

A SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS É INDIVIDUAL!

1) Entregar um relatório em papel, contendo todas as figuras e demais itens solicitados nos exercícios, bem como os scripts utilizados para a solução.

2) Enviar os scripts (apenas os scripts) como anexo de e-mail (enviar para calbertomc@usp.br).

A avaliação será feita considerando a metodologia, os resultados obtidos e a clareza da formulação, ajudada por comentários e explicações adequadamente inseridos nos scripts.

EXERCÍCIO 1 (2.5) – A finalidade deste exercício é a aplicação da modelagem linear de dados ao problema da aferição de um gravímetro diferencial.

Tipos de gravímetros

Existem dois tipos de gravímetros: absolutos e diferenciais. Os gravímetros absolutos permitem a determinação do valor da gravidade em um dado ponto (estação gravimétrica). Gravímetros diferenciais permitem tão somente a determinação da *diferença de gravidade* entre duas estações.

Determinação da diferença de gravidade usando um gravímetro diferencial

A determinação precisa da diferença de gravidade entre duas estações A e B é feita pelo método da ocupação dupla ida e volta $A-B-A-B-A$, onde A representa uma leitura de gravidade na primeira estação e B é uma leitura na segunda estação. O modelo matemático para a determinação da diferença de gravidade entre as estações A e B é dado pelas seguintes equações de observação

$$\begin{aligned}l_1 &= a + bt_1 \\l_2 &= a + bt_2 + \Delta g \\l_3 &= a + bt_3 \\l_4 &= a + bt_4 + \Delta g \\l_5 &= a + bt_5\end{aligned}\tag{1}$$

sendo Δg a diferença de gravidade entre as estações A e B , t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5 os instantes de tempo das leituras. As leituras l_1, l_3 , e l_5 são feitas na estação A ; e as leituras l_2 e l_4 são feitas na estação B . A *deriva instrumental* do gravímetro é representada pelos coeficientes a, b . A solução por quadrados mínimos do sistema de equações de observação (1) acima, permite estimar o valor dos três parâmetros do modelo $a, b, \Delta g$.

Aferição de gravímetros

Todo gravímetro que vá ser utilizado em trabalhos de gravimetria de precisão no Brasil, necessita ser previamente aferido, de maneira que suas leituras sejam compatíveis com os parâmetros da Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira, implantada e mantida pelo Observatório Nacional, órgão responsável pela normatização da gravimetria no país. A aferição é feita através da determinação da diferença de gravidade entre estações da linha de calibração do Observatório Nacional. A referida linha de calibração é constituída por seis estações, cujos valores de gravidade foram determinados por Escobar et. al (1996), utilizando um conjunto de 13 gravímetros. Os valores ajustados de gravidade das estações da linha de calibração são apresentados na Tabela 1 abaixo. A diferença de gravidade entre duas estações da linha de calibração, determinada usando o gravímetro em aferição, é comparada à diferença do valor da gravidade dessas estações, conforme a Tabela 1. Dessa comparação resulta um *fator de escala* para o gravímetro em teste. As leituras do gravímetro aferido, multiplicadas pelo fator de escala, tornam-se compatíveis com a Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira.

ESTAÇÃO	CÓDIGO	GRAVIDADE mGal	DESVIO PADRÃO mGal
RIO DE JANEIRO-C	016080	978791.64	0.012
ANGRA DOS REIS	CAL-01	978768.84	0.015
ENGENHEIRO PASSOS	CAL-02	978601.09	0.012
FAZENDA LAPA	CAL-03	978419.55	0.013
MARCO ZERO	CAL-04	978325.58	0.014
AGULHAS NEGRAS	CAL-05	978163.10	0.016

Tabela 1: Valores de gravidade das estações da linha de calibração do Observatório Nacional, segundo Escobar et. al (1996).

