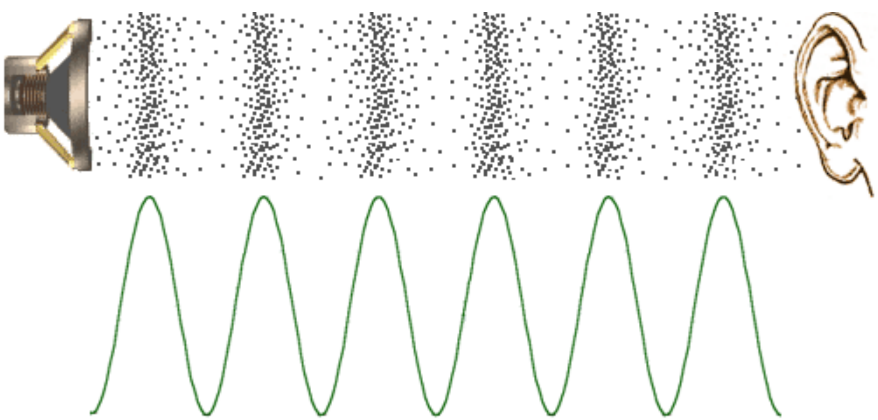
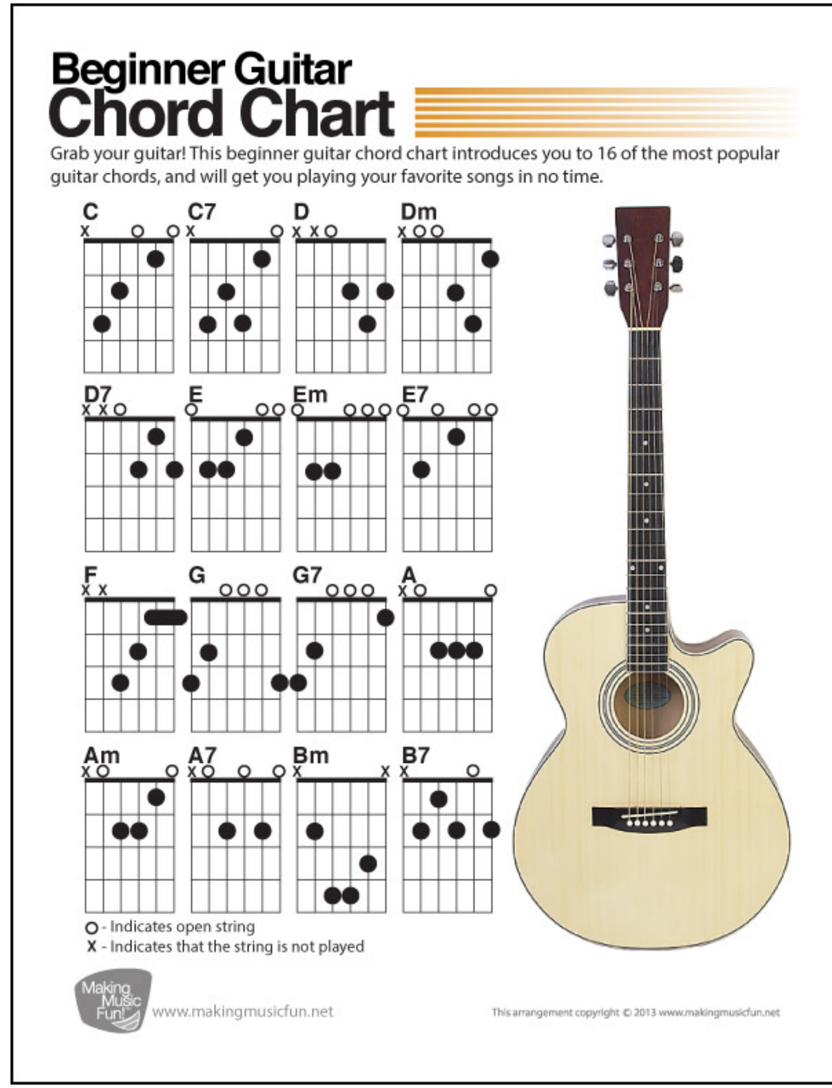
MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2019

