1)\pi t}{40} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{80}.$$

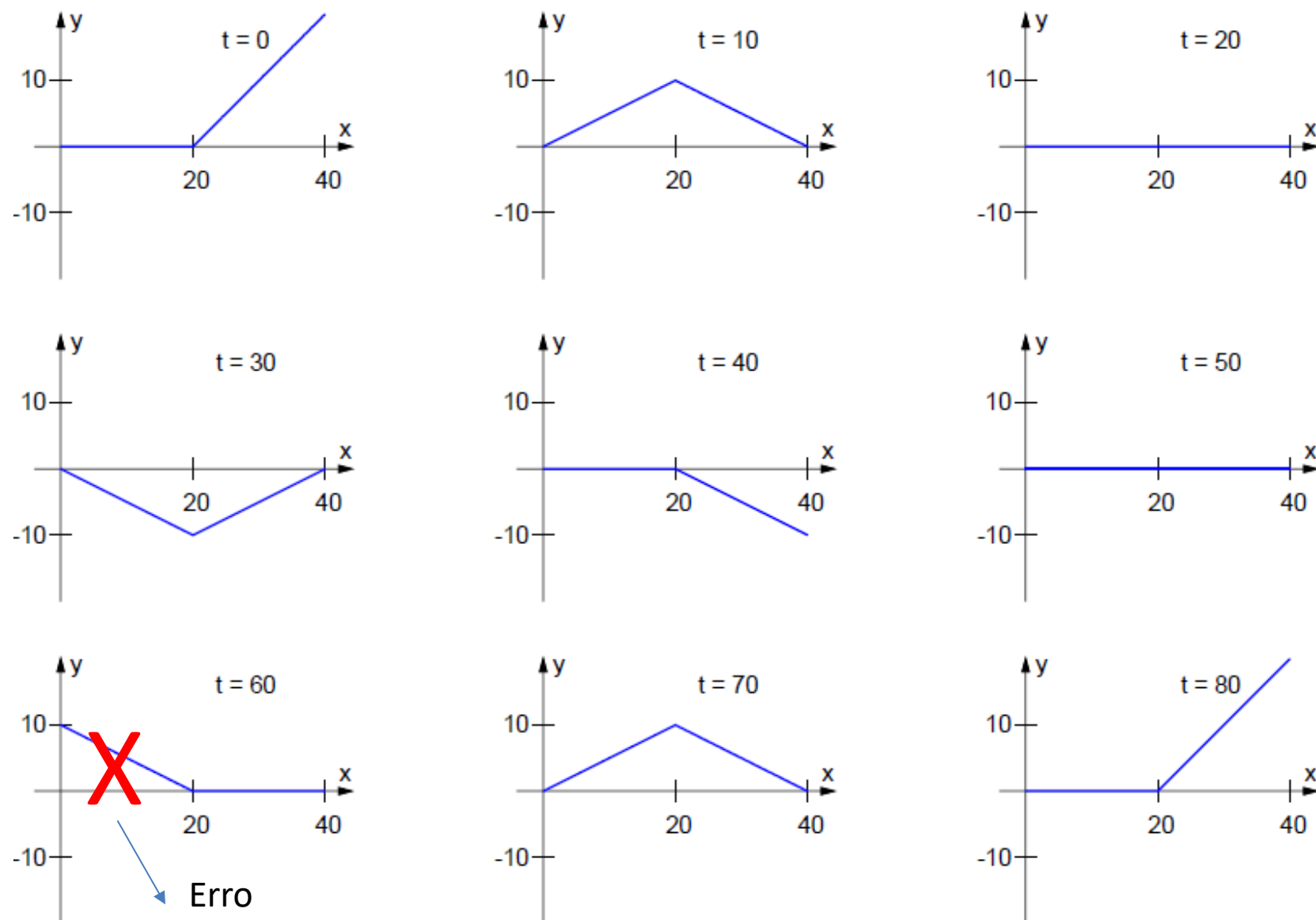
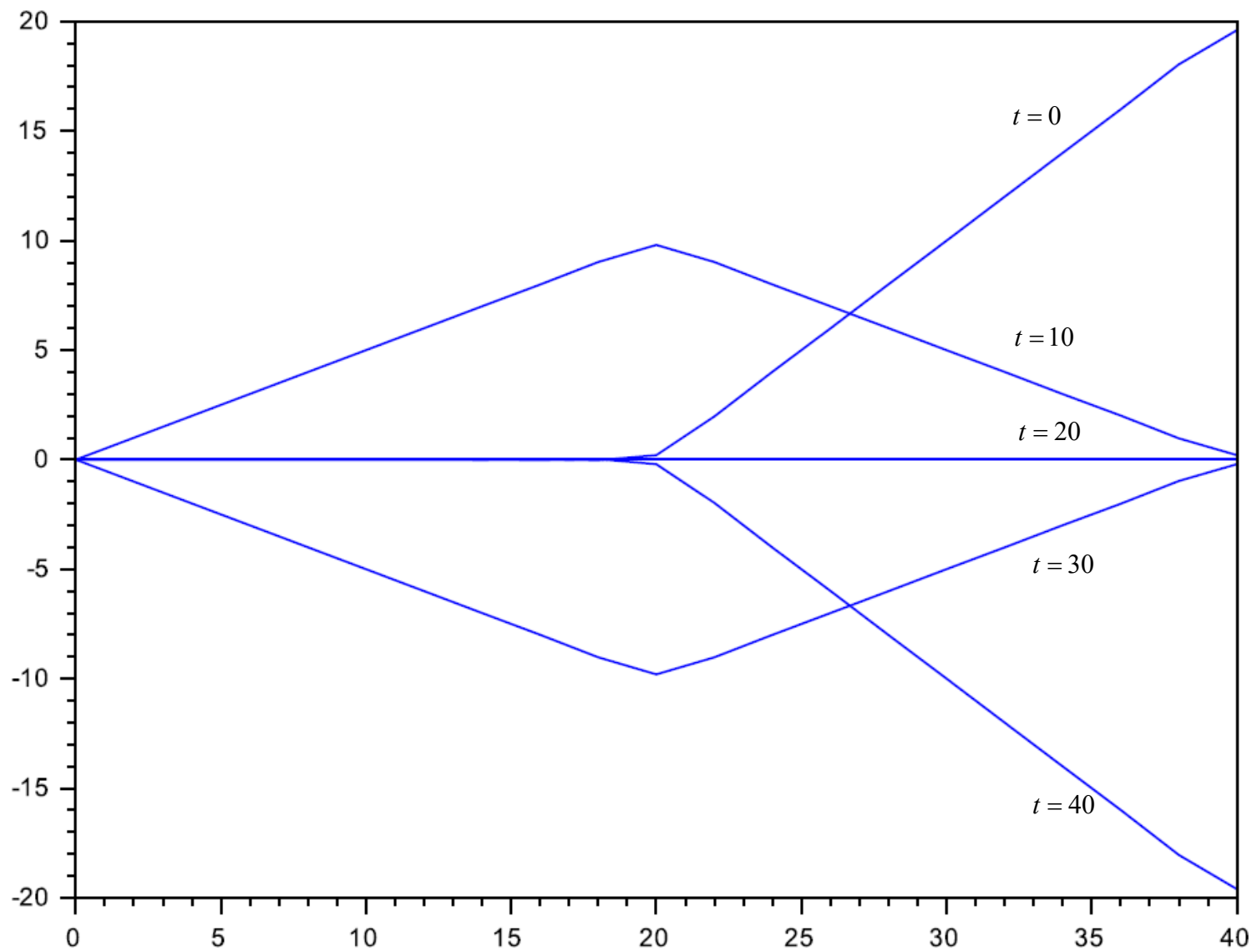