Aferição do gravímetro G913

O objetivo do presente exercício é a aplicação da modelagem de dados linear, para a aferição do gravímetro diferencial Lacoste & Romberg modelo G, número de série 913. Dos dias 8 e 9 de dezembro de 2003 foram colhidos dados para quatro determinações de diferença de gravidade entre as estações "Fazenda Lapa" e "Marco Zero", contidos nos arquivos ON_CALIB_01.TXT, ON_CALIB_02.TXT, ON_CALIB_03.TXT,

ON_CALIB_04.TXT. O formato dos dados é ilustrado abaixo, onde a estação 1 é "Fazenda Lapa", e estação 2 é "Marco Zero". O desvio padrão de todas as leituras é $\sigma = 0.0104mGal$

Estação	Hora	Minuto	Leitura (mGal)
1	13	14	1940.312
2	13	36	1846.195
1	13	57	1940.323
2	14	17	1846.186
1	14	38	1940.323

Atividades do exercício:

- (a) Estime a diferença de gravidade Δg entre as estações "Fazenda Lapa" e "Marco Zero", bem como o correspondente desvio padrão, para cada um dos quatro conjuntos de dados, de acordo com as equações de observação (1).
- (b) Calcule a média das quatro estimativas de Δg obtidas em (a), bem como o desvio padrão da média.
- (c) Calcule a diferença entre a gravidade das estações "Fazenda Lapa" e "Marco Zero", bem como o correspondente desvio padrão, de acordo com a Tabela 1.
- (d) Denotando como Δg_{913} o valor obtido em (b) e Δg_{ON} o valor obtido em (c), calcule o fator de escala do gravímetro G913 pela relação $f = \frac{\Delta g_{ON}}{\Delta g_{913}}$. Calcule também o desvio padrão do fator de escala f .

EXERCÍCIO 2 (2.5) – Considere duas variáveis aleatórias *independentes* X e Y , com distribuição normal de probabilidade e variância da população respectivamente σ_x^2 e σ_y^2 . Como X e Y , são independentes, então a matriz de covariância de X e Y é:

$$C_1 = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Sejam agora duas novas variáveis aleatórias U e V , definidas pela seguinte transformação linear de X e Y :

$$U = X + 2Y \quad (2a)$$

$$V = 2X - 4Y \quad (2b)$$

a qual pode ser escrita em forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad (3)$$

sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

De acordo com a fórmula de propagação de covariância, a matriz de covariância entre U e V é dada por:

$$C_2 = A \cdot C_1 \cdot A^T \quad (5)$$

Pode-se verificar que, apesar de X e Y serem independentes, U e V dadas por (2) ou (3) não são independentes.

Atividades do exercício:

- Usando as equações (1), (4) e (5) da introdução acima, calcule a matriz de covariância entre U e V
- Use a função randn (gerador randômico normalizado) para construir dois vetores \vec{x} e \vec{y} contendo cada um uma amostra de dimensão 5000 de uma variável normal com média zero e desvios padrão $\sigma_1 = 1$ e $\sigma_2 = 1$.
- Construa dois vetores $\vec{u} = \vec{x} + 2\vec{y}$ e $\vec{v} = 2\vec{x} - 4\vec{y}$, de acordo com a transformação linear (2) acima.
- Faça o diagrama de dispersão de \vec{x} e \vec{y} e o diagrama de dispersão de \vec{u} e \vec{v} . Comente a respeito do aspecto desses diagramas, considerando que \vec{x} e \vec{y} são amostras de variáveis estatisticamente independentes e \vec{u} e \vec{v} são amostras de variáveis estatisticamente dependentes.
- Calcule a matriz de covariância amostral entre \vec{x} e \vec{y} . Compare a matriz de covariância amostral entre \vec{x} e \vec{y} com a matriz de covariância da população (1).
- Calcule a matriz de covariância amostral entre \vec{u} e \vec{v} . Compare a matriz de covariância amostral entre \vec{u} e \vec{v} com a matriz de covariância da população determinada em (a).
- Explique porque as variâncias amostrais de \vec{x} e \vec{y} , calculadas em (e) não são exatamente iguais às variâncias da população conforme constam na matriz (1). Explique também porque a covariância amostral entre \vec{x} e \vec{y} não é exatamente igual a zero, como seria de se esperar que fosse, considerando que X e Y são variáveis aleatórias estatisticamente independentes.
- Do mesmo modo, explique porque a matriz de covariância amostral entre \vec{u} e \vec{v} calculada em (f), não é exatamente igual à matriz de covariância da população determinada em (a).

EXERCÍCIO 3 (2.5) – Considere duas variáveis aleatórias estatisticamente *dependentes* X e Y , e seja C a matriz de covariância de X e Y

$$C = \begin{bmatrix} p & s \\ s & q \end{bmatrix}$$

onde p e q são respectivamente as variâncias de X e de Y , e s é a covariância entre X e Y , sendo $s \neq 0$. Nessas condições, mostre que existe uma constante λ tal que a variável aleatória Z , dada por

$$Z = X + \lambda Y$$

é estatisticamente independente de Y , isto é, λ é tal que a covariância entre Y e Z é nula.

