

21/10/19

Bases ortogonais e matrizes ortogonaissuponha que a_1, a_2, a_3 é base de $\mathbb{R}^3$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

como escrever um vetor b dado como combinação linear de a_1, a_2, a_3 ?Queremos encontrar $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tal que $b = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ b \\ | \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

E se os vetores q_1, q_2, q_3 forem vetores ortonormais em $\mathbb{R}^3$?

$$q_1^T (b = x_1 q_1 + x_2 q_2 + x_3 q_3) = 0$$

$$q_1^T b = x_1 (q_1^T q_1) + x_2 (q_1^T q_2) + x_3 (q_1^T q_3)$$

$$\boxed{q_1^T b = x_1}$$

da mesma forma

$$\boxed{q_2^T b = x_2}$$

$$\boxed{q_3^T b = x_3}$$

$$b = (q_1^T b) q_1 + (q_2^T b) q_2 + (q_3^T b) q_3$$

$$b = x_1 q_1 + x_2 q_2 + x_3 q_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ b \\ | \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ q_1^T b \\ | \\ q_2^T b \\ | \\ q_3^T b \\ | \end{bmatrix}$$

$$Q^T = Q^{-1}$$

$$(Q \cdot x = b) \Leftrightarrow \boxed{x = Q^T b}$$

Uma matriz Q quadrada cujas colunas são ortonormais é chamada de uma matriz ortogonal, isto é, uma matriz quadrada Q é ortogonal se $Q^{-1} = Q^T$ De volta ao MMQ

$$A_{m \times n}, m > n$$

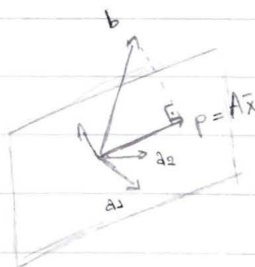
$$Ax = b$$

MMQ

$$A^T A x = A^T b$$

$$\tilde{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$p = A \tilde{x}$$



matriz de projeção

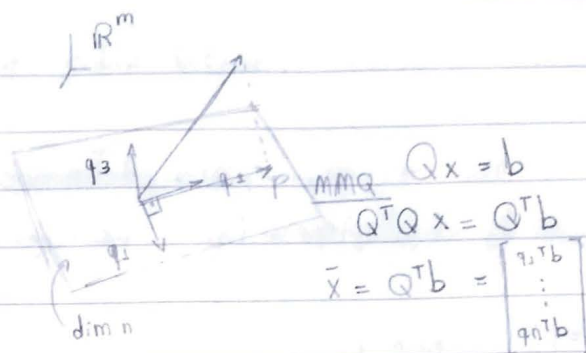
$$P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

$$Q = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ são ortonormais

$$p = Q\bar{x} = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^T b \\ \vdots \\ q_n^T b \end{bmatrix} =$$

$$p = (q_1^T b)q_1 + (q_2^T b)q_2 + \dots + (q_n^T b)q_n$$



$$\bar{x} = Q^T b = \begin{bmatrix} q_1^T b \\ \vdots \\ q_n^T b \end{bmatrix}$$

E se Q é quadrada $n \times n$, a fórmula de cima diz o quê?

Se $q_1, q_2, \dots, q_n$ são ortonormais em $\mathbb{R}^n$ podemos (tentar) escrever um vetor b como combinação linear de $q_1, \dots, q_n$:

$$b = x_1 q_1 + \dots + x_n q_n$$

conseguimos?

$$q_1^T (b = x_1 q_1 + \dots + x_n q_n)$$

$$q_1^T b = x_1, q_2^T b = x_2, \dots, q_n^T b = x_n$$

Isso mostra que $q_1, \dots, q_n$ são linearmente independentes e geram $\mathbb{R}^n$

Como fica a figura no topo dessa página no caso $m = n$?

