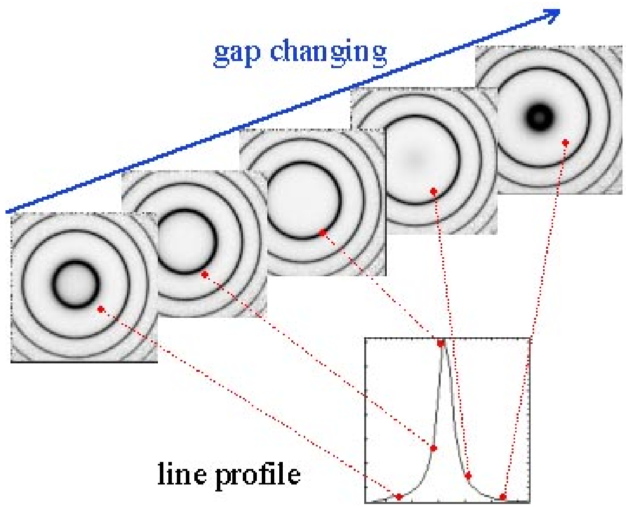
7600008 - Física IV Lista 4

Gabarito

4 de Novembro de 2019

Num interferômetro de Fabry e Perot, a separação entre as lâminas de vidro (chamada de gap na figura abaixo, copiada do endereço https://www.sao.ru/hq/lsfvo/devices/scorpio/ifp/cubes.html) é d. A luz que ilumina o interferômetro tem comprimento de onda λ, e forma-se um padrão de interferência que depende de d, como ilustrado pelos cinco quadros da figura. (Os padrões mostrados são negativos de fotos: as linhas mais escuras correspondem ao máximo de iluminação, e os pontos mais claros a regiões onde a interferência é destrutiva).



Questão 1.

Quanto deve ser d para que o centro do padrão tenha mínima intensidade, como no quadro do meio (terceiro quadro) da figura?

Solução: Uma interferência destrutiva pode ser escrita em termos de

$$\frac{2\pi}{\lambda} dcos\theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

que podemos reescrever para d na forma

$$d = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}\frac{1}{cos\theta}$$

entretanto, o centro do padrão ($n = 0$) corresponde a uma incidência de $\theta = 0$ e consequentemente

$$d = \frac{\lambda}{4}.$$

Questão 2.

Ainda no quadro do meio, qual é o ângulo θ que corresponde à primeira circunferência negra (máxima intensidade)?

Solução:

Neste exercício utilizamos a expressão

$$d = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \frac{1}{cos\theta}$$

com $n = 1$ para poder realizar o cálculo onde procuramos a interferência construtiva

$$\frac{4\pi}{\lambda} dcos\theta = 2n\pi$$

e já calculamos que a distância entre as fendas deve ser $d = 3\lambda/4$, portanto ao escrevemos a equação para θ com $n = 1$ (primeira cincunferência) temos

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{n\lambda}{2d}\right)$$

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

o que implica em um ângulo de $\theta \approx 14^o$.

Questão 3.

A luz de sódio emitida por lâmpadas de rua tem comprimento de onda $\lambda = 589nm$. Encontre o raio externo ρ_n da n-ésima zona de Fresnel para uma onda plana dessa luz.

Solução:

Do exercício anterior podemos aproveitar a expressão obtida para o ângulo de uma n-ésima interferência

$$\theta_n = cos^{-1}\left(\frac{n\lambda}{2d}\right)$$

e como o raio interno $r_n << L$ com L sendo a distância da lente ao anteparo em que será observado o padrão de interferência, temos $r_n \approx \theta_n$ e consequentemente

$$r_n = cos^{-1}\left(\frac{n}{2d} 589 \times 10^{-9}\right)$$

para uma determinada separação d entre placas.

Como o raio externo ρ_n é igual à hipotenusa onde

$$\rho_n = \frac{r_n}{sin\theta_n}$$

assim

$$\rho_n = \frac{cos^{-1}\left(\frac{n}{2d}589 \times 10^{-9}\right)}{sin\left(cos^{-1}\left(\frac{n}{2d}589 \times 10^{-9}\right)\right)}$$

Questão 4.

Um anteparo recebe uma onda plana de comprimento de onda λ, que se propaga normalmente a ele. O anteparo bloqueia totalmente a luz, exceto por uma fenda circular de raio $a = \rho_4$, isto é, a coincide com o raio da quarta zona circular de Fresnel. Ao passar pela fenda ($z = 0$), o campo elétrico é $E(z = 0, t) = E_0 cos(\omega t)$. Um segundo anteparo, paralelo ao primeiro anteparo e situado a uma distância r_0 à frente, recebe a luz que passa pela fenda. Conforme discutido em classe, a n-ésima zona circular de Fresnel ilumina o centro da imagem no segundo anteparo com um campo elétrico de amplitude proporcional a F_n. A distância entre a n-ésima zona circular e o centro da imagen no anteparo é o raio r_n. Suponha que F_n decaia em proporção a $1/r_n$, isto é,

$$F_n = F_1 \frac{r_1}{r_n}.$$

A partir das expressões para F_1 e para o campo elétrico encontradas em classe, determine o campo elétrico $E(r_n, t)$ no centro da imagem no segundo anteparo.

