Lista de Exercícios

① Um gás monoatómico de N partículas à temperatura T está num campo gravitacional constante, força na direção $-z$ (medido a partir do nível do chão) e intensidade da aceleração da gravidade g .

1. Escreva o hamiltoniano.
2. Qual é a distribuição canônica para o estado em que a posição está dentro do elemento de volume definido por $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{r}+\overrightarrow{dr}$ e o momento entre $\overrightarrow{p}\, e \,\overrightarrow{p}+\overrightarrow{dp}$?
3. Qual é a probabilidade de que uma partícula seja encontrada entre z e $z+dz$, irrespectivamente do seu momento ou coordenadas x e y ? (Marginalize os graus de liberdade diferentes de z).Encontre a distribuição de probabilidades como função da altura. Não precisa normalizar, mas expresse em termos da probabilidade de encontrar a partícula em $z=0$.
4. Qual é o valor médio da coordenada z ? Procure na literatura os valores das constantes dimensionais necessárias para expressar esta em metros.
5. Discuta se devemos usar o mesmo valor de β independente de altura.

②

1. Mostre que o calor específico de um sistema a volume V e temperatura β^{-1} pode ser calculado a partir da variância do Hamiltoniano, e.g

$$C_V = A(\beta)(\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2) \tag{1}$$

e encontre $A(\beta)$.
2. Mostre que o calor específico C_V não pode ser negativo.

③ Determine as propriedades termodinâmicas para o sistema de N partículas clássicas de spin 1 na presença de um campo magnético h.

O hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{H} = D\sum_{i=1}^{N} S_i^2 - h\sum_{i=1}^{N} S_i \tag{2}$$

onde as variáveis S_i podem ter valores -1, 0 ou 1.

1. (a) Para $h = 0$, encontre a entropia $S(E, N)$ na situação em que a energia é dada (microcanônico) .
2. (b) Suponha que queremos descrever um experimento onde a temperatura é fixa no valor T. Encontre a energia livre (ensemble canônico) na presença de um campo externo h.
3. (c) Encontre o calor específico e esboce o gráfico como função da temperatura
4. (d) Mostre que tomando derivadas com respeito a D voce pode calcular o valor esperado de $\langle S^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} S_i^2$ (Derivadas de que função?). Calcule $\langle S^2 \rangle$

④ Considere um átomo de spin J na presença de um campo magnético h. A energia toma valores $\epsilon_i = -hm_i$, $m_i = -J, -J+1, ...J$.

Escreva o hamiltoniano para N átomos que não interagem entre si. Calcule a função de partição para esse sistema de N átomos. Encontre a magnetização M. Calcule a suscetibilidade magnética $\chi = \partial M / \partial h$.

⑤ Estude o ensemble canônico de um gás ideal e encontre a distribuição de velocidades, isto é a distribuição da grandeza $v = |\vec{v}|$

⑥ Encontre a entropia do modelo de spin paramagnético

$$\mathcal{H} = -h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \tag{3}$$

como função da temperatura e encontre uma forma de esfriar o sistema realizando trabalho magnético (pg445 Reif, Magnetic cooling)