

SEM0501

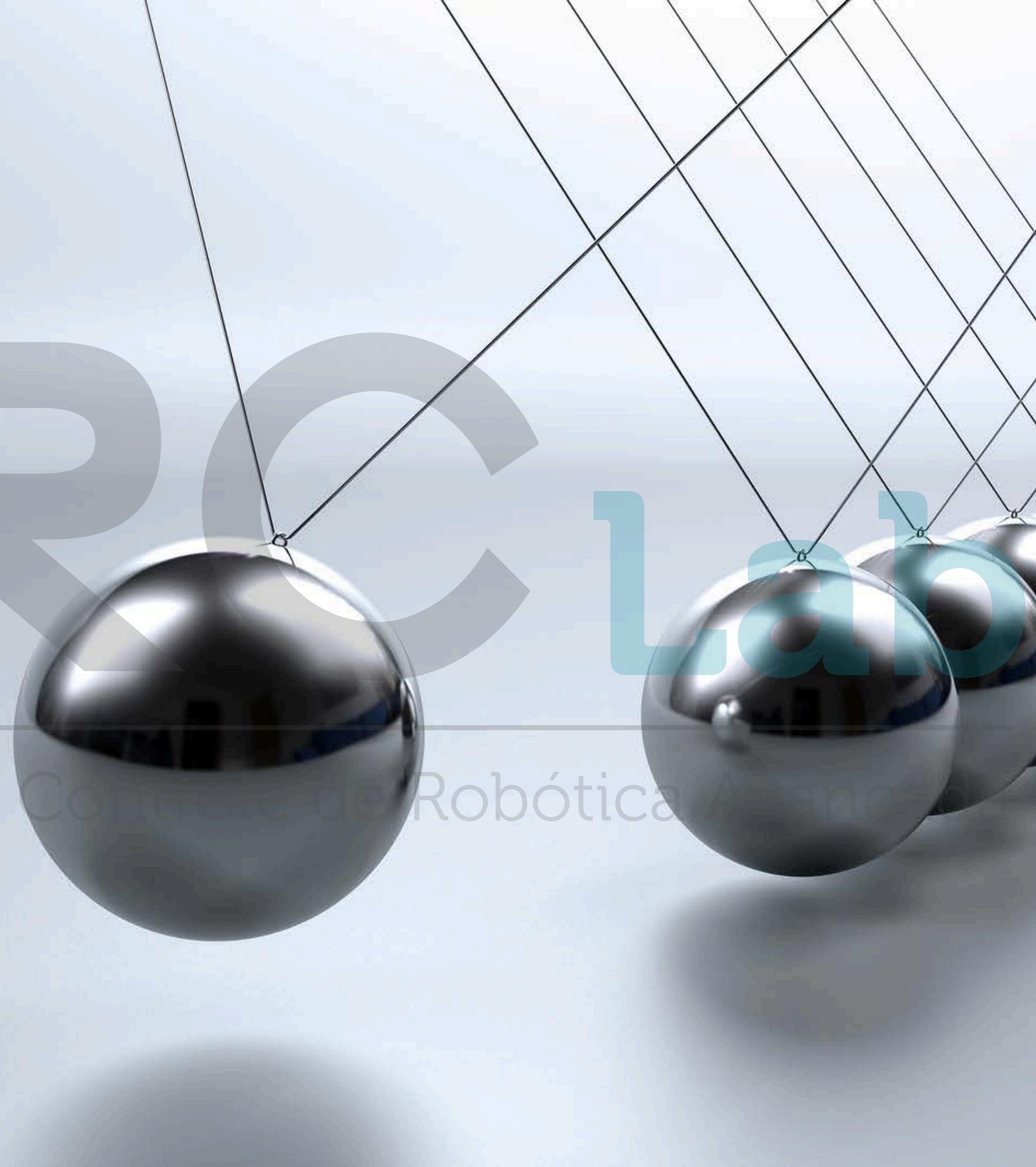
Dinâmica Aplicada às Máquinas

Aula #18 — Forças conservativas e conservação da energia; princípio do trabalho para corpos rígidos

