

**MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS II**

2º Semestre - 2019

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução (Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
<http://www.mat.ufmg.br/~regi>

Julho 2011

5	Equação de Laplace Bidimensional	420
5.1	Equação de Laplace num Retângulo	420
5.1.1	Apenas $k(y)$ não Nula	421
5.1.2	Apenas $h(y)$ não Nula	428
5.1.3	Caso Geral	434
	Exercícios	437
5.2	Equação de Laplace numa Faixa Semi-infinita	440
	Exercícios	448
5.3	Equação de Laplace em Regiões Circulares	449
	Exercícios	457
5.4	Respostas dos Exercícios	467

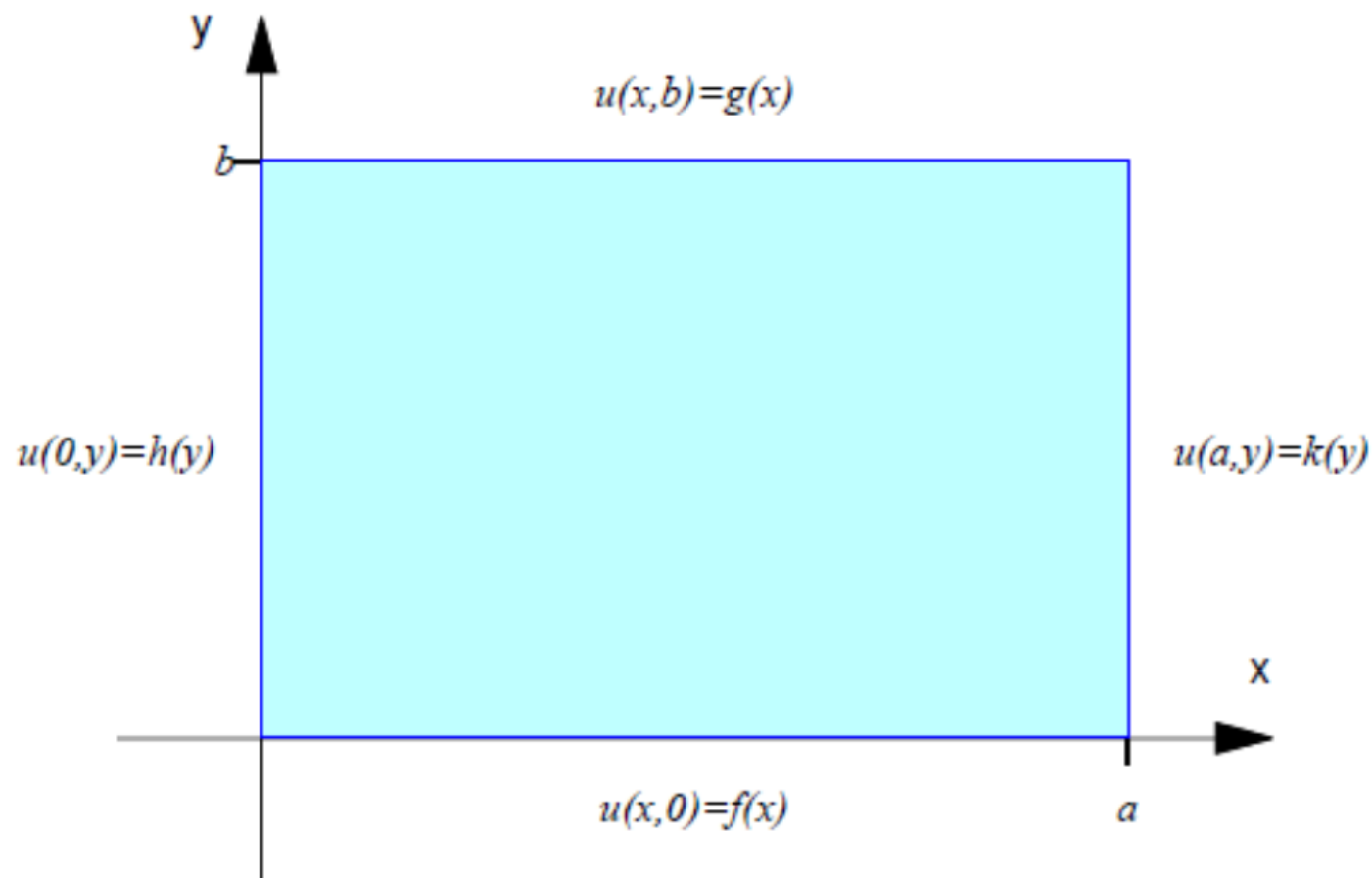


Figura 5.1 – Retângulo onde é resolvido o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u(x, b) = g(x), 0 < x < a \\ u(0, y) = h(y), u(a, y) = k(y), 0 < y < b \end{cases}$$

Como dissemos anteriormente a solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x)$, $g(x)$, $h(y)$ e $k(y)$ não nulas, que denotamos por $u^{(f)}(x, y)$, $u^{(g)}(x, y)$, $u^{(h)}(x, y)$ e $u^{(k)}(x, y)$, respectivamente. Ou seja,

$$u(x, y) = u^{(f)}(x, y) + u^{(g)}(x, y) + u^{(h)}(x, y) + u^{(k)}(x, y).$$

em que

$$u^{(f)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(f)} \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}$$

$$u^{(g)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(g)} \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

$$u^{(h)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(h)} \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \frac{n\pi(a-x)}{b}$$

$$u^{(k)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \frac{n\pi x}{b}$$

com coeficientes dados por

$$c_n^{(f)} \sinh \frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$c_n^{(g)} \sinh \frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$c_n^{(h)} \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$c_n^{(k)} \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Coeficientes da série de senos das
funções associadas as condições de
contorno

Exercícios



Problema 1