Solução: O campo elétrico é dado por

$$E(z,t) = Re\left\{\nu(z)e^{-i\omega t}\right\}$$

e o exercício nos fornece

$$E(z = 0, t) = E_0 cos(\omega t)$$

Precisamos calcular $\nu(z = r_0)$ para determinar o campo elétrico e pelo método das zonas de Fresnel sabemos

$$\nu(P) = 2i\lambda E_0 e^{ikr_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n$$

onde as distâncias r_n são dadas por

$$r_n = r_0 + \frac{n\lambda}{2}$$

onde se utilizamos que

$$F_n = F_1 \frac{r_1}{r_n}$$

Podemos escrever ν como

$$\nu = 2i\lambda E_0 e^{ikr_0} F_1 r_1 \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{r_n}$$

Assim o campo elétrico fica

$$E(z = r_0, t) = 2E_0 \left(r_0 + \frac{\lambda}{2}\right) \left(\frac{1}{r_0 + \frac{\lambda}{2}} - \frac{1}{r_0 + \lambda} + \frac{1}{r_0 + \frac{3\lambda}{2}} - \frac{1}{r_0 + 2\lambda}\right) cos(kr_0 + \omega t)$$

Questão 5.

Repita o problema anterior para fenda com raio $a = \rho_5$.

Solução:

Da mesma forma do que no exercício anterior utilizaremos

$$\nu(P) = 2i\lambda E_0 e^{ikr_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n$$

Com o detalhe de que a mudança no raio do anteparo muda a somatória na equação

$$\nu = 2i\lambda E_0 e^{ikr_0} F_1 r_1 \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{r_n}$$

e portanto o campo elétrico fica

$$E(z = r_0, t) = 2E_0 \left(r_0 + \frac{\lambda}{2}\right) \left(\frac{1}{r_0 + \frac{\lambda}{2}} - \frac{1}{r_0 + \lambda} + \frac{1}{r_0 + \frac{3\lambda}{2}} - \frac{1}{r_0 + 2\lambda} + \frac{1}{r_0 + \frac{5\lambda}{2}}\right) cos(kr_0 + \omega t)$$

Questão 6.

Um observador em um laboratório, estacionado em relação ao sistema de coordenadas S do laboratório, vê passar um objeto que se move na direção $\hat{x}$ com velocidade $V = c/2$. Um observador no referencial S', que se move junto com o objeto mede o comprimento (dimensão na direção $\hat{x}$) do objeto e encontra 10 cm. Que tamanho terá o objeto medido no referencial S?

Solução:

Neste exercício basta aplicar a contração de Lorentz onde

$$l = \sqrt{1 - \beta^2} l_0$$

onde $\beta = 1/2$ e portanto

$$l = \frac{\sqrt{3}}{2} l_0$$

pela substituição numérica, o objeto medido no referencial S tem o tamanho de $l \approx 8,7cm$.

Questão 7.

Para resolver o problema anterior, um físico parte da noção de que a medida no referencial S' foi feita no instante t', isto é, as posições x'_2, da frente, e x'_1, de trás, do objeto foram medidas no mesmo instante e o seu comprimento $L' = 10cm$ foi obtido como $x'_2 - x'_1$. A partir da transformação de Lorentz, o físico então determina as coordenadas x_2 e x_1 no sistema S que correspondem a x'_2 e x'_1, respectivamente. Que comprimento L ele encontra? Esse resultado é incorreto; explique por quê.

Solução:

Este resultado é incorreto pois a medida no referêncial S' é simultânea, entretanto ela perde a simultaneidade no referencial S e teria sido tomada em um intervalo $\Delta\tau$ de forma que no referencial S

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

com

$$\Delta\tau = \Delta t' - \frac{V}{c}\Delta x'$$

onde como o evento é simultâneo em S' o $\Delta t' = 0$ e consequentemente obtemos uma expressão para o intervalo de tempo em S proporcional ao comprimento próprio da barra

$$\Delta t = \frac{L'}{2c\sqrt{1-\beta^2}}$$

Questão 8.

Considere o exemplo de Einstein discutido em classe: um vagão de trem com comprimento L passa pela plataforma de uma estação com velocidade $V = c/2$. No instante em que o centro do vagão passa pelo chefe da estação, um passageiro no trem acende uma luz exatamente no centro do vagão. O passageiro toma esse instante como $t' = 0$ e o chefe da estação toma o mesmo instante como $t = 0$. Calcule os instantes $t'_f = t'_t$, medidos no referencial S' do vagão, em que a luz alcança as extremidades da frente e de trás do vagão e calcule os instante correspondentes t_f e t_t, medidos no referencial do chefe da estação.