Prof. Dr. Thiago Boaventura

tboaventura@usp.br

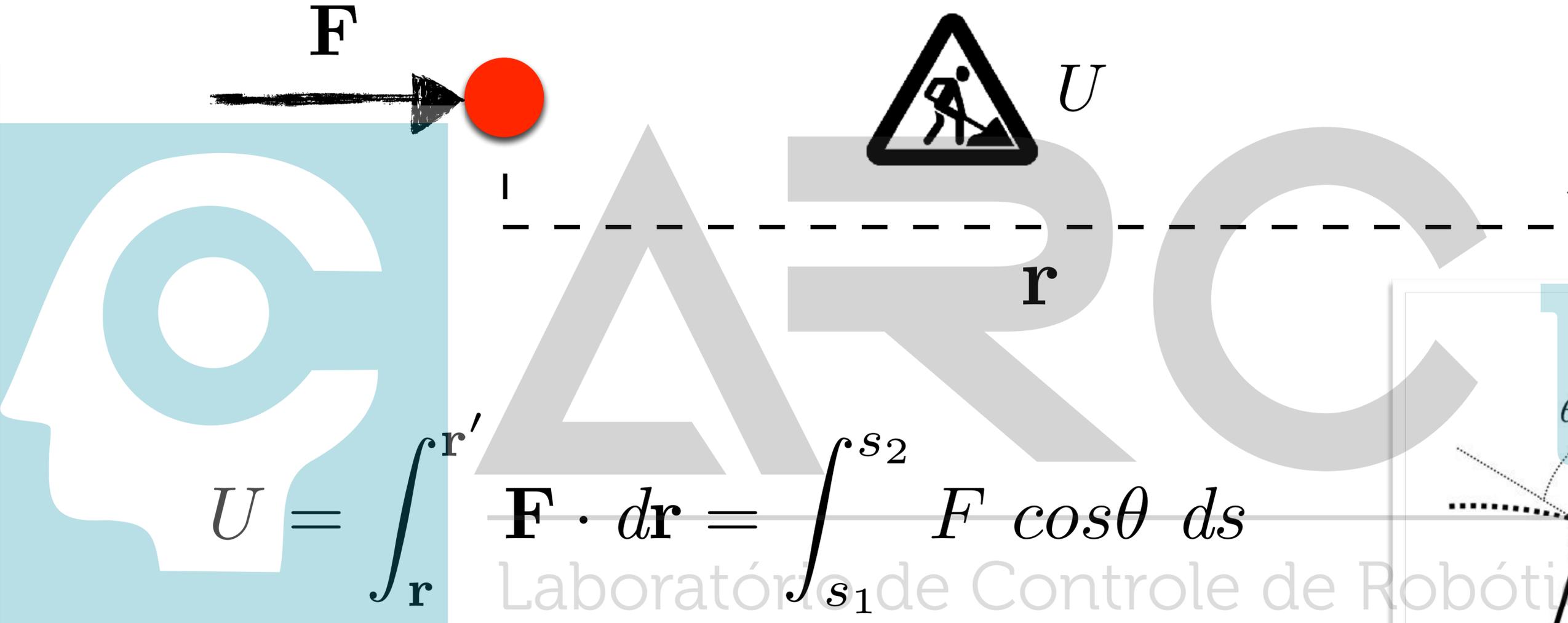
São Carlos, 21/10/19





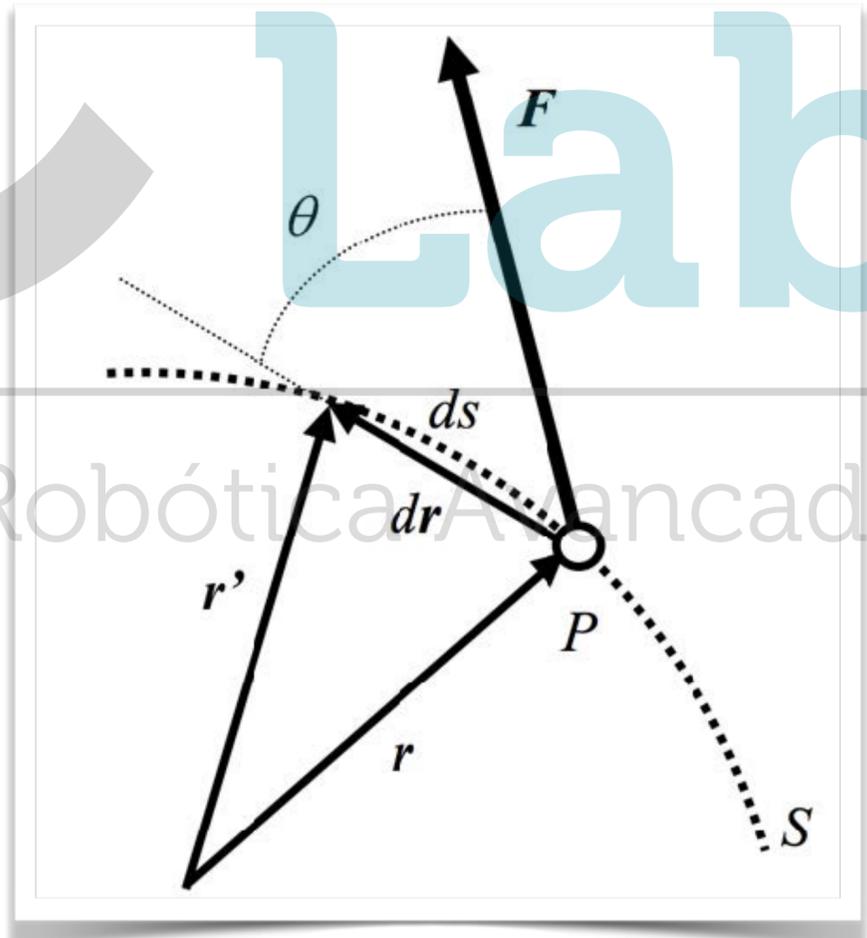
Trabalho de uma força

Revisão aula passada...



escalar

Joule
(1 J = 1 N x 1 m)



Mucheroni, 2011



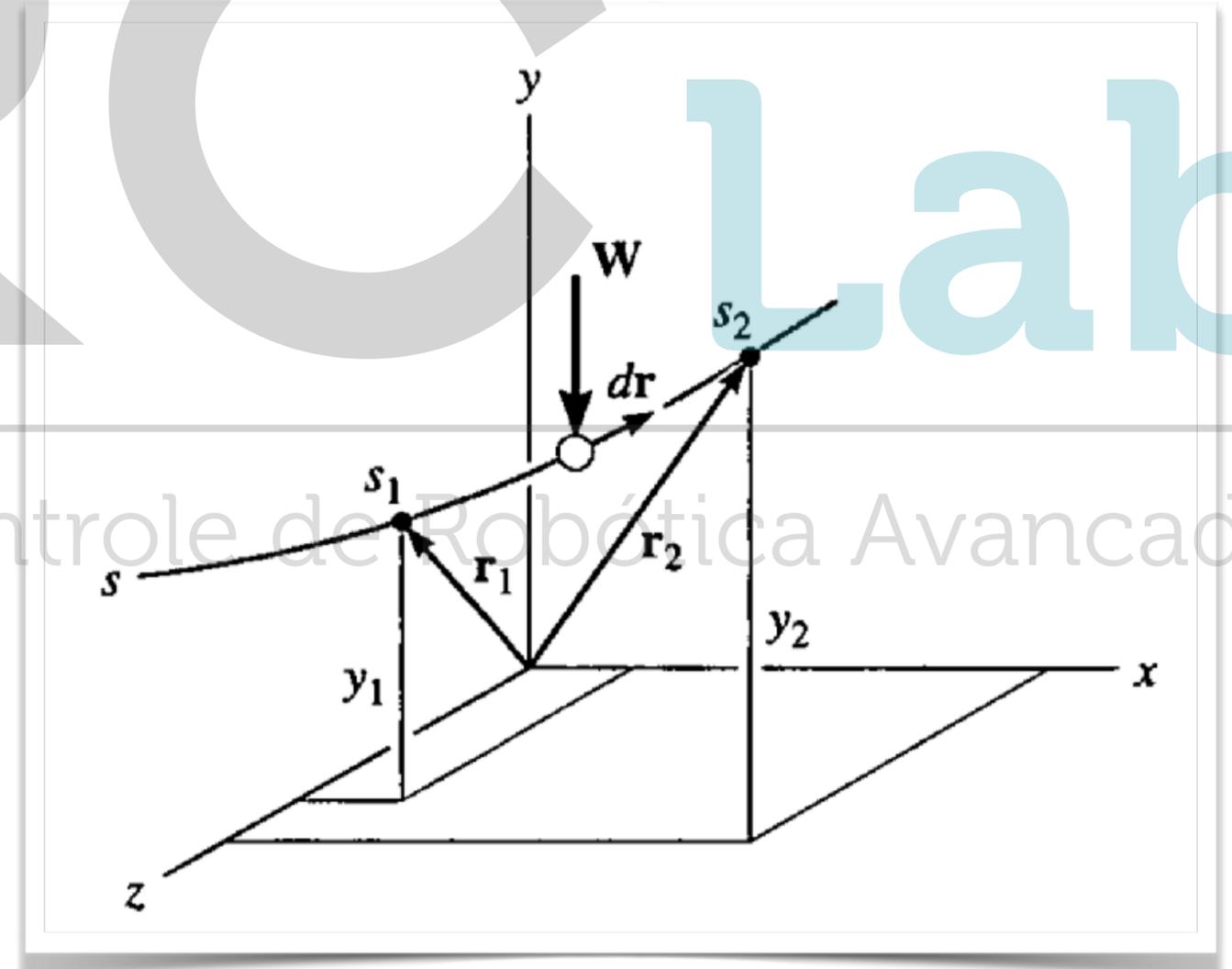
Casos particulares



força peso: trabalho só na direção vertical:

$$U = F_c \cos\theta \Delta s$$

$$U = -W \Delta y$$





Casos particulares



força de uma mola

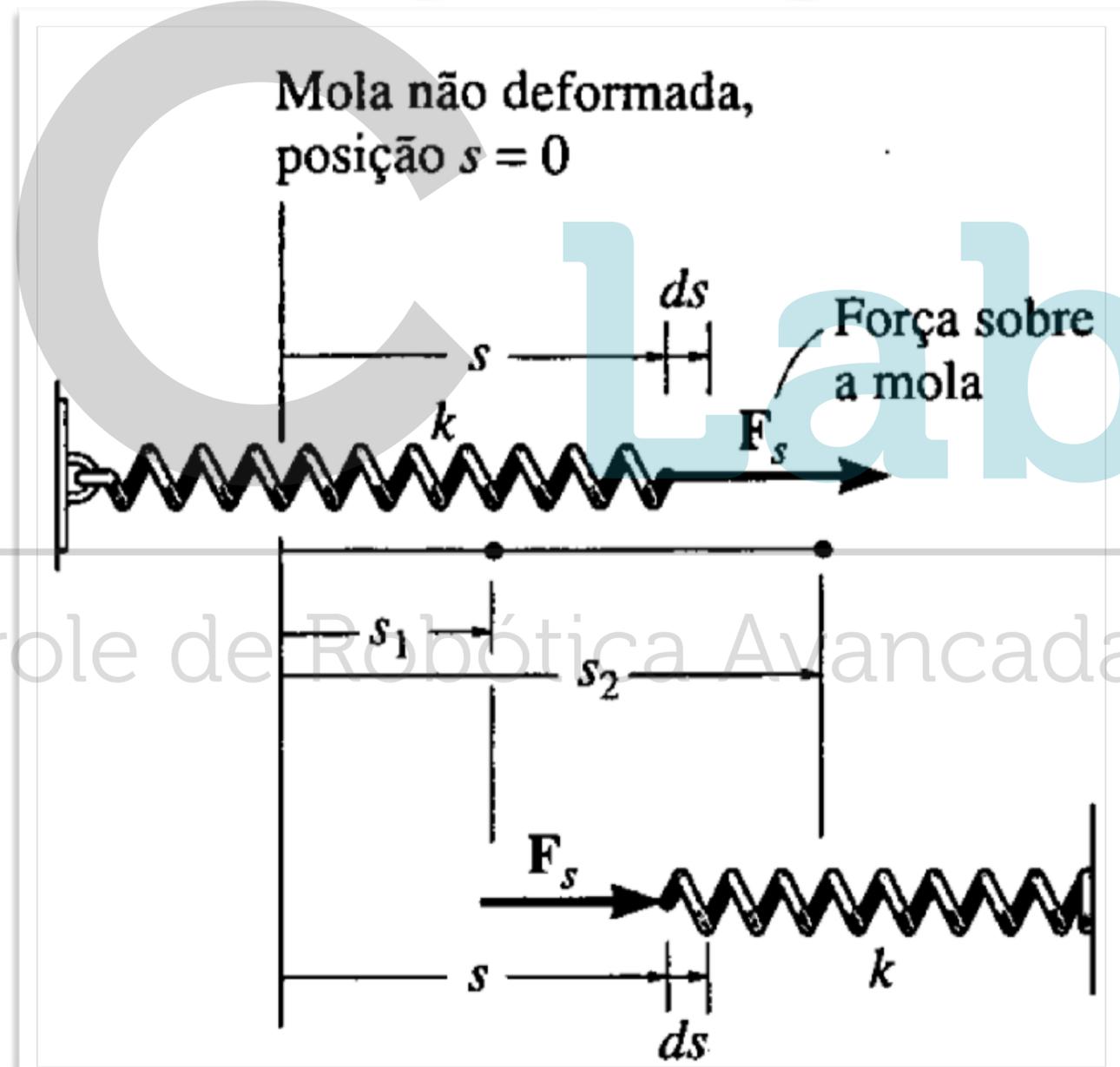
$$F_s = ks$$

Revisão aula passada...