Figura 4.10 – Solução, $u(x, t)$, do PIVF do Exemplo 4.4.

```
0001 //Exemplo 4.4
0002 m=20; L =40;
0003 x=linspace(0,1,m+1)*L
0004 nk=20
0005 t=40
0006 a=2
0007 u = zeros(m+1)
0008 for k = 0:nk
0009     n = 2*k+1
0010     cn= 8*L*(sin(n*pi/2)-sin(n*pi/4))/(n^2*pi^2)-2*L*cos(n*pi/2)/(n*pi)
0011     u = u + cn*sin(n*pi*x/(2*L))*cos(n*a*pi*t/(2*L))
0012 end
0013 plot(x,u)
```



4.2.2 Com Deslocamento Inicial Nulo

Vamos considerar uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade esquerda, enquanto que na extremidade direita é colocado um anel que corre sem atrito em volta de uma barra vertical. Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x, t)$, de cada ponto da corda elástica, sabendo-se que o deslocamento inicial da corda é nulo e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, resolva o PVIF

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0. \end{array} \right.$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t , ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x , enquanto o segundo depende apenas de t . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = 0, & X'(L) = 0, \\ T''(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0, & T(0) = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

$$(4.24)$$

As condições $X(0) = X'(L) = 0$ decorrem do fato de que $0 = u(0, t) = X(0)T(t)$ e $0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = X'(L)T(t)$. A condição $T(0) = 0$, decorre do fato de que a posição inicial é nula, ou seja,

$$0 = u(x, 0) = X(x)T(0).$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$: $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

Se $\lambda = 0$: $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$: $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam, como no caso do exercício sobre a equação do calor resolvido na página 314, que (4.23) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ou seja, a equação o problema de valores de fronteira (4.23) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \text{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (4.24) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}T(t) = 0$$

que com a condição inicial $T(0) = 0$ tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_{2n+1}(t) = \text{sen} \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0; \quad u(x, 0) = 0, 0 < x < L \end{cases} \quad (4.25)$$

tem soluções fundamentais

$$u_{2n+1}(x, t) = X_{2n+1}(x)T_{2n+1}(t) = \text{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \text{sen} \frac{a(2n+1)\pi t}{2L} \quad (4.26)$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} u_{2n+1}(x, t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \operatorname{sen} \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Então para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$, temos que impor a condição

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t} u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \frac{a(2n+1)\pi}{2L} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta não é a série de Fourier de senos de $g(x)$ de período L . Entretanto, estendendo g ao intervalo $[0, 2L]$ de forma que ela seja simétrica em relação a reta $x = L$, ou seja,

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in [0, L] \\ g(2L - x) & \text{se } x \in [L, 2L] \end{cases}$$

então

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \frac{a(2n+1)\pi}{2L} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L}. \quad (4.28)$$

Assim, se a função $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada g' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$\frac{a(2n+1)\pi}{2L} c_{2n+1} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L} dx. \quad (4.29)$$

para $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Observe que a solução do problema de valor inicial e de fronteira

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \operatorname{sen} \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

para cada x , é periódica com relação a t com período fundamental $T = \frac{4L}{a}$, se $c_1 \neq 0$.

