MAT-2454 – Cálculo II
Aula 17: Superfícies de Nível

Alexandre Lymberopoulos

Para Escola Politécnica – USP

IME–USP — Departamento de Matemática

Ordem do dia

AQUI É OUTRO NÍVEL...

- Vamos considerar agora funções do tipo

$$\begin{aligned} f\colon A \subseteq \mathbb{R}^3 &\to \qquad \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto f(x,y,z) \end{aligned}$$

- Esse tipo de função pode modelar, por exemplo, quantidades físicas em ambientes tridimensionais, como a temperatura ou a pressão num câmara.
- O gráfico dessas funções está em $\mathbb{R}^4$:

$$\operatorname{Gr} f = \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \colon w = f(x,y,z)\big\}.$$

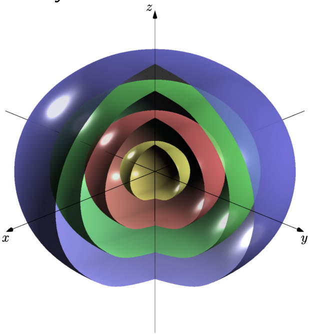
- Para entender melhor o comportamento da função, podemos olhar para "cortes" de seu gráfico, $w = c \in \mathbb{R}$, obtendo então subconjuntos do domínio de f:

$$\boxed{f^{-1}(c) = \big\{(x,y,z) \in A \colon f(x,y,z) = c\big\}}.$$

Superfícies de Nível

- Sob boas condições, o conjunto de nível $f^{-1}(c)$ é uma superfície, a qual chamaremos[1] de *superfície de nível c da função f*.
- Exemplo: Considere a função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Sua superfície de nível é o conjunto dos pontos que verificam a equação $x^2 + y^2 + z^2 = c$.

1. Se $c < 0$, $f^{-1}(c)$ é vazio;
2. Se $c = 0$,
$$f^{-1}(c) = \{(0, 0, 0)\};$$
3. Se $c > 0$, $f^{-1}(c)$ é uma esfera de raio $\sqrt{c}$, centrada na origem.



[1] mesmo que não seja uma superfície "regular"

Plano Tangente?

- É claro! Podemos definir o gradiente de f, mas agora ele terá três coodenadas: $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$.
- O conceito de diferenciabilidade é análogo ao para funções em duas variáveis, assim como a regra da cadeia e a derivada direcional[2].
- Nesse contexto, se γ é uma curva cuja imagem está na superfície de nível c de f então

$$(f \circ \gamma)(t) = c \implies \left\langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \right\rangle = 0,$$

  ou seja o gradiente é perpendicular a todas as direções tangentes a curvas contidas na superfície de nível. Dizemos assim que o gradiente em $(x_o, y_o, z_0) \in D_f$ é (novamente) normal à superfície de nível de f que passa por (x_0, y_0, z_0).
- Deste modo o plano tangente à superfície de nível c de f em (x_0, y_0, z_0) é

$$\boxed{f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.}$$

[2] Inclusive com a fórmula dada pelo produto escalar, agora em $\mathbb{R}^3$.

Exemplos e observações

- Voltando para $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, temos $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$. As superfícies de nível c é uma esfera. O plano tangente a tal superfície num ponto (x_0, y_0, z_0) é $2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0$, ou seja, $x_0x + y_0y + z_0z - c = 0$. Tente interpretar isso em termos de quem é um vetor normal à esfera.
- O gráfico de uma função $g\colon B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma superfície, que pode ser vista como superfície de nível 0 da função $f(x,y,z) = g(x,y) - z$. Compare as equações dos planos tangentes a esta sperfície, como gráfico de g (já vimos) e como superfície de nível de f (estamos vendo agora).
- A situação acima nos motiva a seguinte pergunta: *Quando uma superfície de nível é o gráfico de uma função de duas variáveis?*
- Essa pergunta é análoga ao caso no plano: quando uma curva plana é o gráfico de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?
- Nem sempre! A esfera e o círculo são contraexemplos para o primeiro e o segundo casos, respectivamente.

