

# Aula 17 – Incerteza e Risco

Piracicaba, Novembro de 2019  
Professora Dra. Andréia Adami

# Estatística Matemática

## ▪ Definições

- Variável aleatória: é a variável que pode assumir diferentes valores no domínio da função densidade de probabilidade;
- Função Densidade de Probabilidade: é a função  $f(x)$  que associa, a cada possível valor  $x_i$  da variável aleatória  $X$ , sua respectiva probabilidade de ocorrência;

# Estatística Matemática

## ▪ Definições

- Valor esperado: o valor esperado da variável aleatória  $X$  –  $E(X)$ , é a média da distribuição.

✓ Se a variável aleatória é discreta:  $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P[X = x_i]$

✓ Se a variável aleatória é contínua:  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

# Estatística Matemática

- Definições

- Variância e desvio padrão: medidas que informam acerca da dispersão dos valores da variável aleatória  $X$  em relação ao seu valor esperado,

- ✓ Se a variável aleatória é discreta: 
$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \sigma_X^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 f(x_i)\end{aligned}$$

# Estatística Matemática

- Definições

- Variância e desvio padrão: medidas que informam acerca da dispersão dos valores da variável aleatória em relação ao valor esperado da variável aleatória  $X$ ,

✓ Se a variável aleatória é contínua:

$$\mathit{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_i - E(X)]^2 f(X) dx$$

# Estatística Matemática

- Definições
- Variância e desvio padrão: medidas que informam acerca da dispersão dos valores da variável aleatória em relação ao valor esperado da variável aleatória  $X$ ,

✓ Se a variável aleatória é contínua:

$$\mathit{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_i - E(X)]^2 f(X) dx$$

✓ O Desvio padrão:  $\sqrt{\sigma_X^2}$

# Valor esperado e jogos justos

- Valor Esperado: Seja uma loteria  $X$  com prêmios  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , e probabilidades associadas  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ . O valor esperado da loteria será:

$$VE(X) = x_1 \pi_1 + x_2 \pi_2 + \dots + x_n \pi_n$$

$$\checkmark E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \pi_i$$

- Jogo Justo:  $VE = 0$ , ou preço para jogar igual ao VE.

# Valor esperado e jogos justos

- Exemplo 1: jogue uma moeda com seu amigo valendo um Real - R\$1,00, se der cara você ganha \$1 e se der coroa você perde \$1:

# Valor esperado e jogos justos

- Exemplo 1: jogue uma moeda com seu amigo valendo um Real - R\$1,00, se der cara você ganha \$1 e se der coroa você perde \$1:

$$\text{Valor esperado do jogo: } VE = 0,5 * (+1) + 0,5 * (-1) = 0$$

# Valor esperado e jogos justos

- Exemplo 1: jogue uma moeda com seu amigo valendo um Real - R\$1,00, se der cara você ganha \$1 e se der coroa você perde \$1:

$$\text{Valor esperado do jogo: } VE = 0,5 * (+1) + 0,5 * (-1) = 0$$

- Exemplo 2: jogue uma moeda com seu amigo se der cara você ganha \$10 e se der coroa você perde \$1:

# Valor esperado e jogos justos

- Exemplo 1: jogue uma moeda com seu amigo valendo um Real - R\$1,00, se der cara você ganha \$1 e se der coroa você perde \$1:

$$\text{Valor esperado do jogo: } VE = 0,5 * (+1) + 0,5 * (-1) = 0$$

- Exemplo 2: jogue uma moeda com seu amigo se der cara você ganha \$10 e se der coroa você perde \$1:

$$\text{Valor esperado do jogo: } VE = 0,5 * (+10) + 0,5 * (-1) = 4,5$$

# Paradoxo de São Petersburgo

- **Paradoxo de St. Petersburg:** uma moeda é lançada até aparecer cara. Se a primeira cara aparece no *n-ésimo* lançamento o jogador ganha  $\$2^n$ .
- ✓  $x_1 = , x_2 = , x_3 = , \dots, x_n =$

# Paradoxo de São Petersburgo

- **Paradoxo de St. Petersburg:** uma moeda é lançada até aparecer cara. Se a primeira cara aparece no *n-ésimo* lançamento o jogador ganha  $\$2^n$ .
- ✓  $x_1 = \$2, x_2 = \$4, x_3 = \$8, \dots, x_n = \$2^n$