$$U = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds$$

$$F_s ds = k \int_{s_1}^{s_2} s ds$$

$$U = \frac{1}{2} k (s_2^2 - s_1^2)$$



Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Potência

$$P \equiv \frac{dU}{dt}$$

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$P = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt}$$

Laboratório de Controle de Robótica Avancada

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$



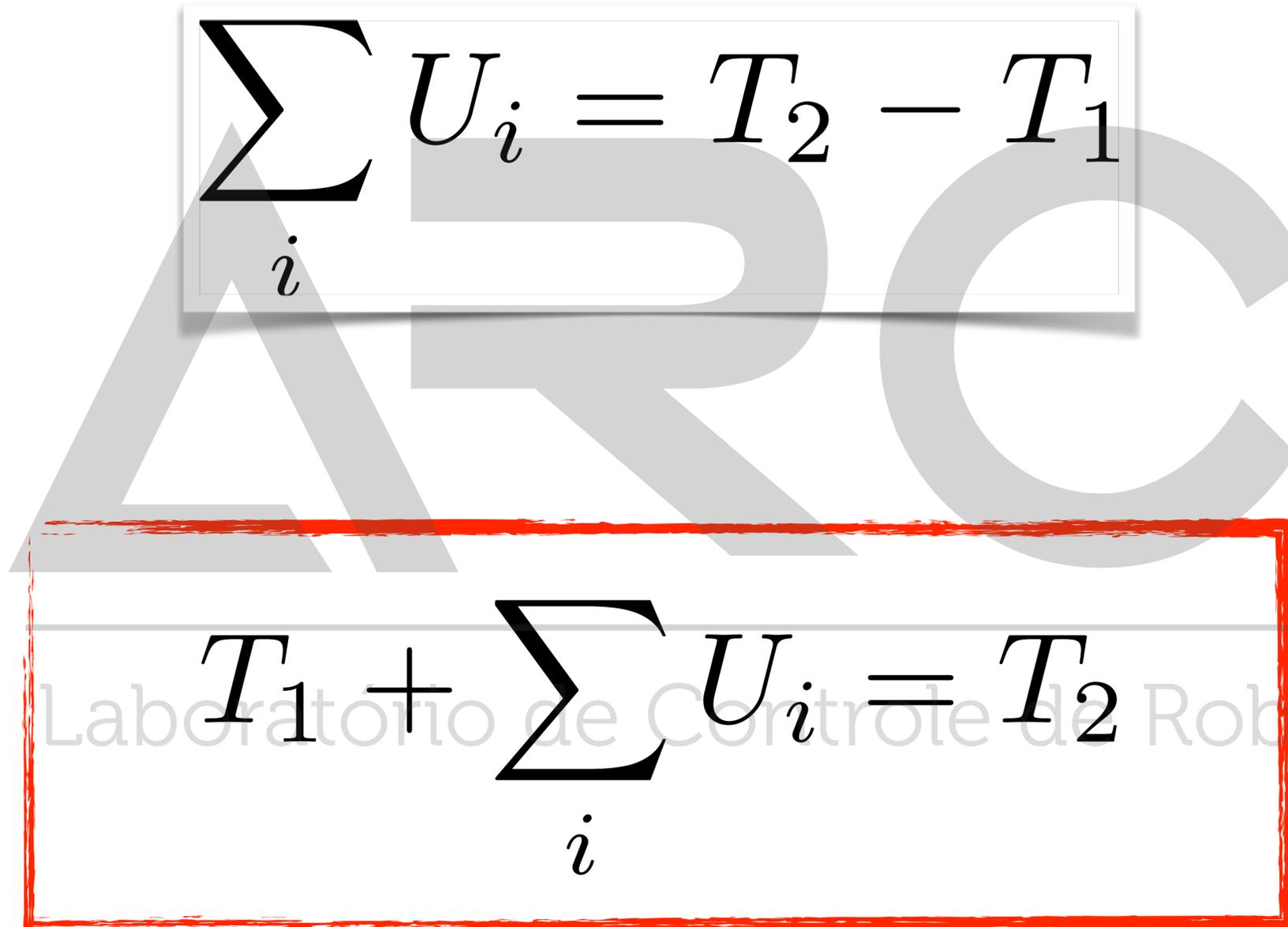


Princípio do trabalho e energia

$$\sum_i U_i = T_2 - T_1$$

$$T_1 + \sum_i U_i = T_2$$

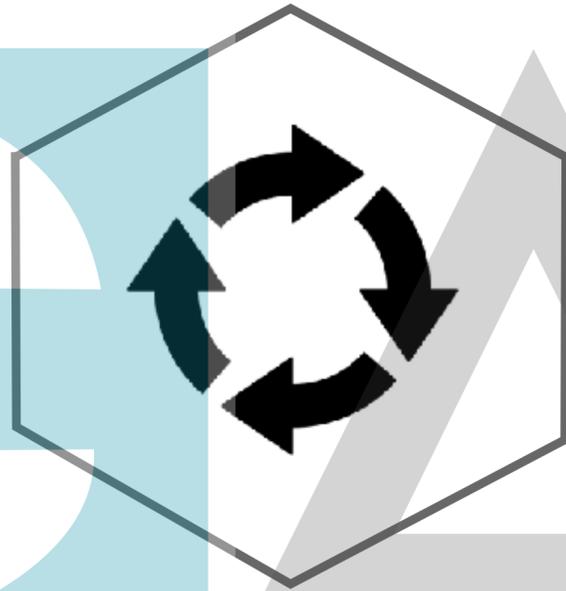
Revisão aula passada...



Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Objetivos da aula de hoje



**Introduzir forças
conservativas e
energia potencial**
(Cap. 14.5 e 14.6)



**Desenvolver expressão
para energia cinética
em corpos rígidos**
(Cap. 18)

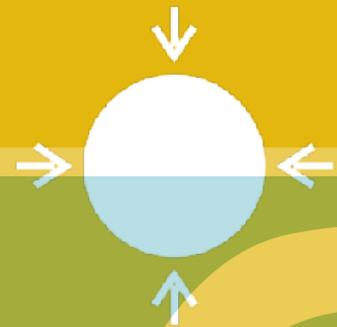
Conservação da energia em ação



Lab

Laboratório de Controlo de Energia Avançada

Conteúdo



- Forças conservativas
- Conservação da energia
- Exemplo

Ponto material



- Trabalho: força e binário
- Princípio do trabalho e energia
- Exemplo

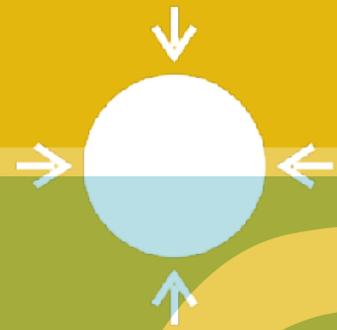
Corpos rígidos



- “Take-home messages”
- Próxima aula...