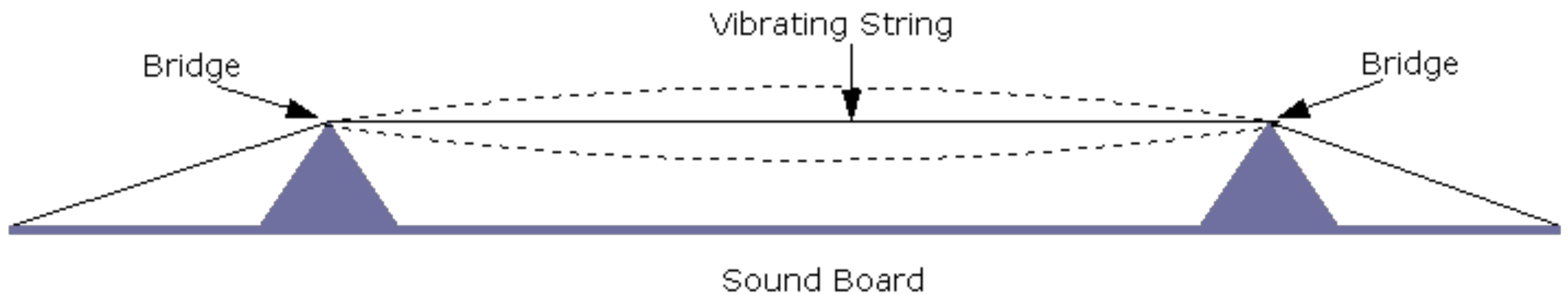
Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br

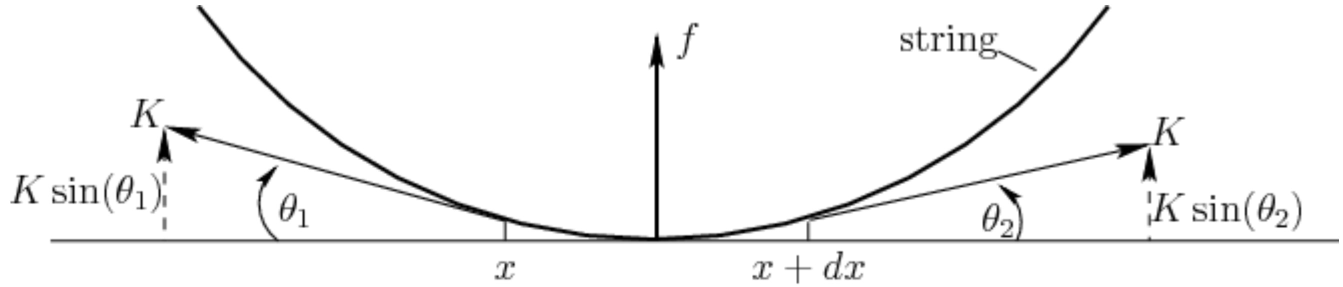



Beginner Guitar
Chord Chart
Grab your guitar! This beginner guitar chord chart introduces you to 16 of the most popular guitar chords, and will get you playing your favorite songs in no time.
C
C7
D
Dm
D7
E
Em
E7
F
G
G7
A
Am
A7
Bm
B7
O - Indicates open string
X - Indicates that the string is not played
Making Music Fun!
www.makingmusicfun.net
This arrangement copyright © 2013 www.makingmusicfun.net


string instruments
bow
strings
chin rest
violin
viola
cello
double bass
harp


Vibrating String
Bridge
Bridge
Sound Board

Considerando um trecho da corda de comprimento dx



Force diagram for length dx string element

A força vertical (f) é igual a componente da tensão da corda (K) na direção vertical.

$$
\begin{aligned}
f(x+dx/2) &= K\sin(\theta_1) + K\sin(\theta_2) \\
&\approx K\left[\tan(\theta_1) + \tan(\theta_2)\right] \\
&= K\left[-y'(x) + y'(x+dx)\right] \\
&\approx K\left[-y'(x) + y'(x) + y''(x)dx\right] \\
&= Ky''(x)dx
\end{aligned}
$$

A força vertical (f) é igual ao produto da massa do trecho pela aceleração vertical.

$$Ky''(t,x)dx = (\epsilon\, dx)\ddot{y}(t,x)$$

densidade linear de massa da corda

O que resulta na EDP:

$$\boxed{Ky''(t,x) = \epsilon\ddot{y}(t,x)}$$

https://ccrma.stanford.edu/realsimple/SimpleStrings/String_Wave_Equation_Derivation.html

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução (Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