# Paradoxo de São Petersburgo

- **Paradoxo de St. Petersburg:** uma moeda é lançada até aparecer cara. Se a primeira cara aparece no *n-ésimo* lançamento o jogador ganha  $\$2^n$ .
- ✓  $x_1 = \$2, x_2 = \$4, x_3 = \$8, \dots, x_n = \$2^n$
- A probabilidade de sair cara no *n-ésimo* lançamento é:
  - ✓  $\pi_1 = \frac{1}{2}, \pi_2 = \frac{1}{4}, \dots, \pi_n = \frac{1}{2^n}$

# Paradoxo de São Petersburgo

- **Paradoxo de St. Petersburg:** uma moeda é lançada até aparecer cara. Se a primeira cara aparece no *n-ésimo* lançamento o jogador ganha  $\$2^n$ .
- ✓  $x_1 = \$2, x_2 = \$4, x_3 = \$8, \dots, x_n = \$2^n$
- A probabilidade de sair cara no *n-ésimo* lançamento é:
- ✓  $\pi_1 = 1/2, \pi_2 = 1/4, \dots, \pi_n = 1/2^n$
- Valor Esperado:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots = \infty$$

# Paradoxo de São Petersburgo

- Solução de Bernoulli: os indivíduos não se importam diretamente com o valor do prêmio, mas com a utilidade que obtém da riqueza.

# Paradoxo de São Petersburgo

- Solução de Bernoulli: os indivíduos não se importam diretamente com o valor do prêmio, mas com a utilidade que obtém da riqueza.
- ✓ Considerando que a utilidade marginal da riqueza é normalmente decrescente, o paradoxo de St. Petersburgo converge para um valor finito de utilidade esperada.

# Paradoxo de São Petersburgo

- Solução de Bernoulli: os indivíduos não se importam diretamente com o valor do prêmio, mas com a utilidade que obtém da riqueza.
- ✓ Considerando que a utilidade marginal da riqueza é normalmente decrescente, o paradoxo de St. Petersburgo converge para um valor finito de utilidade esperada.
- ✓ A utilidade esperada é relevante para a definição do valor que o indivíduo está disposto a pagar pelo jogo.

# Utilidade Esperada

- Utilidade Esperada:

$$EU(X) = \sum_{i=1}^n \pi_i U(x_i)$$

# Utilidade Esperada

- Exemplo 7.1
- Suponha que a utilidade de cada prêmio no paradoxo de São Petersburgo seja dada por:  $U(x_i) = \ln x_i$

# Utilidade Esperada

- Exemplo 7.1
- Suponha que a utilidade de cada prêmio no paradoxo de São Petersburgo seja dada por:  $U(x_i) = \ln x_i$
- A função Utilidade logarítmica exibe utilidade marginal decrescente:

# Utilidade Esperada

- Exemplo 7.1
- Suponha que a utilidade de cada prêmio no paradoxo de São Petersburgo seja dada por:  $U(x_i) = \ln x_i$
- A função Utilidade logarítmica exibe utilidade marginal decrescente:  $(U' > 0 \text{ e } U'' < 0)$ ,
- ✓ Utilidade esperada =  $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i U(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \ln(2^i) =$

# Utilidade Esperada

- Exemplo 7.1
- Suponha que a utilidade de cada prêmio no paradoxo de São Petersburgo seja dada por:  $U(x_i) = \ln x_i$
- A função Utilidade logarítmica exibe utilidade marginal decrescente:  $(U' > 0 \text{ e } U'' < 0)$ ,
- ✓ Utilidade esperada =  $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i U(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \ln(2^i) = 1,39$

# Utilidade Esperada

- Exemplo 7.1
- A solução de Bernoulli para o paradoxo de São Petersburgo, não resolve completamente o problema, enquanto não houver limite superior para a função de utilidade, o paradoxo pode ser regenerado redefinindo os prêmios do jogo.
- ✓ Considerando a função:  $U(x_i) = \ln[e^{2^i}] = 2^i$  e prêmio  $x_i = e^{2^i}$
- ✓ Lançando a moeda uma quinta vez, o indivíduo poderia ganhar  $e^{2^5} = \$79 \text{ trilhões}$  com probabilidade  $\frac{1}{2^5} = 0,031$ . A ideia de que um indivíduo pagaria trilhões para jogar parece improvável, o que mantém os jogos de São Petersburgo como paradoxo.