Conclusão

Conteúdo



- Forças conservativas
- Conservação da energia
- Exemplo

Ponto material

Corpos rígidos

Conclusão

ARC

Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

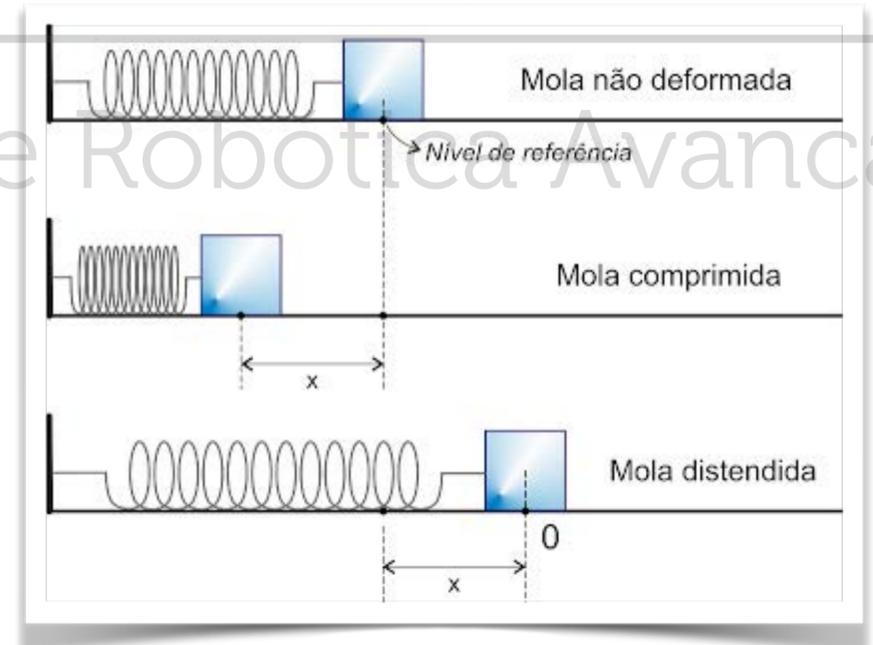
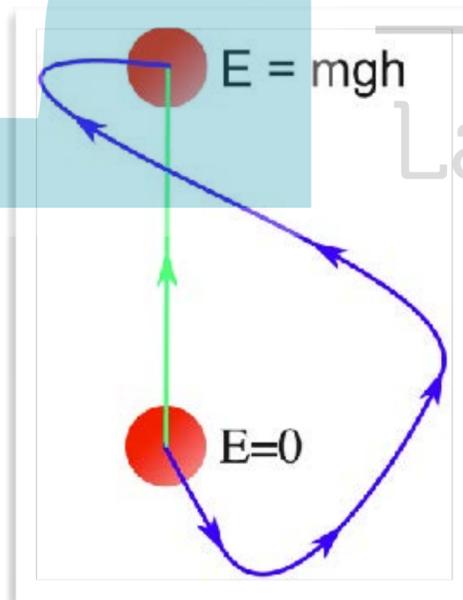
Forças conservativas



trabalho independe da trajetória
(conserva a energia!)

força gravitacional

força elástica



Ponto material

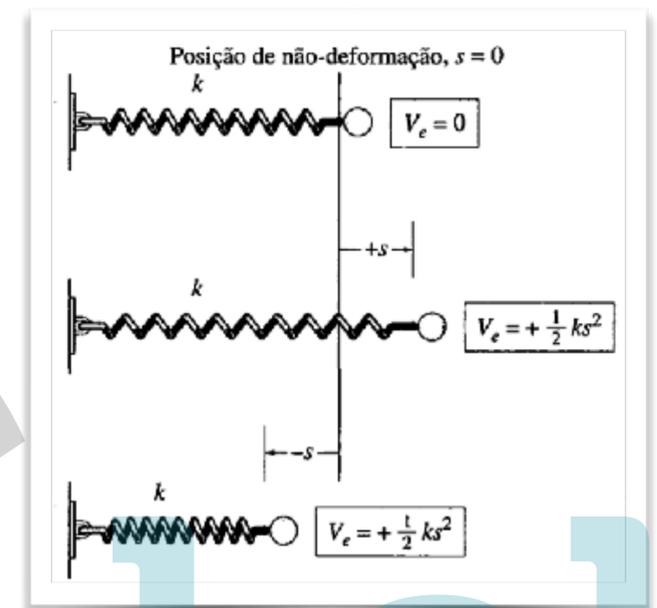
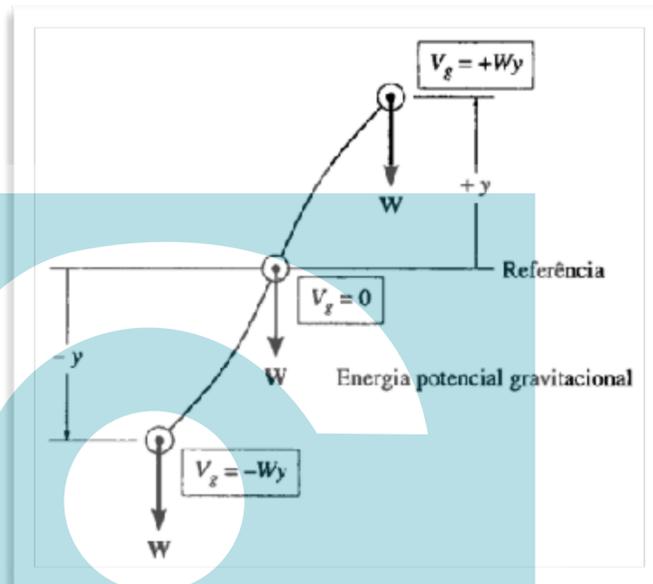
Corpos rígidos

Conclusão

Forças conservativas



trabalho é função de uma energia potencial



energia potencial gravitacional

$$U = -W \Delta y$$

$$U = \frac{1}{2}k (s_2^2 - s_1^2)$$

energia potencial elástica

$$U = V_{g1} - V_{g2}$$

$$U = V_1 - V_2$$

$$U = V_{e1} - V_{e2}$$

$$V_g \equiv W y = m g y$$

$$V \equiv V(x, y, z)$$

$$V_e \equiv \frac{1}{2} k s^2$$

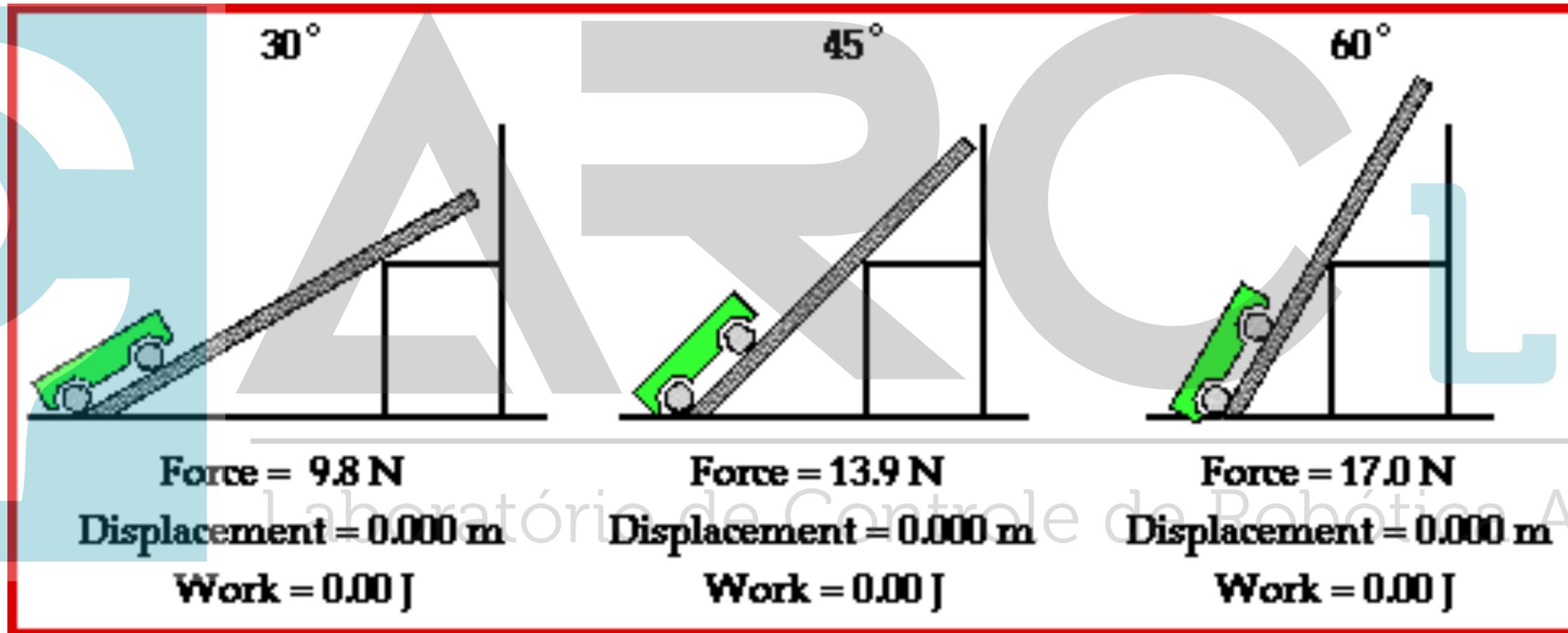
depende somente da posição

Forças conservativas

Ponto material

Corpos rígidos

Conclusão



www.physicsclassroom.com

Forças conservativas

$$U = V_1 - V_2$$

$$V \equiv V(x, y, z)$$

$$dU = V_1(x, y, z) - V_2(x + dx, y + dy, z + dz) = -dV(x, y, z)$$

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dV(x, y, z)$$

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right)$$

$$\mathbf{F} = -\nabla V$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{k}$$

Princípio do trabalho e energia: sistemas conservativos

princípio do
trabalho e energia

$$\sum_i U_i = T_2 - T_1$$

$$U = V_1 - V_2$$

quando todas as forças são
conservativas:

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

**conservação
da energia mecânica**

Conservação da energia mecânica: pêndulo

A última aula do Prof. Walter Lewin...