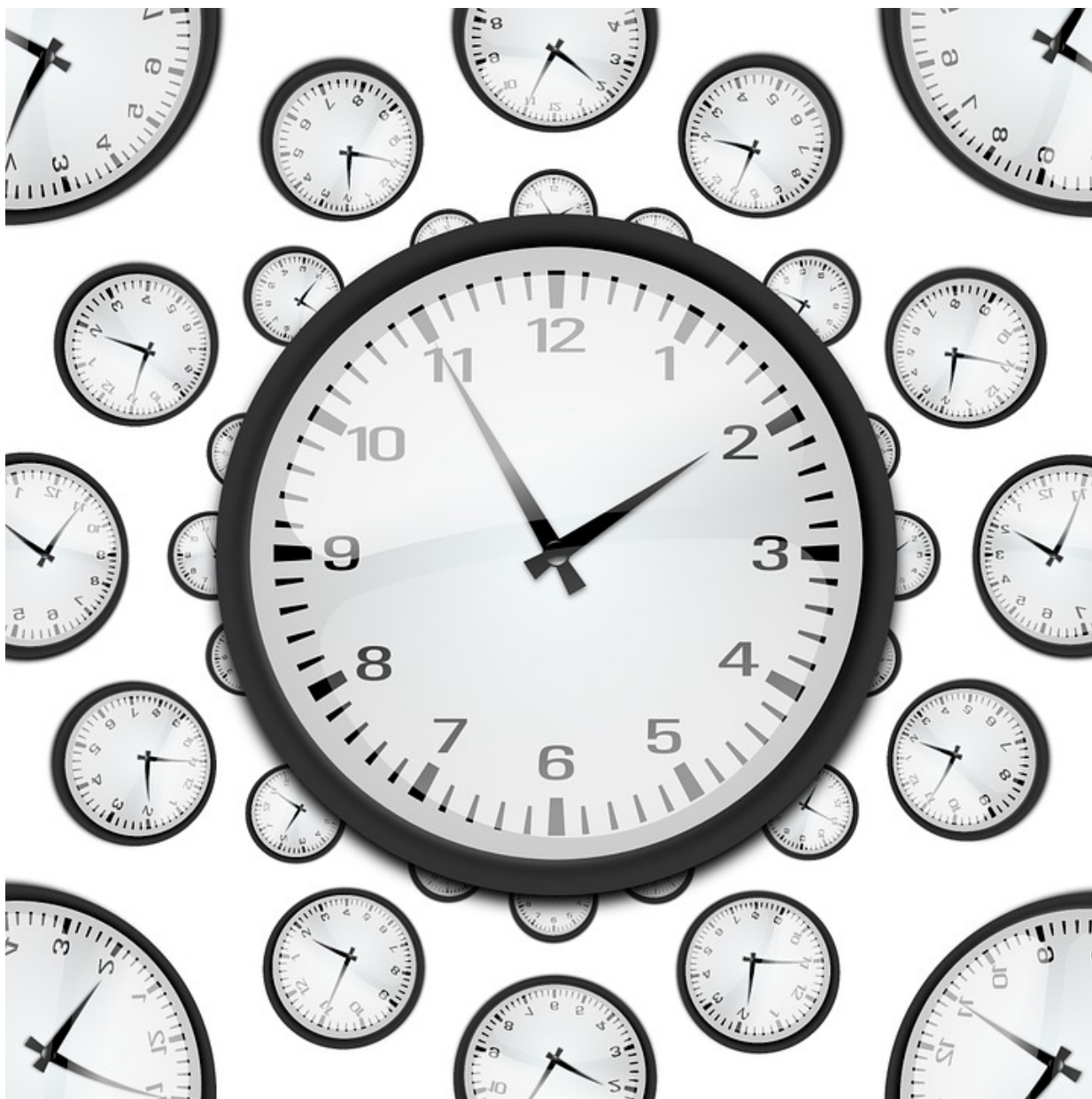


Exemplo 4.5. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, com coeficiente $a = 2$, presa somente na extremidade esquerda, enquanto que na extremidade direita é colocado um anel que corre sem atrito em volta de uma barra vertical, sem deslocamento inicial mas com uma velocidade inicial dada por

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ x/10 - 2, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(40, t) = 0 \end{cases}$$



A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80}$$

em que $\frac{(2n+1)\pi}{40} c_{2n+1}$ são os coeficientes da série de senos de índice ímpar de $g(x)$, que são os coeficientes obtidos para $f(x)$ do Exemplo 4.4 na página 371 divididos

por 10, ou seja,

$$\frac{(2n+1)\pi}{40} c_{2n+1} = \frac{32}{(2n+1)^2 \pi^2} \left(\operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{4} \right) - \frac{8}{(2n+1)\pi} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x, t) = \frac{320}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{4 \left(\operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{4} \right)}{(2n+1)^2 \pi} - \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi}{2}}{(2n+1)} \right] \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80}.$$

Verifique a última expressão ?????????