4 Equação da Onda Unidimensional . . . **330**
4.1 Corda Elástica Presa nas Extremidades . . . 330
4.1.1 Com Velocidade Inicial Nula . . . 331
4.1.2 Com Deslocamento Inicial Nulo . . . 345
4.1.3 Caso Geral . . . 354
Exercícios . . . 360
4.2 Corda Elástica Solta em uma Extremidade . . . 363
4.2.1 Com Velocidade Inicial Nula . . . 364
4.2.2 Com Deslocamento Inicial Nulo . . . 374
4.2.3 Caso Geral . . . 382
Exercícios . . . 386
4.3 Corda Elástica Infinita . . . 389
4.3.1 Solução Geral . . . 389
4.3.2 Problema de Valor Inicial . . . 390
Exercícios . . . 392
4.4 Respostas dos Exercícios . . . 394

4 Equação da Onda Unidimensional

4.1 Corda Elástica Presa nas Extremidades

Pode-se mostrar que o deslocamento vertical de cada ponto de uma corda elástica homogênea como função da posição e do tempo, $u(x,t)$, satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

chamada **equação da corda elástica**. Aqui $a > 0$ é uma constante que depende do material que compõe a corda e mostraremos que é a **velocidade de propagação das ondas na corda**.

Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda de comprimento L presa nas extremidades, sendo conhecidos o deslocamento inicial de cada ponto da corda, $f(x)$, e a velocidade inicial de cada ponto da corda, $g(x)$, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

A solução deste problema é a soma da solução do problema com deslocamento inicial nulo ($f(x) = 0$),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

com a solução do problema com velocidade inicial nula ($g(x) = 0$),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0. \end{cases}$$

4.1.1 Com Velocidade Inicial Nula

Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda elástica de comprimento L presa nas extremidades, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é nula, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF)

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{array}\right.$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Calculando-se as derivadas parciais e substituindo-se na equação diferencial obtemos

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Dividindo-se por $a^2X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \; X(L) = 0 & (4.1) \\ T''(t) - a^2\lambda T(t) = 0, \quad T'(0) = 0 & (4.2) \end{cases}$$

As condições $X(0) = X(L) = 0$ decorrem do fato de que a corda está presa nas extremidades, ou seja,

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = u(L,t) = X(L)T(t).$$

A condição $T'(0) = 0$, decorre do fato de que a velocidade inicial é nula, ou seja,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = X(x)T'(0).$$

A equação (4.1) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (3.1) na página 278 - e tem solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

e tem como soluções fundamentais

$$X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação (4.2) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2n^2\pi^2}{L^2}T(t) = 0.$$

Para resolver esta equação temos que encontrar as raízes da sua equação característica:

$$r^2 + \frac{a^2n^2\pi^2}{L^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm\frac{an\pi}{L}i.$$

Logo a solução geral da equação diferencial para $T(t)$ é

$$T(t) = c_1 \cos\frac{an\pi t}{L} + c_2 \operatorname{sen}\frac{an\pi t}{L}.$$

Com a condição inicial $T'(0) = 0$ concluímos que a equação diferencial para $T(t)$ com a condição inicial $T'(0) = 0$ tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_n(t) = \cos\frac{an\pi t}{L}$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0; \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \ 0 < x < L \end{cases} \tag{4.3}$$

tem soluções fundamentais

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4.4}$$

Para cada n, a solução fundamental (4.4) do problema (4.3)

$$u_n(x,t) = [\cos \frac{an\pi t}{L}] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

é chamada **modo normal (ou natural) de vibração, onda estacionária** ou **harmônico** e o seu período fundamental na variável x é igual a $\dfrac{2L}{n}$ e é chamado **comprimento de onda do modo normal**. Os modos normais de vibração podem ser vistos como senos com amplitude variando de forma cossenoidal $R_n(t) = \cos \dfrac{an\pi t}{L}$ com frequências $\frac{an\pi}{L}$ chamadas **frequências naturais da corda**. Portanto, neste caso, os períodos fundamentais da corda são $T_n = \dfrac{2L}{na}$. Observe, também, que cada modo normal $u_n(x,t)$ tem $n-1$ pontos fixos no intervalo $0 < x < L$ (quais são?).

