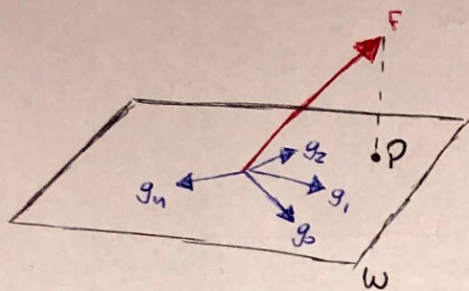


Minimizando distância



• $W = \text{espaço gerado por } \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$

• $V \supset W$ e $f \in V$

• V espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$

- Podemos fazer duas coisas
- ① Projetar ortogonalmente F em W
 - ② Encontrar o vetor de W que está mais próximo de F

• Projetar ortogonalmente é $A^T A x = A^T b$ dado por:

$$\begin{bmatrix} \langle g_0, g_0 \rangle & \dots & \langle g_0, g_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle g_n, g_0 \rangle & \dots & \langle g_n, g_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle F, g_0 \rangle \\ \langle F, g_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle F, g_n \rangle \end{bmatrix}$$

Projeção é $p = c_0 g_0 + c_1 g_1 + \dots + c_n g_n$

①=② O que é a distância de F a um vetor $g \in W$? $\|F - g\|$

② Queremos minimizar, entre todos os $g \in W$, a (distância)² acima

$$\|F - g\|^2 = \|F - (\sum c_i g_i)\|^2 = \langle (F - \sum c_i g_i), (F - \sum c_i g_i) \rangle$$

$$E^2(c_0, c_1, \dots, c_n) = \|F - \sum c_i g_i\|^2$$

• Queremos minimizar E^2 para encontrar o mínimo, procuramos um ponto crítico, isto é, procuramos $(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_n)$, tal que $\frac{\partial E^2}{\partial c_j}(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_n) = 0$

$$E^2(c_0, \dots, c_n) = \langle F, F \rangle - 2 \langle F, \sum c_j g_j \rangle + \langle \sum c_j g_j, \sum c_k g_k \rangle$$

$$= \langle F, F \rangle - 2 \sum_j \langle F, c_j g_j \rangle + \sum_{j,k} \langle c_j g_j, c_k g_k \rangle$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial c_i} = -2 \langle F, g_i \rangle + 2 \sum_j c_j \langle g_j, g_j \rangle$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial c_i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^n c_j \langle g_j, g_j \rangle = \langle F, g_i \rangle, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Exemplo

1) $F(x) = e^x$

$g_0(x) = 1$; $g_1(x) = x$; $g_2(x) = x^2$

$$\langle F, g \rangle = \int_0^1 F(x) g(x) dx$$

$$\langle g_i, g_j \rangle = \int_0^1 x^{i+j} dx = \frac{x^{i+j+1}}{i+j+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{i+j+1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \\ e-2 \end{bmatrix}$$

$$p(x) = 1,013 + 0,8511x + 0,8391x^2$$

Ex se quiséssemos projetar $f(x) = e^x$ no espaço de polinômio de grau ≤ 10 ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & (\dots) & 1/n \\ (\vdots) & & & & (\vdots) \\ 1/n & (\dots) & & & 1/n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ (\vdots) \\ c_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \\ e-2 \\ (\vdots) \end{bmatrix}$$

- Usando o Método de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortogonal para o espaço de polinômios no qual estamos interessados

Exemplo: $\{\text{Polinômios de grau } \leq 2\} = W$

$$\begin{cases} g_0(x) = 1 \\ g_1(x) = x \\ g_2(x) = x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q_0(x) = g_0(x) = 1 \\ q_1(x) = x - 1/2 \\ q_2(x) = x^2 - x + 1/6 \end{cases}$$

$$q_1(x) = g_1(x) - \frac{\langle g_1, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 = x - \frac{\int_0^1 x \, dx \cdot 1}{\int_0^1 1 \, dx} = x - \frac{1}{2}$$

$$q_2(x) = g_2(x) - \left(\text{Projeção de } g_2 \text{ no espaço gerado por } \{g_0, g_1\} \Leftrightarrow \text{espaço gerado por } \{q_0, q_1\} \right)$$

$$= g_2(x) - \frac{\langle g_2, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} \cdot q_0(x) - \frac{\langle g_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1(x)$$

$$= x^2 - \frac{\int_0^1 x \, dx}{\int_0^1 1 \, dx} \cdot 1 - \frac{\int_0^1 x^2(x - 1/2) \, dx}{\int_0^1 (x - 1/2)^2 \, dx} \cdot (x - 1/2)$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} - \frac{1/4 - 1/6}{1/12} (x - 1/2) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

