MAT-2454 – Cálculo II
Aulas 22 e 23: Máximos e Mínimos em compactos

Alexandre Lymberopoulos

Para Escola Politécnica – USP

IME–USP — Departamento de Matemática

Ordem do dia

Compactos?

- É um análogo ao conceito de intervalos fechados na reta real.
- Um conjunto fechado já sabemos o que é.
- Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é *limitado* se existe $R > 0$ tal que $A \subseteq B_R(0,0)$[1].
- Dizemos que um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é *compacto* se for limitado e fechado.[2]
- Existe uma definição equivalente a essa em $\mathbb{R}^n$, que se aplica em situações bem mais gerais (veja aqui).
- Exemplos: um intervalo fechado é compacto em $\mathbb{R}$, a reunião finita de intervalos fechados (podem ser dijuntos) é compacto.
- Uma bola fechada em $\mathbb{R}^2$ é compacto.
- $\emptyset$ é compacto e $\mathbb{R}^2$ não é compacto.

---

[1] Bola aberta, centrada na origem e de raio $R > 0$

[2] Nosso interesse é em $n = 2$ ou $n = 3$.

Funções Definidas em Compactos

- Nosso objetivo é estudar máximos e mínimos de funções definidas em conjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.
- No Cálculo I vimos o Teorema de Weierstrass:

Teorema (Weiertrass)

Sejam I um intervalo fechado e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f assume valor máximo e mínimo em I, ou seja, existem $x_0, x_1 \in I$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, para todo $x \in I$.

- Para encontrar esses pontos de máximo e mínimo global, procuramos candidatos no interior de I, $J = int(I)$, usando o

Teorema (Fermat)

Sejam J um intervalo aberto e $f: J \to \mathbb{R}$ um função derivável. Se $x_0 \in J$ é ponto de máximo ou mínimo local de f então $f'(x_0) = 0$.

- Em seguida comparamos o valor de f nesses candidatos com o valor de f, na fronteita de I, ou seja, nos extremos de I.

Generalizando...

O intervalo fechado I é um compacto, pode-se então provar a seguinte generalização do teorema acima:

Teorema (Weiertrass)

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um compacto e $f : A \to \mathbb{R}$ um função contínua. Então f assume valor máximo e valor mínimo em A.

- A fim de encontrar tais pontos de máximo e mínimo, procedemos como antes: localizamos os candidatos em $int(A)$ e comparamos o valor de f neles com o valor de f nos pontos de ∂A.
- Como vimos anterioremente, os candidatos a máximo ou mínimo no interior de A são aqueles pontos onde o gradiente se anula.
- O contraste é que antes ∂I tinha, tipicamente, apenas dois pontos e, agora, ∂A tem uma quantidade infinita de pontos[3].

[3] Abordaremos o caso em que ∂A é uma curva ou superfície razoavelmente regular.

Exemplo no plano

- Sejam $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $f(x, y) = xy$. Determine, se existirem, os pontos de máximo e mínimo de f em A.
- O conjunto A é limitado (contido numa bola de raio 2) e fechado (seu complementar é aberto), portanto é compacto. A função f é contínua em todo o plano, portanto sua restrição a A também o é.
- Existem pontos de máximo e mínimo de f sobre A! Quem são?
- Tais pontos, se estiverem no interior, devem verificar $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Nesse caso, o único pontos que satisfaz tal condição é a origem e temos $f(0, 0) = 0$.
- A fronteira de A é o círculo unitário

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}.$$

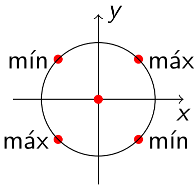
- Como detectar os candidatos em ∂A?

Método 1: Parametrizando ∂A

- Neste caso é fácil parametrizar a fronteira de A: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
- Ao longo da fronteira o valor de f é o mesmo da função $g\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = (f \circ \gamma)(t) = \cos t \sin t$, que é uma função contínua num intervalo fechado. Cálculo 1!
- Seus candidatos a pontos de máximo e mínimo são os extremos do domínimo (0 e 2π), além daqueles no interior:

$$g'(t) = 0 \iff \cos(2t) = 0 \iff t = \frac{k\pi}{4}, k \in \{1, 3, 5, 7\}.$$

$$\begin{aligned} g(0) = g(2\pi) &= \quad 0 \\ g(\pi/4) = g(5\pi/4) &= \quad 1/2 \\ g(3\pi/4) = g(7\pi/4) &= \quad -1/2 \\ f(0,0) = 0 \text{ (interior)} & \quad . \end{aligned}$$



Método 2: gradientes e curvas de nível

- a fronteira de A é a curva de nível 0 da função $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.
- As curvas de nível de f são $xy = c$ ($c = 0$: eixos coordenados; $c \neq 0$: hipérboles);
- O maior valor de f será aquele dado pela curva de maior nível que intercepta ∂A:

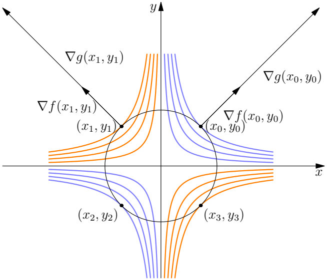


FIGURA: Gradientes paralelos nos pontos de máximo e mínimo.

Condição Necessária

Teorema (Multiplicadores de Lagrange I)

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto, $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em A e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em A, tal que $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$, para todo $(x,y) \in B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon g(x,y) = 0\big\}$. Se (x_0, y_0) é um máximo ou mínimo local de f em B, então $\{\nabla f(x_0,y_0), \nabla g(x_0,y_0)\}$ é linearmente dependente[a].