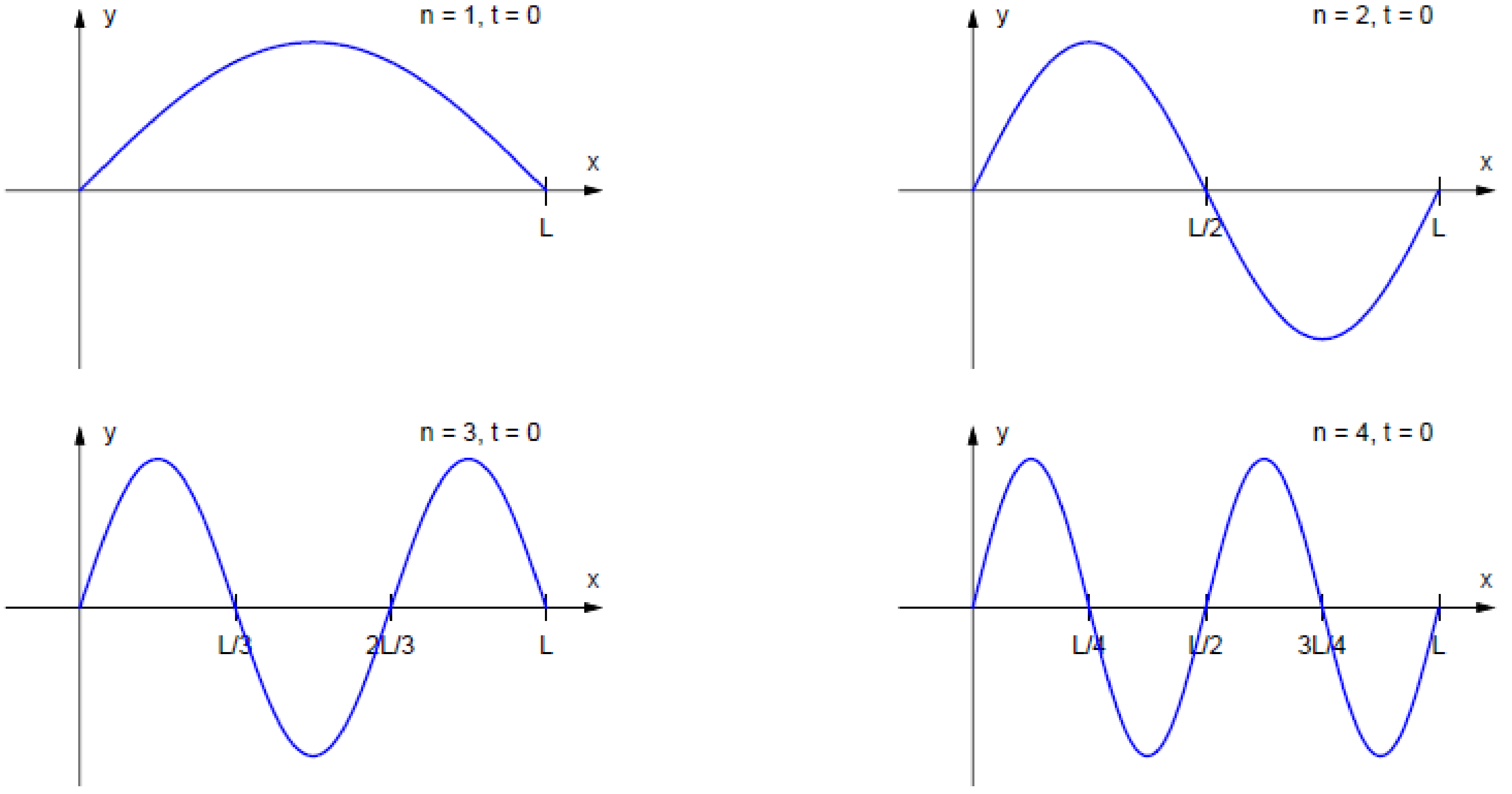


Figura 4.1 – Modos naturais de vibração $u_n(x,t) = \cos \frac{an\pi t}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$, para $n = 1, 2, 3, 4$ e $t = 0$.