Ponto material

Corpos rígidos

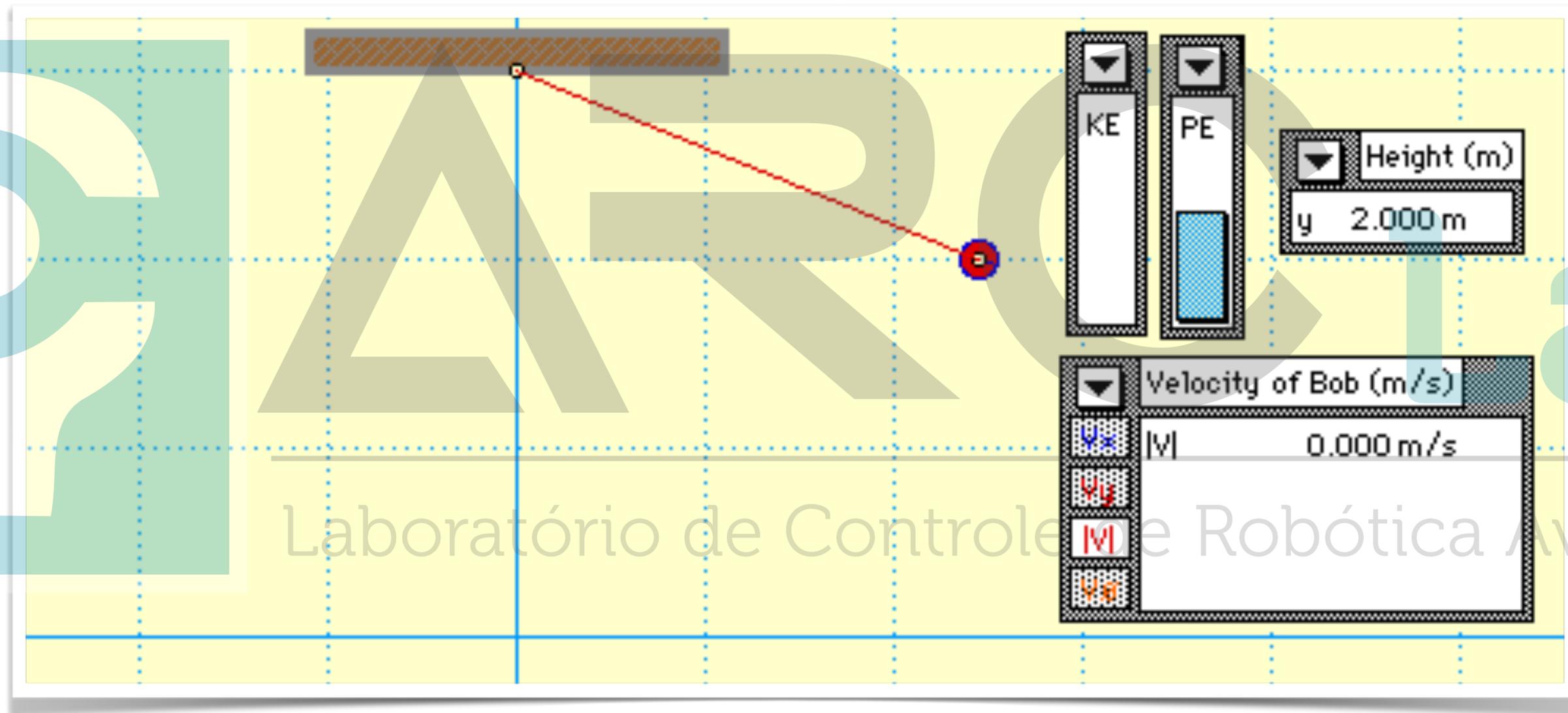
Conclusão

Conservação da energia mecânica: pêndulo

Ponto material

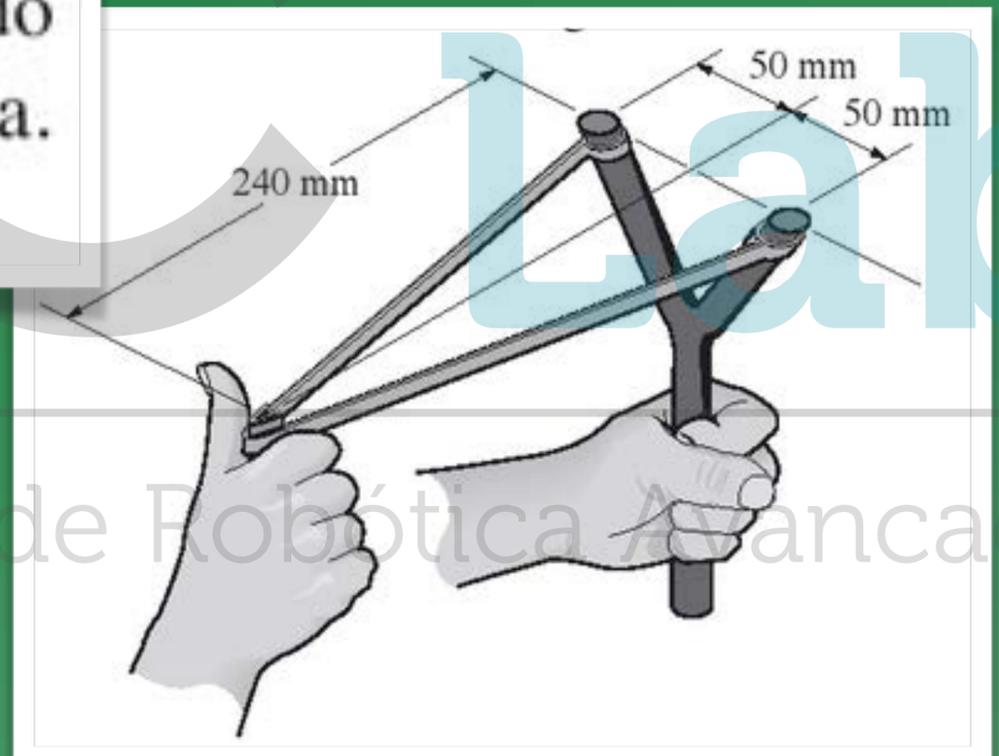
Corpos rígidos

Conclusão



www.physicsclassroom.com

14.78. Cada uma das duas tiras de elástico do estilingue tem um comprimento não deformado de 200 mm. Se elas são puxadas para trás para a posição mostrada e soltas do repouso, determine a altura máxima que o chumbinho de 25 g vai alcançar se ele for atirado verticalmente para cima. Despreze a massa das tiras de borracha e a variação na elevação do chumbinho enquanto ele está preso pelas tiras de borracha. Cada tira de borracha tem uma rigidez de $k = 50 \text{ N/m}$.