# Teorema de von Neumann-Morgenstern

- John von Neumann e Oscar Morgenstern no trabalho intitulado: *The theory of games and Economic Behavior* (1944), desenvolveram os fundamentos matemáticos para a solução do Paradoxo de São Petersburgo de Bernoulli incorporando os axiomas básicos da racionalidade econômica.

# Teorema de von Neumann-Morgenstern

- John von Neumann e Oscar Morgenstern no trabalho intitulado: *The theory of games and Economic Behavior* (1944), desenvolveram os fundamentos matemáticos para a solução do Paradoxo de São Petersburgo de Bernoulli incorporando os axiomas básicos da racionalidade econômica.
- ✓ Mostraram que um indivíduo racional faz escolhas sob incerteza de modo a maximizar o valor esperado da função Utilidade da riqueza ( $W$ ) -  $U(W)$  e não o valor esperado do *pay-off*.

# Teorema de von Neumann-Morgenstern

- Suponha que existam  $n$  prêmios que o indivíduo pode ganhar em uma loteria, denotados por  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , ordenados de forma crescente. Então, se o indivíduo prefere  $x_n$  a  $x_1$ , podemos considerar o índice de Utilidade como:  $U(x_1) = 0$  e  $U(x_n) = 1$ .

# Teorema de von Neumann-Morgenstern

- Suponha que existam  $n$  prêmios que o indivíduo pode ganhar em uma loteria, denotados por  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , ordenados de forma crescente. Então, se o indivíduo prefere  $x_n$  a  $x_1$ , podemos considerar o índice de Utilidade como:  $U(x_1) = 0$  e  $U(x_n) = 1$ .
- Experimento: peça ao seu colega para declarar a probabilidade  $\pi_i$  que o deixaria indiferente entre  $x_i$  com certeza e uma loteria com prêmio  $x_n$  e probabilidade  $\pi_i$  ou  $x_1$  com probabilidade  $(1-\pi_i)$ .

# Teorema de von Neumann-Morgenstern

- A técnica de von Neumann-Morgenstern, define a utilidade de  $x_i$ , como a utilidade esperada em relação ao resultado que o indivíduo considera igualmente desejável.

$$U(x_i) = \pi_i \cdot U(x_n) + (1 - \pi_i) \cdot U(x_1)$$

- Considerando  $U(x_n) = 1$  and  $U(x_1) = 0$

# Teorema de von Neumann-Morgenstern

- A técnica de von Neumann-Morgenstern, define a utilidade de  $x_i$ , como a utilidade esperada em relação ao resultado que o indivíduo considera igualmente desejável.

$$U(x_i) = \pi_i \cdot U(x_n) + (1 - \pi_i) \cdot U(x_1)$$

- Considerando  $U(x_n) = 1$  and  $U(x_1) = 0$

$$U(x_i) = \pi_i \cdot 1 + (1 - \pi_i) \cdot 0 = \pi_i$$

# Maximização da Utilidade Esperada

- Considere 2 jogos, o primeiro – A, com prêmio  $x_2$  e probabilidade  $a$  e o segundo com prêmio  $x_3$  e probabilidade  $(1-a)$

$$\textit{Utilidade Esperada (A)} = a \cdot U(x_2) + (1-a) \cdot U(x_3)$$

- O segundo – B, com prêmio  $x_4$  e probabilidade  $b$  e o segundo com prêmio  $x_5$  e probabilidade  $(1-b)$

$$\textit{Utilidade Esperada (B)} = b \cdot U(x_4) + (1-b) \cdot U(x_5)$$

✓ Qual jogo o indivíduo irá escolher?

# Maximização da Utilidade Esperada

- Considere 2 jogos, o primeiro – A, com prêmio  $x_2$  e probabilidade  $a$  e o segundo com prêmio  $x_3$  e probabilidade  $(1-a)$

$$\text{Utilidade Esperada (A)} = a \cdot U(x_2) + (1-a) \cdot U(x_3)$$

- O segundo – B, com prêmio  $x_4$  e probabilidade  $b$  e o segundo com prêmio  $x_5$  e probabilidade  $(1-b)$

$$\text{Utilidade Esperada (B)} = b \cdot U(x_4) + (1-b) \cdot U(x_5)$$

- ✓ O indivíduo escolherá A apenas se sua Utilidade Esperada superar a de B.

