MAT-2454 – Cálculo II
Aulas 20 e 21: Máximos e Mínimos em abertos de $\mathbb{R}^2$

Alexandre Lymberopoulos

Para Escola Politécnica – USP

IME–USP — Departamento de Matemática

Ordem do dia

1. Nomenclatura para conjuntos em $\mathbb{R}^2$

2. Pontos de Máximo, Mínimo ou Críticos

ABERTOS, FECHADOS...

- Dizemos que um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ é *aberto* se para todo ponto $(x_0, y_0) \in A$ existe um $r > 0$ tal que

$$B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\} \subset A.$$

  O conjunto $B_r(x_0, y_0)$ é chamado *bola aberta* de centro (x_0, y_0) e raio r. A definição de um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ é análoga.
- Exemplos: bolas abertas são abertos, o vazio é aberto e $\mathbb{R}^2$ é aberto.
- Dizemos que um conjunto é *fechado* se seu complementar em $\mathbb{R}^2$ é aberto.
- Exemplos: o vazio e o $\mathbb{R}^2$ são fechados (únicos simultaneamente abertos e fechados).
- Um ponto $(x_0, y_0) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ é *ponto interior* se existe uma bola centrada em (x_0, y_0) inteiramente contida em A. Todos os pontos de um aberto são interiores.

Interior, Fecho, Fronteira...

- O *interior de* A, denotado por $int(A)$ ou $\mathring{A}$, é conjunto de todos os pontos interiores de A, ou ainda, o "maior" aberto contido em A.
- O *fecho de* A é o menor conjunto fechado que contém A, denotado por $\overline{A}$.
- A *fronteira de* A é o conjunto $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.
- **Observação**: A é aberto se e só se $\mathring{A} = A$ e A é fechado se e só se $\overline{A} = A$.
- Exemplos:

  Fácil: Determine interior, fecho e fronteira de um disco fechado, de raio 1 e centro na origem.

  Médio: Determine o interior, fecho e fronteira de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$.

  Díficil: Determine interior, fecho e fronteira em $\mathbb{R}^2$ de $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

  Estranho: Determine interior, fecho e fronteira de $\emptyset$ e de $\mathbb{R}^2$.

DE NOVO?

- Sim! Só que agora para funções em várias variáveis.
- O objetivo é fazer uma teoria análoga à vista em Cálculo I, onde estudamos máximos e mínimos de funções definidas em intervalos abertos (que são um tipo de conjunto aberto em $\mathbb{R}$) e depois em intervalos fechados (um tipo de fechado[1] em $\mathbb{R}$).
- Se $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função dizemos como antes que (x_0, y_0) é *ponto de máximo* de f se

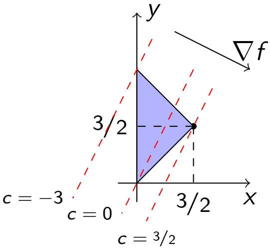
$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \text{ para todo } (x, y) \in A.$$

- Analogamente, (x_0, y_0) é *ponto de mínimo* de f se $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, para todo $(x, y) \in A$.
- Ainda, (x_0, y_0) é *ponto de máximo local* de f se existe $B_r(x_0, y_0)$, $r > 0$, tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, para todo $(x, y) \in B_r(x_0, y_0)$.
- A definição de mínimo local é análoga.

[1] na verdade é mais que isso: é um *compacto*, veremos depois.

Exemplos

- A origem é ponto de mínimo de $f(x,y) = x^2 + y^2$.
- Sejam $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x, y \geq 0, y \geq x, x + y \leq 3$ e $f \colon A \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = 2x - y$. Vamos usar as curvas de nível de f, que são retas da forma $y = 2x - c$, para estudar máximos e mínimos. Nos pontos do interior de A a direção de crescimento máximo é a do gradiente, $\nabla f(x,y) = (2,-1)$ (ortogonal às curvas de nível).