Conteúdo

Ponto material



- Trabalho: força e binário
- Princípio do trabalho e energia
- Exemplo

Corpos rígidos

lab

Avancada

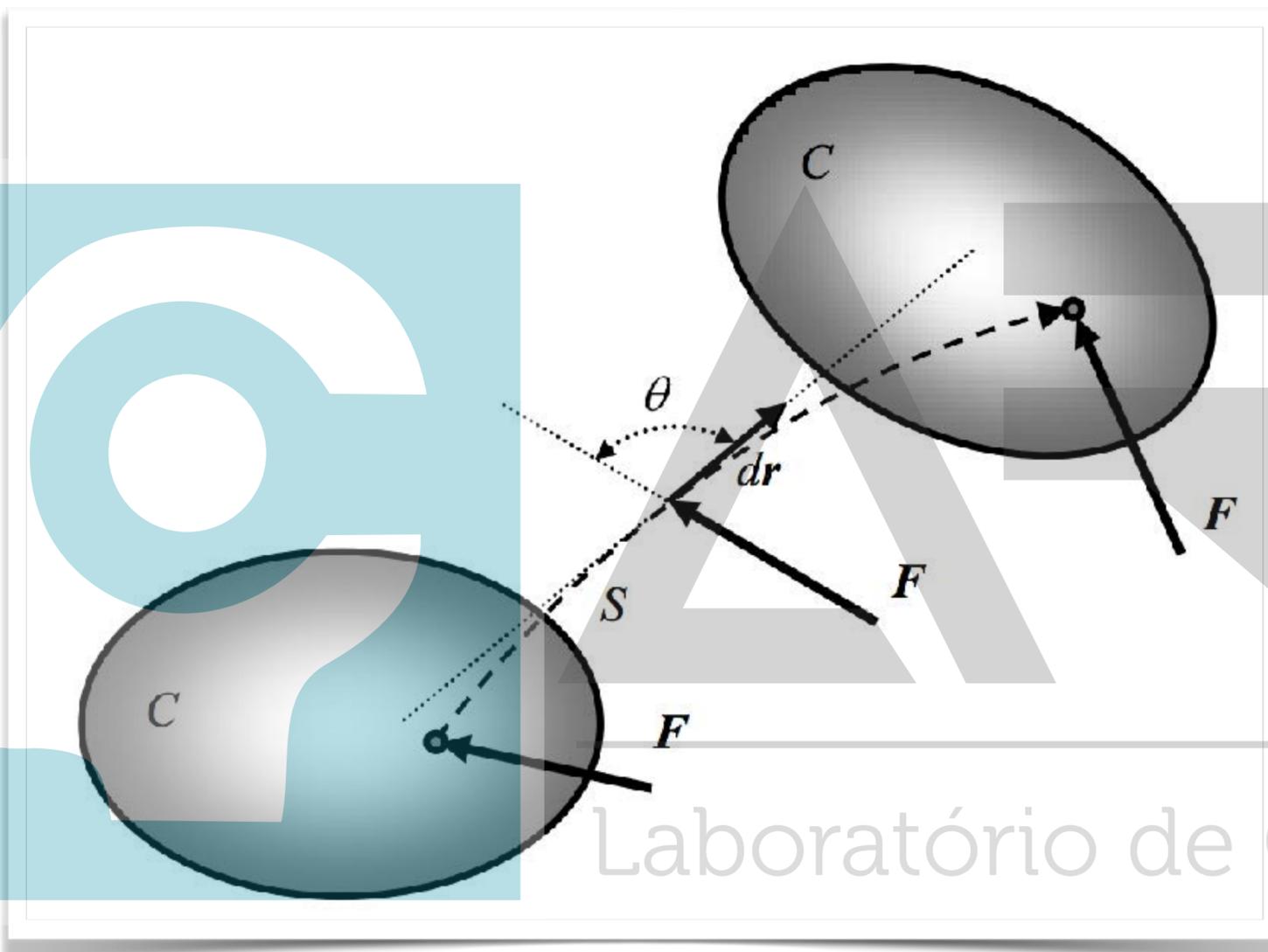
Conclusão

Trabalho de uma força externa

Ponto material

Corpos rígidos

Conclusão



...> **força constante e movimento retilíneo:**

$$U = F_c \cos\theta \int_{s_1}^{s_2} ds = F_c \cos\theta \Delta s$$



força peso:

$$U = -W \Delta y$$



força de uma mola:

$$U = -\frac{1}{2}k (s_2^2 - s_1^2)$$

$$U = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos\theta ds$$

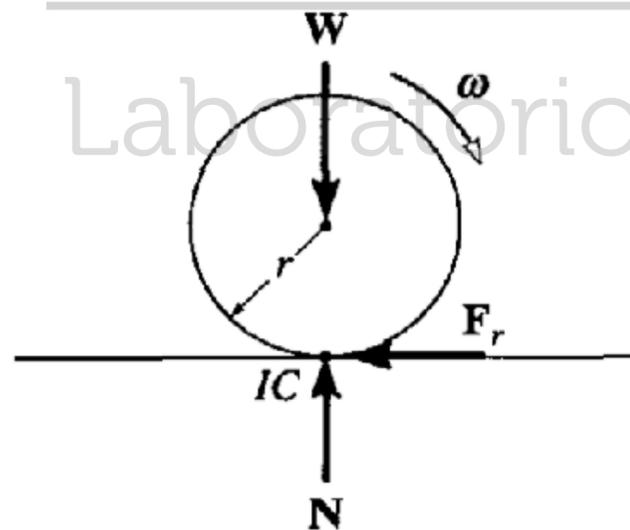
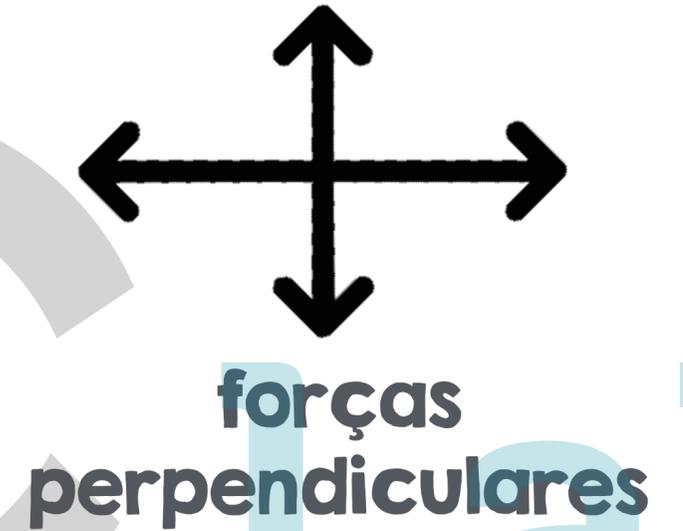
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Forças que **não** realizam trabalho

Ponto material

Corpos rígidos

Conclusão



Laboratório de Controle de Robótica Avançada

**Forças de atrito sem
escorregamento**

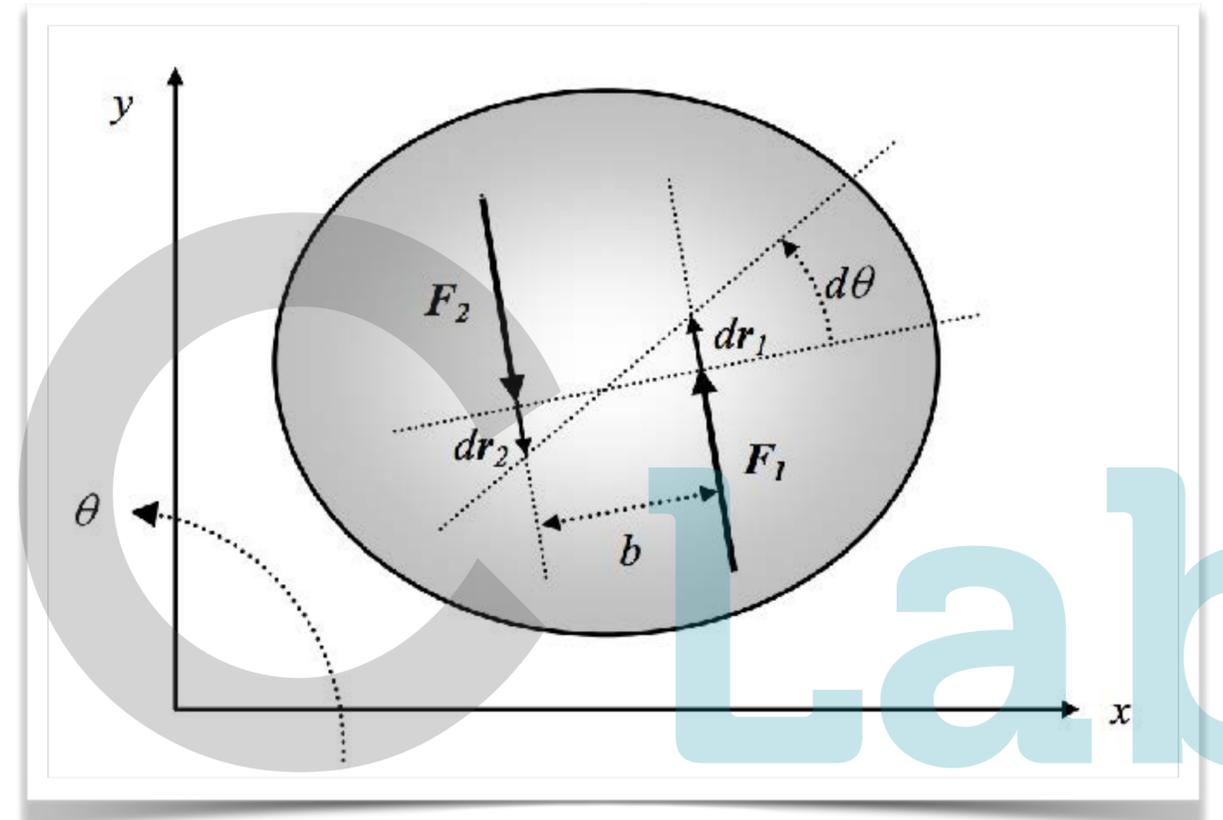
Trabalho de um binário

binário
par de forças

iguais
paralelas
opostas

produzem
somente
rotação

$$M = Fb$$



trabalho:

