

# Lista de Exercícios - Lógica

PCS3438 - Inteligência Artificial

Outubro 2019

## 1 Sugestão de leitura para estudo

Sobre esta parte da matéria, sugere-se a leitura dos seguintes capítulos do livro Inteligência Artificial, 5ª edição:

Capítulo 7: Agentes Lógicos

Capítulo 8: Lógica de Primeira Ordem

Capítulo 9: Inferência em Lógica de Primeira Ordem

Além disso, recomenda-se que estudem os *slides* da disciplina e o material sobre transformação de sentenças de lógica de primeira ordem para a forma clausal (material complementar no *site* da disciplina).

## 2 Resumo

### 2.1 Conectivos Lógicos

- $\neg$  negação (não)
- $\wedge$  conjunção (e)
- $\vee$  disjunção (ou)
- $\rightarrow$  implicação (condicional, se ... então)
- $\leftrightarrow$  bicondicional (se e somente se)

### 2.2 Resolução

$$\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vee \gamma \models \beta \vee \gamma$$

### 2.3 Propriedades

- Comutatividade em  $\wedge$ :  $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
- Comutatividade em  $\vee$ :  $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
- Associatividade de  $\wedge$ :  $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

- Associatividade de  $\vee$ :  $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
- Eliminação da dupla negação:  $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
- Contraposição:  $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
- Eliminação da implicação:  $(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$
- Exclusão da bicondicional:  $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
- De Morgan:  $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
- De Morgan:  $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
- Distribuição de  $\wedge$  sobre  $\vee$ :  $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$
- Distribuição de  $\vee$  sobre  $\wedge$ :  $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$

## 2.4 Transformação em Cláusulas

1.  $\alpha \leftrightarrow \beta$  substitui por  $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
2.  $\alpha \rightarrow \beta$  substitui por  $\neg\alpha \vee \beta$
3. Trata negação:  $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$ ;  $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ ;  $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
4.  $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

## 3 Exercícios

1. Decida se cada uma das sentenças a seguir é válida (tautologia), insatisfazível (contradição) ou nenhuma das opções. Verifique suas decisões usando tabelas-verdade ou as propriedades definidas na seção 2.

- (a) Fumaça  $\rightarrow$  Fumaça
- (b) Fumaça  $\rightarrow$  Fogo
- (c)  $(\text{Fumaça} \rightarrow \text{Fogo}) \rightarrow (\neg\text{Fumaça} \rightarrow \neg\text{Fogo})$
- (d)  $\text{Fumaça} \vee \text{Fogo} \vee \neg\text{Fogo}$
- (e)  $((\text{Fumaça} \wedge \text{Calor}) \rightarrow \text{Fogo}) \leftrightarrow ((\text{Fumaça} \rightarrow \text{Fogo}) \vee (\text{Calor} \rightarrow \text{Fogo}))$
- (f)  $(\text{Fumaça} \rightarrow \text{Fogo}) \rightarrow ((\text{Fumaça} \wedge \text{Calor}) \rightarrow \text{Fogo})$
- (g)  $\text{Grande} \vee \text{Burro} \vee (\text{Grande} \rightarrow \text{Burro})$

2. Converta o seguinte conjunto de sentenças para a forma clausal.

- S1:  $A \leftrightarrow (B \vee E)$
- S2:  $E \rightarrow D$
- S3:  $C \wedge F \rightarrow \neg B$

3. Considere um vocabulário com os símbolos seguintes:

- $Ocupação(p,o)$ : Predicado. A pessoa  $p$  tem a ocupação  $o$ ;
- $Cliente(p1,p2)$ : Predicado. A pessoa  $p1$  é cliente da pessoa  $p2$ ;
- $Chefe(p1,p2)$ : Predicado. A pessoa  $p1$  é chefe da pessoa  $p2$ .
- $Médico, Cirurgião, Advogado, Ator$ : Constantes que indicam ocupações.
- $Emília, Joe$ : Constantes que indicam pessoas.

