MAT-2454 – Cálculo II
Aula 19: TVM, Gradiente nulo e Polinômios de Taylor

Alexandre Lymberopoulos

Para Escola Politécnica – USP

IME–USP — Departamento de Matemática

Ordem do dia

1. Teorema do Valor Médio
2. Polinômios de Taylor

Ele de novo....

Teorema (Teorema do Valor Médio)

Sejam $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável e $P_0, P_1 \in A$ tais que o segmento $\overline{P_0P_1}$ esteja contido em A. Então existe P no interior do segmento $\overline{P_0P_1}$ tal que

$$f(P_1) - f(P_0) = \langle \nabla f(P), P_1 - P_0 \rangle.$$

Demonstração:

Seja $v = P_1 - P_0$ e aplique o teorema do valor médio que conhecemos para a função $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(P_0 + tv)$. Use a regra da cadeia para explicitar $g'(\bar{t})$ em termos de ∇f e v. $\square$

- Em particular, se $u = \frac{P_1 - P_0}{\|P_1 - P_0\|}$ temos que $\frac{f(P_1) - f(P_0)}{\|P_1 - P_0\|} = \frac{\partial f}{\partial u}(\overline{P})$.

Gradiente nulo?

- Dizem que, no cálculo 1, se uma função tem derivada nula então ela é constante, certo? Errado!
- Exemplo: tome $f\colon]0,1[\cup]1,2[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$. Faça o gráfico de f.
- Para o resultado ser verdadeiro[1] é preciso que f esteja definida num intervalo. Em duas ou mais variáveis a situação é análoga:
- Dizemos que um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ é *conexo por caminhos* se quaisquer dois pontos de A são extremidades de uma curva contínua (pode ser poligonal) inteiramente contida em A.
- Nessas condições temos que se $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $\nabla f = (0,0)$, então f é constante em A.
- Consequentemente, se $\nabla f = \nabla g$, então $f(x,y) = g(x,y) + k$, para alguma constante real k.

[1] e se prova usando o TVM

Potenciais

Como determinar uma função a partir de suas derivadas parciais? Ou seja, dadas duas funções $P, Q\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, determinar $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = (P, Q)$. Tal f é um *potencial* para o campo (P, Q). Uma resposta parcial[2] é

Teorema

Sejam $P, Q : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções de classe $\mathcal{C}^1$. Se existe $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = (P, Q)$, então $P_y = Q_x$.

- $(P, Q) = (xy, y)$ não admite potencial.
- $(P, Q) = (3x^2y^2 + 4, 2x^3y + y^2)$ tem chance pois $P_y = Q_x = 6x^2y$. E admite potencial: integrando P em x temos $f(x, y) = x^3y^2 + 4x + g(y)$, que derivando em y dá $2x^3y + y^2 = 2x^3y + g'(y)$, donde $g(y) = {}^{y^3}/_3 + k$. Logo
$$f(x, y) = x^3y^2 + 4x + {}^{y^3}/_3 + k.$$
- E se $(P, Q) = \left({}^{-y}/_{(x^2+y^2)}, {}^{x}/_{(x^2+y^2)}\right)$?

[2] A demonstração usa o teorema de Schwarz e você consegue fazer.

O que vamos fazer? E como?

- Obter um polinômio em duas variáveis que seja uma boa aproximação para uma função suficientemente diferenciável em torno de um ponto (x_0, y_0) no domínio de f;
- Obter estimativas para o erro cometido por estas aproximações;
- Vamos usar os resultados anteriores e os polinômios de Taylor para funções de uma variável.

POLINÔMIOS DE TAYLOR DE PRIMEIRA ORDEM

- É a função afim que tem como imagem o plano tangente!

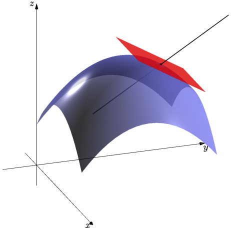

FIGURA: O gráfico de f e seu plano tangente

- Formalmente, sejam $A \subseteq \mathbb{R}^2$ um convexo[3], $f\colon A \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, $(x_0, y_0) \in A$ e $(h, k) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Considerando a função $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$ temos, através de seu fómula de Taylor, que $g(1) = g(0) + g'(0)(1 - 0) + E(1)$.
- Ou seja, com $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$,

