Gram-Schmidt

- $\{A_0, A_1, A_2, \dots, A_n\}$ valores lin. indep.

$\downarrow$

- $\{q_0, q_1, q_2, \dots, q_n\}$ vetores $\boxed{\text{ortogonais}}$

- V espaço vetorial
- $\langle \cdot , \cdot \rangle$ produto interno

$q_0 = A_0$

$$q_1 = A_1 - \frac{\langle A_1, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0$$

$$q_2 = A_2 - \frac{\langle A_2, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 - \frac{\langle A_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1$$

$$\left(\vdots \right)$$

$$q_J = A_J - \sum \left(\begin{array}{l} \text{projeções de } A_J \text{ nas} \\ \text{direções de } q_0, q_1, \dots, q_{J-1} \end{array} \right)$$

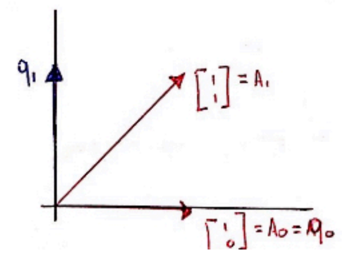
$$= A_J - \frac{\langle A_J, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 - \frac{\langle A_J, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 - (\dots) - \frac{\langle A_J, q_{J-1} \rangle}{\langle q_{J-1}, q_{J-1} \rangle} q_{J-1}$$

- V = espaço de funções (contínuas, contínuas por parte, ...)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, dx$$



$$q_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = A_1 - \frac{A_1^T q_0}{q_0^T q_0} q_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo de MMQ em $\mathcal{C}([0,1])$ = {funções contínuas definidas em $[0,1]$ com valores em $\mathbb{R}$}

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$$

- MMQ: se queremos projetar uma função f no espaço gerado por $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$

① Sistema Normal

$$\begin{bmatrix} \langle g_0, g_0\rangle & \langle g_0, g_1\rangle & (\cdots) & \langle g_0, g_n\rangle \\ (\vdots) & (\vdots) & & (\vdots) \\ \langle g_n, g_0\rangle & \langle g_n, g_1\rangle & (\cdots) & \langle g_n, g_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ (\vdots) \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle g_0, f\rangle \\ \langle g_1, f\rangle \\ (\vdots) \\ \langle g_n, f\rangle \end{bmatrix}$$

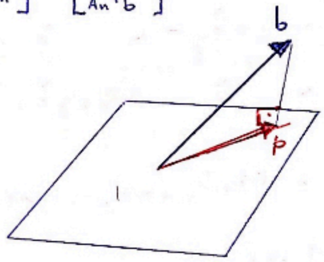
- O análogo de $A^TAx = A^Tb$

$$A^TA = \begin{bmatrix} A_1^TA_1 & A_1^TA_2 & (\cdots) & A_1^TA_n \\ (\vdots) & (\vdots) & & (\vdots) \\ A_n^TA_1 & A_n^TA_2 & (\cdots) & A_n^TA_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ (\vdots) \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^Tb \\ A_2^Tb \\ (\vdots) \\ A_n^Tb \end{bmatrix}$$

encontramos

$$\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]$$

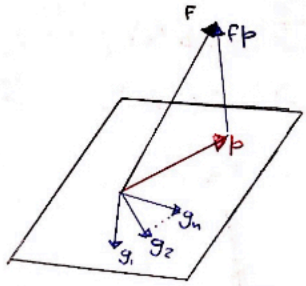
$$p = A\bar{x} = x_1A_1 + x_2A_2 + (\cdots) + x_nA_n$$



- Resolvemos $\left[\langle g_i, g_j\rangle\right] c = \begin{bmatrix} \langle g_0, f\rangle \\ \langle g_1, f\rangle \\ (\vdots) \\ \langle g_n, f\rangle \end{bmatrix}$ $(*)$

- Se $(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n)$ é a solução de $(*)$, então a projeção de f em ger$\{g_0, \dots, g_n\}$ é $p = \bar{A}_0 g_0 + \bar{A}_1 g_1 + (\cdots) + \bar{A}_n g_n$

Exemplo



$V = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})\ ,\quad \langle F,g\rangle = \int_0^1 F(x)g(x)\,dx$

$g_0(x) = 1 \qquad g_1(x) = x$

$F(x) = e^x$

$\langle g_0, g_0\rangle = \int_0^1 1\cdot 1\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1 \qquad \langle g_0, F\rangle = \int_0^1 e^x\,dx = e-1$