Use estes símbolos para escrever as seguintes asserções em lógica de primeira ordem.

- (a) Emília é cirurgiã ou advogada;
- (b) Joe é um ator, mas ele também tem outro trabalho;
- (c) Todos os cirurgiões são médicos;
- (d) Joe não tem um advogado (isto é, não é cliente de nenhum advogado);
- (e) Emília tem um chefe que é advogado;
- (f) Há um advogado cujos clientes são todos médicos;
- (g) Todo cirurgião tem um advogado.

4. Complete os itens a seguir:

(a) Redigir em palavras:

$$\forall x,y,l, \text{Falaidioma}(x,l) \wedge \text{Falaidioma}(y,l) \\ \rightarrow \text{Compreende}(x,y) \wedge \text{Compreende}(y,x)$$

(b) Traduza as frases a seguir em lógica de primeira ordem.

- i) Compreender leva à amizade.
- ii) A amizade é intransitiva.

Utilize as seguintes definições:  $\text{Compreende}(x,y)$  para  $x$  compreende  $y$  e  $\text{Amigo}(x,y)$  para  $x$  é amigo de  $y$ .

5. Este exercício usa os predicados  $Em(x,y)$ ,  $Fronteira(x,y)$  e  $País(x)$ , cujos argumentos são regiões geográficas junto a símbolos constantes para as várias regiões. Em cada um dos seguintes itens expressamos uma sentença e um número de expressões lógicas candidatas. Para cada uma das expressões lógicas, determine se ela (1) expressa corretamente a sentença; (2) é inválida sintaticamente e portanto não tem significado; ou (3) é válida sintaticamente mas não expressa o significado da sentença.

- (a) Paris e Marseilles localizam-se na França.
- (i)  $Em(\text{Paris} \wedge \text{Marselha}, \text{França})$ .
  - (ii)  $Em(\text{Paris}, \text{França}) \wedge Em(\text{Marselha}, \text{França})$ .
  - (iii)  $Em(\text{Paris}, \text{França}) \vee Em(\text{Marselha}, \text{França})$ .
- (b) Existe um país que faz fronteira tanto com o Iraque como com o Paquistão.
- (i)  $\exists c \text{País}(c) \wedge \text{Fronteira}(c, \text{Iraque}) \wedge \text{Fronteira}(c, \text{Paquistão})$ .
  - (ii)  $\exists c \text{País}(c) \rightarrow [\text{Fronteira}(c, \text{Iraque}) \wedge \text{Fronteira}(c, \text{Paquistão})]$ .
  - (iii)  $[\exists c \text{País}(c)] \rightarrow [\text{Fronteira}(c, \text{Iraque}) \wedge \text{Fronteira}(c, \text{Paquistão})]$ .
  - (iv)  $\exists c \text{Fronteiras}(\text{País}(c), \text{Iraque} \wedge \text{Paquistão})$ .
- (c) Todos os países que fazem fronteira com o Equador estão na América do Sul.
- (i)  $\forall c \text{País}(c) \wedge \text{Fronteira}(c, \text{Equador}) \rightarrow Em(c, \text{América do Sul})$ .
  - (ii)  $\forall c \text{País}(c) \rightarrow [\text{Fronteira}(c, \text{Equador}) \rightarrow Em(c, \text{América do Sul})]$ .
  - (iii)  $\forall c [\text{País}(c) \rightarrow \text{Fronteira}(c, \text{Equador})] \rightarrow Em(c, \text{América do Sul})$ .
  - (iv)  $\forall c \text{País}(c) \wedge \text{Fronteira}(c, \text{Equador}) \wedge Em(c, \text{América do Sul})$ .
- (d) Nenhuma região da América do Sul faz fronteira com qualquer região da Europa.
- (i)  $\neg[\exists c, d Em(c, \text{América do Sul}) \wedge Em(d, \text{Europa}) \wedge \text{Fronteira}(c, d)]$ .
  - (ii)  $\forall c, d [Em(c, \text{América do Sul}) \wedge Em(d, \text{Europa}) \rightarrow \neg\text{Fronteira}(c, d)]$ .
  - (iii)  $\neg\forall c Em(c, \text{América do Sul}) \rightarrow \exists d Em(d, \text{Europa}) \wedge \neg\text{Fronteira}(c, d)$ .
  - (iv)  $\forall c Em(c, \text{América do Sul}) \rightarrow \forall d Em(d, \text{Europa}) \rightarrow \neg\text{Fronteira}(c, d)$ .

