

PROVA 2 - PMR3503 Controle Moderno – 14/12/2018

Prof. Eduardo Aoun Tannuri

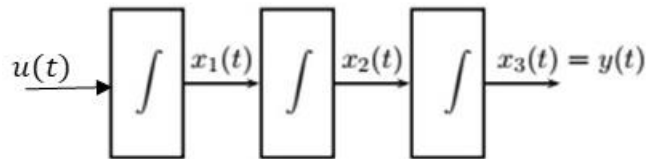
Nome: _____ No. USP: _____

- 1) (3,5) Considere o sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

No qual $x(0) = [1 \ 0 \ 0]^T$ e definido pelo sistema diagrama de blocos:



- a) (1,0) Mostre que (A, C) é observável
- b) (2,5) Projete um observador de estados $\hat{x}(t)$ que estima $x(t)$ baseado na medição $y(t)$, tendo como polos da dinâmica deste observador os valores $[-1; -2; -3]$

- 2) (3,5) Considere o sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

No qual $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $C = (0 \quad 1)$; $D = 0$

- a) (2,0) Projete um controlador por realimentação de estados que garanta que a dinâmica em malha fechada apresente autovalores $[-0.3; -0.7]$
 - b) (1,5) Mostre como deve ser projetado um controlador que garanta que a saída $y(t) = x_2(t)$ siga um valor de referência r .
- 3) (3,0) Utilizando Matlab disponível em sala. Considere um objeto de massa $m = 1$, movendo ao longo do eixo x em resposta a uma força $u(t)$.
- a) O sistema é controlável?
 - b) Suponha que você precisa projetar a força $u(t)$ que move o objeto de uma posição e velocidade inicial genérica ao repouso em $x_e = 0$. Usando um controlador linear quadrático, formule o funcional quadrático e indique os parâmetros de controle.
 - c) Calcule o controlador para 2 casos extremos e simule, indicando na folha de respostas a curva de $x(t)$ e $u(t)$ obtidas:
 - I) Muita penalização para o consumo de controle
 - II) Muita penalização para o tempo de resposta

1) Representação

$$\dot{x}_1 = u$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

$$\dot{x}_3 = x_2$$

$$y = x_3$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Matriz de observabilidade

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

possui 3 linhas
claramente independentes

$\Downarrow$
rank=3 $\Rightarrow$ observável!

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Observador $\hat{\dot{x}} = A \cdot \hat{x} + B \cdot u + K(y - C \hat{x})$

$$\Rightarrow \hat{\dot{x}} = (A - KC) \hat{x} + B \cdot u + K y$$

$\Rightarrow$ dinâmica do observador dada pelos autovalores de

$$A - KC$$

$$A - KC = A'$$

$$A - K \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k_1 \\ 1 & 0 & -k_2 \\ 0 & 1 & -k_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{eig}(A - KC) = \text{eig}(A') = \det(s \cdot I - A') = \det \begin{pmatrix} s & 0 & +k_1 \\ -1 & s & +k_2 \\ 0 & -1 & s+k_3 \end{pmatrix} =$$

$$\underline{s^3 + k_3 s^2 + k_2 s + k_1} = (s+1)(s+2)(s+3)$$

$$= s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \Rightarrow$$

$$\boxed{K = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

2)

a) controlador $u = -Kx(t)$

1) sistema deve ser controlável

matriz de controlabilidade $[B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que possui $\text{Rank} = 2$ pois as 2 linhas são LI.

Logo, a dinâmica de malha fechada é

dada pelos autovalores de $A - BK = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (K_1 \ K_2) =$

$$A - BK = \begin{pmatrix} 0,5 - K_1 & 1 - K_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

$$\det(A') = \det(sI - A') = \begin{vmatrix} s - 0,5 + K_1 & K_2 - 1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + (K_1 - 0,5)s + (K_2 - 1) = (s + 0,5)(s + 0,5)$$

↓

$$K_1 = 1,5$$

$$K_2 = 1,21$$

b) deve ser definido estado

Alternat1) $\dot{x}_3 = x_2 - r$ CONTROLE INTEGRAL
e o sistema a ser controlado passa a ser

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u = [K_1 \ K_2 \ K_3] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ propostos por alocação de polos usando $\bar{A}, \bar{B}$

Alternat2) PRÉ-ALIMENTAÇÃO DA REFERÊNCIA

$$u = -[K_1 \ K_2] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + K_3 \cdot r = -K \cdot x + K_3 \cdot r$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\Rightarrow x(\infty) = -(A - BK)^{-1} \cdot B \cdot K_3 \cdot r$$

$$\dot{x} = Ax - B \cdot Kx + B \cdot K_3 \cdot r$$

$$y(\infty) = -C \cdot (A - BK)^{-1} \cdot B \cdot K_3 \cdot r$$

⇒

$$\dot{x} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow -C \cdot (A-BK)^{-1} \cdot B, K_2 = \underline{1}$$

↳ ecuación para obtener ganho K_2