# Maximização da Utilidade Esperada

- Substituindo  $U(x_i)$  por  $\pi_i$ :

$$\text{Utilidade Esperada (A)} = a \cdot \pi_2 + (1-a) \cdot \pi_3$$

$$\text{Utilidade Esperada (2)} = b \cdot \pi_4 + (1-b) \cdot \pi_5$$

- ✓ O indivíduo escolherá A se e apenas se:

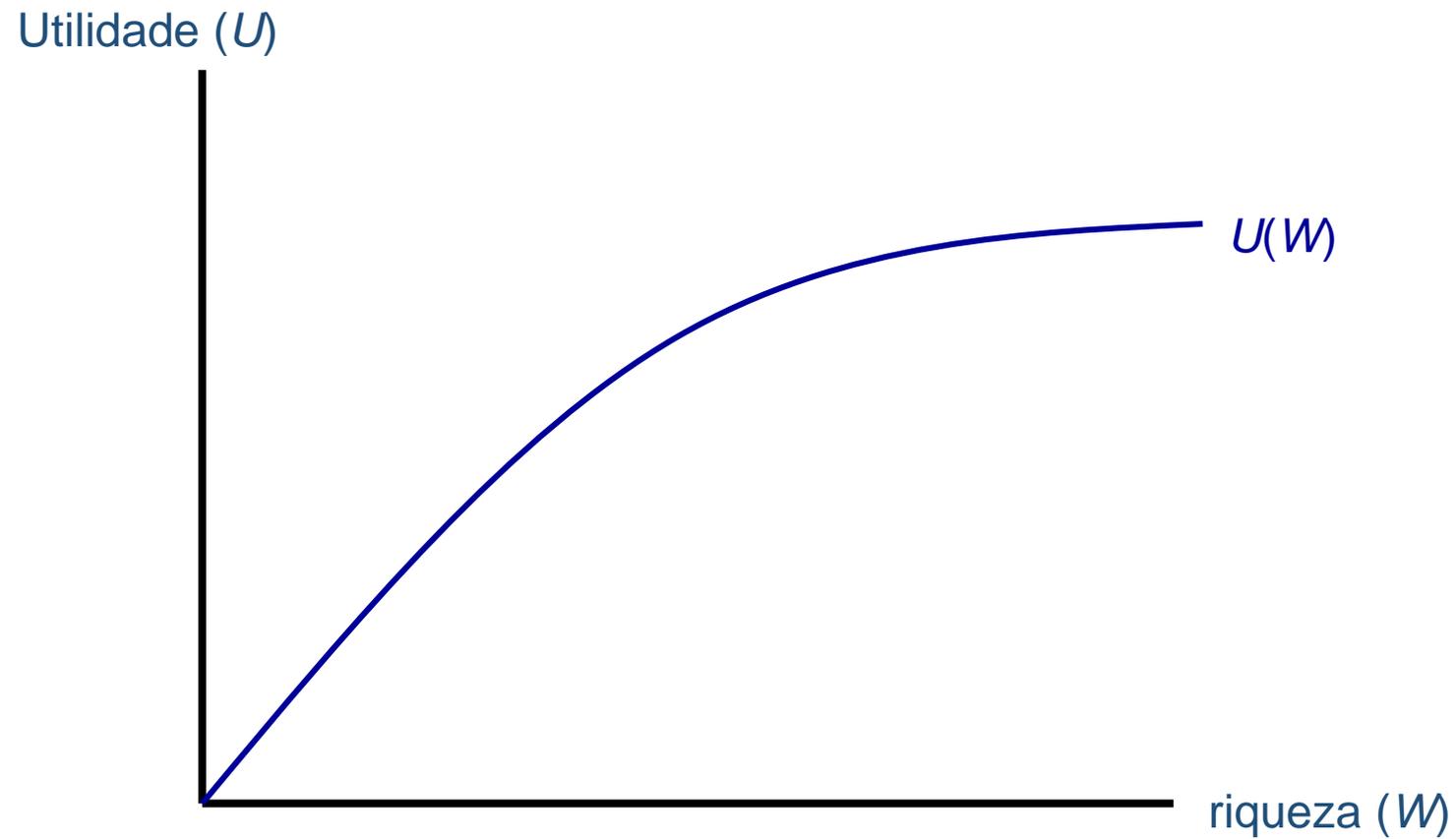
$$a \cdot \pi_2 + (1-a) \cdot \pi_3 > b \cdot \pi_4 + (1-b) \cdot \pi_5$$

- ✓ R.: o indivíduo escolherá a opção que oferecer o maior nível de esperado de utilidade, ou aquele que maximiza o valor esperado da função utilidade de von Neumann-Morgenstern.