• Projetar $f(x) = e^x$ no espaço de polinômios de grau ≤ 2

Usamos a base ortogonal $\{1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}\}$

Sistema normal:
$$\begin{bmatrix} \langle q_0, q_0 \rangle \\ \langle q_1, q_1 \rangle \\ \langle q_2, q_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, q_0 \rangle \\ \langle f, q_1 \rangle \\ \langle f, q_2 \rangle \end{bmatrix}$$

obs.: $\begin{bmatrix} \langle q_0, q_0 \rangle & \langle q_0, q_1 \rangle & \langle q_0, q_2 \rangle \\ \langle q_1, q_0 \rangle & \langle q_1, q_1 \rangle & \langle q_1, q_2 \rangle \\ \langle q_2, q_0 \rangle & \langle q_2, q_1 \rangle & \langle q_2, q_2 \rangle \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \langle q_0, q_0 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle q_1, q_1 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle q_2, q_2 \rangle \end{bmatrix}$$

$$c_0 = \frac{\langle f, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle}$$

$$c_1 = \frac{\langle f, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle}$$

$$c_2 = \frac{\langle f, q_2 \rangle}{\langle q_2, q_2 \rangle}$$

$$p(x) = c_0 q_0(x) + c_1 q_1(x) + c_2 q_2(x)$$

$$p(x) = \frac{\langle f, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0(x) + \frac{\langle f, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1(x) + \frac{\langle f, q_2 \rangle}{\langle q_2, q_2 \rangle} q_2(x)$$

$$\langle q_0, q_0 \rangle = \int_0^1 1 \, dx = 1 \quad \langle q_1, q_1 \rangle = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 \, dx = \frac{1}{12} \quad \langle q_2, q_2 \rangle = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2 \, dx = \frac{1}{180}$$

$$\langle f, q_0 \rangle = \int_0^1 e^x \, dx = e - 1$$

$$\langle f, q_1 \rangle = \int_0^1 e^x (x - \frac{1}{2}) \, dx = \frac{3}{2} - \frac{e}{2}$$

$$\langle f, q_2 \rangle = \int_0^1 e^x (x^2 - x + \frac{1}{6}) \, dx = \frac{7e - 19}{6}$$

$$p(x) = (e - 1) + (18 - 6e)(x - \frac{1}{2}) + (210e - 570)(x^2 - x + \frac{1}{6})$$

$$= (210e - 570)x^2 + (-216e + 588)x + 39e - 105$$

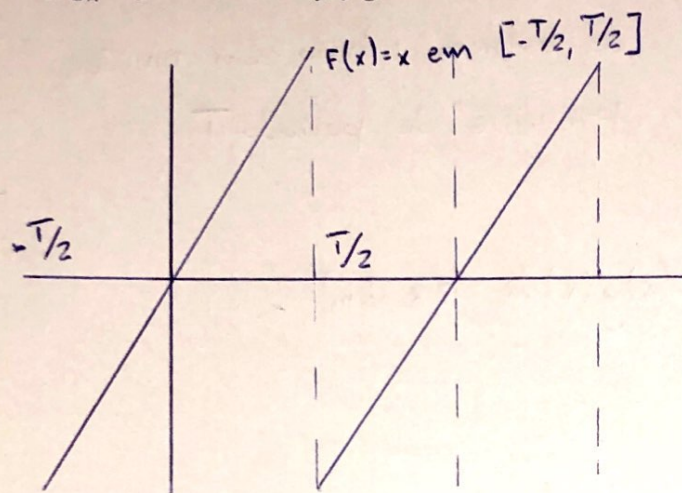
$$= 0,839184 x^2 + 0,851125 x + 1,01299$$

Análise Harmônica (ou MMC para funções periódicas)