Solução:

No referencial do vagão, os instantes t' são

$$t'_f = t'_t = \frac{2d}{c}$$

Já para o chefe da estação precisamos aplicar a transformação

$$t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right)$$

onde substituindo as informações do exercício temos que

$$t_f = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{2d}{c} + \frac{1}{2c}d\right)$$

e

$$t_t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{2d}{c} - \frac{1}{2c}d\right)$$

resultando em

$$t_f = \frac{5}{2\sqrt{3}}t'_f$$

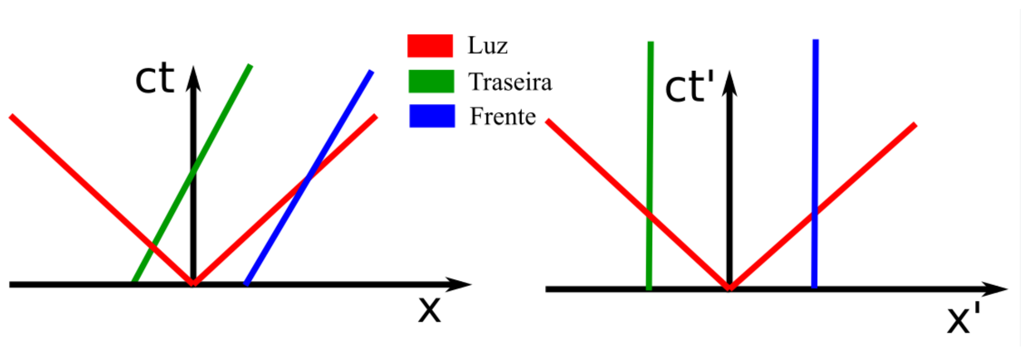
e

$$t_t = \frac{3}{2\sqrt{3}}t'_t.$$

Questão 9.

Esboce dois gráficos $x \times ct$ e $x' \times ct'$. Em cada um deles, mostra (a) a posição da luz em função do tempo; (b) a posição da parede na frente do vagão em função do tempo; e (c) a posição da parede de trás do vagão em função do tempo, desde o momento em que a luz é acesa até os momentos em que ela atinge as paredes. *Sugestão: Nos dois gráficos, a velocidade da luz deve ser a mesma, de forma que os gráficos (a) devem ser iguais nos dois referenciais. Para simplificar, não se preocupa com a contração de Lorentz e some ou subtraia as velocidades como na relatividade de Galileu.*

Solução:



Questão 10.

Um referencial S' tem velocidade V em relação ao referencial S de laboratório na direção $\hat{x}$. Um segundo referencial S" tem velocidade W en relação ao referencial S', também na direção $\hat{x}$. Considere um event que aconteceu no ponto x no instante t, no referencial S, no ponto x' no instante t', no referencial S' e no ponto x" no instante t", no referencial S". A transformação de Lorentz permite dizer que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M_V \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = M_W \begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix}$$

onde M_V e M_W são da forma da matriz 2x2 deduzidas em classe.

(a) Mostre que a transformação de Lorentz que relaciona x" et" com x e t pode ser escrita como um produto matricial análogo aos dois acima,

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = M_W M_V \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

Solução: Como as transformações podem ser escritas na forma

$$x' = xcos\phi + tsin\phi$$

e

$$x'' = x'cos\theta + t'sin\theta$$

com

$$t' = -xsin\phi + tcos\phi$$

e

$$t'' = -x'sin\theta + t'cos\theta$$

ao substituirmos as equações do referencial S' nas do referencial S" e evidenciar x e t temos

$$x'' = x(cos\theta cos\phi - sin\theta sin\phi) + t(cos\theta sin\phi + sin\theta cos\phi)$$

e

$$t'' = x(-sin\theta cos\phi - cos\theta sin\phi) + t(-sin\theta sin\phi + cos\theta cos\phi)$$

o que nos dá a matriz de mudança de base $M_W M_V$

$$M_W M_V = \begin{bmatrix} cos\theta cos\phi - sin\theta sin\phi & cos\theta sin\phi + sin\theta cos\phi \\ -sin\theta cos\phi - cos\theta sin\phi & -sin\theta sin\phi + cos\theta cos\phi \end{bmatrix}$$

(b) Se M_W for escrita na forma proposta em classe

$$M_W = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

e M_V for escrita analogamente,

$$M_V = \begin{bmatrix} cos\phi & sin\phi \\ -sin\phi & cos\phi \end{bmatrix}$$

qual será o ângulo que define a matriz $M_{W/V}$?

Solução:

Do exercício anterior tiramos que

$$M_W M_V = \begin{bmatrix} cos\theta cos\phi - sin\theta sin\phi & cos\theta sin\phi + sin\theta cos\phi \\ -sin\theta cos\phi - cos\theta sin\phi & -sin\theta sin\phi + cos\theta cos\phi \end{bmatrix}$$

onde podemos aplicar as equações de adição e subtração de ângulos em senos e cossenos

$$sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)$$
$$sin(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)$$
$$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$$
$$cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$$

e portanto

$$M_W M_V = \begin{bmatrix} cos(\theta+\phi) & sin(\theta+\phi) \\ -sin(\theta+\phi) & cos(\theta+\phi) \end{bmatrix}$$

sendo $\theta + \phi$ o ângulo que define a matriz.