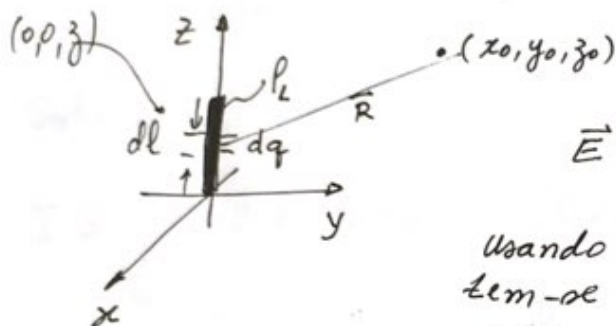


GABARITO - 1.ª Prova Eletromagnetismo
SEL-309 / 24/09/2019.

EX-1. calcular o campo elétrico no ponto P
 (x_0, y_0, z_0) p/ $\rho_L = 2z$ [C/m]



$$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{R}\|^2} \vec{a}_R$$

Usando coordenadas cartesianas
tem-se

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - z)^2}$$

$$\vec{a}_R = [x_0 \vec{a}_x + y_0 \vec{a}_y + (z_0 - z) \vec{a}_z] / \|\vec{R}\|$$

Assim

$$\vec{E} = \int_0^l \frac{\rho_L dz [x_0 \vec{a}_x + y_0 \vec{a}_y + (z_0 - z) \vec{a}_z] \left[\frac{1}{\|\vec{R}\|^2} \right]}{4\pi\epsilon_0 (x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}}$$

EX-2 Aumentando uma carga Q_0 no ponto $(0, 0, 2)$
Calcular o Potencial em todos os pontos P
com coordenadas (x, y, z) .

Solução: Para não confundir vamos substituir o ponto
genérico $P(x, y, z)$ por $P(x_0, y_0, z_0)$.

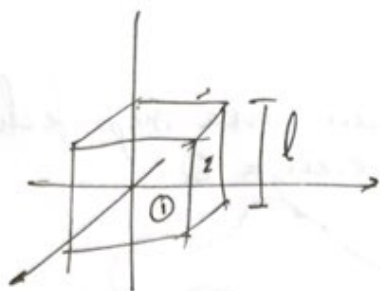
Assim tem-se

$$V_P = V_1 + V_2 \text{ sendo } V_1 = \int_0^l \frac{\rho_L dz}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{R}\|} \text{ e}$$

$$V_2 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{R}_2\|} \text{ sendo}$$

com $\|\vec{R}_2\| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - 2)^2}$

Ex-3 pt $\vec{J} = x^2 \vec{a}_x$ calcular a corrente que sai de um cubo centrado na origem e de lado l .



$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV$$

Solucp: Existem duas soluções:

Solucp 1.

$$I = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV \text{ como } \nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \Rightarrow$$

$$I = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} 2x dx dy dz = l^2 \left. \frac{2x^2}{2} \right|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{4} = 0$$

Corrente que sai do cubo igual a zero [corrente que entra igual à corrente que sai].

Solucp 2.

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} + \dots + \int_{S_6} = \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S}_2 =$$

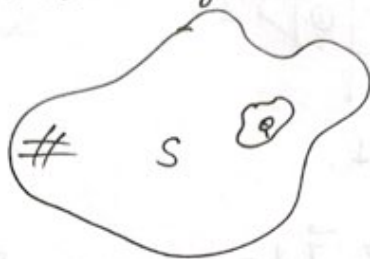
$$dS_1 = dy dz \vec{a}_x \text{ e } dS_6 = -dy dz \vec{a}_x \quad \therefore dS_6 = -dS_1$$

$$I = + \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S}_1 - \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S}_1 = 0$$

foi considerado que todas as contribuições das outras faces igual a zero.

EX-4. A partir da corrente e da divergência de Gauss, mostrar a lei da continuidade.

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\text{corrente em uma sup. fechada } S \text{ contendo carga } Q)$$



$$I = - \frac{dQ}{dt} \text{ como.}$$

$$Q = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} \text{ tem-se } \Rightarrow$$

$$I = - \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \text{ p/ } S = \text{cte. pode-se fazer.}$$

$$I = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dV \quad \text{ou}$$

$$= \int_V \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho_v dV =$$

$$= \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV \quad \therefore$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho_v dV$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho_v}{\partial t}} \quad \text{lei da continuidade}$$