1.2. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u(x, 2) = 0, 0 < x < 3 \\ u(0, y) = h(y), u(3, y) = 0, 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$h(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y < 1/2 \\ 1/2, & \text{se } 1/2 \leq y < 3/2 \\ 2 - y, & \text{se } 3/2 < y \leq 2 \end{cases}$$

2.1.4 Tabela de Coeficientes de Séries de Fourier

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}, -1 \leq c < d \leq 1$	$a_n(f, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$	$b_n(f, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt$
$f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\begin{aligned} a_0(f_{c,d}^{(0)}, L) &= d - c \\ a_n(f_{c,d}^{(0)}, L) &= \frac{1}{n\pi} \sin s \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$	$b_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = -\frac{1}{n\pi} \cos s \Big _{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\begin{aligned} a_0(f_{c,d}^{(1)}, L) &= \frac{L}{2}(d^2 - c^2) \\ a_n(f_{c,d}^{(1)}, L) &= \frac{L}{n^2\pi^2} (s \sin s + \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$	$\begin{aligned} b_n(f_{c,d}^{(1)}, L) &= \\ \frac{L}{n^2\pi^2} (-s \cos s + \sin s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$
$f_{c,d}^{(2)}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\begin{aligned} a_0(f_{c,d}^{(2)}, L) &= \frac{L^2}{3}(d^3 - c^3) \\ a_n(f_{c,d}^{(2)}, L) &= \frac{L^2}{n^3\pi^3} ((s^2 - 2) \sin s + 2s \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$	$\begin{aligned} b_n(f_{c,d}^{(2)}, L) &= \\ \frac{L^2}{n^3\pi^3} (2s \sin s + (2 - s^2) \cos s) \Big _{n\pi c}^{n\pi d} \end{aligned}$



1.2. A solução é então

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{2} \sinh\left(\frac{n\pi}{2}(3-x)\right)$$

em que $c_n \sinh(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $h(y)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \sinh\left(\frac{3n\pi}{2}\right) &= \int_0^2 h(y) \sin \frac{n\pi y}{2} dy \\ &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\sin \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{3n\pi}{4}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

(a) Resolva o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = 0, 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = k(y), 0 < y < b \end{array} \right.$$



Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = k(y)$, temos que ter

$$\begin{aligned} k(y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \frac{n\pi}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} \right] \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $k(y)$ com termo constante nulo. Assim pelo [Corolário 2.4 na página 181](#) se as funções $k(y)$, $k'(y)$ são contínuas por partes com média de $k(y)$ igual a zero, então os coeficientes são dados por

$$c_n \frac{n\pi}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e para ter solução o primeiro coeficiente da série de cossenos de $k(y)$ tem que ser igual a zero,

$$\int_0^b k(y) dy = 0$$

Vamos considerar o problema de valor de contorno em um retângulo gerado pela equação de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = g(x), 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = h(y), \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = k(y), 0 < y < b \end{array} \right.$$

Este problema é chamado **problema de Neuman**. A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x)$, $g(x)$, $h(y)$ e $k(y)$ não nulas.

Equação de Laplace Bidimensional

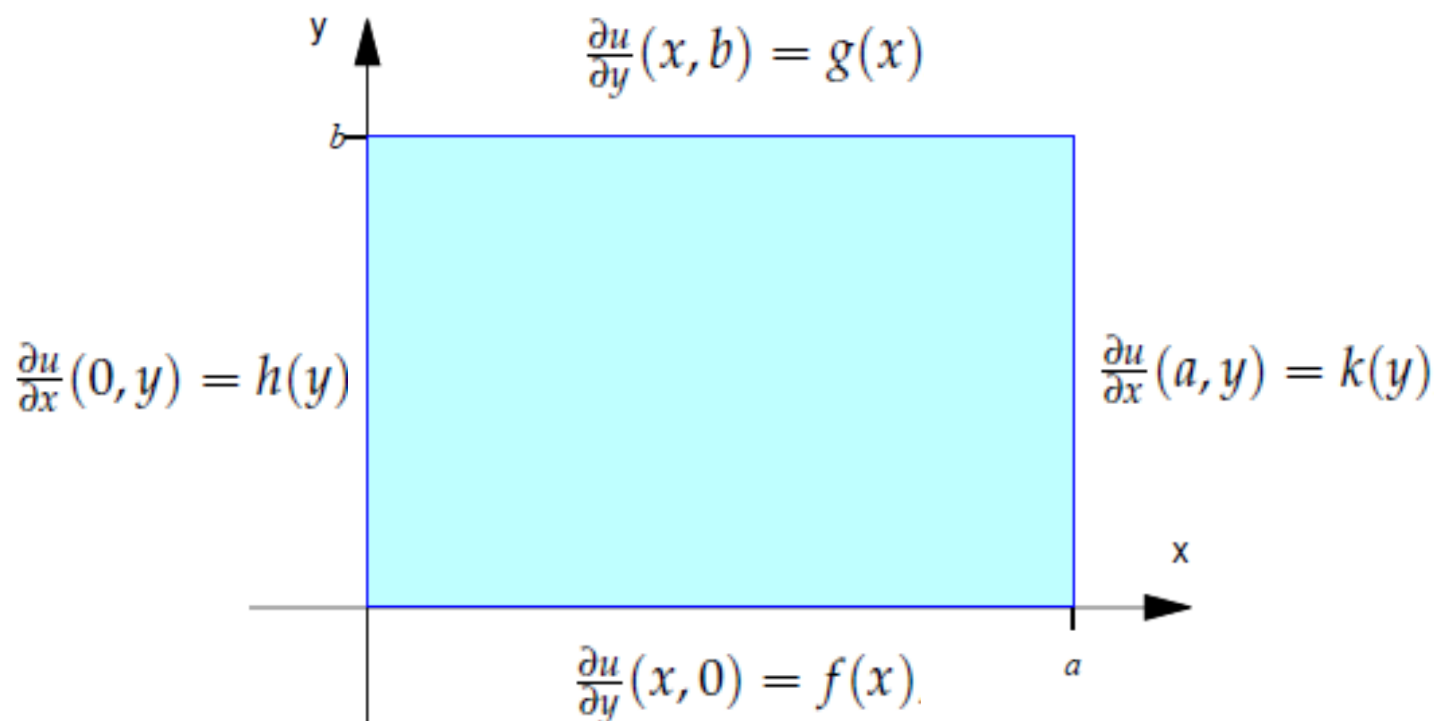


Figura 5.1 – Retângulo onde é resolvido o problema de Neumann

- (c) Por analogia escreva a solução dos problemas com somente $f(x)$ diferente de zero, com somente $g(x)$ diferente de zero e determine a solução do problema de Neuman no caso geral