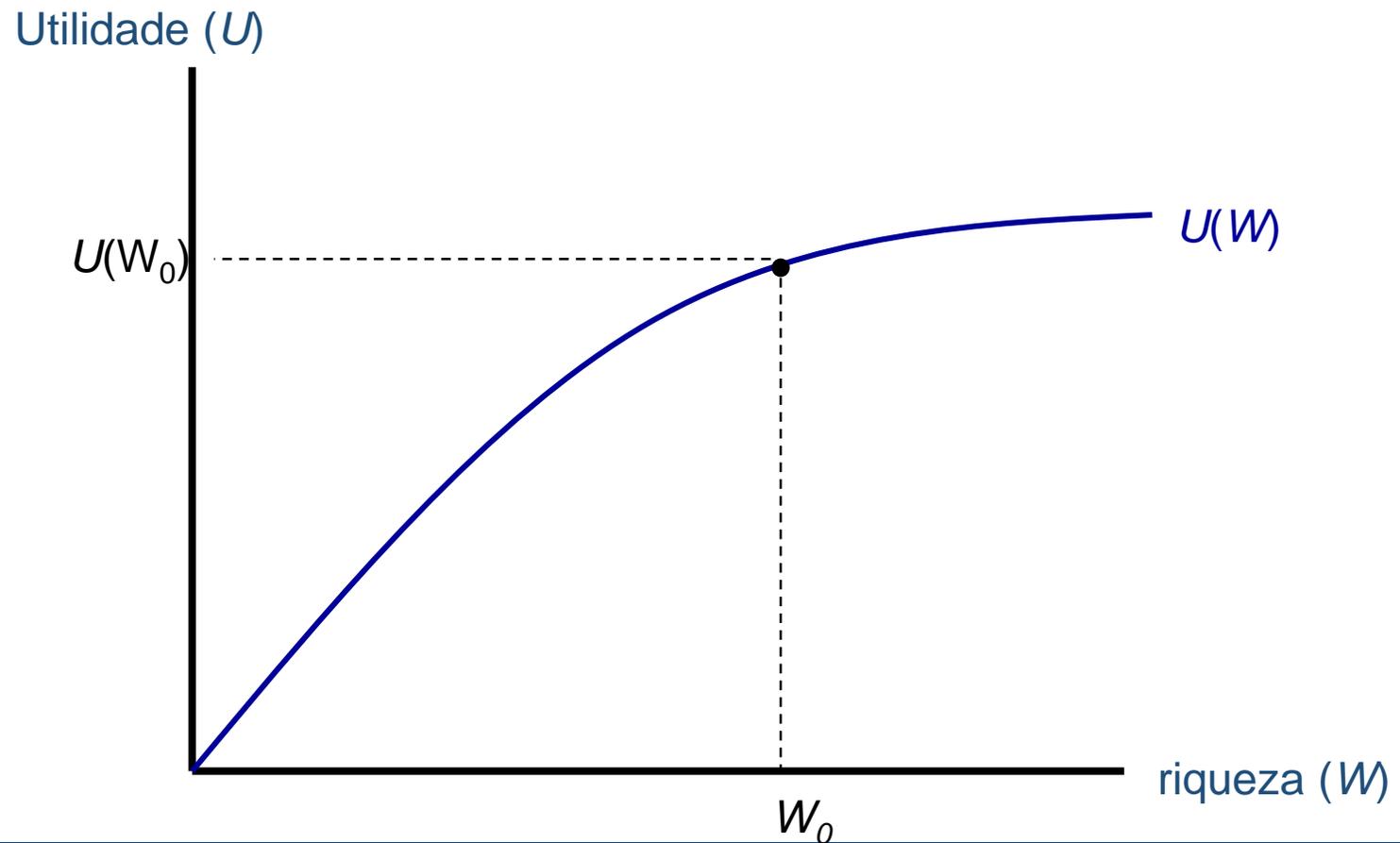
# Aversão ao Risco e Seguro

- Poucas pessoas optariam por fazer uma aposta de \$10.000 se o resultado fosse 0, em média.
- Isso porque, o valor monetário do prêmio não reflete a Utilidade do prêmio.
- A Utilidade que a pessoa obtém de um aumento no valor do prêmio aumenta menos rapidamente que o valor monetário (riqueza) desse prêmio.
- Assim, uma aposta justa em termos monetários, pode não ser justa em termos de Utilidade, pois a utilidade marginal de \$1 extra é decrescente.