[a] Nesse caso temos $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$ e λ é chamado *Multiplicador de Lagrange*

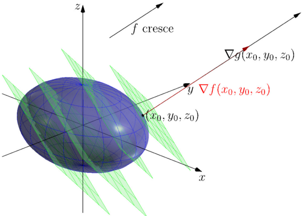
- Este teorema dá uma condição necessária para que um ponto (x_0, y_0) seja máximo ou mínimo local de f, quando restrita a uma curva, dada como curva de nível de outra função, em seu domínio.
- Tipicamente, na notação acima, a função f é chamada *função objetivo* e a curva de nível $g^{-1}(0)$ é chamada *restrição*.

Exemplos

- Determine a reta tangente à elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ que, junto com os eixos coordenados, forma um triângulo de área mínima.
- Determine o ponto da curva $xy = 1$ mais próximo da origem.
- Determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de $f(x, y) = y + x^3$, sobre a curva $y - x^3 = 0$.
- Idem para $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$, sobre a curva $x^2 + y^2 = 1$.
- Um pouco de álgebra linear: Seja $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Mostre que os valores máximos e mínimos de Q sobre o círculo $x^2 + y^2 = 1$ são exatamente os autovalores da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ e que tais valores são atingidos nos autovetores unitários associados a cada um desses autovalores.

Três variáveis, com uma restrição

- Agora vamos encontrar uma condição necessária para que um ponto (x_0, y_0, z_0) seja máximo ou mínimo local de uma função $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sobre uma superfície de nível.
- Como no caso anterior, olhando para as superfícies de nível de f, concluimos que o gradiente da função objetivo deve ser paralelo ao gradiente da restrição.
- Exemplo: determinar os pontos do elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, cuja soma das coordenadas é máxima[4].



[4] tem solução, pois o elipsoide é compacto e $f(x, y, z) = x + y + z$ é contínua

CONDIÇÃO NECESSÁRIA – UMA RESTRIÇÃO

TEOREMA (MULTIPLICADORES DE LAGRANGE II)

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^3$ um aberto, $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em A e $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em A, tal que $\nabla g(x,y,z) \neq (0,0,0)$, para todo $(x,y,z) \in B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}$. Se (x_0,y_0,z_0) é um máximo ou mínimo local de f em B, então $\{\nabla f(x_0,y_0,z_0), \nabla g(x_0,y_0,z_0)\}$ é linearmente dependente[a].

[a] Novamente temos, como antes, $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0,z_0)$.

- Este teorema dá uma condição necessária para que um ponto (x_0,y_0) seja máximo ou mínimo local de f, quando restrita a uma superfície, dada como superfície de nível de outra função, em seu domínio.
- Na notação acima, e como antes, a função f é chamada *função objetivo* e a superfície de nível $g^{-1}(0)$ é chamada *restrição*.

Exemplos

Verifique se cada um dos problemas abaixo tem solução. Resolva-os em caso afirmativo.

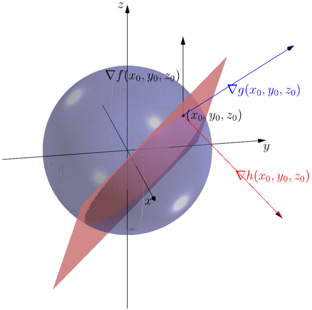
- Dentre os pontos da superfície $xyz = 1$, determinar o ponto no primeiro octante mais próximo da origem.
- Determinar, dentre todos os paralelepípedos retos de volume V fixado, aquele de área máxima.

Três variáveis, com duas restrições

- Agora vamos encontrar uma condição necessária para que um ponto (x_0, y_0, z_0) seja máximo ou mínimo local de uma função $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sobre a interseção de duas superfícies de nível[5].
- Em analogia, olhando para as superfícies de nível de f, concluimos que o gradiente da função objetivo deve linearmente dependente dos gradientes das funções que definem as restrições.

Exemplo: Justifique a existência e determine o valor máximo de $f(x,y,z) = z$, sujeito às restrições

$$x^2+y^2+z^2=1 \text{ e } x+y-z=0.$$



[5] Tipicamente uma curva em $\mathbb{R}^3$.

Condição Necessária – Duas Restrições

Teorema (Multiplicadores de Lagrange III)

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^3$ um aberto, $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em A e $g, h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^1$ em A, tal que $\{\nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\}$ é linearmente independente, para todo $(x,y,z) \in B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon g(x,y,z) = h(x,y,z)0\}$. Se (x_0, y_0, z_0) é um máximo ou mínimo local de f em B, então $\{\nabla f(x_0,y_0,z_0), \nabla g(x_0,y_0,z_0), \nabla h(x_0,y_0,z_0)\}$ é linearmente dependente[a].

[a] Neste caso temos $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0,z_0) + \mu \nabla g(x_0,y_0,z_0)$.

Na notação acima, e como antes, a função f é chamada *função objetivo* e o conjunto $g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$[6] é chamada *restrição*.

[6] O teorema da função implícita garante que, numa vizinhanca de $x_0, y_, z_0)$, é uma curva regular

Exemplos

- Verifique por que existe, dentre todos os pontos comuns ao semi-espaço $x + y + z \geq 0$ e a bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ pelo menos um em que a temperatura, dada por $T(x, y, z) = 100x^2yz$, é máxima. Determine tais pontos.

Referências

- Aula presencial;
- H. L. Guidorrizi, *Um curso de Cálculo*, vol. 2, 5ª. edição, LTC - São Paulo, 2001. **Seções 16.4, 16.5 e 16.6**.

Até a próxima aula!

lymber@ime.usp.br