# Introdução à Física Computacional (4300218)

Profa. Kaline Coutinho
kaline@if.usp.br
Sala 2056 – Edifício Principal

## Aula 10

## Programação em Pythom para físicos:
## Integração: Integral Multipla e Derivada

# Integração Múltipla

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$$

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx \simeq \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i, y)$$

onde $w_i$ e $x_i$ serão calculados pela função gausswxab(N,a,b).

$$I = \int_c^d F(y)dy \simeq \sum_{j=1}^{N} w_j F(y_j)$$

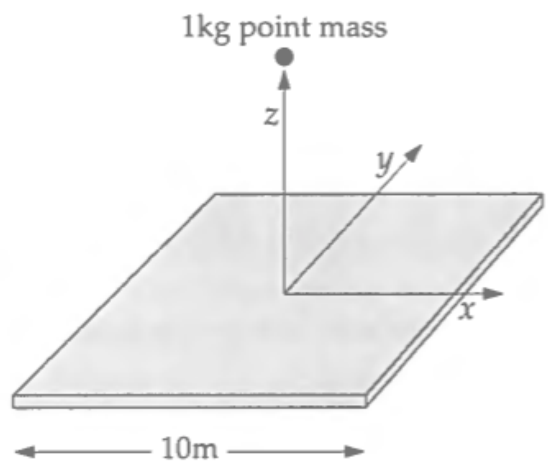
onde $w_j$ e $y_j$ serão calculados pela função gausswxab(N,c,d).

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy \simeq \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j f(x_i, y_j)$$

Observação: a quantidade de pontos no eixo x e y não precisam ser iguais.

# Exemplo 1:

Calcular a força gravitacional (dada pela expressão abaixo) entre um objeto pontual de 1kg a uma distância z de uma placa quadrada de densidade uniforme (σ) com espessura desprezível, lado de 10m e massa 100kg. Ver figura abaixo.




$$F(z) = G\sigma z \int\int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdy$$

Considere G= 6.674 x $10^{-11}$ $m^3/kg\ s^2$. Varie z entre 0 a 30 m e use a quadratura Gaussiana com 100 pontos para calcular a integral.

Faça o gráfico da força gravitacional variando com a distância z do objeto a placa.

# Programa

## Parte gráfica

```python

fontP = FontProperties()
fontP.set_size('x-small')
plot(zk,fzk,color='black',linewidth=2)
xlabel('Distância [m]',fontsize=12)
ylabel('Força gravitacional, F(z) [N]',fontsize=12)
grid(True)
xlim(0,nz*dz)
ylim(0,3.5e-12)
show()