# Aversão ao Risco



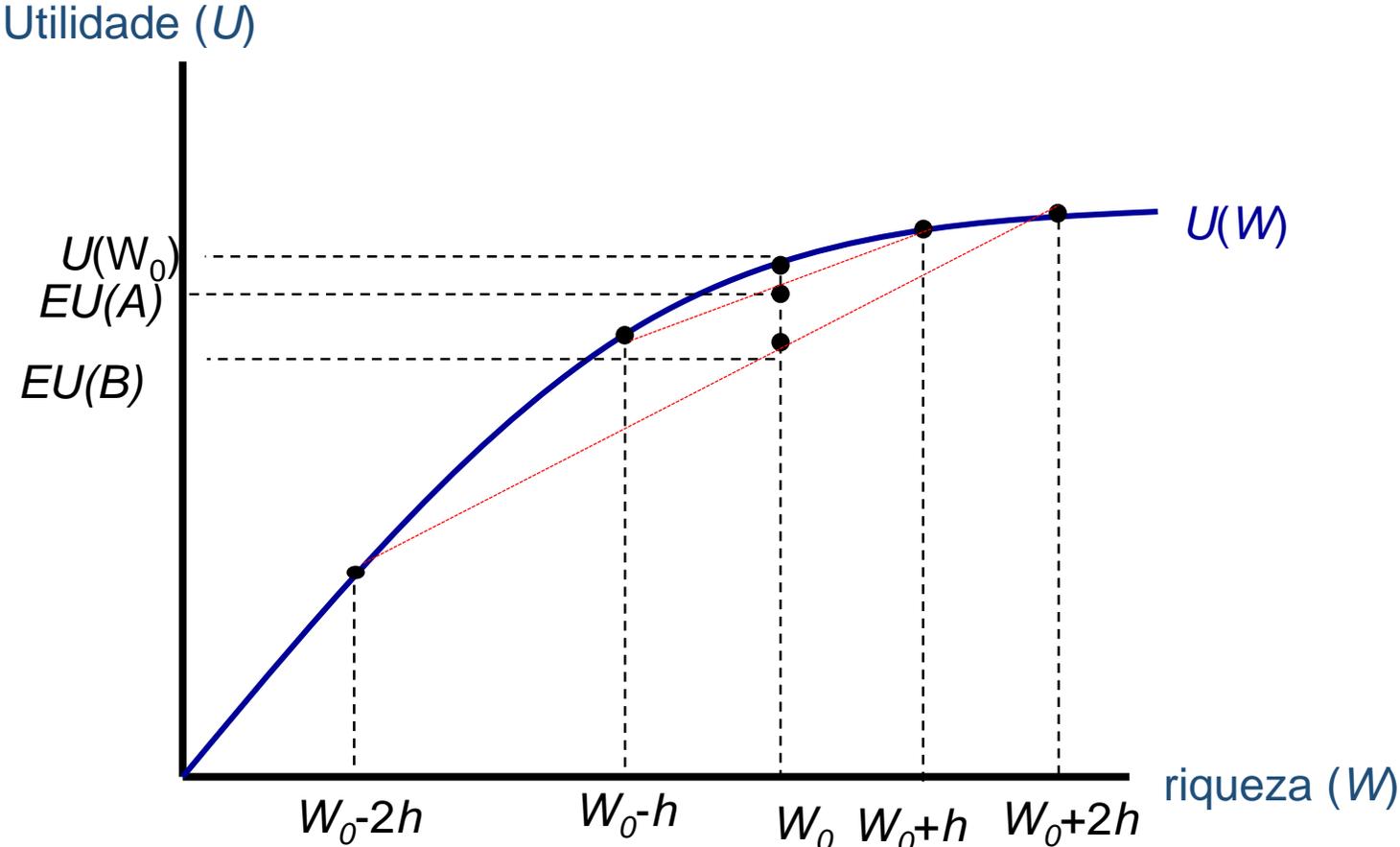
# Aversão ao Risco



# Aversão ao Risco

- ✓ Utilidade esperada da aposta A -  $EU(A) = \frac{1}{2} U(W_0+h) + \frac{1}{2} U(W_0-h)$
- ✓ Utilidade esperada da aposta B -  $EU(B) = \frac{1}{2} U(W_0+2h) + \frac{1}{2} U(W_0-2h)$

# Aversão ao Risco



# Aversão ao Risco

- ✓ Utilidade esperada da aposta A -  $EU(A) = \frac{1}{2} U(W_0+h) + \frac{1}{2} U(W_0-h)$
- ✓ Utilidade esperada da aposta B -  $EU(B) = \frac{1}{2} U(W_0+2h) + \frac{1}{2} U(W_0-2h)$
- ✓ Aposta B tem resultado mais favorável em termos de valor do prêmio, mais ambas as apostas fornecem utilidade esperada igual a  $W_0$ , e,
- ✓ Além disso,  $U(W_0) > EU(A) > EU(B)$ , assim o indivíduo preferirá manter a riqueza atual.



# Aversão ao risco e seguro

- Quanto um indivíduo está disposto a pagar para evitar uma aposta?
- No Gráfico,  $CE_A$  é o equivalente certeza, note que a uma certa riqueza  $CE_A$ , o indivíduo obtém a mesma utilidade esperada que obteria participando da aposta A.
- O indivíduo estaria disposto a pagar  $W_0 - CE_A$  para evitar a participar da aposta.
- Isso explica porque as pessoas contratam seguro, porque estão dispostas a pagar uma pequena quantidade (prêmio de risco) para evitar situações de risco.

# Medidas de aversão ao risco

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

- $r(W)$  é a medida mais conhecida de aversão ao risco - Coeficiente Absoluto de Aversão ao Risco (Pratt ou Arrow-Pratt)
- ✓ Como  $U''(W) < 0$ , essa medida é sempre positiva.
- ✓ Quanto maior  $r(W)$ , maior a aversão ao risco