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$dU_M = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = 2F dr = Fb d\theta$$

$$U_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$$

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 = -d\mathbf{r}_2$$

$$dr = \frac{b}{2} d\theta$$

Energia cinética para um corpo rígido

partícula:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

corpo rígido:

$$T = \frac{1}{2} \int_m v^2 dm$$

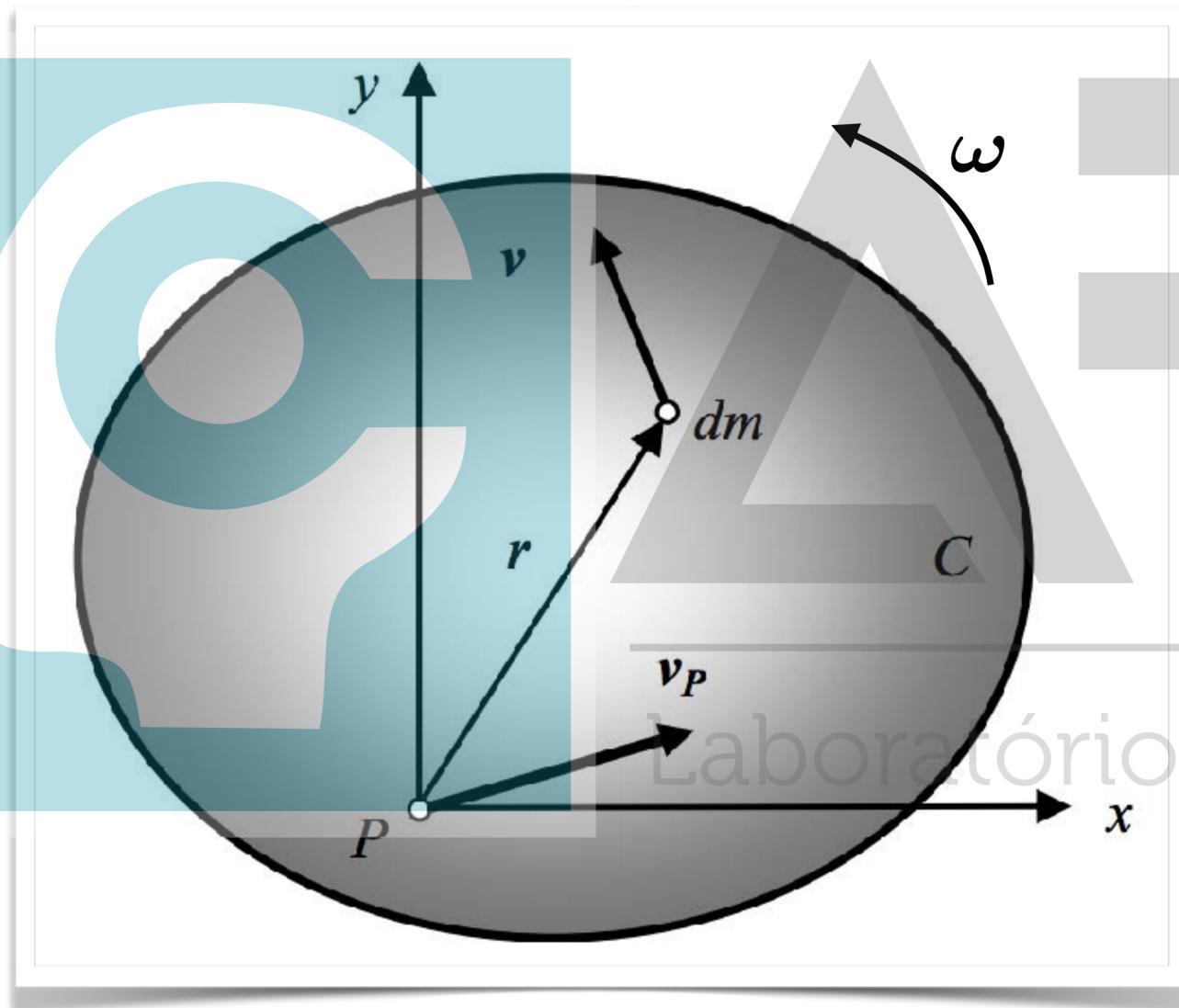
cinemática:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{v} = v_{Px} \mathbf{i} + v_{Py} \mathbf{j} + \omega \mathbf{k} \times (x \mathbf{i} + y \mathbf{j})$$

$$\mathbf{v} = (v_{Px} - \omega y) \mathbf{i} + (v_{Py} + \omega x) \mathbf{j}$$

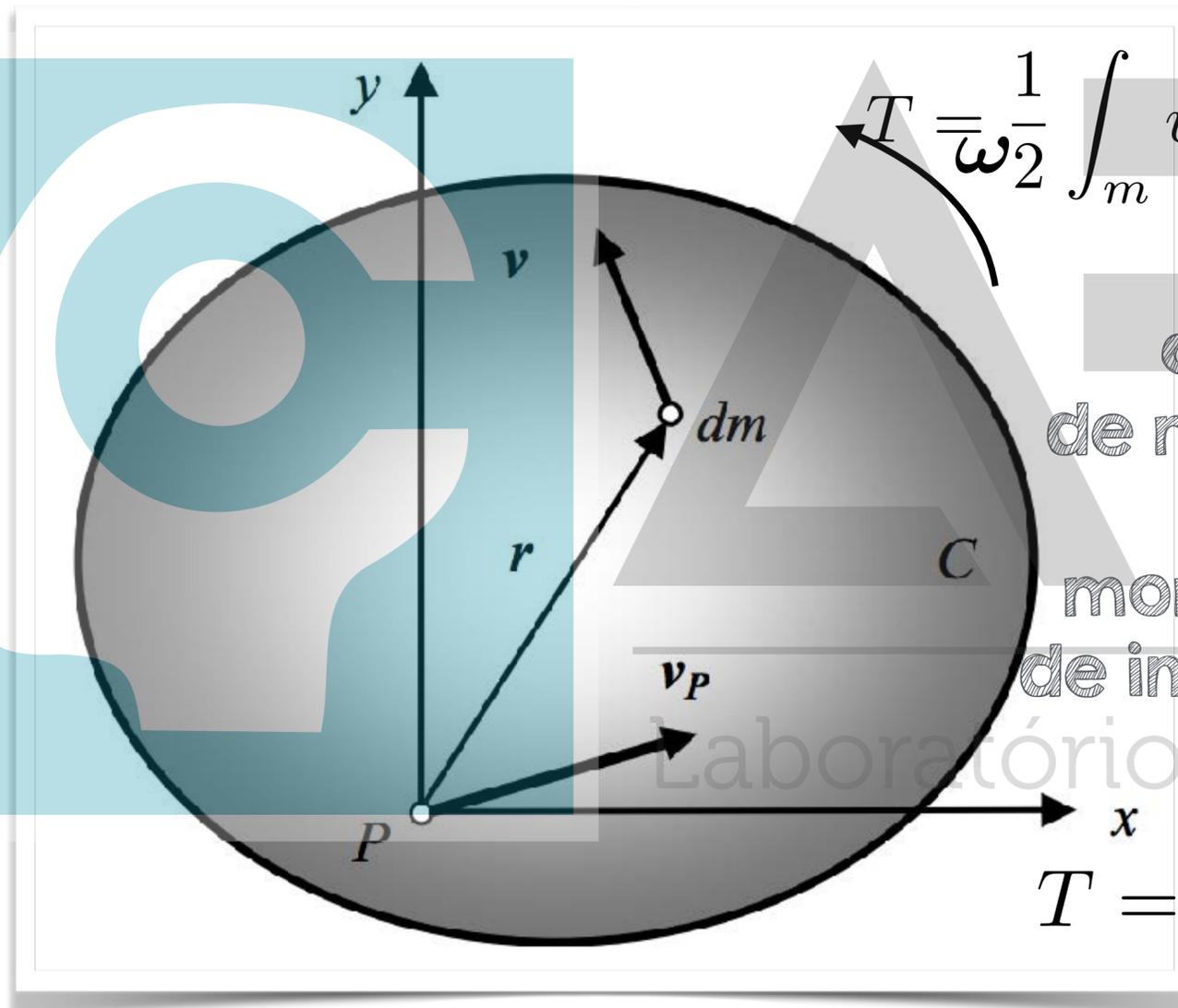
$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (v_{Px} - \omega y)^2 + (v_{Py} + \omega x)^2$$