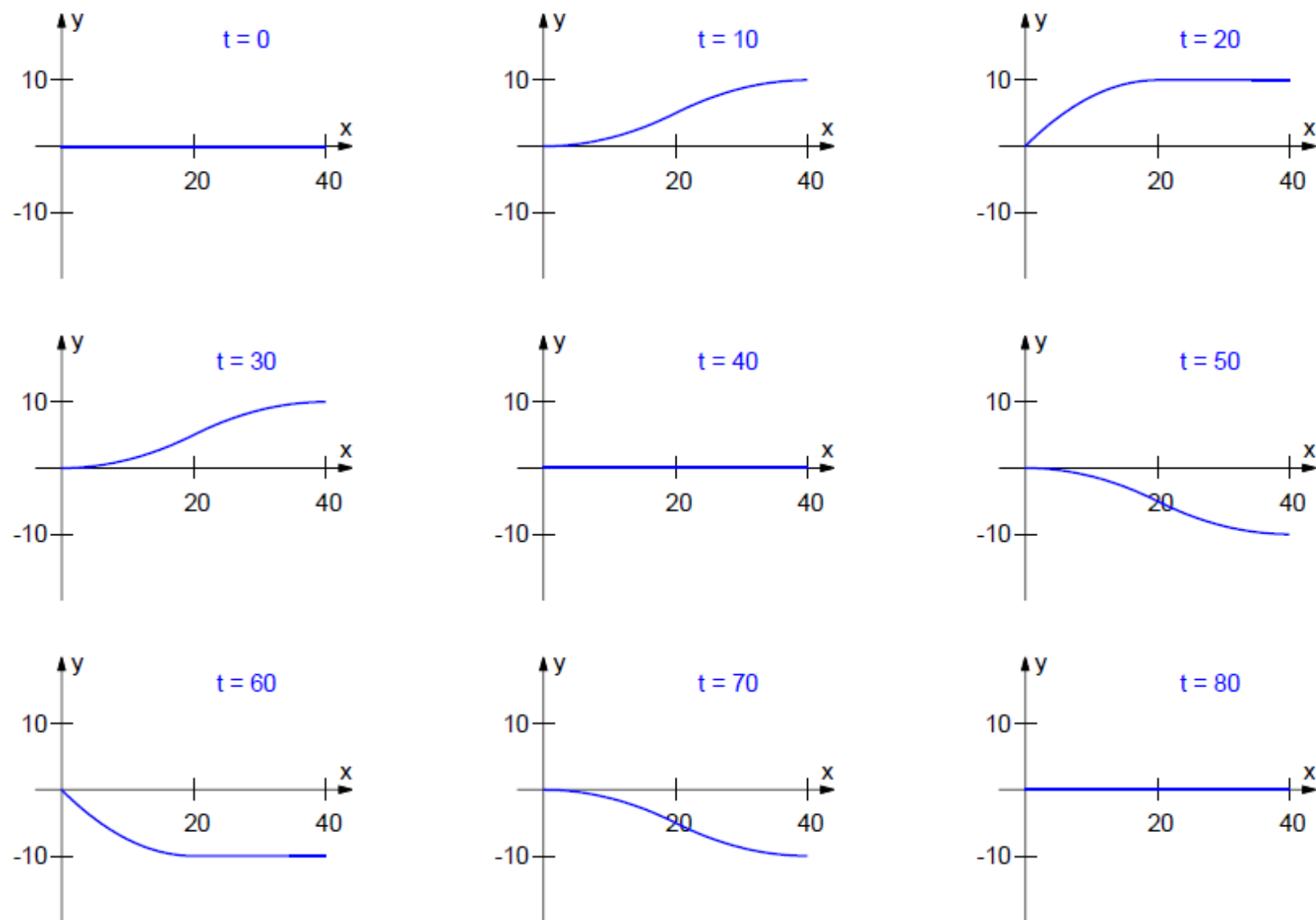