EXERCÍCIO 4 (2.5) – O objetivo do exercício é o de aplicar o conceito de covariância para a determinação de densidade de rochas a partir de medidas de gravidade, através do método de Parasnis.

Conceito de Anomalias de Gravidade:

As medições de gravidade terrestre são usualmente expressas como anomalias (desvios) em relação à gravidade de referência. A gravidade de referência, ou gravidade normal, é um modelo adotado internacionalmente que fornece o valor da gravidade esperada sobre a superfície de um elipsoide de referência expressa como:

$$\gamma(\varphi) = 978031.85 \times (1 + 5.278895 \times 10^{-3} \sin^2 \varphi + 2.3462 \times 10^{-5} \sin^4 \varphi) \text{ mGal} \quad (1)$$

sendo φ a latitude, $1 \text{ mGal} = 10^{-3} \text{ Gal} = 0.001 \text{ cm/s}^2 = 10^{-5} \text{ m/s}^2$. Conceitualmente, a anomalia de gravidade é definida como a diferença entre a gravidade observada (medida) e a gravidade normal. Anomalia = (Gravidade observada) – (Gravidade normal). Na prática, a gravidade terrestre raramente é medida sobre o geóide (nível médio dos mares não perturbados), mas sim a uma altura h sobre o mesmo. Por essa razão, o cálculo da anomalia de gravidade deve compensar a variação da gravidade devido à altitude h , bem como a atração gravitacional do material da crosta entre o geóide e a superfície terrestre, tendo-se assim a chamada anomalia Bouguer:

$$\Delta g = g - \gamma(\varphi) + C_F h - 2\pi G \rho_0 h \quad (2)$$

sendo C_F a variação da gravidade com a altitude h , G a constante da gravitação universal, e ρ_0 a densidade de massa do material da crosta. O valor adotado internacionalmente para variação da gravidade com a

altitude é $C_F = 0.3086 \text{ mGal/m}$. A constante da gravitação universal vale $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$ no Sistema Internacional de unidades. Quando se trabalha com unidades híbridas, sendo a aceleração expressa em mGal, o comprimento é em metros e a densidade é em grama/cm³. Logo,

$$G = 6.67 \times 10^{-3} \frac{\text{mGal}}{\text{m}(\text{g/cm}^3)}. \quad (3)$$

A densidade da crosta varia de local para local, em função do tipo de rochas constituintes da mesma. O valor médio mundial para a crosta superior continental vale $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$ e esse valor é rotineiramente empregado quando não se tem outras informações sobre a crosta local.

O método de Parasnis:

A definição da anomalia Bouguer conforme a equação (2) tem a propriedade de tornar a anomalia insensível a variações de altitude dos pontos de medida (estações gravimétricas). Desse modo, variações espaciais de anomalia Bouguer refletem a presença de corpos com densidade anômala dentro da crosta abaixo do geoide, o que possibilita investigar o interior terrestre por meio da gravimetria. No entanto, a insensibilidade da anomalia Bouguer em relação a variações de altitude deixa de existir se o valor da densidade crustal utilizado no cálculo da anomalia não for o correto. O método de Parasnis utiliza procedimentos estatísticos para verificar se a densidade usada é correta e, caso não seja, calcular uma correção para a densidade. Os valores de altitude h e de anomalia Bouguer Δg são tratados como variáveis aleatórias e a verificação se a densidade crustal usada é correta ou não é feita através da covariância amostral $\text{cov}(h, \Delta g)$:

$\text{cov}(h, \Delta g) \cong 0 \Rightarrow$ Densidade usada é correta $\text{cov}(h, \Delta g) > 0 \Rightarrow$ Densidade usada foi subestimada $\text{cov}(h, \Delta g) < 0 \Rightarrow$ Densidade usada foi superestimada

Supondo que a densidade ρ_0 inicialmente utilizada não é a correta, então seja a densidade correta ρ é expressa como