# Medidas de aversão ao risco

- Se a Função Utilidade é quadrática:  $U(W) = a + bW + cW^2$ , onde  $b > 0$  e  $c < 0$ ,

✓ A medida de aversão ao risco de Pratt será:

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{-2c}{b + 2cW}$$

✓ A aversão ao risco cresce com a riqueza

# Medidas de aversão ao risco

- Se a Função Utilidade é logarítmica:  $U(W) = \ln(W)$  e  $W > 0$ ,

✓ A medida de aversão ao risco de Pratt será:

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{1}{W}$$

✓ A aversão ao risco decresce com a riqueza

# Medidas de aversão ao risco

• Se a Função Utilidade é exponencial:  $U(W) = -e^{-AW} = -\exp(-AW)$ , onde  $A$  é uma constante positiva,

✓ A medida de aversão ao risco de Pratt será:

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{A^2 e^{-AW}}{A e^{-AW}} = A$$

✓ A aversão ao risco é constante

# Medidas de aversão ao risco

- Aversão ao risco e riqueza
- Coeficiente de aversão ao risco Relativo

$$rr(W) = W \frac{U''(W)}{U'(W)}$$

# Aversão ao risco e seguro

- Exemplo 7.2
- Suponha que determinado indivíduo tenha uma riqueza de R\$ 100.000 dentre os quais um carro de R\$ 20.000. Sua função utilidade é dada por  $U = \ln(W)$ , onde  $W$  é sua riqueza. Este carro possui uma probabilidade de 25% de ser roubado. Calcule:
- **Riqueza esperada sem seguro**
- **Utilidade esperada sem seguro.**
- **Valor do seguro justo**
- **Utilidade esperada com seguro justo**
- **Preço máximo que este indivíduo está disposto a pagar pelo seguro**

# Referências Bibliográficas

- **NICHOLSON, W; SNYDER, C. Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions.** 11th Edition (International Edition), 2012  
– cap. 7