Teoremas das Funções Implícitas - I

- Mas nem tudo está perdido! Localmente é possível escrever certos conjuntos de nível[3] como gráficos de funções. Para curvas de nível:

Teorema (Teorema das funções implícitas - I)

Sejam $F\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um função de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$ e $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Então existem intervalos abertos $I, J \subseteq \mathbb{R}$, com $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, e uma função de classe $\mathcal{C}^1$, $g\colon I \to J$ tal que $F\big(x, g(x)\big) = 0$, para todo $x \in I$. Além disso,

$$g'(x) = -\frac{F_x\big(x, g(x)\big)}{F_y\big(x, g(x)\big)}.$$

[3] curvas ou superfícies

Teoremas das Funções Implícitas - II

- Para superfícies de nível:

Teorema (Teorema das funções implícitas - II)

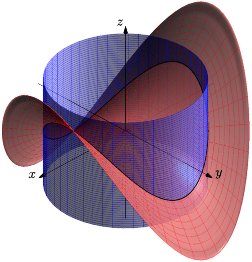
Seja $F\colon A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um função de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Então existem um aberto $B \subseteq \mathbb{R}^2$ e um intervalo aberto $J \subseteq \mathbb{R}$, com $(x_0, y_0) \in B$ e $z_0 \in J$, e uma função de classe $\mathcal{C}^1$, $g\colon B \to J$ tal que $F\big(x, y, g(x, y)\big) = 0$, para todo $(x, y) \in B$. Além disso,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{F_x\big(x, y, g(x, y)\big)}{F_z\big(x, y, g(x, y)\big)} \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{F_y\big(x, y, g(x, y)\big)}{F_z\big(x, y, g(x, y)\big)}.$$

- As demonstrações são um pouco sofisticadas, mas vamos estudar casos lineares e muitos exemplos em sala para ajudar a entender o significado desses importantes resultados.

Interseção de superfícies de nível?

- De uma mesma função é impossível!
- Mas superfícies de nível de funções distintas podem se interceptar, e o que se espera é, tipicamente uma curva[4].
- Exemplo: Sejam $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ e $g(x,y,z) = x^2 - y^2 - z$. As superfícies de nível 1 e 0 são, respectivamente, um cilindro e um parabolóide hiperbólico:



Como determinar o vetor tangente a esta curva?
Nesse caso parametrizar explicitamente é possível, mas vamos pensar numa alternativa mais geral...

[4]Pelo fato de dois planos não paralelos ou coincidentes se interceptarem numa reta

Produto Vetorial?

- A interseção pertence às superfícies de nível c_1 de f e c_2 de g. Conforme observado no slide 5, o vetor tangente dessa interseção está contido no plano tangente a cada uma das superfícies de nível.
- Deste modo ele é ortogonal a ambos os gradientes em cada ponto da interseção, logo paralelo ao produto vetorial $\nabla f \times \nabla g$ nesses pontos.
- Vejamos as contas na situação concreta acima, no ponto $(\sqrt{3}/2, -1/2, 0) \in f^{-1}(1) \cap g^{-1}(0)$:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 \implies \nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 0)$$
$$g(x,y,z) = x^2 - y^2 - z \implies \nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, -1)$$

Se $\gamma : I \subseteq \to \mathbb{R}^3$ é uma parametrização da interseção, o vetor $\gamma'(t)$ é paralelo a

$$(\nabla f \times \nabla g)(\sqrt{3}/2, -1/2, 0) = (-1, -\sqrt{3}, 0).$$

Teoremas das Funções Implícitas - III

- Quando uma curva dada pela interseção de duas superfícies de nível pode ser parametrizada em função de um dos eixos?
- A resposta está ligada a determinar quais as variáveis livres e quais as dependentes num sistema linear.

Teorema (Teorema das funções implícitas - III)

Sejam $F, G\colon A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^1$ e $P = (x_0, y_0, z_0) \in A$ tais que $F(P) = G(P) = 0$ e $\det \begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix} \neq 0$ em P. Então existem um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, e funções $y, z\colon I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, tais que $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$ e $F\big(x, y(x), z(x)\big) = G\big(x, y(x), z(x)\big) = 0$. Além disso,

$$y'(x) = -\frac{\det \begin{bmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix}} \quad e \quad z'(x) = -\frac{\det \begin{bmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix}}.$$

Referências

- Aula presencial;
- H. L. Guidorrizi, *Um curso de Cálculo*, vol. 2, 5ª. edição, LTC - São Paulo, 2001. **Seções 12.2 e 13.2**;

Até a próxima aula!

lymber@ime.usp.br