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho, \quad (4)$$

sendo $\Delta\rho$ a correção a ser aplicada à densidade inicial ρ_0 . Seja $\Delta\tilde{g}$ a anomalia Bouguer calculada pela equação (2). Utilizando a densidade correta ρ , temos:

$$\Delta\tilde{g} = g - \gamma(\varphi) + C_F h - 2\pi G \rho h. \quad (5)$$

Como $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$, então (5) escreve-se como:

$$\Delta\tilde{g} = g - \gamma(\varphi) + C_F h - 2\pi G(\rho_0 + \Delta\rho)h, \quad (6)$$

$$\Delta\tilde{g} = g - \gamma(\varphi) + C_F h - 2\pi G\rho_0 h - 2\pi G\Delta\rho h.$$

Como $\Delta g = g - \gamma(\varphi) + C_F h - 2\pi G\rho_0 h$, então tem-se a expressão final dada por:

$$\Delta\tilde{g} = \Delta g - 2\pi G\Delta\rho h \quad (7)$$

A equação (7) exprime a anomalia Bouguer $\Delta\tilde{g}$, correspondente à nova densidade ρ , em função da anomalia Δg , calculada com a densidade crustal densidade inicial ρ_0 , e da correção de densidade $\Delta\rho$. Se a nova densidade ρ representa o valor correto da densidade crustal, então $\Delta\tilde{g}$ e h devem ser independentes, ou seja, $cov(h, \Delta\tilde{g}) = 0$. Disso, decorre que:

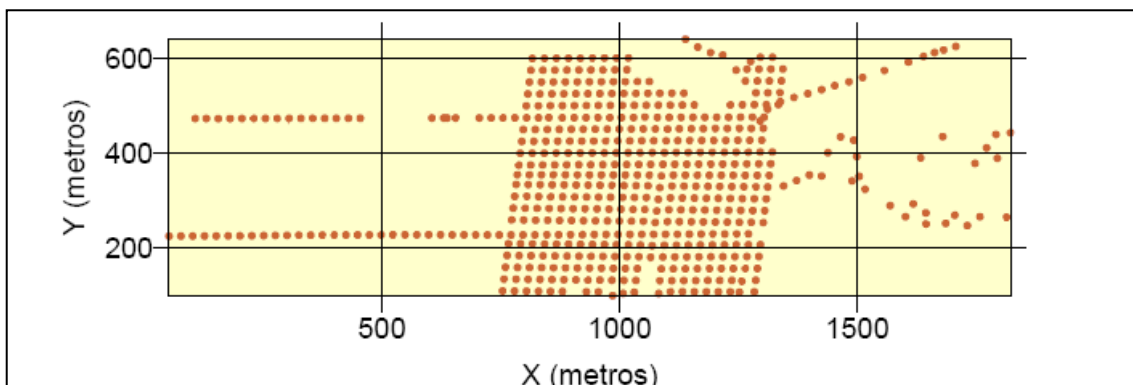
$$\Delta\rho = \frac{1}{2\pi G} \frac{cov(h, \Delta g)}{var(h)}$$

e a densidade crustal correta é:

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho$$

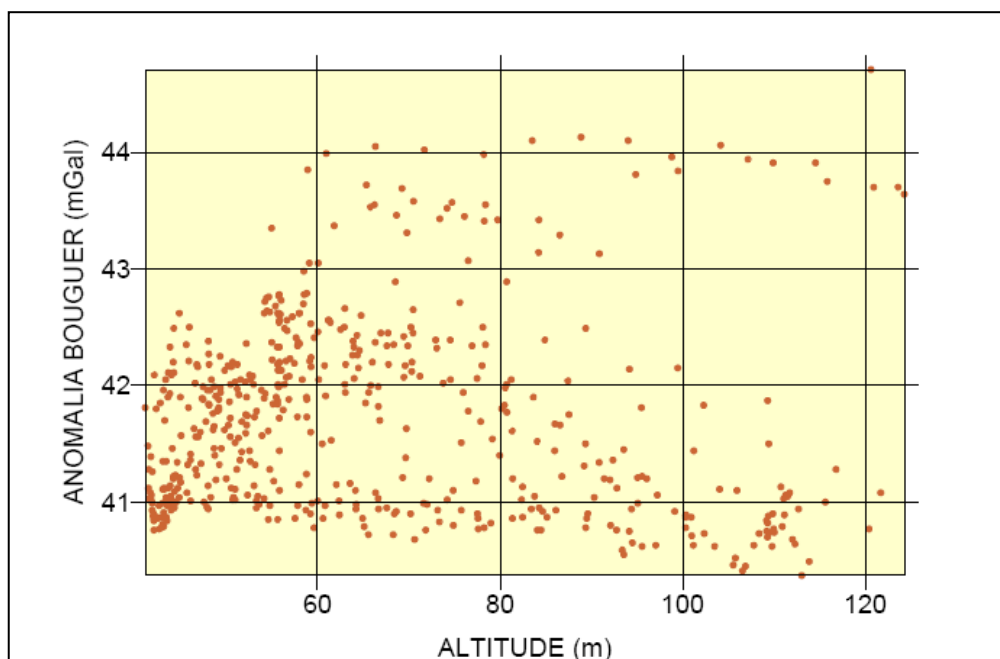
Descrição dos dados:

O exercício será aplicado aos dados de um levantamento gravimétrico de detalhe, constituído por 521 estações (pontos de medida de gravidade). A localização das estações gravimétricas é mostrada na figura abaixo.

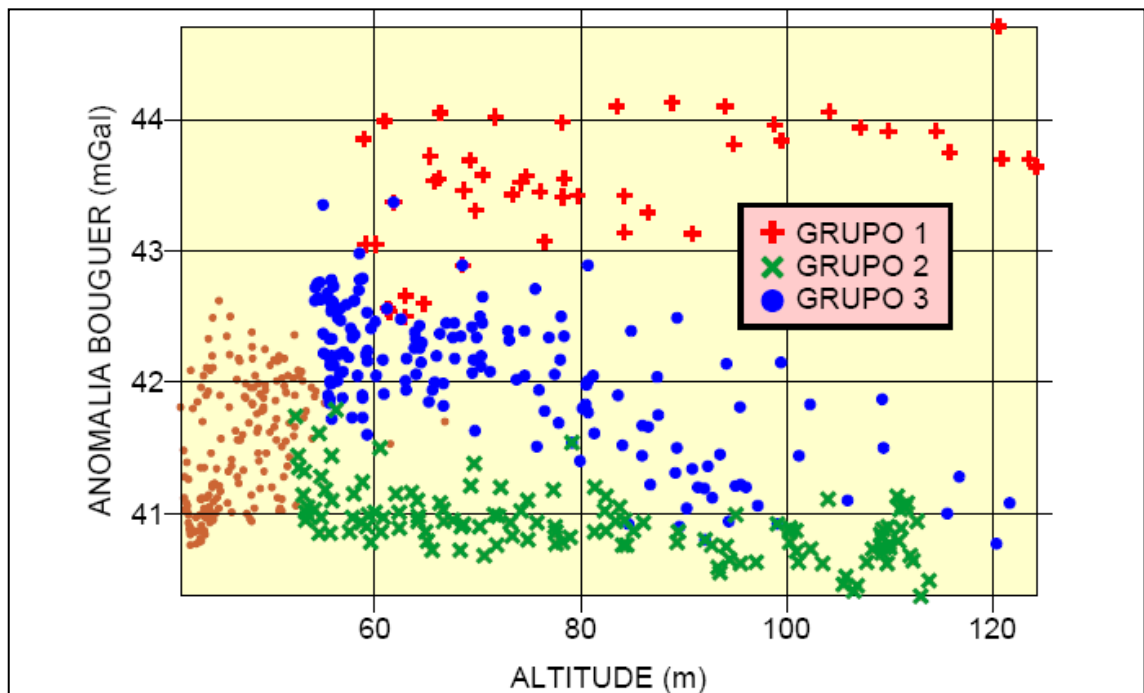


Sabe-se que na área de interesse ocorrem dois tipos de rocha: o *jacupiranguito*, rocha máfica bastante densa, e o *carbonatito*, menos denso que o jacupiranguito. Há também ocorrências de carbonatito alterado por intemperismo e por fraturamento. O carbonatito alterado é ainda menos denso que o carbonatito não alterado.

Os valores de anomalia Bouguer foram inicialmente calculados assumindo-se para a densidade de massa da crosta o valor médio padrão mundial $\rho_0 = 2,67g/cm^3$. Devido à diversidade das rochas que ocorrem na área, suspeita-se que o valor $2,67g/cm^3$, adotado para a densidade crustal, não é o mais correto, propondo-se aplicar o método de Parasnis para estimar o valor mais adequado de densidade. Para tanto, elaborou-se o diagrama de dispersão da anomalia Bouguer e da altitude para todas as estações gravimétricas do levantamento, mostrado na figura abaixo.