• $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período $T > 0$, se $\forall x \in \mathbb{R}$ vale $f(x+T) = f(x)$

exemplos: $f(x) = \sin x, \cos x, \tan x \dots$

• note: se f é periódica de período T , então f é periódica de período nT , qualquer que seja o inteiro $n > 0$



Podemos FALAR do período mínimo de uma função periódica f : é o menor número $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x) \forall x$

• Dado $n \in \mathbb{Z}$, as funções $\sin nx, \cos nx$ são todas periódicas de período 2π

A) $f(x) = \sin nx$

$$f(x + 2\pi) = \sin [n(x + 2\pi)] = \sin (nx + 2n\pi) = \sin nx = f(x)$$

$f(x) = \sin nx$ é periódica de período $\frac{2\pi}{n}$

$$\Rightarrow f\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) = \sin \left[n\left(x + \frac{2\pi}{n}\right)\right] = \sin (nx + 2\pi) = \sin nx = f(x)$$

Exercício: $\frac{2\pi}{n}$ é o período mínimo de $\sin nx$

• Em geral, se $g(x)$ é periódica de período $T > 0$ e se $c > 0$, então $f(x) = g(cx)$ é periódica de período $\frac{T}{c}$

$$f\left(x + \frac{T}{c}\right) = g\left(c\left(x + \frac{T}{c}\right)\right) = g(cx + T) = g(cx) = f(x)$$

• VAMOS FAZER MMQ em subespaços gerados por funções do conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots\}$

• FAÇA A ANÁLISE harmônica de uma função dada $f(x)$ até o 3º harmônico, isto é, projete a função $f(x)$ no espaço gerado pelo conjunto $\{1, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \cos x, \cos 2x, \cos 3x\}$

- produto interno: $\langle f, g \rangle = \int_0^T f(x)g(x)dx$, se estamos lidando com funções periódicas de período T
(em geral)

$$\bullet \langle f, g \rangle = \int_0^T f(x)g(x)dx = \int_k^{T+k} f(x)g(x)dx \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(x)g(x)dx$$

$$\bullet \text{ Neste caso, } \langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

Exemplo

1) FAÇA A ANÁLISE harmônica de $f(x) = e^x$ em $[-\pi, \pi]$ até o 1º harmônico

observação

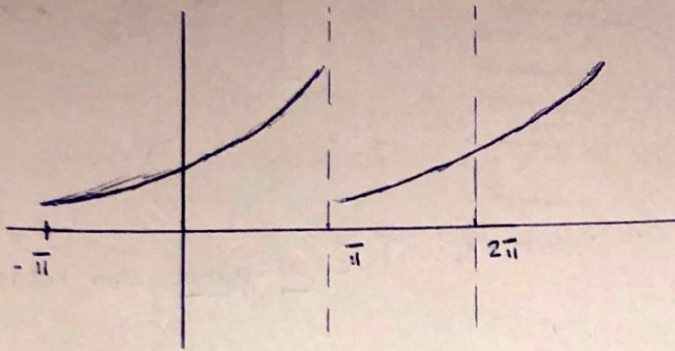
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + (\dots)$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + (\dots) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + (\dots) = \cos x$$

$$\bullet i = \sqrt{-1}; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = -\sqrt{-1}; \quad i^4 = 1$$

$$ix - \frac{i^3 x^3}{3!} + \frac{i^5 x^5}{5!} - \frac{i^7 x^7}{7!} + (\dots) = i \sin x$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$



$f(x) = e^x$ para $x \in [-\pi, \pi]$ tornada
periódica de período 2π

- Projetar $f(x) = e^x$ no espaço gerado por $\{1, \sin x, \cos x\}$ usando o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$

$$\begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, \cos x \rangle & \langle 1, \sin x \rangle \\ \langle \cos x, 1 \rangle & \langle \cos x, \cos x \rangle & \langle \cos x, \sin x \rangle \\ \langle \sin x, 1 \rangle & \langle \sin x, \cos x \rangle & \langle \sin x, \sin x \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1, f \rangle \\ \langle \cos x, f \rangle \\ \langle \sin x, f \rangle \end{bmatrix}$$

$$\langle \cos nx, \sin mx \rangle = 0, \text{ desde que } m \neq 0$$

$$\langle \cos nx, \cos mx \rangle = 0, \text{ se } m \neq n$$

$$\langle \sin nx, \sin mx \rangle = 0, \text{ se } m \neq n$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx &= -\frac{\cos mx}{m} \cdot \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mx}{m} \cdot n \cos nx dx \\ &= \frac{n}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx \end{aligned}$$

$$\frac{n}{m} \left[\left(\frac{\sin mx}{m} \cdot \cos nx \right) \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin mx}{m} \cdot n \sin nx \, dx \Bigg] = \frac{n^2}{m^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx$$