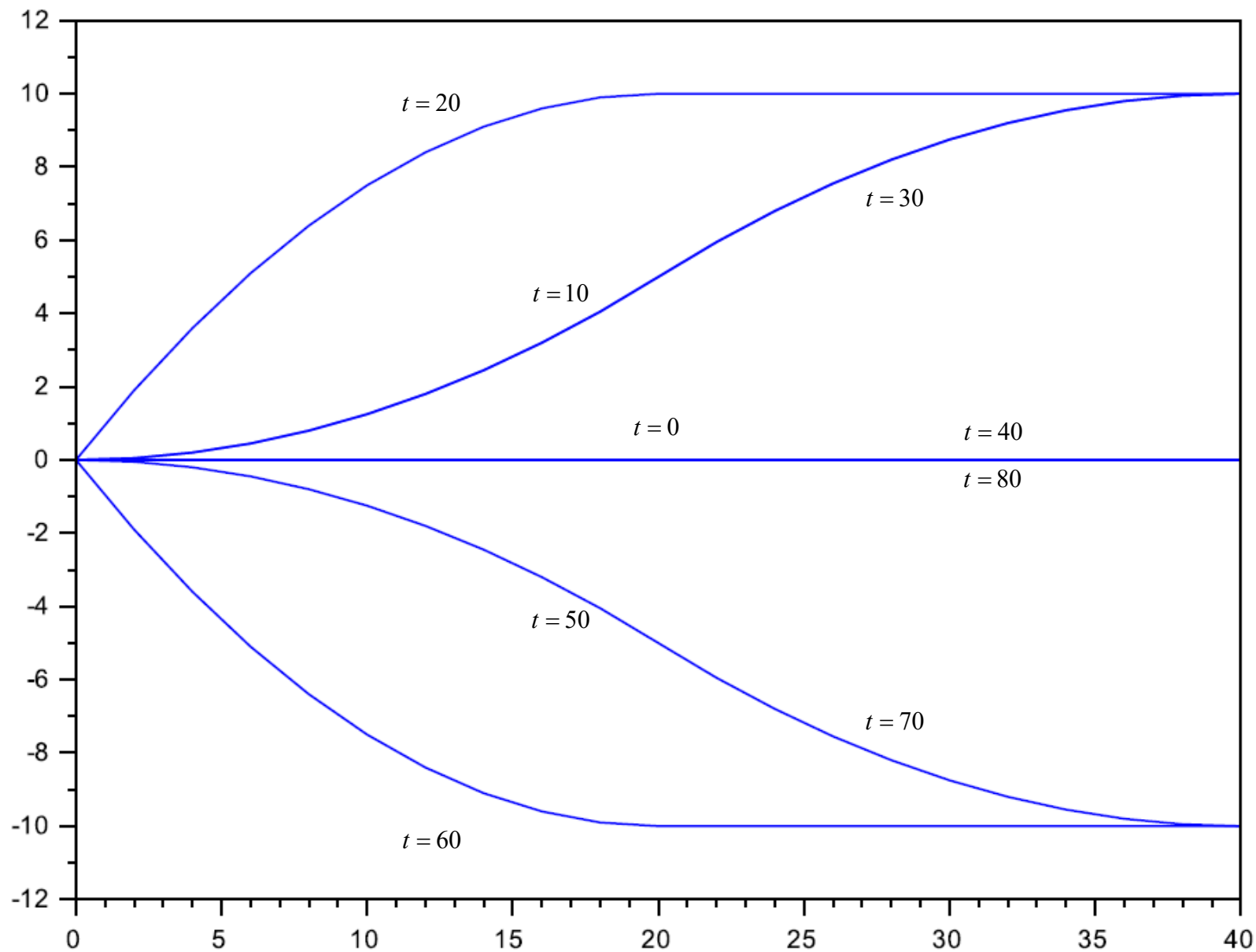


