___/___/___ S T Q Q S S D

$p_f[-2,-1,2](x) = 2 + (-3)(x+2) + \frac{11}{12}(x+2)(x+1)$

$f[x_0]$ $f[x_0, x_1]$ "$x - x_0$" $f[x_0, x_1, x_2]$

Acrescentando o ponto $(3,3)$

$+\left(\frac{-7}{60}\right)(x+2)(x+1)(x-2)$

com isso $\rightsquigarrow p_f[-2,-1,2,3]$

23/10

Aula passada:

Interpolação polinomial com forma di Newton e diferenças divididas

Hoje: erro da interpolação polinomial

Notação | $p_f[\underbrace{x_0, x_1, \dots, x_n}]$: interpolador de f nos pontos dados, em P

a ordem aqui não é importante

ordem não importa

$f[\underbrace{x_0, \dots, x_n}]$: coef. de x^n do polinômio $p_f[x_0, \dots, x_n]$

Relação:

$$f[\gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha, \beta] = \frac{f[\gamma_1, \dots, \gamma_k, \beta] - f[\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_k]}{\beta - \alpha}$$

$\parallel$

$f[\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \beta]$

" diferenças divididas "

→ construímos a "tabela de diferenças divididas"

Ex. $n=3$

x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f(x_3)$			

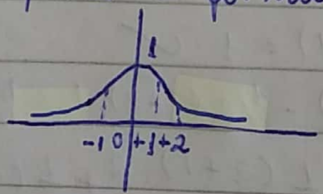
↑

$f[x_i]$

$$p_f[x_0,x_1,x_2,x_3](x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + $$
$$+ f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)$$

Exemplo (em que f é dada por uma fórmula)

Interpolar $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$:



nos pontos $-1, 0, +1, +2$
$\quad\quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$ grau 3

polinômio em P_3

Vamos montar $p_f[-1,0,+1,+2]$ na mesma ordem que esses pontos têm na reta: (OBS: mas não precisa)

$$p_f[-1,0,1,2](x) = f[-1] + f[-1,0](x+1) + f[-1,0,1](x+1)x + $$
$$+ f[-1,0,1,2](x+1)x(x-1)$$

Scanned by CamScanner

Valores da f:

$f(-1) = f(1) = 1/2$

$f(0) = 1, \quad f(2) = 1/5$

x	$f(x)$			
-1	$1/2$ $\;f[-1]$			
		$1/2$ $\;f[-1,0]$		
			$\dfrac{-1/2 - 1/2}{1-(-1)} = -1/2$ $\;f[-1,0,1]$	
0	1 $\;f[0]$			
		$-1/2$ $\;f[0,1]$		$\dfrac{1/10 - (-1/2)}{2-(-1)} = \dfrac{1}{5}$ $\;f[-1,0,1,2]$
$+1$	$1/2$			
			$\dfrac{-3/10 - (-1/2)}{2-0} = 1/10$ $\;f[0,1,2]$	
		$-3/10$		
$+2$	$1/5$			

$\therefore$

$$\boxed{p[-1,0,1,2](x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)x + \frac{1}{5}(x+1)x(x-1)}$$

$\quad \| $

$\quad p$

Conferindo:

$p(-1) = 1/2$ ✓

$p(0) = 1/2 + 1/2(0+1) = 1$ ✓

$p(1) = 1/2 + \cancel{1/2(1+1)} - \cancel{1/2(1+1)}.1 = 1/2$ ✓

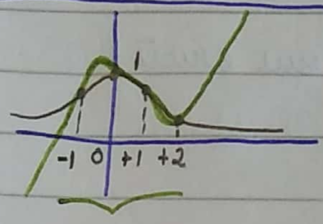
$p(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2+1) - \frac{1}{2}(2+1).2 + \frac{1}{5}(2+1).2(2-1)$

$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{6}{5} = -1 + \frac{6}{5} = \frac{1}{5}$ ✓

Scanned by CamScanner

Exercício

Usem a mesma tabela p/ montar o polinômio com outras ordenações



Próximo passo

Quanto erramos ao "trocar" f pelo interpolador? (principalmente no intervalo entre o menor e o maior dos pontos interpolados)

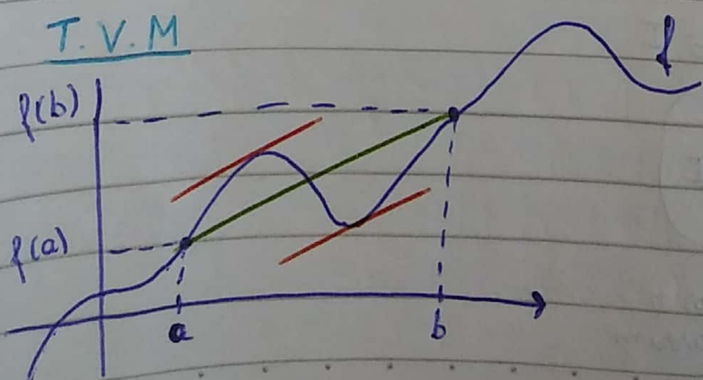
$$| f(x) - p_f [x_0, \ldots, x_n](x) | \leq ?$$

Obs: obter a estimativa de erro sem ter calculado o p_f

Para isso, vamos antes obter uma relação entre a dif. dividida de $n+1$ pontos e a derivada n-ésima da f: $f^{(n)}$

generalização do Teo. do Valor Médio

T.V.M



Se f é diferenciável, existe (pelo menos) um ponto $\xi \in (a,b)$ t.q.