```

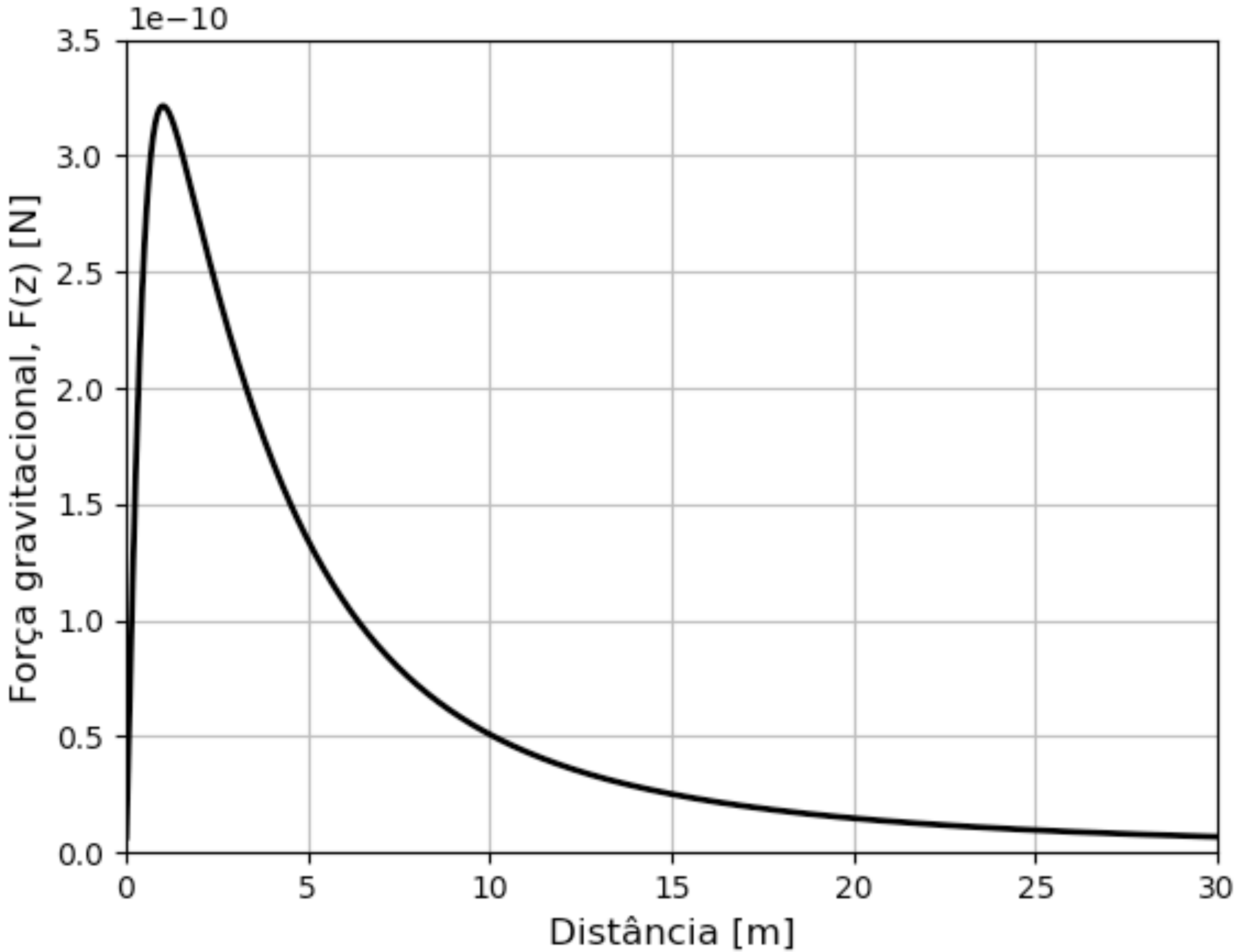
## Resultados

| | |
|---|---|
| 0.0100 | 6.5777e-12 |
| 0.0200 | 1.3151e-11 |
| 0.0300 | 1.9716e-11 |
| 0.0400 | 2.6269e-11 |
| 0.0500 | 3.2804e-11 |
| 0.0600 | 3.9318e-11 |
| 0.0700 | 4.5807e-11 |
| 0.0800 | 5.2267e-11 |
| 0.0900 | 5.8694e-11 |
| 0.1000 | 6.5083e-11 |

## Parte dos cálculos

fxyz_int.py

```python
from pylab import *
from gaussxw import gaussxwab
from matplotlib.font_manager import FontProperties

def f(x,y,z):
    return 1.0/(x**2 + y**2 + z**2)**1.5

N  = 10
nz = 3000
dz = 0.01
G  = 6.674e-11
a  = -5.0
b  = 5.0
m  = 100
dens = m / (b-a)**2

zk  = []
fzk = []

# Calcula os pontos e pesos no intervalo de a e b
x,w = gaussxwab(N,a,b)

# Realiza o somatorio
for k in range(1,nz):
  z = k*dz
  s = 0.0
  for j in range(1,N):
    for i in range(1,N):
      s += w[i]*w[j]*f(x[i],x[j],z)
  fz = G*dens*z*s
  zk.append(z)
  fzk.append(fz)
  print('%.4f'%z,'%.4e'%fz)

```


1e−10
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
Força gravitacional, F(z) [N]
0
5
10
15
20
25
30
Distância [m]

# Primeira Derivada

- O método de diferenças finitas no ponto central usa a definição de derivada considerando δx um valor muito pequeno, mas finito.

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x/2) - f(x-\delta x/2)}{\delta x}$$

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+\Delta x/2) - f(x-\Delta x/2)}{\Delta x}$$

Derivada para frente

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Derivada para trás

$$f'(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

- Cuidado com a precisão numérica como discutido antes. A sugestão é de no mínimo $\Delta x = 10^{-8}$ na derivada para frente e para trás e $\Delta x = 10^{-10}$ no ponto central.