Figura 4.11 – Solução, $u(x, t)$, do PVIF do Exemplo 4.5.

```
//Exemplo 4.5
m=20; L =40;
x=linspace(0,1,m+1)*L
nk=20
t=60
a=2
u = zeros(m+1)
for k = 0:nk
    n = 2*k+1
    cn= (16*L^2)/(10*a*n^3*pi^3)*(sin(n*pi/2)-sin(n*pi/4))-(16*L)/(a*n^2*pi^2)*cos(n*pi/2)
    u = u + cn*sin(n*pi*x/(2*L))*sin(n*a*pi*t/(2*L))
end
plot(x,u)
```



4.2.3 Caso Geral

Voltando ao caso geral em que o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x, t)$, de cada ponto da corda elástica, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, resolva o PVIF

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0. \end{array} \right.$$

A solução deste problema é a soma da solução do problema com apenas $f(x)$ não nula, que vamos denotar por $u^{(f)}(x, t)$, com a solução do problema com apenas $g(x)$ não nula, $u^{(g)}(x, t)$, ou seja,

$$u(x, t) = u^{(f)}(x, t) + u^{(g)}(x, t).$$

Exemplo 4.6. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, com coeficiente $a = 2$, presa somente na extremidade esquerda, enquanto que na extremidade direita é colocado um anel que corre sem atrito em volta de uma barra vertical, com deslocamento inicial dado por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ x - 20, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

e com uma velocidade inicial dada por

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ x/10 - 2, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(40, t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80} + \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80}$$

em que c_{2n+1} são os coeficientes da série de senos de índice ímpar de $f(x)$, que são os coeficientes obtidos para $f(x)$ do Exemplo 4.4 na página 371 e $\frac{(2n+1)\pi}{40} d_{2n+1}$ são os coeficientes da série de senos de índice ímpar de $g(x)$, que são os coeficientes obtidos para $g(x)$ do Exemplo 4.5 na página 378, ou seja,

$$c_{2n+1} = \frac{320}{(2n+1)^2 \pi^2} \left(\operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{4} \right) - \frac{80}{(2n+1)\pi} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

$$\frac{(2n+1)\pi}{40} d_{2n+1} = \frac{32}{(2n+1)^2 \pi^2} \left(\operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{4} \right) - \frac{8}{(2n+1)\pi} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$. Portanto a solução é dada por

$$u(x, t) = \frac{80}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{4 \left(\operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{4} \right)}{(2n+1)^2 \pi} - \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi}{2}}{(2n+1)} \right] \cos \frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80} +$$