$$\boxed{f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R_1(h, k).}$$

[3] Para poder aplicar o TVM

Polinômio e Estimativa do Erro

- Assim, $P_1(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ é o *polnômio de Taylor de primeira ordem para* f *em torno fde* (x_0,y_0).
- A estimativa do erro também vem da equivalente para a função g:

$$\begin{aligned} R_1(x,y) = E(1) &= \frac{g''(\overline{t})}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[f_{xx}(\overline{x},\overline{y})h^2 + 2f_{xy}(\overline{x},\overline{y})hk + f_{yy}(\overline{x},\overline{y})k^2\right], \end{aligned}$$

  onde $h = x - x_0$, $k = y - y_0$ e $(\overline{x},\overline{y})$ é algum ponto no interior do segmento de extremidades (x_0,y_0) e (x_0+h, y_0+k).
- Exercício: escreva o Polinômio de Taylor de Ordem 1 para $f(x,y) = e^{x+5y}$, mostre que $|R_1(x,y)| < \frac{3}{2}(x+5y)^2$ e estime $e^{0,06}$.

Polinômios de Taylor de Segunda Ordem

- Repetindo o argumento para o polinômio de Taylor de ordem 2 de g temos,

$$P_2(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(\overline{x},\overline{y})h^2 + 2f_{xy}(\overline{x},\overline{y})hk + f_{yy}(\overline{x},\overline{y})k^2\right]$$

- Note o coeficiente 2 no termo com a derivada mista: ele aparece pois f é suposta de classe $\mathcal{C}^2$, o que garante uma boa aproximação de f por uma forma quadrática (matriz Hessiana[4] simétrica).

[4] mais sobre elas nas próximas aulas

Estimativa do Erro

- O erro, no caso de aproximções de segunda ordem, vem, novamente, do caso de uma variável. Se f é de classe $\mathcal{C}^3$, temos

$$R_2(x,y) = \frac{1}{3!}\Big[f_{xxx}(\overline{x},\overline{y})h^3 + 3f_{xxy}(\overline{x},\overline{y})h^2k + 3f_{xyy}(\overline{x},\overline{y})hk^2 + f_{yyy}(\overline{x},\overline{y})k^3\Big].$$

  onde, novamente, $h = x - x_0$ e $k = y - y_0$.
- Nesse caso temos $f(x,y) = P_2(x,y) + R_2(x,y)$

O caso geral

- A título de curiosidade, se f é de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, temos

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r!} \left[\sum_{p=1}^{r} \binom{r}{p} \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-p} \partial y^p}(x_0,y_0) h^{r-p} k^p \right] + E_n(h,k),$$

onde $h = x - x_0$, $k = y - y_0$ e

$$E_n(h,k) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-p} \partial y^p}(\overline{x},\overline{y}) h^{n+1-p} k^p,$$

para algum $(\overline{x},\overline{y})$ interior ao segmento de extremos (x_0,y_0) e (x,y).

Atividades

1. Seja $f(x,y)=\ln(x+y)$. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta do ponto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Mostre que para todo (x,y) com $x+y>1$, $|\ln(x+y)-(x+y-1)|<\frac{1}{2}(x+y-1)^2$.
2. Sejam $f(x,y)=x^3+y^3-x^2+4y$ e $P_1(x,y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta do ponto $(1,1)$. Mostre que para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, com $|x-1|<1$ e $|y-1|<1$, temos $|f(x,y)-P_1(x,y)|<5(x-1)^2+6(y-1)^2$. Usando $P_1(x,y)$, calcule um valor aproximado para $f(1.001,0.99)$ e estime o erro cometido com essa aproximação.
3. Seja a função $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+8$.
   - **a.** Determine o polinômio de Taylor $P_1(x,y)$ de ordem 1 de f, em torno do ponto $(1,1)$.
   - **b.** Escreva a Fórmula de Taylor para o resto $E_1(x,y)=f(x,y)-P_1(x,y)$.
   - **c.** Usando o item (b), mostre que, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, com $x>1/2$ e $y>1/2$, vale que $E_1(x,y)\geq\frac{3}{2}(x-y)^2$.

Referências

- Aula presencial;
- Polinômios de Taylor: H. L. Guidorrizi, *Um curso de Cálculo*, vol. 2, 5ª. edição, LTC - São Paulo, 2001. **Capítulo 15**;

Até a próxima aula!

lymber@ime.usp.br