$\langle g_0, g_1\rangle = \int_0^1 1\cdot x\,dx = 1/2$

$\langle g_1, F\rangle = \int_0^1 \underbrace{xe^x}_{Fg'}\,dx = \underbrace{xe^x}_{Fg}\Big|_0^1 - \int_0^1 \underbrace{e^x}_{F'g}\,dx = 1$

$\langle g_1, g_0\rangle = 1/2$

$\langle g_1, g_1\rangle = \int_0^1 x^2\,dx = 1/3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\begin{bmatrix} 1/3 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

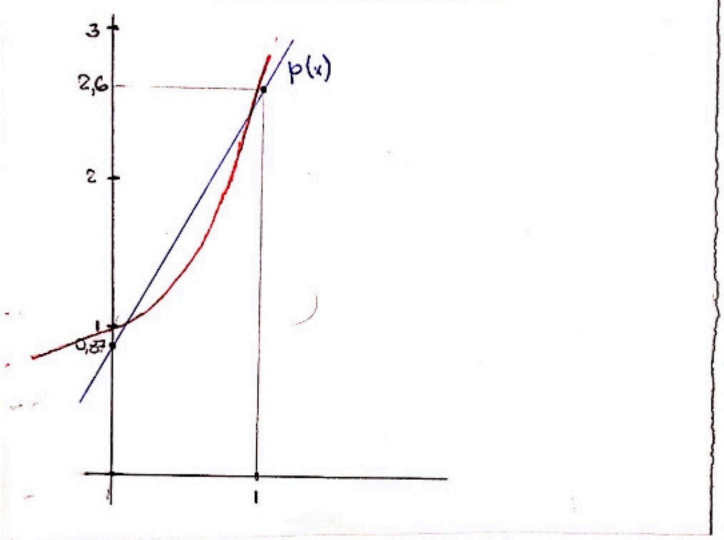
$$= 12\begin{bmatrix} 1/3 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4e-4-6 \\ -6e+6+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e-10 \\ -6e+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

$p(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x)$

$p(x) = (4e - 10) + (-6e + 18)x$

$p(x) \simeq 0,87 + 1,7x$



- O Método dos Mínimos Quadrados minimiza a distância $\|f-p\|^2$ entre todos os vetores $p = c_0 g_0 + c_1 g_1 + (\cdots) + c_n g_n$

$$\|f-p\|^2 = \langle f-p, f-p \rangle = \underbrace{\int_0^1 \left[(f-p)(x)\right]^2 dx}_{\text{é esta quantidade que estamos minimizando}}$$

E qual a melhor aproximação (no sentido do MMQ) de $f(x) = e^x$ por um polinômio de grau ≤ 2? Isto é, queremos projetar $f(x)$ no espaço gerado por (com o mesmo produto escalar)

$g_0(x) = 1 \quad g_1(x) = x \quad g_2(x) = x^2$

$[\langle g_i, g_j \rangle]$ $\quad \langle g_0, g_0 \rangle = 1 \quad \langle g_0, g_1 \rangle = \langle g_1, g_0 \rangle = 1/2$

$\langle g_1, g_1 \rangle = 1/3 = \langle g_0, g_2 \rangle = \langle g_2, g_0 \rangle$

$\langle g_1, g_2 \rangle = \int_0^1 x^3 dx = 1/4 = \langle g_2, g_1 \rangle$

$\langle g_2, g_2 \rangle = \int_0^1 x^4 dx = 1/5$

$$\langle g_2, f \rangle = \int_0^1 x^2 e^x dx = x^2 e^x \Big|_0^1 - 2\int_0^1 x e^x dx = e - 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \\ e-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39e - 105 \\ -216e + 588 \\ 210e - 570 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0129\ldots \\ 0{,}8511\ldots \\ 0{,}8391\ldots \end{bmatrix}$$

O polinômio de grau ≤ 2 que melhor aproxima $f(x) = e^x$ é:

$q(x) \cong 1{,}0129 + 0{,}8511x + 0{,}8391x^2$

Qual dos dois $(p(x); q(x))$ é a melhor aproximação para $f(x) = e^x$? Isto é, qual distância

$$\begin{cases} \|f-p\|^2 \\ \|f-q\|^2 \end{cases}$$ é a menor?

$$\|f-p\|^2 = \int_0^1 (e^x - p(x))^2\,dx = \int_0^1 \left[e^x - (0{,}87 + 1{,}7x)\right]^2 dx = \text{número } 1$$

$$\vee\!/$$

$$\|f-q\|^2 = \int_0^1 (e^x - q(x))^2\,dx = \int_0^1 \left[e^x - (1 + 0{,}85x + 0{,}84x^2)\right]^2 dx = \text{número } 2$$