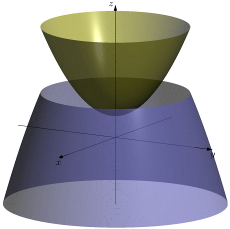


O ponto de A que pertence à curva de maior nível é o máximo, a saber $(3/2, 3/2)$. Analogamente, o menor nível é atingido no ponto $(0,3)$.

Analiticamente,
$f(x,y) - f(0,3) = 2x - y + 3 = 3x + (3 - x - y) \geq 0$ e
$f(x,y) - f(3/2, 3/2) = 2x - y - 3/2 = -(3/2 - x) - (y - x) \leq 0$.

Mais um?

- Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2+1, & \text{se } x^2+y^2 \leq 4 \\ 6-x^2-y^2, & \text{se } x^2+y^2 > 4 \end{cases}.$$
- O gráfico de f é



- Vemos que $(0,0)$ é mínimo local, todo ponto da círcunferência $x^2+y^2=4$ é máximo (global) de f e não há mínimo global.

PONTOS CRÍTICOS

- Vamos estabelecer uma condição necessária para um ponto ser máximo ou mínimo local de f.
- Seja $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Um ponto $(x_0, y_0) \in int(A)$ é um *ponto crítico* de f se $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.

TEOREMA

Sejam $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um função e $(x_0, y_0) \in int(A)$ um ponto onde $\nabla f(x_0, y_0)$ existe. Se (x_0, y_0) é ponto de máxímo ou mínimo local de f então $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

DEMONSTRAÇÃO:

Basta compor f com curvas paralelas aos eixos coordenados. Detalhes serão feitos na aula. $\square$

- Exercício: compare os pontos críticos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $f(x, y) = x^2 - y^2$, quanto a serem máximo ou mínimo local.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS

- Se f é de classe $\mathcal{C}^2$, é fácil verificar a validade do

TEOREMA

Sejam $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um função de classe $\mathcal{C}^2$ e $(x_0, y_0) \in int(A)$ um ponto de máximo local de f. Então, além de $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, temos $f_{xx}(x_0, y_0) \leq 0$ e $f_{yy}(x_0, y_0) \leq 0$.

  Você pode inferir a condição análoga para pontos de mínimos locais.
- Estude a função $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ quanto a máximos e mínimos locais.
- Repita para $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$ e conclua que a condição do teorema acima não é suficiente. Por que?

HESSIANO - UMA CONDIÇÃO "SUFICIENTE"

- Definimos o determinante Hessiano, ou simplesmente *Hessiano*, de uma função que admite todas as derivadas de segunda ordem como

$$H_f(x,y) = \det \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}.$$

- Se f é de classe $\mathcal{C}^2$ a matriz acima é simétrica e portanto diagonalizável. Com isso obtemos[2] o

TEOREMA

Sejam $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um função de classe $\mathcal{C}^2$ e $(x_0, y_0) \in int(A)$ um ponto crítico de f. Então

1. *Se $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ e $H_f(x_0,y_0) > 0$ então (x_0,y_0) é ponto de mínimo local de f.*
2. *Se $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ e $H_f(x_0,y_0) > 0$ então (x_0,y_0) é ponto de máximo local de f.*
3. *Se $H_f(x_0,y_0) < 0$ então (x_0,y_0) é ponto de sela de f.*

[2]Veja a demonstração aqui

Exemplos e Considerações Finais

- Volte para a funções $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ e $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$ e utilize o teorema anterior para estudar os pontos críticos.
- Idem para as funções $f(x, y) = x^4 + y^4$ e $f(x, y) = x^5 + y^5$.
- Construa uma caixa com o menor custo, com forma de paralelepípedo e sem tampa, com volume de 1 m^3, sabendo que o material das laterais custa o triplo do utilizado no fundo.

Referências

- Aula presencial;
- H. L. Guidorrizi, *Um curso de Cálculo*, vol. 2, 5ª. edição, LTC - São Paulo, 2001. **Seções 16.1, 16.2 e 16.3**.

Até a próxima aula!

lymber@ime.usp.br