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = g(x), 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = h(y), \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = k(y), 0 < y < b \end{cases}$$

(c)

$$u(x, y) = c_0 + u^{(f)}(x, y) + u^{(g)}(x, y) + u^{(h)}(x, y) + u^{(k)}(x, y),$$

em que

$$u^{(f)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{a} \cosh \frac{n\pi(y-b)}{a}$$

$$u^{(g)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{a} \cosh \frac{n\pi y}{a}$$

$$u^{(h)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi(x-a)}{b}$$

$$u^{(k)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

com coeficientes dados por

$$c_n^{(f)} \frac{n\pi}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$c_n^{(g)} \frac{n\pi}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$c_n^{(h)} \frac{n\pi}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$c_n^{(k)} \frac{n\pi}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dy, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Coeficientes das séries de cossenos
das funções que definem as condições
de contorno

- (d) Explique por que este problema não tem solução única.
- (d) Por que uma constante somada a uma solução também é solução do problema.

- (e) Explique por que o problema só tem solução se

$$\int_0^b k(y)dy = \int_0^b h(y)dy = \int_0^a g(x)dx = \int_0^a f(x)dx = 0$$

- (e) Pois para que tenha solução $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ tem que possuir uma série de cossenos com o termo constante igual a zero.

Problema (III):

(a) Encontre a solução para o problema de Neumann

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = q_S(1 - 2x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, 1) = q_N(1 - 2x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, y) = q_O(1 - 2y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(1, y) = q_L(1 - 2y)$$

(b) Calcule uma estimativa da temperatura no centro do domínio

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = ?$$



Segmento [0,1] dividido em 30 partes

```
t=linspace(0,1,30);  
qs=1;  
qn=-1;  
qo=-1;  
ql=1;  
function z=my_surface(x, y)  
n=50;  
z=0;  
for k=0:n  
    cf = (8*qs) / (((2*k+1)*%pi)^2*sinh((2*k+1)*%pi))  
    cg = (8*qn) / (((2*k+1)*%pi)^2*sinh((2*k+1)*%pi))  
    ch = (8*qo) / (((2*k+1)*%pi)^2*sinh((2*k+1)*%pi))  
    ck = (8*ql) / (((2*k+1)*%pi)^2*sinh((2*k+1)*%pi))  
    uf = cf*(cos((2*k+1)*%pi*x)*cosh((2*k+1)*%pi*(1-y)))  
    ug = cg*(cos((2*k+1)*%pi*x)*cosh((2*k+1)*%pi*y))  
    uh = ch*(cos((2*k+1)*%pi*y)*cosh((2*k+1)*%pi*(1-x)))  
    uk = ck*(cos((2*k+1)*%pi*y)*cosh((2*k+1)*%pi*x))  
    z=z+ uf + ug+ uh + uk;  
end  
endfunction
```