• Portanto, o conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots\}$ é ortogonal em relação ao produto interno $\int_{-\pi}^{\pi} \cdot \cdot \, dx$

$$1) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x + \cos^2 x \, dx = 2\pi$$

$$2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx = \pi$$

$$3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx + \cos^2 nx \, dx = 2\pi$$

$$4) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi$$

De volta ao exemplo...

• projetar $f(x)$ no espaço gerado por $\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots\}$,

• segundo o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx$:

$$g(x) = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 + \frac{\langle f, \cos x \rangle}{\langle \cos x, \cos x \rangle} \cos x + \frac{\langle f, \cos 2x \rangle}{\langle \cos 2x, \cos 2x \rangle} \cos 2x + (\dots) +$$

$$+ \frac{\langle F, \cos nx \rangle}{\langle \cos nx, \cos nx \rangle} \cos nx + \frac{\langle F, \sin x \rangle}{\langle \sin x, \sin x \rangle} \sin x + (\dots) + \frac{\langle F, \sin nx \rangle}{\langle \sin nx, \sin nx \rangle} \sin nx =$$

$$g(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + (\dots) + A_n \cos nx + b_1 \sin x + (\dots) + b_n \sin nx$$

$$\circ A_0 = \frac{\langle F, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx$$

$$\circ A_k = \frac{\langle F, \cos kx \rangle}{\langle \cos kx, \cos kx \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx dx$$

$$\circ b_k = \frac{\langle F, \sin kx \rangle}{\langle \sin kx, \sin kx \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin kx dx$$

De volta ao exemplo...

$F(x) = e^x$ em $[-\pi, \pi]$ periódica de período 2π . Projeção em ger $\{1, \cos x, \sin x\}$

$$g(x) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx \right) 1 + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx \right) \cos x + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x dx \right) \sin x$$

$$= \frac{23,297}{2\pi} + \frac{(-11,549)}{\pi} \cos x + \frac{11,549}{\pi} \sin x$$

Exercício: Qual a melhor aproximação para $F(x) = e^x$: esta ou uma por um polinômio quadrático?

(calcular $h(x) = \text{projeção em } \{1, x, x^2\}$ com p.i. $\langle F, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) g(x) dx$

e comparar $\|F - g\|^2$ e $\|F - h\|^2$

Análise Harmônica

° Projeção Ortogonal de funções periódicas de período 2π em subespaços finitos de $\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots\}$, segundo o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

° Dada f periódica de período 2π , sua análise harmônica até o n -ésimo harmônicos é

$$g(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + (\dots) + A_n \cos nx \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + (\dots) + b_n \sin nx$$

$$\text{onde } A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned} \right\} n \geq 1$$

Exemplo

$$1) f(x) = \begin{cases} +1, & x \in [0, \pi] \\ -1, & x \in [-\pi, 0] \end{cases} \quad \text{periódica de período } 2\pi$$

° Temos que calcular os coeficientes A_n, b_n

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-\cos x) dx + \int_0^{\pi} \cos x dx \right) = 0$$

• Como f é ímpar, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0 \Rightarrow A_n = 0$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\
 &\quad \begin{array}{c} \nearrow \text{ímpar} \quad \nearrow \text{ímpar} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{par}} \end{array} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\cos nx}{n} \right)_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} (\cos 0 - \cos n\pi) \\
 &= \frac{2}{n\pi} \left(1 - \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ par} \\ -1, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases} \right) \\
 &= \frac{2}{n\pi} \begin{cases} 2, & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ par} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ par} \end{cases}
 \end{aligned}$$

• Até o 5º harmônico

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x \right)$$

Outros períodos?