Energia cinética para um corpo rígido

$$T = \frac{1}{2} \int_m [(v_{Px} - \omega y)^2 + (v_{Py} + \omega x)^2] dm$$

$$T = \frac{1}{2} \int_m v_P^2 dm - v_{Px} \omega \int_m y dm + v_{Py} \omega \int_m x dm + \frac{1}{2} \omega^2 \int_m r^2 dm$$



centro de massa:

$$x_G = \frac{1}{m} \int_m x dm$$

$$y_G = \frac{1}{m} \int_m y dm$$

momento de inércia:

$$I_P = \int_m (x^2 + y^2) dm$$

$$T = \frac{1}{2} m v_P^2 - v_{Px} \omega y_{Gm} + v_{Py} \omega x_{Gm} + \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

P = G

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

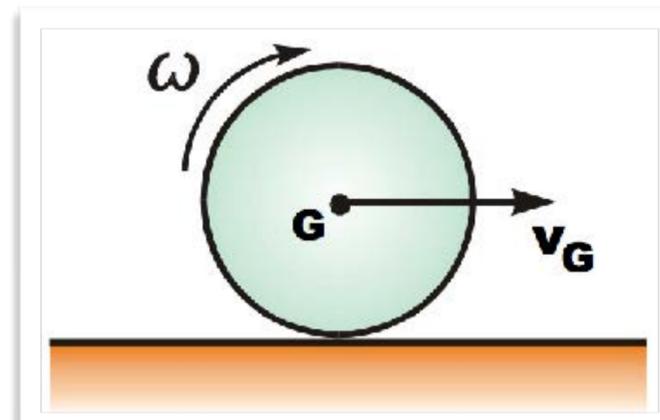
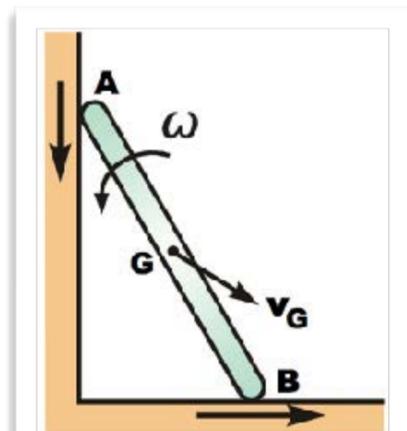
Princípio do trabalho e energia

igual ao ponto material, só que diferente..

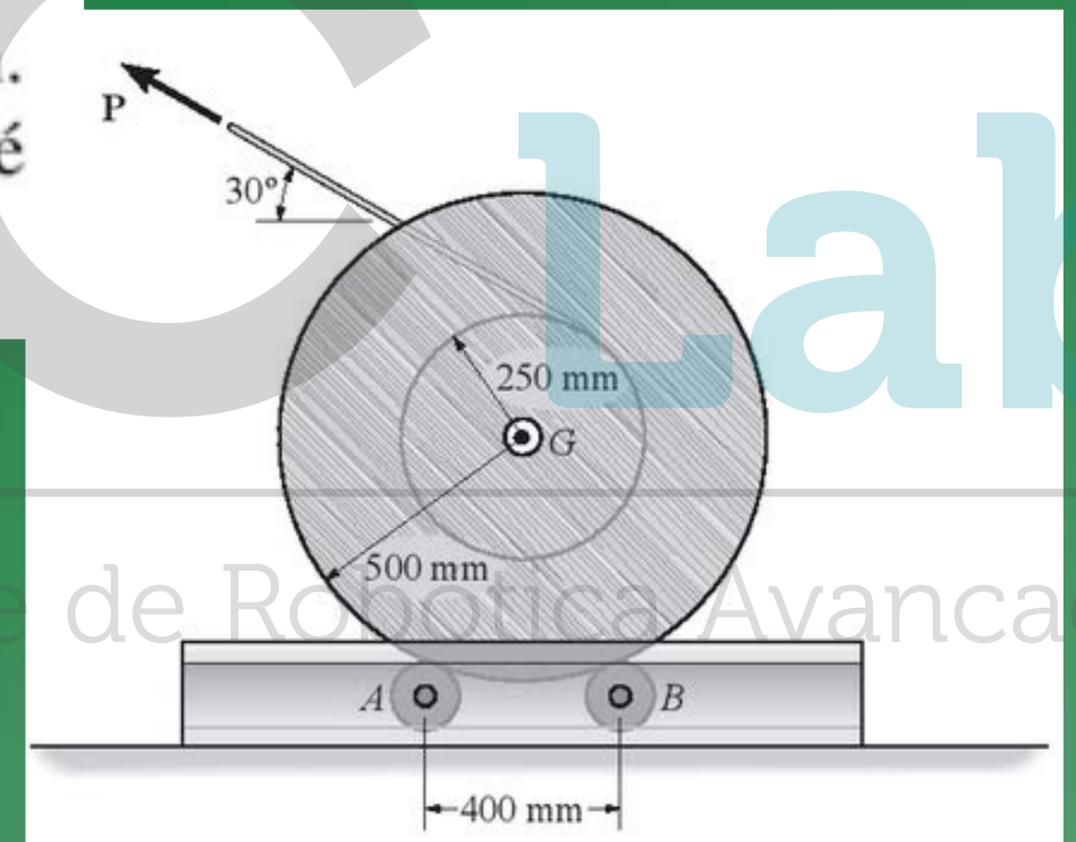
$$\sum_i U_i = T_2 - T_1$$

soma dos trabalhos de todas
as **forças externas e**
torques de binário

energia cinética de
translação e
rotação final e inicial



18.3. Uma força $P = 20 \text{ N}$ é aplicada ao cabo, o qual faz a bobina de 175 kg girar sem deslizar sobre os dois rolos, A e B , do distribuidor. Determine a velocidade angular da bobina após ela haver completado duas revoluções, partindo do repouso. Despreze a massa do cabo. Cada rolo pode ser considerado um cilindro de 18 kg , tendo um raio de $0,1 \text{ m}$. O raio de giração da bobina em relação a seu eixo central é $k_G = 0,42 \text{ m}$.



Conteúdo

Ponto material

Corpos rígidos



ARC Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avançada



- “Take-home messages”
- Próxima aula...

Conclusão

“Take-home messages”



Para forças
**conservativas, a
energia mecânica
permanece
constante**

Trabalho de
um binário:

$$U_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

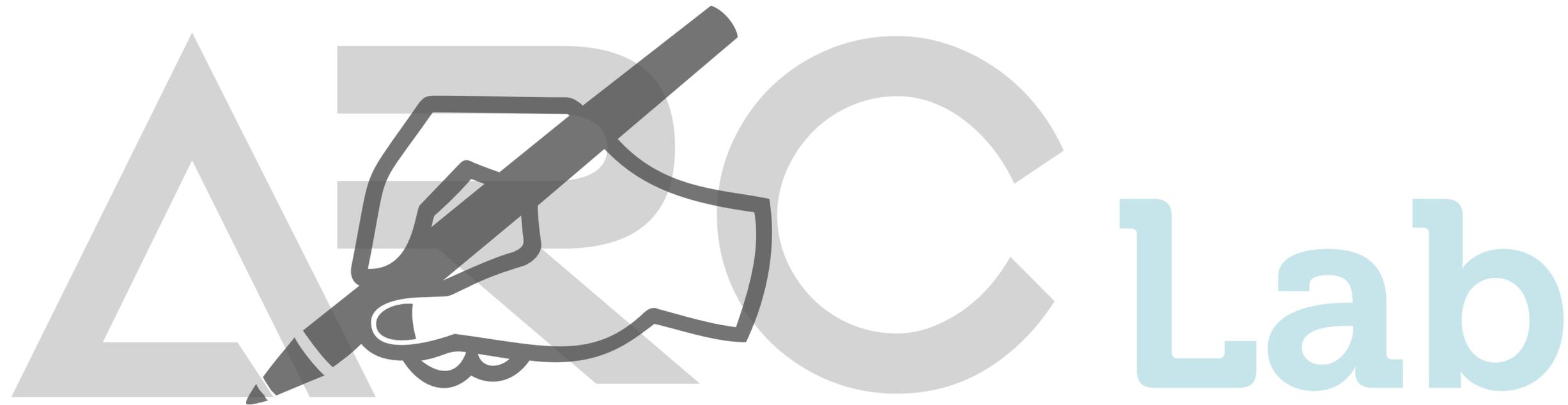
Energia
cinética:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

Lista de exercícios para próxima aula...

Ponto material

Corpos rígidos



Laboratório de Controle de Robótica Avançada

14.84, 14.89, 18.3, 18.15, 18.19

Conclusão



That's all Folks!

Laboratorio de Control de Robótica Avanzada