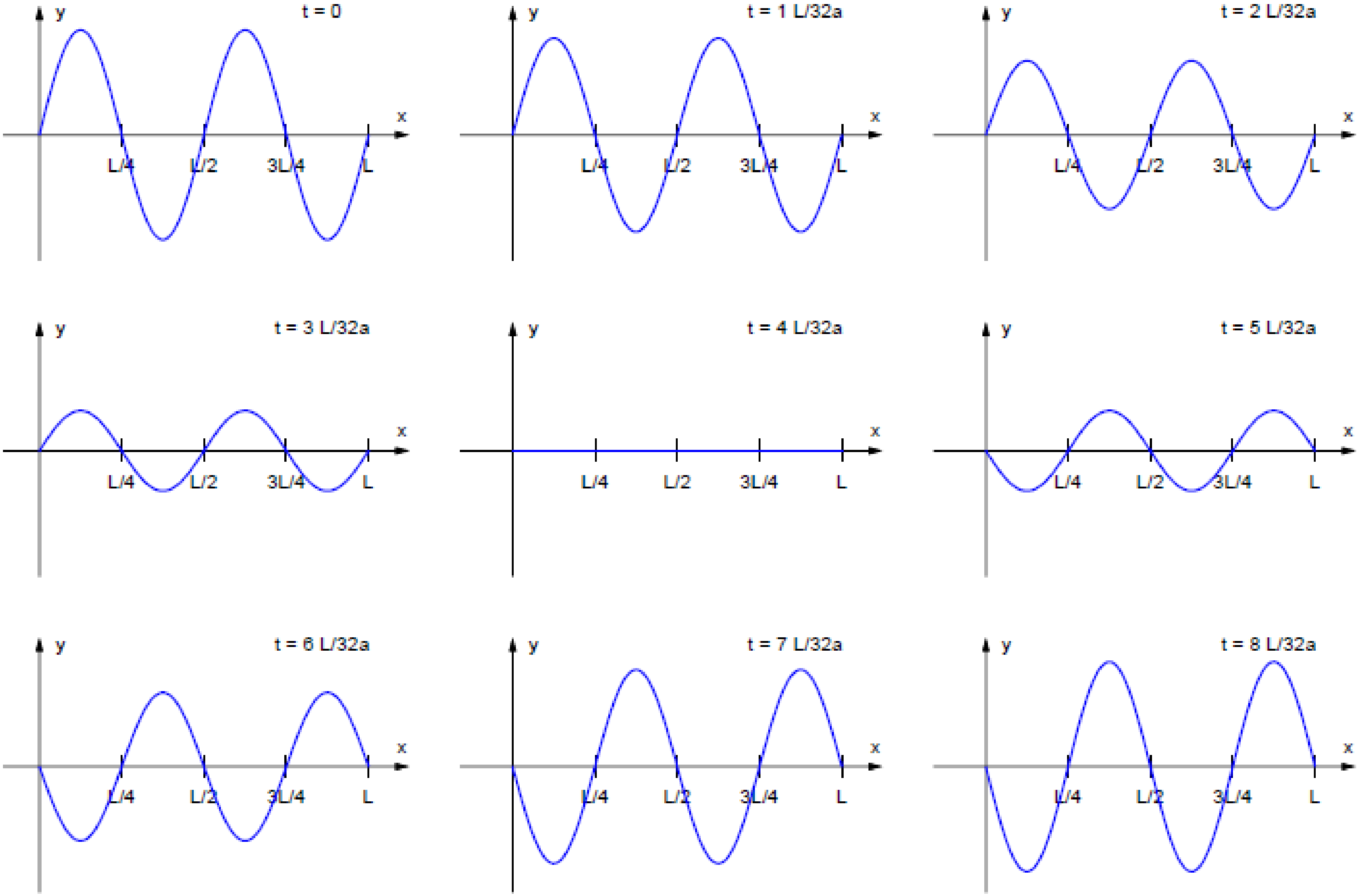


Figura 4.2 – Modo natural de vibração $u_4(x,t) = \cos\dfrac{4a\pi t}{L}\,\text{sen}\,\dfrac{4\pi x}{L}$, para $t = 0, \ldots, \dfrac{L}{4a}$.

Combinações lineares das soluções fundamentais são também solução (verifique!),

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L}$$

Mas uma solução deste tipo não necessariamente satisfaz a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, para uma função $f(x)$ mais geral. Assim vamos supor que a solução do problema de valor inicial e de fronteira é uma série da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L} \tag{4.5}$$

Para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x)$.

Assim, pelo Corolário 2.5 na página 184,
se a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Observe que a solução do problema de valor inicial e de fronteira

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L}$$

para cada x, é periódica com relação a t com período fundamental $T = \dfrac{2L}{a}$, se $c_1 \neq 0$.