Analisando o diagrama de dispersão, à primeira vista bastante complexo, identifica-se três grupos de estações que exibem covariância bastante distinta entre a anomalia Bouguer e altitude. Esses grupos são mostrados na figura a seguir.

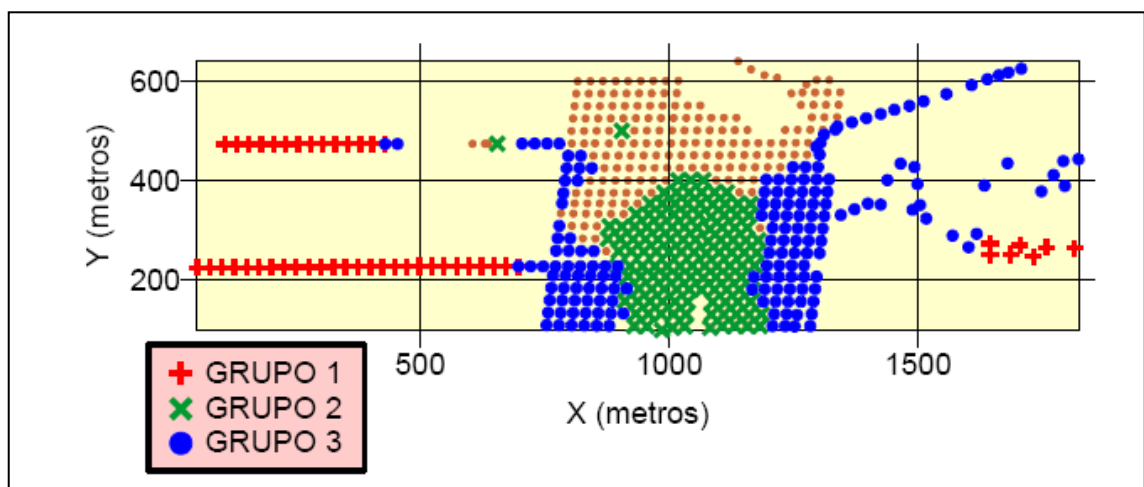


As estações do grupo 1 mostram uma covariância positiva entre a anomalia Bouguer e a altitude, indicativa de que a densidade crustal é maior que $2,67g/cm^3$. Os grupos 2 e 3 exibem covariância negativa entre a anomalia Bouguer e a altitude, consistente com valores de densidade crustal inferiores a $2,67g/cm^3$.

As estações gravimétricas que não foram incluídas em nenhum dos grupos, localizam-se em uma área onde a variação de altitude é muito pequena, tornando difícil caracterizar eventual covariância com a anomalia Bouguer.

O reconhecimento dos três grupos acima descritos sugere que os mesmos estejam associados à ocorrência dos três litotipos: jacupiranguito, carbonatito e carbonatito alterado.

Essa hipótese é reforçada examinando-se a localização das estações pertencentes a cada grupo, mostrada na figura abaixo, onde nota-se que praticamente não existe superposição espacial entre os grupos, os quais configuram regiões provavelmente associadas à ocorrência de um dos três litotipos.



Os dados gravimétricos correspondentes aos três grupos acima descritos são fornecidos nas planilhas Excel:

Dados_Grav_Grupo_1.xls;

Dados_Grav_Grupo_2.xls;

Dados_Grav_Grupo_3.xls.

Atividades a serem desenvolvidas no exercício:

Para cada grupo de dados,

- (a) Elabore o gráfico do diagrama de dispersão entre a altitude e anomalia Bouguer.
- (b) Calcule a matriz de covariância amostral entre a altitude e a anomalia Bouguer.
- (c) Calcule a densidade crustal pela relação

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho,$$

sendo $\Delta\rho = \frac{1}{2\pi G} \frac{cov(h, \Delta g)}{var(h)}$, $\rho_0 = 2,67 g/cm^3$ e $G = 6,67 \times 10^{-3} \frac{mGal}{m \cdot (g/cm^3)}$

- (d) (Conceitual) Mostre que a expressão de $\Delta\rho$ no item (c) acima pode ser deduzida a partir do resultado obtido no Exercício 2.