6. Assumindo os predicados  $PaiOuMãe(p, \theta)$  e  $Feminino(p)$  e as constantes Joan e Kevin, com os significados óbvios, expresse cada uma das seguintes sentenças em lógica de primeira ordem (você pode usar a abreviatura  $\exists^1$  para significar “existe exatamente um”).

- (a) Joan tem uma filha (possivelmente mais do que uma e, possivelmente, filhos também);
- (b) Joan tem exatamente uma filha (mas pode ter filhos também);
- (c) Joan tem exatamente um filho ou filha;
- (d) Joan e Kevin têm exatamente um filho ou filha juntos;
- (e) Joan tem pelo menos um filho ou filha com Kevin e não tem filhos com mais ninguém.

7. Represente as sentenças a seguir em lógica de primeira ordem usando um vocabulário consistente (que você mesmo deve definir):

- (a) Alguns alunos cursaram francês na primavera de 2001;
- (b) Todos os alunos que cursam aulas de francês passam;
- (c) Somente um aluno cursou grego na primavera de 2001;
- (d) Toda pessoa que compra um seguro é inteligente;
- (e) Ninguém compra um seguro caro;
- (f) Existe um agente que só vende seguros às pessoas que não têm seguro;
- (g) Existe um barbeiro que faz a barba de todos os homens na cidade que não fazem a própria barba;
- (h) Uma pessoa nascida no Reino Unido, que tem um de seus pais um cidadão do Reino Unido ou um residente do Reino Unido, é um cidadão do Reino Unido de nascença;
- (i) Uma pessoa nascida fora do Reino Unido, que tem um de seus pais um cidadão de nascença do Reino Unido, é um cidadão do Reino Unido por descendência;
- (j) Os políticos podem enganar algumas pessoas todo o tempo, podem enganar todas as pessoas por algum tempo, mas não podem enganar todas as pessoas todo o tempo;
- (k) Todos os gregos falam a mesma língua. (Use  $Fala(x, l)$  para dizer que a pessoa  $x$  fala o idioma  $l$ ).

8. Dadas as sentenças:

- João estuda ou não está cansado.
- Se João estuda, então dorme tarde.
- João não dorme tarde ou está cansado.

Provar que “João está cansado se e somente se estuda”, (isto é, deduzir que “Se João está cansado então estudou” e “Se João estudou então está cansado”), usando lógica proposicional, adotando a seguinte nomeação:

- “João estuda” =  $p$ ;
- “João está cansado” =  $q$ ;
- “João dorme tarde” =  $r$ .

9. Considere as seguintes sentenças:

- Todos os cães gostam de comer carne;
- Se um animal for pastor alemão, então este animal é um cão;
- Toda linguiça é carne;
- Calabresa é uma linguiça;
- Totó é um pastor alemão.

(a) Traduza estas sentenças para lógica de predicados;

(b) Mostrar uma prova para “Totó gosta de comer calabresa” utilizando prova direta por resolução;

10. Dadas as sentenças:

- Todos que amam todos os animais são amados por alguém.
- Qualquer um que mate um animal não é amado por ninguém.
- Jack ama todos os animais.
- O gato, chamado Tuna, foi morto por Jack ou por Ana.

Use refutação por resolução para saber se Ana matou o gato.