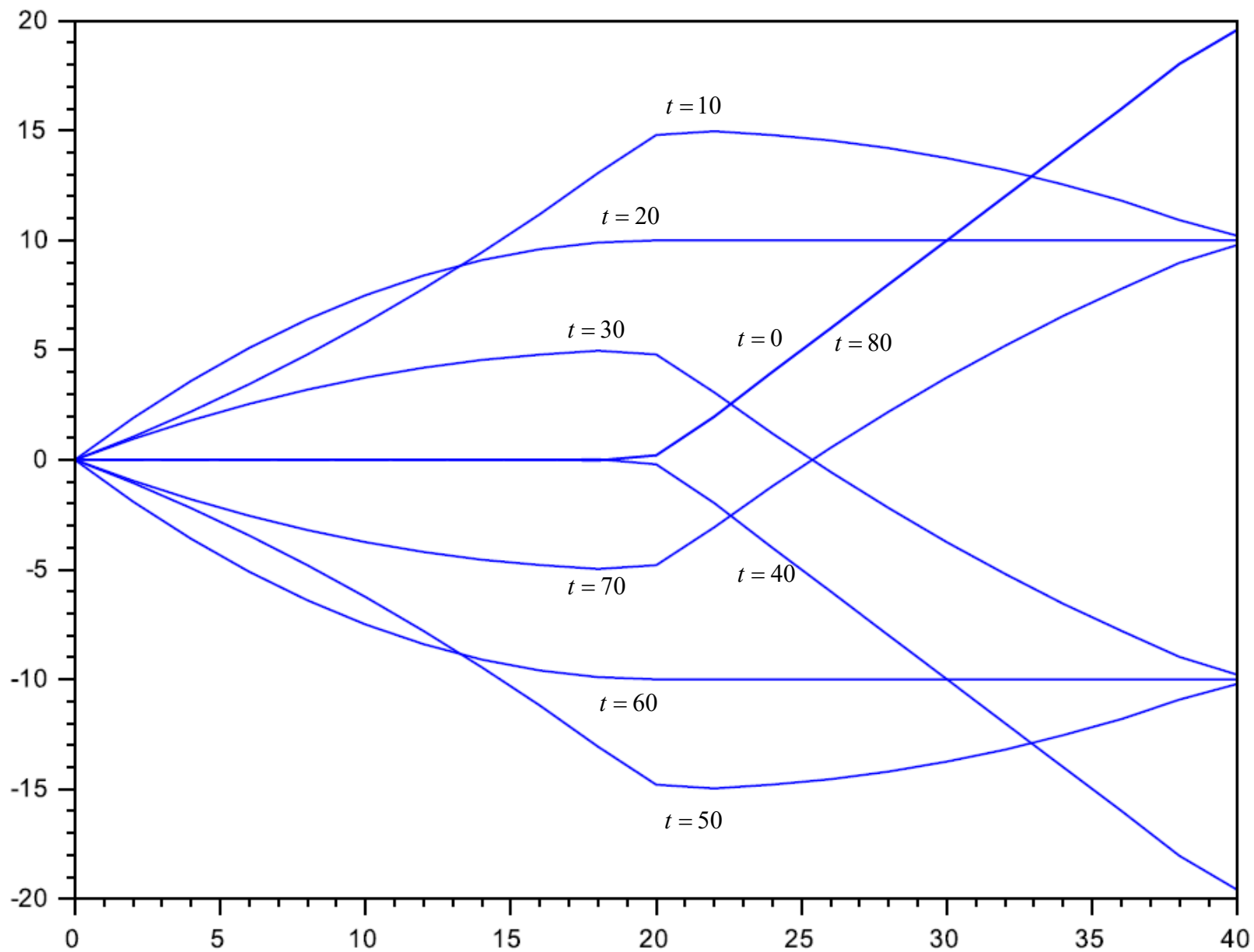
$$+ \frac{320}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{4 \left(\operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{4} \right)}{(2n+1)^2 \pi} - \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi}{2}}{(2n+1)} \right] \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80}.$$

Verifique a última expressão ?????????

```

//Exemplo 4.6
m=20; L =40;
x=linspace(0,1,m+1)*L
nk=20
t=80
a=2
u = zeros(m+1)
uf = u
ug = u
for k = 0:nk
    n = 2*k+1
    cf= 8*L*(sin(n*pi/2)-sin(n*pi/4))/(n^2*pi^2)-2*L*cos(n*pi/2)/(n*pi)
    uf = uf + cf*sin(n*pi*x/(2*L))*cos(n*a*pi*t/(2*L))
    cg= (16*L^2)/(10*a*n^3*pi^3)*(sin(n*pi/2)-sin(n*pi/4))-(16*L)/(a*n^2*pi^2)*cos(n*pi/2)
    ug = ug + cg*sin(n*pi*x/(2*L))*sin(n*a*pi*t/(2*L))
    u = uf + ug
end
plot(x,u)

```



MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2019

Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- Método de Diferenças Finitas
- Equação do calor transiente (parabólica)
- Equação de Poisson (elíptica)
- **Equação da onda (hiperbólica)**