2.1.4 Tabela de Coeficientes de Séries de Fourier

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [-L, L] \to \mathbb{R},\ -1 \leq c < d \leq 1$	$a_n(f, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt$	$b_n(f, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt$
$f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(0)}, L) = d - c$ $a_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,s\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = -\frac{1}{n\pi}\cos s\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(1)}, L) = \frac{L}{2}(d^2 - c^2)$ $a_n(f_{c,d}^{(1)}, L) =$ $\frac{L}{n^2\pi^2}\left(s\ \mathrm{sen}\,s + \cos s\right)\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(1)}, L) =$ $\frac{L}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\,s\right)\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(2)}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(2)}, L) = \frac{L^2}{3}(d^3 - c^3)$ $a_n(f_{c,d}^{(2)}, L) =$ $\frac{L^2}{n^3\pi^3}\left((s^2 - 2)\,\mathrm{sen}\,s + 2s\cos s\right)\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(2)}, L) =$ $\frac{L^2}{n^3\pi^3}\left(2s\,\mathrm{sen}\,s + (2 - s^2)\cos s\right)\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$

MAP2320

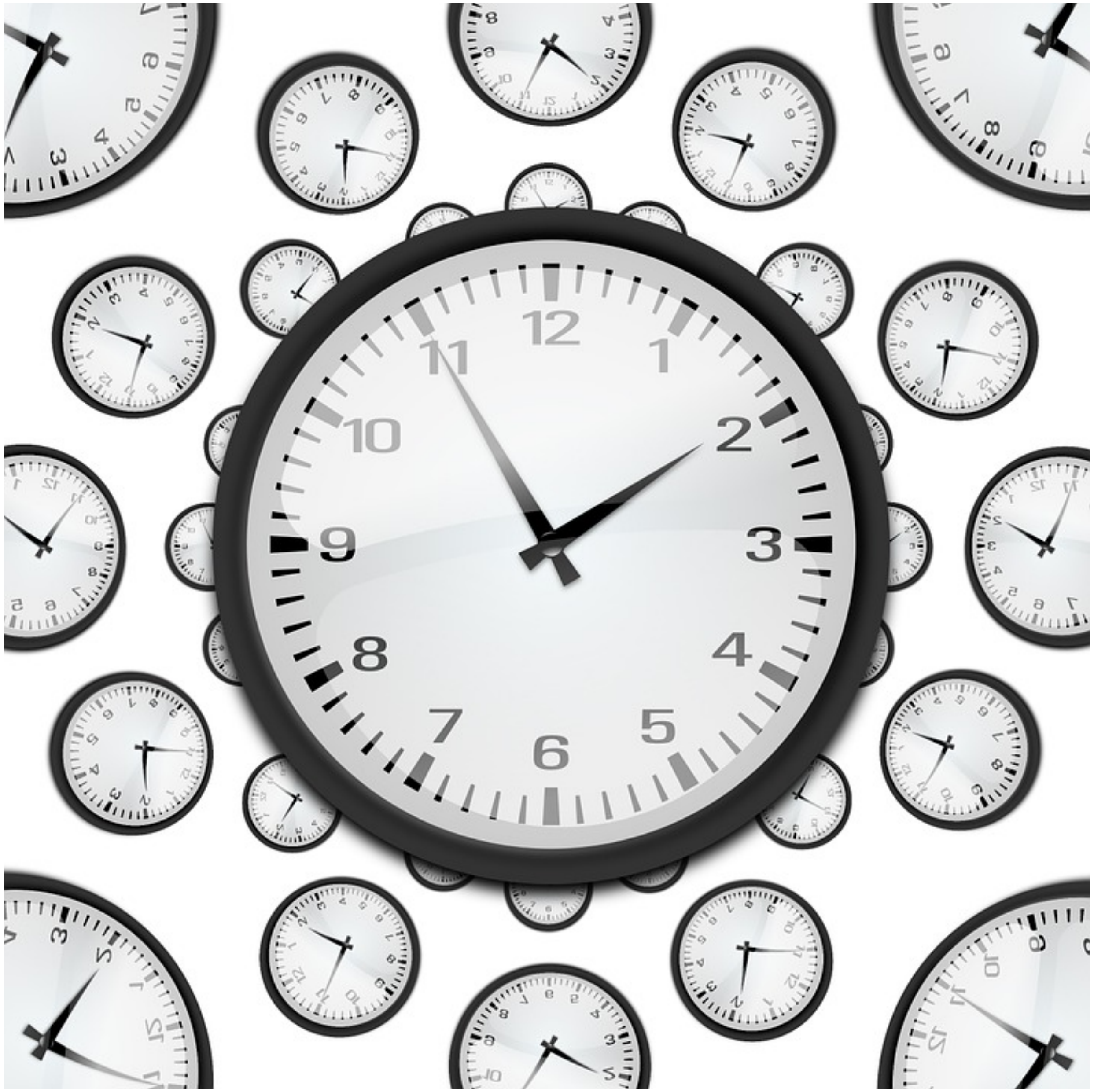
Exemplo 4.1. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente $a = 2$ solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20, \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40. \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