• Se f é periódica de período T , queremos projetar f em um espaço de funções periódicas de período T . Para isso, usaremos funções $\left\{ 1, \cos \frac{2\pi x}{T}, \cos \frac{4\pi x}{T}, \cos \frac{6\pi x}{T}, \cos \frac{8\pi x}{T}, \dots, \sin \frac{2\pi x}{T}, \sin \frac{4\pi x}{T}, \sin \frac{6\pi x}{T}, \sin \frac{8\pi x}{T}, \dots \right\}$

Aula passada: se $f(x)$ é periódica de período T , então $g(x) = f(cx)$ é periódica de período $\frac{T}{c}$

• Neste caso, o produto interno é $\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)g(x)dx = \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)g(x)dx$

Cadeias de Markov

- Processo que evolui em tempo discreto
- Com número finito de estados
- De forma que o estado seguinte depende apenas do estado atual

exemplo

1) Uma locadora de carros por dia tem 3 lojas.

Estados: número de carros em cada loja

Carros podem ser retirados e devolvidos $\left\{ \begin{array}{l} \text{de} \\ \text{para toda as três lojas} \end{array} \right.$

Observa-se (experimentalmente):

(loja 1) 80% dos carros da loja | voltam à loja 1

10% " " " " vão para cada uma das outras

(loja 2) 20% voltam

50% vão para loja 1

30% " " loja 3

(loja 3) ~~20%~~ 20% voltam

20% vão para loja 1

60% " " loja 2

• Colocamos estas informações numa matriz

para onde vão 1 2 3 ← onde estão

$$\begin{matrix} \downarrow \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Matriz de
Probabilidade ou
Estocástica

• Em geral, uma matriz $P = [p_{ij}]_{n \times n}$ é estocástica $p_{ij} \geq 0$ representam a probabilidade de passar do estado j para o estado i em uma unidade de tempo

Observação: $\sum_i p_{ij} = 1$ para cada j

Vetor de Probabilidade

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x_i \geq 0 \\ \sum x_i = 1 \end{matrix}$$

• Se $\begin{cases} 30\% \text{ esta na loja 1} \\ 30\% \text{ " " " 2} \\ 40\% \text{ " " " 3} \end{cases}$

$$X = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

• No dia seguinte, como serão estas proporções?

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} = 0.3 \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} + 0.3 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} + 0.4 \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.24 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.06 \\ 0.09 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.24 \\ 0.08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.47 \\ 0.33 \\ 0.20 \end{bmatrix} \quad (3 \text{ dias})$$

As proporções de carros nas lojas 1, 2, 3 após n dias é:

$$x, P x, P(P x) = P^2 x, P(P^2 x) = P^3 x, \dots, P^n x$$

Se P é diagonalizável, isto é, existe $S_{n \times n}$ inversível e uma matriz diagonal

$\Lambda_{n \times n}$, tal que

$$P S = S \Lambda$$

$$S^{-1} P S = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P = S \Lambda S^{-1}$$

$$P^n = (\cancel{S} \Lambda \cancel{S^{-1}}) (\cancel{S} \Lambda \cancel{S^{-1}}) (\dots) (\cancel{S} \Lambda \cancel{S^{-1}})$$

$$= S \Lambda^n S^{-1} = S \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \lambda_2^n & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

Depois de k ($\pm$) iterações

$$P_{x}^{10(\pm)} = \begin{bmatrix} 0.647 \\ 0.197 \\ 0.156 \end{bmatrix}$$

Uma matriz estocástica P é irreduzível e aperiódica se existe $k \geq 1$, tal que $P^k > 0$

$$S = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix}$$

$$P S = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ P v_1 & P v_2 & \dots & P v_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix}$$

$$S \Lambda = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$S\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_n v_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet P S = S \Lambda \Leftrightarrow \begin{cases} P v_1 = \lambda_1 v_1 \\ P v_2 = \lambda_2 v_2 \\ \vdots \\ P v_n = \lambda_n v_n \end{cases}$$

• P é uma matriz ~~probabilística~~ diagonalizável e suponha que $|\lambda_1| > |\lambda_i|$
 $\forall i = 2, 3, \dots, n$

$$\frac{1}{\lambda_1^k} P^k = \frac{1}{\lambda_1^k} (S \Lambda^k S^{-1})$$

$$= S \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \lambda_2^k / \lambda_1^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k / \lambda_1^k \end{bmatrix} S^{-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 0 & \ddots \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 0 & \ddots \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} S^{-1}$$