* projetar b no espaço em que ele está $\Rightarrow$ projeção de b é igual a b *

$$Qx = b$$

$$\boxed{Q_{n \times n}} \quad Q^T Q x = Q^T b \quad \begin{bmatrix} q_1^T b \\ q_2^T b \\ \vdots \\ q_n^T b \end{bmatrix}$$

$$x = Q^T b = \begin{bmatrix} q_1^T b \\ q_2^T b \\ \vdots \\ q_n^T b \end{bmatrix}$$

$$b = (q_1^T b)q_1 + \dots + (q_n^T b)q_n = p$$

Como encontrar bases ortonormais: processo de Gram-Schmidt

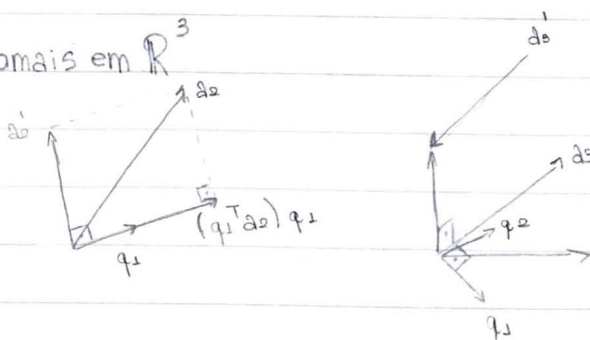
$\{a_1, a_2, a_3\}$ vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$



$\{q_1, q_2, q_3\}$ vetores ortonormais em $\mathbb{R}^3$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} \quad q_2 = \frac{a_2'}{\|a_2'\|} \quad q_3 = \frac{a_3'}{\|a_3'\|}$$



$$a_2' = a_2 - (q_1^T a_2)q_1$$

$$a_3' = a_3 - (q_1^T a_3)q_1 - (q_2^T a_3)q_2$$

Em geral, se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são L.I. $q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$

Tendo definido $q_1, q_2, \dots, q_{j-1}$, definimos q_j da seguinte forma:

$$a_j' = a_j - (q_1^T a_j) q_1 - (q_2^T a_j) q_2 - \dots - (q_{j-1}^T a_j) q_{j-1} \quad q_j = \frac{a_j'}{\|a_j'\|}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$a_2' = a_2 - (q_1^T a_2) q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{a_2'}{\|a_2'\|} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$a_3' = a_3 - (q_1^T a_3) q_1 - (q_2^T a_3) q_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} - \sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad q_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz ortogonal}$$

$$Q^T Q = I \quad Q^T = Q^{-1} \quad \underbrace{Q Q^T}_{(Q^T)^T Q^T} = I$$

Computacionalmente, é mais simples calcular todos os a_i e apenas no fim dividir pelas normas para obter os q_i 's

$$a_1' = a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

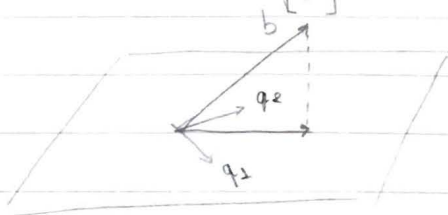
$$a_2' = a_2 - \frac{(a_1')^T a_2}{(a_1')^T (a_1')} \cdot a_1' = \left(\frac{(a_1')^T a_2}{\|a_1'\|^2} \right) \cdot a_1' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$a_3' = a_3 - \frac{(a_1')^T a_3}{(a_1')^T (a_1')} \cdot a_1' - \frac{(a_2')^T a_3}{(a_2')^T (a_2')} \cdot a_2' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suponha que queremos projetar $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ no espaço gerado por $q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ e $q_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$$Qx = b$$

$$Q = \begin{bmatrix} | & | \\ q_1 & q_2 \\ | & | \end{bmatrix}$$



MMQ

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

multiplique ambos os lados por Q^T e resolva $Q^T Q x = Q^T b$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

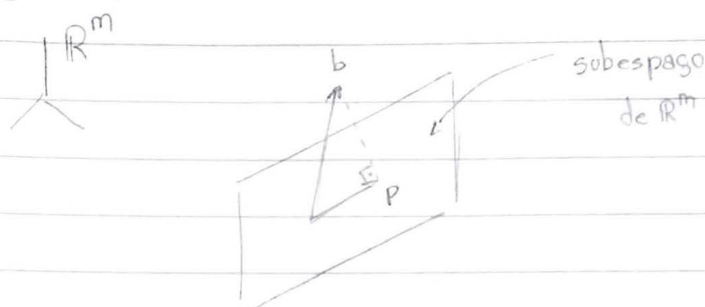
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} \\ x_2 = -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$p = x_1 q_1 + x_2 q_2 = \frac{4}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

MMQ (Projeções em subespaços)

Quando A é uma matriz $m \times n$ ($m \geq n$) resolver $Ax = b$ pelo MMQ é a mesma coisa que encontrar a projeção de b no subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas colunas de A



receitinha: multiplique ambos os lados de $Ax = b$ pela transposta A^T

$$A^T A x = A^T b$$

$$\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b \quad e \quad p = A \bar{x} = A (A^T A)^{-1} A^T b$$