# Seconda Derivada

- Aplica-se o método de diferenças finitas 2 vezes.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x) \simeq \frac{f'(x+\Delta x/2) - f'(x-\Delta x/2)}{\Delta x}$$

$$f'(x+\Delta x/2) \simeq \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x-\Delta x/2) \simeq \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}$$

# Derivada Parcial

- Aplica-se o método de diferenças finitas em uma das variáveis enquanto mantem-se a outra constante.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \simeq \frac{f(x+\Delta x/2,y)-f(x-\Delta x/2,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \simeq \frac{f(x,y+\Delta y/2)-f(x,y-\Delta y/2)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \simeq \frac{f(x_+,y_+)-f(x_+,y_-)-f(x_-,y_+)+f(x_-,y_-)}{\Delta x \Delta y}$$

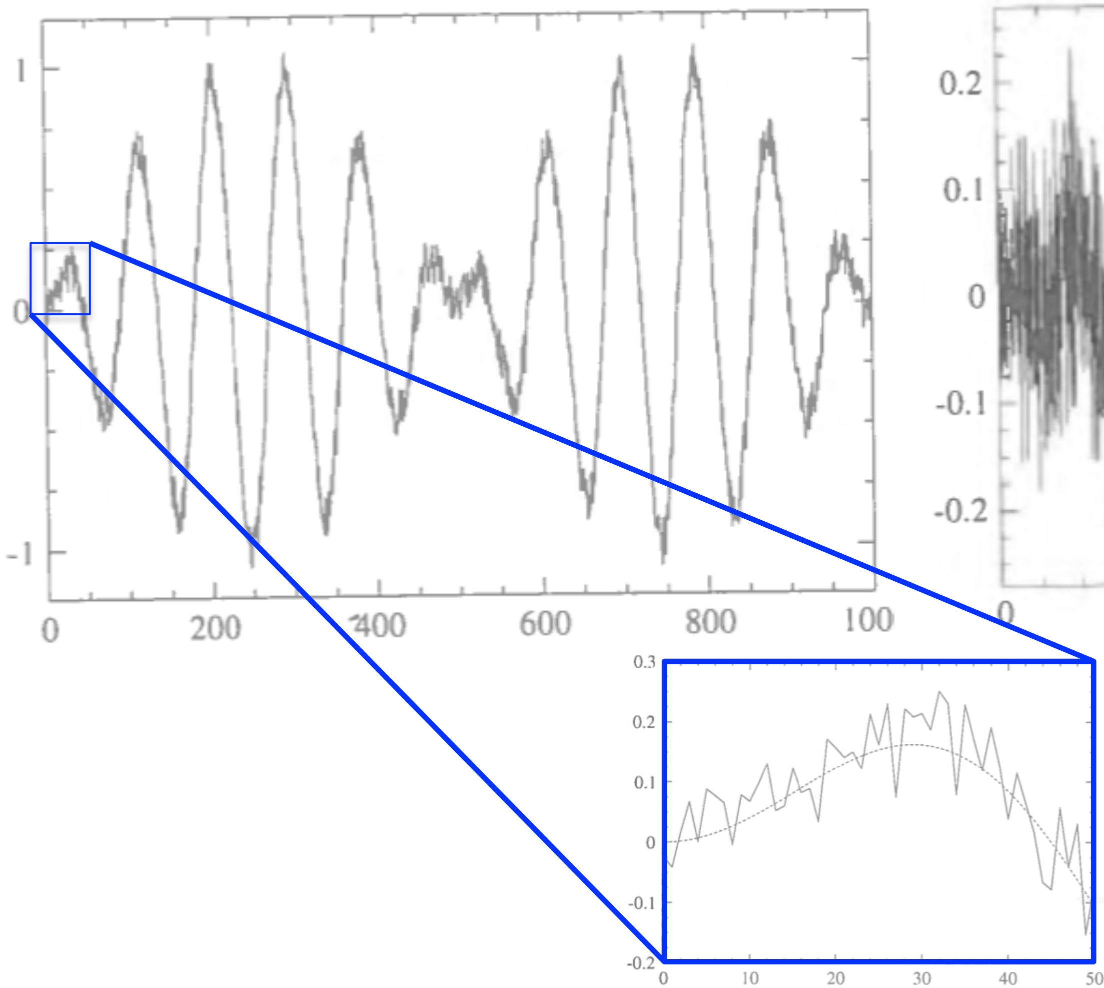
$$\text{onde } x_+ = x+\Delta x/2;\ x_- = x-\Delta x/2;$$