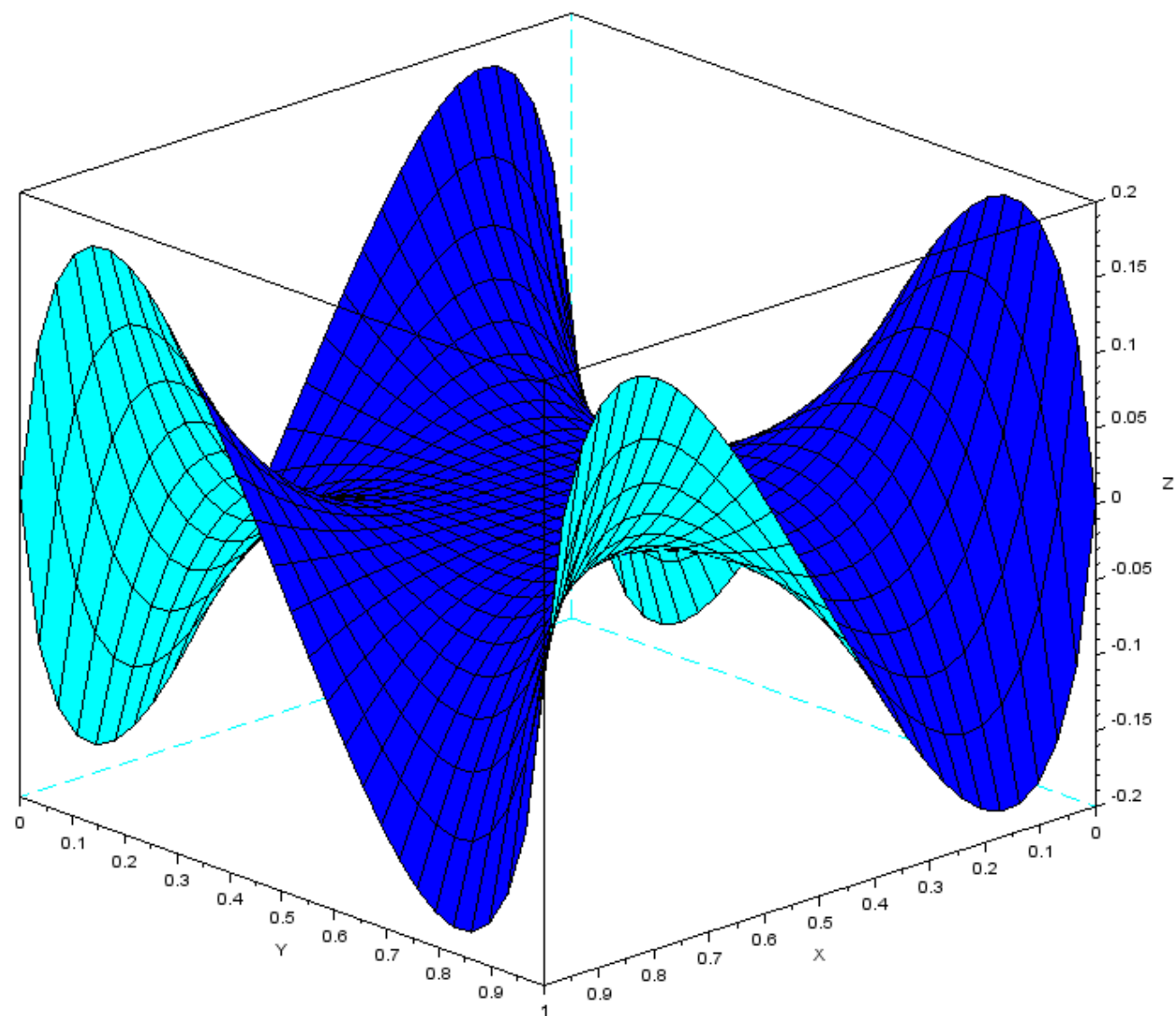
$$q_S = 1, \quad q_N = -1$$
$$q_O = -1, \quad q_L = 1$$

Corrigir para ^3

50 primeiros termos não-nulos da série

```
z=feval(t,t,my_surface);  
plot3d(t,t,z);
```

Saída gráfica





2ª PROVA – Próxima quarta 16/10/2019 – local a ser informado

Trazer:

- Tabela de Coeficientes (pg.202 – material UFMG)
- Tabela de relações trigonométricas
- Tabela de integrais
- Resumo da matéria em uma única folha de papel (frente-e-verso)
- (Opcional: o resumo da 1ª prova mas cuidado para não se confundir)

MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2019

Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- Método de Diferenças Finitas
- Equação do calor transiente (parabólica)
- Equação de Poisson (elíptica)
- Equação da onda (hiperbólica)