A matriz $A^T A$ é chamada matriz normal e o sistema (quadrado, $n \times n$, simétrico) $A^T A x = A^T b$ é chamado sistema normal ($A^T A$ é inversível $\Leftrightarrow$ colunas de A são L.I.)

$$A^T A = [a_i^T a_j] \quad A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

comentário: $A^T A$ é especialmente simples se as colunas de A são ortogonais (i.e. $a_i^T a_j = 0$, se $i \neq j$):

neste caso

$$A^T A = \begin{bmatrix} \|a_1\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|a_2\|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \|a_n\|^2 \end{bmatrix} \quad A^T b = \begin{bmatrix} a_1^T b \\ a_2^T b \\ \vdots \\ a_n^T b \end{bmatrix}$$

e portanto, $x_1 = \frac{a_1^T b}{\|a_1\|^2}$, $x_2 = \frac{a_2^T b}{\|a_2\|^2}$, ..., $x_n = \frac{a_n^T b}{\|a_n\|^2}$

$$p = \frac{a_1^T b}{\|a_1\|^2} a_1 + \frac{a_2^T b}{\|a_2\|^2} a_2 + \dots + \frac{a_n^T b}{\|a_n\|^2} a_n$$

é a projeção de b no espaço gerado por $a_1, \dots, a_n$. Note que neste caso p é a soma das projeções ortogonais em cada uma das direções a_i

Vamos mudar de $\mathbb{R}^n$ para espaços de funções

O que usamos de $\mathbb{R}^n$ é importante para o que fizemos até agora:

$$\text{soma: } \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}$$

$$(\in \mathbb{R}^n) \times (\in \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

multiplicação por escalar:

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{bmatrix}$$

$$\in \mathbb{R} \times \in \mathbb{R}^n \rightarrow \in \mathbb{R}^n$$

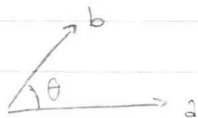
outra operação importante é o produto interno:

se $a, b \in \mathbb{R}^n$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$\langle a, b \rangle = a^T b = \text{produto interno de } a, b = \text{número real}$

Teorema: $\cos(\theta) = \frac{a^T b}{\|a\| \|b\|}$



em particular: $a \perp b \Leftrightarrow a^T b = 0$

produto interno tem 3 propriedades fundamentais

Vamos denotar o produto interno assim:

① $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$

② $\langle a+b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$

③ $\langle a, a \rangle \geq 0$ e $\langle a, a \rangle = 0 \Rightarrow a = 0$

Em geral, se V é um espaço vetorial (i.e., um conjunto com duas operações $+$ (soma) e $\cdot$ (produto por escalar) satisfazendo as propriedades usuais (comutatividade, distributividade, ...) e em V definimos uma operação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (para dois vetores e produz um número) com as propriedades ①, ②, ③, chamamos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de (um) produto interno em V

Ex.: $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) = \{ \text{todas as funções contínuas } [a, b] \text{ em } \mathbb{R} \}$

$$\begin{array}{l} f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \\ g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{soma}} (f+g): [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + g(x) \\ \xrightarrow{\text{produto por escalar}} (\alpha f): [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha f(x) \end{array} \right.$$

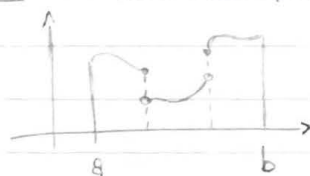
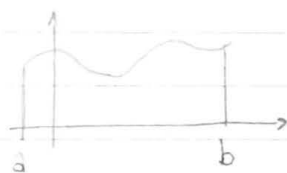
(Não faremos aqui: $f \cdot g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$)

Soma e produto por escalar tornam $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ um espaço vetorial. Como pensar na relação entre $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{F}$? Vetores em ambos os espaços são "listas" de números

Como definir um produto interno de funções?