MAP2320



A solução em série é dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de $f(x)$. Usando a tabela na página 202, multiplicando por 2 os valores obtemos:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\
&= 2\left(b_n(f^{(1)}_{0,1/2}, 40) + 40 b_n(f^{(0)}_{1/2,1}, 40) - b_n(f^{(1)}_{1/2,1}, 40)\right) \\
&= \frac{80}{n^2\pi^2}(-s\cos s + \operatorname{sen} s)\Big|_0^{n\pi/2} - \frac{80}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{80}{n^2\pi^2}(-s\cos s + \operatorname{sen} s)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\
&= \frac{160}{n^2\pi^2}\left(-\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{80}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{160 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1, 2, 3\ldots
\end{aligned}$$

Entretanto coeficientes de índice par são nulos:

$$c_{2k} = 0$$

$$c_{2k+1} = \frac{160(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{20} \\ &= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{20} \end{aligned}$$

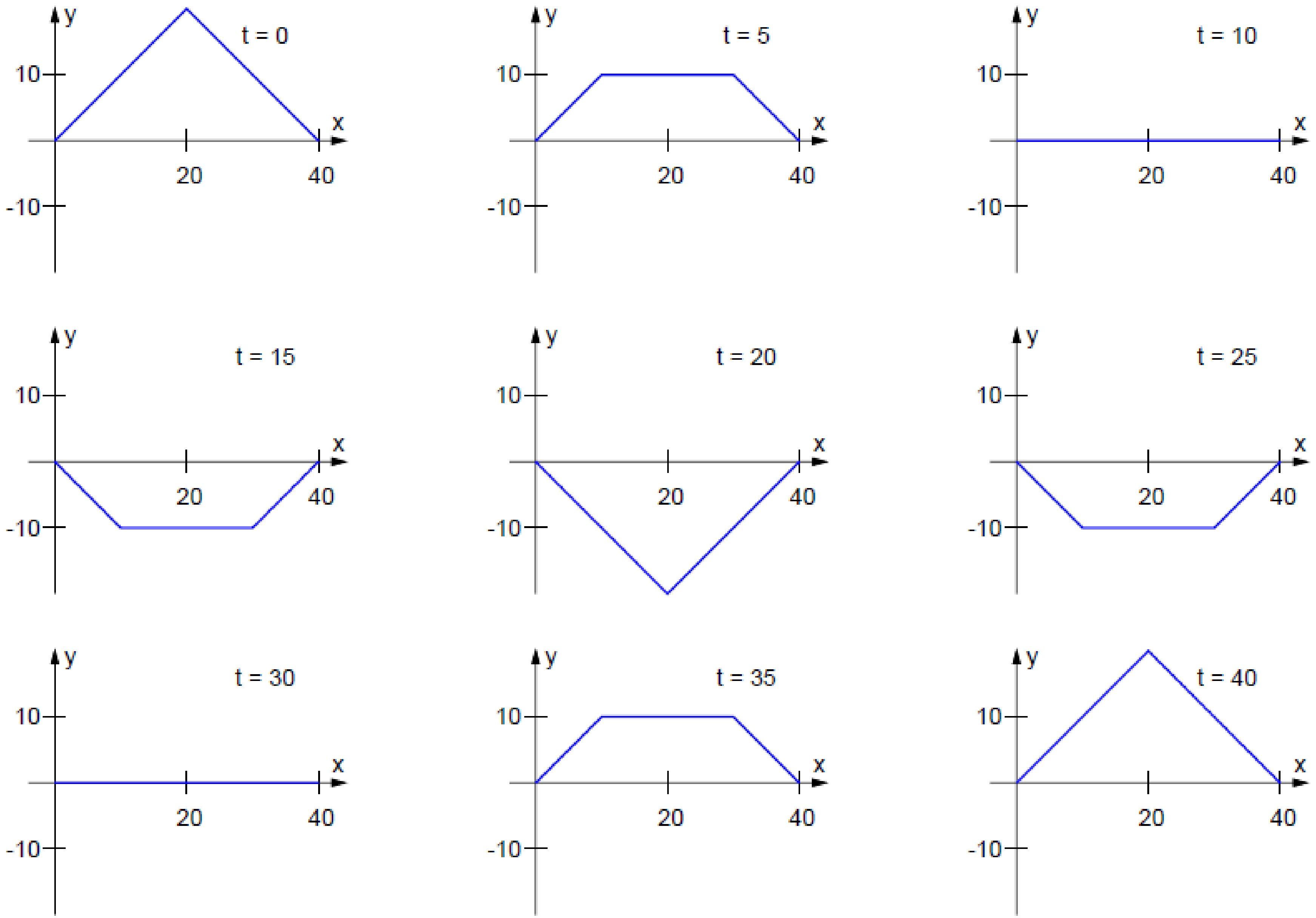
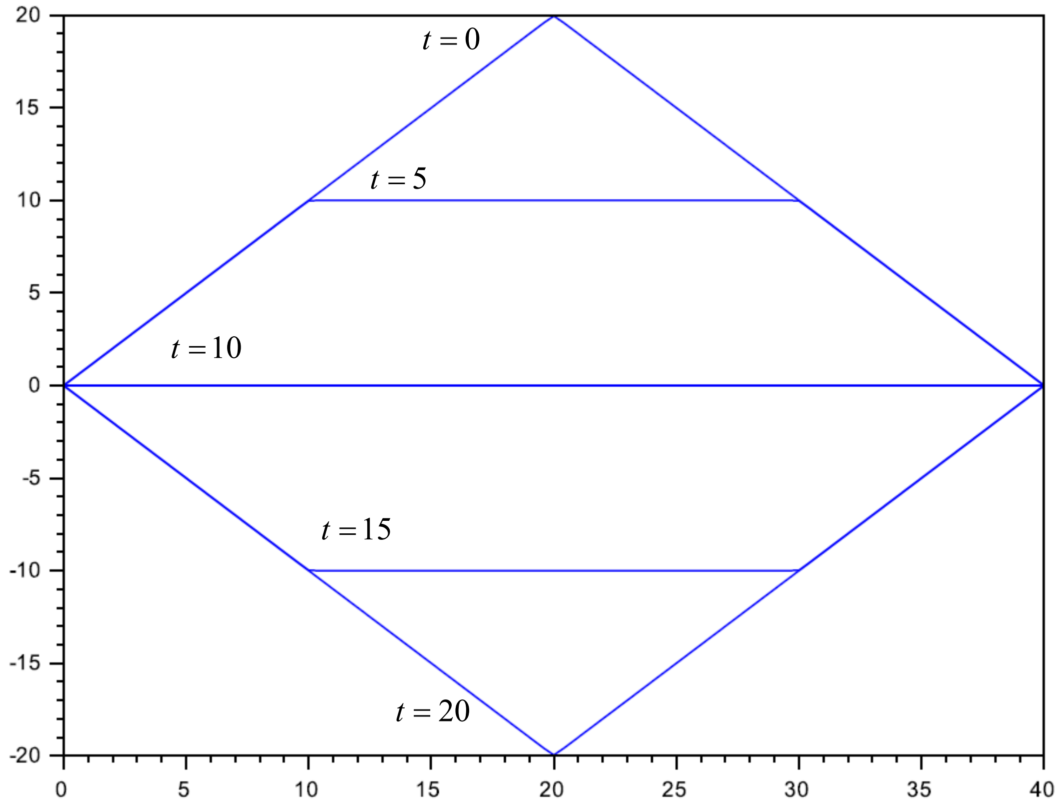


Figura 4.4 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 4.1.

```
//Exemplo 4.1
m=100; L =40;
x=linspace(0,1,m+1)*L
nk=100
t=7.5
a=2
u = zeros(m+1)
for k = 0:nk
    n=2*k+1
    cn= 4*L*sin(n*%pi/2)/(n^2*%pi^2)
    u = u + cn*sin(n*%pi*x/L)*cos(n*a*%pi*t/L)
end
plot(x,u)
```



MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2019

Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- Método de Diferenças Finitas
- Equação do calor transiente (parabólica)
- Equação de Poisson (elíptica)
- **Equação da onda (hiperbólica)**