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f[b]-f[a]}{b-a} = f[a,b]$$

(não sabemos quem é ξ, sabemos apenas que existe)

Generalização do T.V.M.

$x_0, x_1, \dots, x_n$ pontos dados

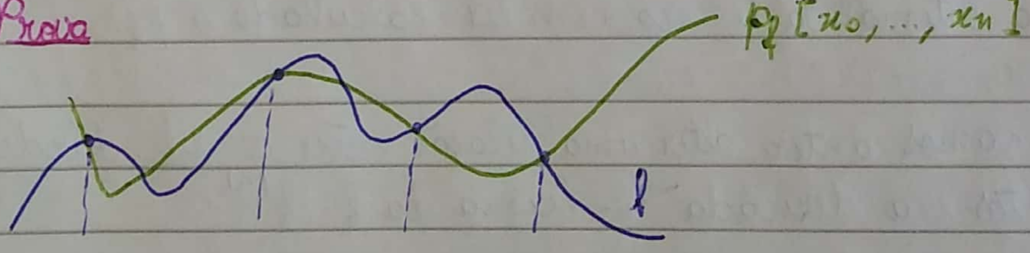
f função n-vezes diferenciável

I intervalo que contém todos os pontos.

Então existe $\xi \in I$ t.q

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

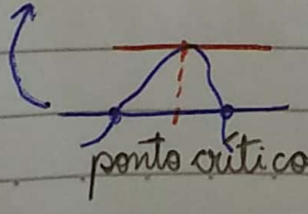
Prova



$$E(x) \stackrel{\text{def.}}{=} f(x) - p_n[x_0, \dots, x_n](x)$$

$$\underbrace{E(x_0) = E(x_1) = \dots = E(x_n) = 0}_{\text{tem (pelo menos) } n+1 \text{ zeros } \in I}$$

$\Rightarrow$ E' tem (pelo menos) n zeros $\in I$



pelo menos n intervalos assim

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow E''$ tem (pelo menos) $n-1$ zeros $\in I$

$\vdots$

$\Rightarrow E^{(n)}$ tem (pelo menos) $\underbrace{n-(n-1)}_{=1}$ zero $\in I$

Vamos chamar de ξ esse zero de $E^{(n)}$:

$$\boxed{E^{(n)}(\xi)=0} \quad (\leftarrow \exists\, \xi \in I)$$

Mas o que é $E^{(n)}(x)$?

$$E^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - \frac{d^n}{dx^n}\, p_f[x_0,\dots,x_n](x)$$

isso é um coeficiente

$$p_f[x_0,\dots,x_n](x) = f[x_0,\dots,x_n]\, x^n + \cancel{\text{termos de grau} \le n-1} \to 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(\dots) = n!\, f[x_0,\dots,x_n]$$

Reescrevendo $E^{(n)}(\xi)=0$

$$f^{(n)}(\xi) - n!\, f[x_0,\dots,x_n] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f[x_0,\dots,x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}} \quad \text{C.Q.D}$$

Estimativa do erro da interpolação

erro $E(x) = f(x) - p_f[x_0, \dots, x_n](x)$

$$f(x) = \underbrace{p_f[x_0, \dots, x_n, x](x)}_{\in \mathcal{P}_{n+1}}$$

(se ele interpola tb. o x, então ele vale $f(x)$ no x)

$$\Rightarrow E(x) = p_f[x_0, \dots, x_n, x](x) - p_f[x_0, \dots, x_n](x)$$
$$= f[x_0, \dots, x_n, x].(x - x_0) \dots (x - x_n)$$

T.V.M generalizado:

num intervalo I que contenha $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ existe um ξ t.q.

$$f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

tem 1 ponto a mais

Portanto:

$$\boxed{E(x) = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(x - x_0) \dots (x - x_n), \text{ p/ algum } \xi \in I}$$

Cuidado: $\xi = \xi(x)$

Porém:

$$\left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \leq \max_{t \in I} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

Então

$$\boxed{|E(x)| \leq \frac{\max_{t \in I} |f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} \left| (x - x_0) \dots (x - x_n) \right|}$$

fórmula de erro da interpolação polinomial

Scanned by CamScanner