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx \quad \left\langle \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

obs.: vamos trabalhar com funções contínuas ou contínuas por partes



propriedades de $\langle f, g \rangle$:

① $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

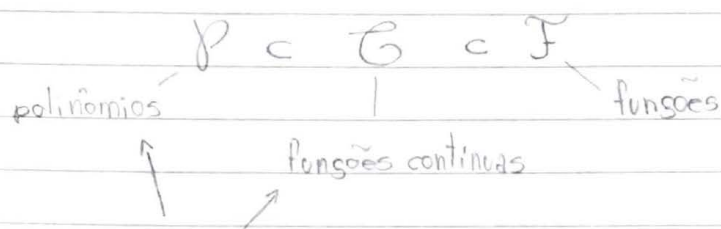
②
$$\begin{aligned} \langle f+g, h \rangle &= \int_a^b (f+g)(x) h(x) dx \\ &= \int_a^b (f(x) + g(x)) h(x) dx \\ &= \int_a^b (f(x) h(x) + g(x) h(x)) dx \\ &= \int_a^b f(x) h(x) dx + \int_a^b g(x) h(x) dx = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle \end{aligned}$$

$\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$

$$\int_a^b \alpha f(x) g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) g(x) dx$$

③ $\langle f, f \rangle \geq 0$ e $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$

$\int_a^b f(x)^2 dx \geq 0$ $\int_a^b f(x)^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \forall x$ se $f \in \mathcal{C}$



Subespaços se são subconjuntos que são fechados sob as operações $+$, $\cdot$.

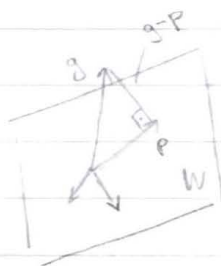
por exemplo: $V =$ espaço de funções contínuas em $[0,1]$

$W =$ subespaço de polinômios de grau ≤ 1

$W = \{a + bx; a, b \in \mathbb{R}\}$

Suponha que queremos projetar ortogonalmente uma função $g(x)$ em W , sob o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

○ que é projetar ortogonalmente?



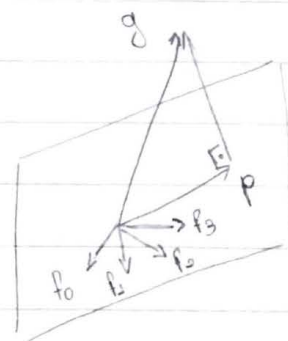
Queremos encontrar $p(x) = c_0 + c_1 x$ tal

que $(g-p)$ seja ortogonal a todo vetor em W

Queremos que $(g-p) \perp (a+bx) \forall a+bx \in W, \forall a, b \in \mathbb{R}$

$(g-p) \perp (\text{espaço gerado por } f_0, f_1, \dots, f_n)$

observação: basta para isso que $(g-p)$ seja ortogonal a cada um dos vetores $f_0, f_1, \dots, f_n$. Por quê?



Lema: Seja W o espaço gerado por $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$; isto é,

$W = \{c_0 f_0 + c_1 f_1 + \dots + c_n f_n; c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$

Um vetor h é ortogonal a todos os vetores de $W \iff h \perp f_i \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$

Ex.: $W =$ espaço gerado pelos polinômios $\{ \underset{f_0}{1}, \underset{f_1}{x}, \underset{f_2}{x^2}, \dots, \underset{f_n}{x^n} \}$

$$W = \{ c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n; c_i \in \mathbb{R} \}$$

$H =$ espaço gerado por $\{ x, x^3, x^5, x^7, x^9 \}$

$$H = \{ a x + b x^3 + c x^5 + d x^7 + e x^9; a, \dots, e \in \mathbb{R} \}$$

$$G = \{ a \cos(x) + b \sin(x); a, b \in \mathbb{R} \}$$

Prova: $h \perp$ a todos os vetores de W , obviamente $h \perp f_i \forall i=0, 1, \dots, n$.

Suponha que $h \perp f_i \forall i=0, 1, \dots, n$, isto é, $\langle h, f_i \rangle = 0 \forall i=0, 1, \dots, n$

Tome um vetor qualquer de W , $c_0 f_0 + \dots + c_n f_n$, com $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

$$\langle h, c_0 f_0 + c_1 f_1 + \dots + c_n f_n \rangle = 0$$

$$\langle h, c_0 f_0 + \dots + c_n f_n \rangle = \langle h, c_0 f_0 \rangle + \dots + \langle h, c_n f_n \rangle$$

$$= c_0 \langle h, f_0 \rangle + c_1 \langle h, f_1 \rangle + \dots + c_n \langle h, f_n \rangle$$

$$= c_0 \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 = 0$$

Exemplo: Projetar $g(x) = e^x$ no espaço $W = \{ \text{polis de grau} \leq 1 \}$