$$y_+ = y+\Delta y/2;\ y_- = y-\Delta y/2;$$

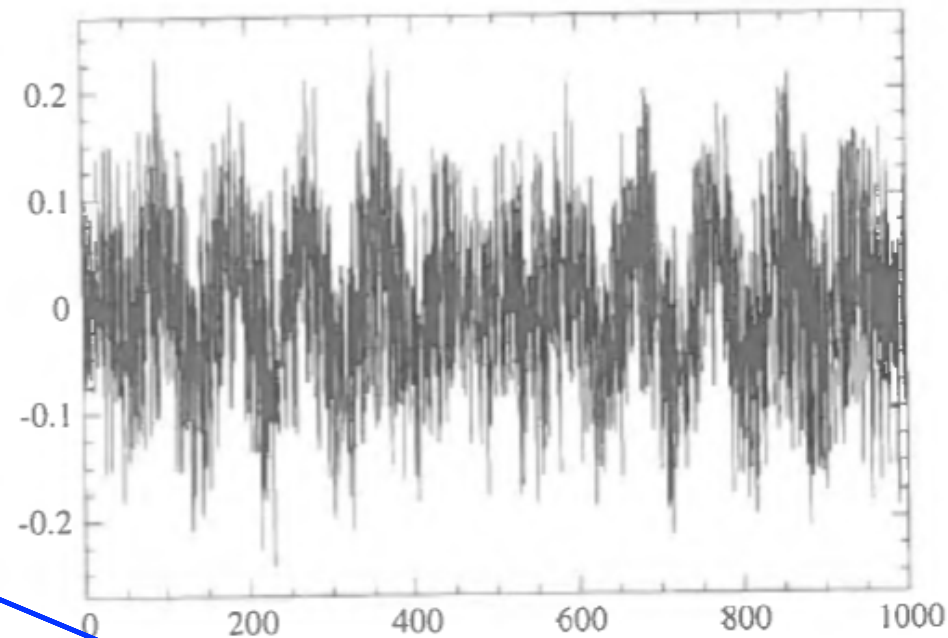
# Derivada de dados com ruído

- Cuidado quando derivar dados com ruídos.

Exemplo de dados com ruído




Derivada dos dados exemplificado



# Derivada de dados com ruído

- Para melhorar a derivada de dados com ruídos:

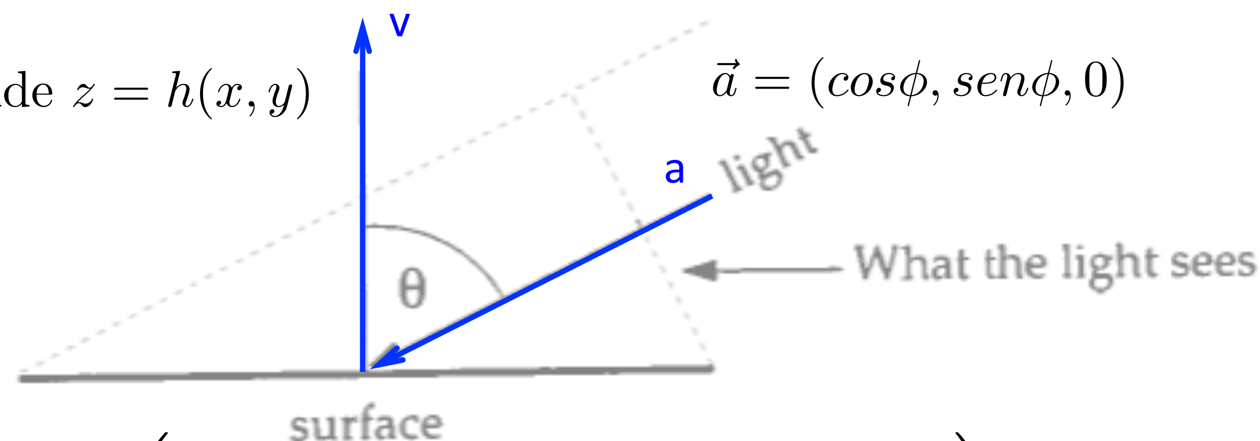
1) Aumentar o $\delta x$;
2) Ajustar uma curva próximo ao ponto da derivada;
3) Suavizar antes de aplicar a derivada.

# Exemplo 2:

Processamento de imagem: considere que a luz que incide ($\vec{a}$) sobre uma superfície com vetor normal ($\vec{v}$) como mostra a figura abaixo. Calcule a intensidade da luz para os arquivos stm.txt in intervalo entre os pontos de 2.5 e altitute.txt com 30 km; para Φ= 45º e 15º faça os gráficos das imagens sem a luz e com a luz nestes 2 ângulos.

$$\vec{v} = (\partial z/\partial x, \partial z/\partial y, 1) \text{ onde } z = h(x,y)$$

$$\vec{a} = (cos\phi, sen\phi, 0)$$




$$I = acos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = -\left(\frac{cos\phi(\partial z/\partial x) + sen\phi(\partial z/\partial y)}{\sqrt{(\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2 + 1}}\right)$$